1. Taylorův polynom

Definice. Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

Poznámka. Nechť vše je jako výše. Označme $T = T_n^{f,a}$. Pak platí

$$T(a) = f(a), \quad T'(a) = f'(a), \ \ldots \ , T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Příklad. $T_3^{\sin,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$

Věta 1.1 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Lemma 1.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, Q je polynom,* $\operatorname{st} Q \leqslant n$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak Q je nulový polynom.*

——————— konec přednášky 16.2.2022

Věta 1.3 (O jednoznačnosti)**.** *Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Nechť P je polynom stupně nejvýše n splňující*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak $P = T_n^{f,a}$.

Definice. Nechť f, g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a malé o od funkce g (píšeme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Příklady. (i) $x^3 = o(x^2)$, $x \to 0$
(ii) $x^2 = o(x^3)$, $x \to \infty$

Poznámka. Tvrzení Věty 1.1 lze tedy zapsat ve tvaru $f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Příklad. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$

Věta 1.4 (Aritmetika malého o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*
(i) *Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \to a$ a $f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$.*
(ii) *Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$ a $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \to a$.*
(iii) *Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)f_2(x))$, $x \to a$.*
(iv) *Jestliže $f(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$.*
(v) *Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o(g(x))$, $x \to a$.*
(vi) *Jestliže $a \in \mathbb{R}$, m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leqslant n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$, potom $f(x) = o((x-a)^m)$, $x \to a$.*

Příklady. (i) $\sin x + \cos x = 1 + x + o(x)$, $x \to 0$
(ii) $\sin x \cos x = x + o(x)$, $x \to 0$

Věta 1.5 (Malé o složené funkce)**.** *Nechť a, $b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$\forall x \in P(a,\delta): \ \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \to a$.

Příklad. $\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $x \to 0$

Věta 1.6 (Taylorův polynom základních funkcí)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak*

$$\begin{aligned}
T_n^{\exp,0}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\\
T_{2n-1}^{\sin,0}(x) = T_{2n}^{\sin,0}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\\
T_{2n}^{\cos,0}(x) = T_{2n+1}^{\cos,0}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\
T_n^{\log(1+x),0}(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\
\forall \alpha \in \mathbb{R}: \ T_n^{(1+x)^\alpha,0}(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

____________ konec přednášky 18.2.2022

Příklad. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$, $x \to 0$

Věta 1.7 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Důsledek 1.8. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, I je interval obsahující bod a, a nechť má funkce f v každém bodě intervalu I vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť $M \in \mathbb{R}$ a pro všechna $x \in I$ platí $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$. Pak pro každé $x \in I$ platí*

$$|f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Příklad. Spočítejte $\cos(0,1)$ s přesností 10^{-4}.

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Úmluva. Symbol $(x-a)^0$ chápeme jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

Věta 1.9 (Taylorovy řady elementárních funkcí)**.** *Platí následující vztahy mezi elementárními funkcemi a jejich Taylorovými řadami (středem Taylorovy řady je ve všech případech bod $a = 0$):*

$$\text{(a)}\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\text{(b)}\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\text{(c)}\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\text{(d)}\forall x \in (-1, 1]: \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$\text{(e)}\forall x \in (-1, 1),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Příklad. (i) $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
(ii) $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Příklad. Rovnost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

obecně nemusí platit, a to ani v případě, že řada vpravo konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Součtem Maclaurinovy řady této funkce je konstantní nulová funkce, a tedy f není v žádném bodě $x \neq 0$ součtem své Maclaurinovy řady.

Příklad. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x} = -6$

____________ konec přednášky 23.2.2022

2. Primitivní funkce

2.1. Základní vlastnosti

Definice. Nechť funkce f je definovaná na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2.1 (vlastnosti primitivní funkce). *Nechť funkce F je primitivní funkce k funkci f na neprázdném otevřeném intervalu I. Pak:*

(a) F je spojitá na I.

(b) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ primitivní funkce k f na I.

(c) Pokud G je primitivní funkce k f na I, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na neprázdném otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I.

Příklady.

- $\displaystyle\int x^n\,dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0$; $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z},\ n < -1$
- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \in (0, \infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx \stackrel{c}{=} \log|x|, \quad x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$
- $\displaystyle\int e^x\,dx \stackrel{c}{=} e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx \stackrel{c}{=} -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx \stackrel{c}{=} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
- $\displaystyle\int -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx \stackrel{c}{=} \operatorname{cotg} x, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \stackrel{c}{=} \arcsin x, \quad x \in (-1, 1)$

Věta 2.2 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce). *Nechť I je neprázdný otevřený interval a f je spojitá na I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 2.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť funkce f, g mají na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ je*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. $\int(3\sin x + 5x^3 + \frac{2}{x})\,dx \overset{c}{=} -3\cos x + \frac{5}{4}x^4 + 2\log|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$

Věta 2.4 (integrace per partes)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a f, g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Příklad. $\int xe^x\,dx \overset{c}{=} e^x(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad. $\int e^x \sin x\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad. Nechť $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $I_1 \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, a platí rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Speciálně

$$I_2 \overset{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

____________ konec přednášky 25.2.2022

Věta 2.5 (první věta o substituci)**.** *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť φ je funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě $t \in (\alpha,\beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Příklad. $\int \sin^3 t \cos t\,dt \overset{c}{=} \frac{1}{4}\sin^4 t$, $t \in \mathbb{R}$

Poznámka. Nechť F je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$, nechť a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Pak

$$\int f(at+b)\,dt \overset{c}{=} \frac{1}{a}F(at+b), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklady. $\int e^{3t}\,dt \overset{c}{=} \frac{1}{3}e^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$
$\int \cos(t+10)\,dt \overset{c}{=} \sin(t+10)$, $t \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{2t-3}\,dt \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log|2t-3|$, $t \in (-\infty, \frac{3}{2})$ nebo $t \in (\frac{3}{2}, \infty)$

Věta 2.6 (druhá věta o substituci)**.** *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní derivaci, která je buď všude kladná, nebo všude záporná, a $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a,b).$$

Příklad. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + \frac{1}{2}\arcsin x$, $x \in (-1,1)$

Věta 2.7 (lepení)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a,b), $c \in (a,b)$ a F je funkce spojitá v bodě c splňující $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,b) \setminus \{c\}$. Pak F je primitivní k f na (a,b).*

Příklad.

$$\int |x|\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2}, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

2.2. Integrace racionálních funkcí

Definice. *Racionální funkcí* rozumíme podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

____________ konec přednášky 2.3.2022

Věta 2.8 (rozklad polynomu s reálnými koeficienty)**.** *Nechť* $Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

- $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- *žádný z polynomů* $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemá reálný kořen,*
- *žádné dva z polynomů* $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen.*

Příklad. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

Věta 2.9 (rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť* P, Q *jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že* $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ *a nechť*

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q *z Věty 2.8. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla* $A_1^1, \ldots, A_{p_1}^1, \ldots, A_1^k, \ldots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \ldots$, $B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \ldots$, B_1^l, $C_1^l, \ldots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} \\
& + \cdots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} \\
& + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \cdots \\
& + \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}
\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_k\}$.

Příklad.

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{3}{x + 1} - \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Tedy

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}\, dx \stackrel{c}{=} 3 \log|x + 1| - \log(x^2 + x + 1), \quad x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, \infty).$$

Poznámka (postup při integraci racionální funkce)**.** Nechť je zadána racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$. Při výpočtu primitivní funkce $\int R(x)\,\mathrm{d}x$ na libovolném intervalu I, který neobsahuje žádný z kořenů polynomu Q, pak postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$;
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 2.9;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujícího návodu.

(a) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$I \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n > 1; \\ A \log|x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n = 1. \end{cases}$$

(b) Je-li

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q}\,\mathrm{d}x,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x + (C - \frac{B\alpha}{2})\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x,$$

potom

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q = 1. \end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4})^q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(\beta - \frac{\alpha^2}{4})^q}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2 + 1\right]^q}\,\mathrm{d}x.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $\varphi(x) = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, takže $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^q}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy.$$

Pro integrál $\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy$ je k dispozici rekurentní vzorec získaný integrací per partes:

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^1}\,dy \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(y),$$

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^{q+1}}\,dy = \frac{y}{2q(y^2+1)^q} + \frac{2q-1}{2q}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy, \qquad q > 1.$$

Příklad.

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

——————— konec přednášky 4.3.2022

2.3. Substituce převádějící na racionální funkce

A. **Výpočet integrálů s exponenciálou a s logaritmem**
Nechť R je racionální funkce.

(i) Pro převod integrálů tvaru $\int R(e^{ax})\,dx$ (kde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) na integraci racionální funkce lze využít substituci $t = e^{ax}$.

(ii) Pro převod integrálů tvaru $\int \frac{R(\log x)}{x}\,dx$ na integraci racionální funkce lze využít substituci $t = \log x$.

Příklad.

$$\int \frac{1}{x(\log^2 x - 5\log x + 6)}\,dx \overset{c}{=} \log|\log x - 3| - \log|\log x - 2|, \quad x \in (0, e^2) \text{ nebo } x \in (e^2, e^3) \text{ nebo } x \in (e^3, \infty)$$

Příklad.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx \overset{c}{=} e^x - \log(1+e^x), \quad x \in \mathbb{R}$$

B. **Integrace trigonometrických funkcí**

Značení. Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem $R(x,y)$ značit *racionální funkci dvou proměnných*, tj. $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_1} a_{ij}x^i y^j, \quad Q(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_2} b_{ij}x^i y^j,$$

kde N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, a_{ij}, $b_{ij} \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno $b_{ij} \neq 0$.

Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:
(i) pokud $R(-a,b) = -R(a,b)$, pak lze užít substituci $t = \cos x$
(ii) pokud $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $t = \sin x$
(iii) pokud $R(-a,-b) = R(a,b)$, pak lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$
(iv) vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$

Příklad.

$$\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x}\,dx \overset{c}{=} -\frac{1}{2}\log|\sin x - 1| + \frac{1}{2}\log|1+\sin x| - \frac{1}{\sin x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Příklad.

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

____________ konec přednášky 9.3.2022

C. **Integrace funkcí obsahujících odmocniny**

Nechť $q \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})\,\mathrm{d}x$, na integraci racionální funkce lze využít substituci $t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$.

Příklad.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right) - \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)^2}, \quad x \in (1,\infty)$$

Výpočet integrálů tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ na integraci racionální funkce rozlišujeme následující případy:

(a) Nechť má polynom ax^2+bx+c dvojnásobný reálný kořen α, pak platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$. Pak ale

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|.$$

(b) Nechť má polynom ax^2+bx+c dva různé reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$, pak platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$. Je-li $a > 0$, pak pro $x \in (-\infty, \alpha_1)$ a $x \in (\alpha_2, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} \\ &= \sqrt{a}|x-\alpha_1|\sqrt{\frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}}.\end{aligned}$$

Je-li $a < 0$, pak pro $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{(-a)(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)} \\ &= \sqrt{-a}(x-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}.\end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu nalézt primitivní funkci $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}})\,\mathrm{d}x$, jejíž řešení již známe.

(c) Nechť polynom ax^2+bx+c nemá reálný kořen. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$. V tomto případě lze užít takzvanou *Eulerovu substituci* $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$.

Příklad.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{2}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2-1}, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty).$$

____________ konec přednášky 11.3.2022

3. Určitý integrál

3.1. Newtonův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že f *má na* (a, b) *Newtonův integrál*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F),
- existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) pak rozumíme prvek

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Pokud $a > b$, pak klademe $(N) \int_a^b f(x)\, dx = -(N) \int_b^a f(x)\, dx$. Pro $a \in \mathbb{R}^*$ definujeme $(N) \int_a^a f(x)\, dx = 0$. Jestliže $(N) \int_a^b f(x)\, dx$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je *konvergentní*. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je *divergentní*.

Příklad. $(N) \int_1^2 x\, dx = \frac{3}{2}$

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx \begin{cases} \text{neexistuje}, \\ \text{existuje} \begin{cases} = \infty, \\ = -\infty, \\ \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Značení. Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \to a+} F(x)$ a $\lim_{x \to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

Značení. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ místo $(N) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

Příklad.

$$\int_0^1 x^\alpha\, dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty) \quad \text{(konverguje)}, \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad \text{(diverguje)}, \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^\alpha\, dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty) \quad \text{(diverguje)}, \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad \text{(konverguje)}, \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

Věta 3.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.*

(i) *Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí následující rovnosti, pokud pravé strany rovností mají smysl*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \int_a^b \alpha f(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

(ii) *Jestliže* $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ *a* $f \leqslant g$*, pak* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) *Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a,b)$ *je spojitá na* (a,b)*, pak* $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *existuje a* $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(iv) *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$*. Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a,c)$*, pak* $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c)$ *a platí*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(v) *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$*. Nechť* f *je spojitá v* b*. Pak* $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c) \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}(a,c)$.

(vi) *Nechť* $f \in \mathcal{N}(a,b)$*. Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti z* (a,b) *splňující* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(vii) *Nechť* $f \in \mathcal{N}(a,b)$ *a* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *pro* $x \in (a,b)$*. Pak*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

(viii) *Nechť* $f \in \mathcal{N}(a,b)$, $c \in (a,b)$*. Pak* $(x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t)' = f(x)$ *pro* $x \in (c,b)$.

———— konec přednášky 16.3.2022

Věta 3.2 (per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$*, a nechť* f *a* g *jsou funkce definované na* (a,b)*. Nechť* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a,b) *a* G *je primitivní funkce k funkci* g *na* (a,b)*. Potom platí*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Příklad. $\int_0^1 \log x\, dx = -1$

Věta 3.3 (substituce pro Newtonův integrál)**.** *Nechť* $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* $\alpha < \beta$*. Nechť* f *je funkce definovaná na* (a,b) *a nechť* φ *je funkce definovaná na* (α,β)*. Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α,β) *a nechť platí* $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$*. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Příklad. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t\, dt = \frac{1}{4}$

Příklad. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\, dx = 2\pi$

3.2. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a,b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Označme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\}.$$

Definice. Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a,b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od a do b**, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ místo $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

____________ konec přednášky 18.3.2022

Příklad. Nechť a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak $(R)\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.

Poznámka. (a) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1]\backslash\{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

má na $[-1,1]$ Riemannův integrál, ale nemá tam Newtonův integrál.

(b) Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1)$, má na $(0,1)$ Newtonův integrál, ale nemá (při libovolném dodefinování v krajních bodech) Riemannův integrál na $[0,1]$.

Poznámka. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má Riemannův integrál od a do b. Pak hodnotu integrálu můžeme určit následujícím způsobem.

- pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme dělení $D_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;
- pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \dots k_n\}$ zvolíme $c_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$;

Pak $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(c_{n,i})(x_{n,i} - x_{n,i-1}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad. $(R)\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a,b])$.

Věta 3.4 (spojitost a Riemannův integrál)**.** *Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Věta 3.5 (spojitost a Newtonův integrál)**.** *Nechť a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá a omezená na (a,b). Potom $f \in \mathcal{N}([a,b])$.*

Věta 3.6 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$. Potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důsledek 3.7. *Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$ a*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

____________ konec přednášky 23.3.2022

3.3. Konvergence Newtonova integrálu

Připomeneme: • Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je spojitá a omezená na (a, b). Pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Speciálně toto platí v případě, kdy f je spojitá na $[a, b]$.

• Nechť a, b, $c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$ a f je spojitá na (a, b). Pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$.

Příklady. • $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$

- $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$
- $\int_2^\infty \frac{\log^\alpha x}{x}\,dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$
- $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\log x|^\alpha}{x}\,dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$

Věta 3.8 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pro každé $x \in [a, b)$. Nechť f je spojitá na $[a, b)$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Příklad. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ konverguje

Příklad. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje

Věta 3.9 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Poznámka. Tvrzení Vět 3.8 a 3.9 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

____________ konec přednášky 25.3.2022

Příklad. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{x+x^3}\,dx$ konverguje

Příklad. $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})\operatorname{arctg} x\,dx$ diverguje

Definice. Nechť a, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Řekneme, že Newtonův integrál funkce f konverguje absolutně na intervalu (a, b), pokud $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 3.10 (vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na (a, b) splňující $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Věta 3.11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f, g jsou spojité funkce na $[a, b)$ a g je monotónní na $[a, b)$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b).*

(A) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená na $[a, b)$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

(D) *Jestliže F je omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Poznámka. Tvrzení Věty 3.11 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

Příklad. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje, ale $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverguje

Příklad. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\operatorname{arctg} x\,dx$ konverguje

3.4. Aplikace určitého integrálu

(a) **Integrální kritérium konvergence řad**

Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, +\infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost splňující $a_n = f(n)$ pro $n \geqslant n_0$. Pak $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Příklad. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n}$ diverguje

(b) **Obsah podgrafu spojité funkce**
Nechť f je spojitá a nezáporná na $[a, b]$. Pak obsah plochy pod grafem funkce f je roven $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad. Vypočtěte obsah plochy pod grafem funkce $\sin x$, $x \in [0, \pi]$.
Výsledek: 2

____________ konec přednášky 30.3.2022

(c) **Obsah množiny vytvořené grafy funkcí**
Nechť f, g jsou spojité funkce na $[a, b]$. Pak obsah množiny bodů ležících mezi grafy funkcí f a g je roven $\int_a^b |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$. Poznamenejme, že množinou "mezi grafy funkcí f, g" rozumíme

$$\{(x, y);\ x \in [a, b], f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \text{ nebo } g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Příklad. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = x$ pro $x \in [0, 2]$
Výsledek: 1

(d) **Délka grafu funkce**
Nechť funkce f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak

$$\text{délka grafu funkce } f = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Spočtěte obvod kruhu o poloměru 1.
Výsledek: 2π

(e) **Změna polohy a ujetá vzdálenost**
Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t, je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t. Je-li dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu. Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte jako

$$\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad. Vypočítejte dráhu dešťové kapky za prvních 6 sekund, kde okamžitá rychlost (v metrech za sekundu) kapky je dána vzorcem $v(t) = gt$, kde $g = 9.81$.
Výsledek: 176.58 *metrů (*$176.58 = 9.81 \cdot 18$*)*

3.5. Riemannův-Stieltjesův integrál

Definice. Nechť $[a, b]$ je omezený uzavřený interval, f je omezená funkce na $[a, b]$ a φ je neklesající (a speciálně tedy též omezená) na $[a, b]$. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^n M_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$
$$\underline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^n m_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \inf\{\overline{S}(f, D, \varphi);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sup\{\underline{S}(f, D, \varphi);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Řekneme, že f má **Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ**, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$. Hodnota integrálu f od a do b vzhledem k funkci φ je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(RS)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ místo $(RS)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$.

Množinu všech funkcí, které mají Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ, značíme $\mathcal{RS}_\varphi([a,b])$.

Poznámka. Je-li $\varphi(x) = x$, pak odpovídající Riemannův-Stieltjesův integrál splývá s Riemannovým integrálem.

Příklad. Nechť

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0], \\ 1, & x \in (0,1], \end{cases}$$

a nechť f je spojitá na $[-1,1]$. Pak

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,d\varphi(x) = f(0).$$

____________ konec přednášky 1.4.2022

Věta 3.12 (vlastnosti RS integrálu)**.** *Nechť φ, ψ jsou neklesající funkce na $[a,b]$.*

(i) Jsou–li $f, g \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$ a $c, d \in \mathbb{R}$, pak $cf + dg \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$ a platí

$$\int_a^b (cf + dg)(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + d\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

(ii) Nechť $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$, $c \in (a,b)$. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,c]) \cap \mathcal{RS}_\varphi([c,b])$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

(iii) Nechť $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$ a platí $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pro $x \in [a,b]$. Pak

$$m(\varphi(b) - \varphi(a)) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \leqslant M(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

(iv) Je-li $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b]) \cap \mathcal{RS}_\psi([a,b])$ a $c, d \in \mathbb{R}$, pak $f \in \mathcal{RS}_{c\varphi + d\psi}([a,b])$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(c\varphi + d\psi)(x) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + d\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\psi(x).$$

Příklad. Nechť

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0], \\ x+1, & x \in (0,1], \end{cases}$$

a nechť f je spojitá na $[-1,1]$. Pak

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,d\varphi(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + f(0).$$

Věta 3.13 (kritérium existence RS integrálu)**.** *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a φ je neklesající na $[a,b]$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$;

(b) *pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a,b]$, pro které $\overline{S}(f,D,\varphi) - \underline{S}(f,D,\varphi) < \varepsilon$.*

Poznámka. Zvolíme-li v předchozí větě $\varphi(x) = x$, dostaneme kritérium existence Riemannova integrálu.

Věta 3.14 (monotonie a RS integrál)**.** *Nechť f je monotónní (tj. nerostoucí nebo neklesající) na $[a,b]$ a nechť φ je spojitá a neklesající na $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$.*

Poznámka. Speciálně je-li f monotónní na $[a,b]$, pak f má na $[a,b]$ Riemannův integrál.

Věta 3.15 (spojitost a RS integrál)**.** *Nechť φ je neklesající funkce na $[a,b]$ a nechť f je omezená na $[a,b]$. Jestliže množina bodů nespojitosti funkce f je konečná a je–li v každém z těchto bodů funkce φ spojitá, pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$.*

Poznámka. Speciálně je–li f spojitá až na konečně mnoho bodů, pak existuje Riemannův integrál funkce f. Jedná se tedy o zesílení a zobecnění věty 3.4.

Důsledek 3.16. *Nechť f je spojiá funkce na $[a,b]$ a φ je neklesající na $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$.*

Věta 3.17 (vztah Riemannova a Riemannova-Stieltjesova integrálu)**.** *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$, nechť φ je neklesající na $[a,b]$ a má na $[a,b]$ spojitou derivaci. Pak $f\varphi' \in \mathcal{R}([a,b])$, $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$ a platí*

$$(RS)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. $\int_0^1 x^3\, dx^2 = \frac{2}{5}$

Definice. Heavisideovou funkcí (“jednotkovým skokem”) rozumíme funkci

$$I(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Věta 3.18 (integrace vzhledem k Heavisideově funkci)**.** *Nechť f je spojiá na $[a,b]$, $s \in (a,b)$ a $\varphi(x) = I(x-s)$, $x \in [a,b]$. Pak*

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = f(s).$$

Příklad. Nechť

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1,0], \\ 1, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Pak $\int_{-1}^1 (2x+1) d\varphi(x) = 2$.

——————— konec přednášky 6.4.2022

Věta 3.19 (součet řady jako RS integrál)**.** *Nechť $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost nezáporných čísel taková, že $\sum_{n=1}^\infty c_n$ konveguje. Nechť $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost po dvou různých bodů v intervalu (a,b). Položme*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n I(x - s_n).$$

Je-li f spojitá funkce na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n f(s_n).$$

4. Diferenciální rovnice

Příklad. $y'(x) = x^3 + 4 \Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{4} + 4x + C$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad. $y'(x) = 2y(x) \Rightarrow y(x) = Ce^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad. Volný pád s odporem vzduchu (předpokládáme, že odporová síla je přímo úměrná druhé mocnině rychlosti a koeficient přímé úměrnosti označíme k). Značí-li $v(t)$ okamžitou rychlost v čase t, pak $v(t)$ splňuje diferenciální rovnici

$$v'(t) = \frac{k}{m} v^2(t) - g$$

s počáteční podmínkou $v(0) = 0$. V rovnici výše značí m hmotnost padajícího objektu a g je tíhové zrychlení.

Definice. *Diferenciální rovnicí* rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0\,, \tag{4.1}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných. *Řád diferenciální rovnice* (4.1) je nejvyšší řád derivace funkce y vyskytující se v (4.1).

Příklad. $y^{(2)}(x) + (y'(x))^2 = (y(x))^3 + x^4$ je diferenciální rovnice druhého řádu.

Definice. *Řešením diferenciální rovnice* (4.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (4.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\Big) = 0.$$

Definice. Je-li funkce y řešením rovnice (4.1) na intervalu I a funkce $\tilde{y}$ řešením rovnice (4.1) na intervalu $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení $\tilde{y}$ je *prodloužením řešení* y na interval $\tilde{I}$.

Řešení rovnice (4.1), které nemá prodloužení, nazýváme *maximálním řešením* rovnice (4.1). *Obecným řešením* rozumíme množinu všech maximálních řešení.

Příklad. Uvažujme diferenciální rovnici $y'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Pak $y_1(x) = \log x$, $x \in (0, 1)$, je řešení této rovnice, ale není to maximální řešení. Funkce $y_2(x) = \log x$, $x \in (0, \infty)$, je prodloužením řešení y_1 na interval $(0, \infty)$, a je to maximální řešení. Obecné řešení této rovnice má tvar $y(x) = \log x + C$, $x \in (0, \infty)$, kde $C \in \mathbb{R}$.

4.1. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice (Rovnice se separovanými proměnnými)**.** *Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými* je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{4.2}$$

Věta 4.1 (o existenci řešení separované rovnice)**.** *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c < d$, nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a g je nenulová. Nechť $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$. Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (4.2) *splňující podmínku $y(x_0) = y_0$.*

——————— konec přednášky 8.4.2022

Metoda řešení pro g, h spojité na svých definičních oborech.

(a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

(b) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. *singulárním* (též *stacionárním*) řešením rovnice (4.2).

(c) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

(d) Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (4.2), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D(y)$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

(e) Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

(f) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme" všechna maximální řešení rovnice (4.2).

Příklad. $y'(x) = y^2 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x+C}$, $x \in (-\infty, -C)$ nebo $x \in (-C, \infty)$, nebo $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Lemma 4.2 (Lemma o lepení řešení)**.** *Nechť g, h jsou spojité na svých definičních oborech. Nechť y_l je řešením diferenciální rovnice* (4.2) *na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0)$ *pro nějaké* $\delta > 0$*, nechť* y_r *je řešením diferenciální rovnice* (4.2) *na intervalu* $(x_0, x_0 + \eta)$ *pro nějaké* $\eta > 0$ *a nechť* $x_0 \in \mathcal{D}_h$*. Nechť dále platí*

$$\lim_{x \to x_0^-} y_l(x) = \lim_{x \to x_0^+} y_r(x) = A \in \mathcal{D}_g.$$

Pak funkce

$$y(x) := \begin{cases} y_l(x) & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ A & x = x_0 \\ y_r(x) & x \in (x_0, x_0 + \eta) \end{cases}$$

je řešením rovnice (4.2) *na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$.

Příklad. $y' = 3x^2\sqrt{1 - y^2} \Rightarrow y(x) = 1,\ x \in \mathbb{R};\ y(x) = -1,\ x \in \mathbb{R}$ jsou singulární řešení. Dále pro každé $C \in \mathbb{R}$ máme řešení tvaru

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + C}], \\ \sin(x^3 + C), & x \in (-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + C}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - C}), \\ 1, & x \in [\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - C}, \infty). \end{cases}$$

Příklad. Volný pád s odporem vzduchu je popsán rovnicí $v'(t) = \alpha v^2(t) - g$, $v(0) = 0$, kde g je tíhové zrychlení a $\alpha > 0$ je vhodná konstanta. Řešení této rovnice má tvar

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot \frac{1 - e^{2\sqrt{\alpha g}t}}{1 + e^{2\sqrt{\alpha g}t}}.$$

Speciálně $\lim_{t \to \infty} v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$.

____________ konec přednášky 13.4.2022

Homogenní rovnice

Homogenní diferenciální rovnicí 1. řádu nazýváme rovnici tvaru $y' = h(\frac{y(x)}{x})$.

Metoda převodu homogenní rovnice na rovnici se separovanými proměnnými.

- Definujme pro $x \neq 0$ funkci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x), \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x). \end{aligned}$$

Rovnice tak přechází na $xz' + z = f(x, xz) = f(1, z)$, tj.

$$z' = \frac{1}{x}\left(f(1,z) - z\right),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

- Vyřešíme rovnici se separovanými proměnnými na otevřených podintervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Pak položíme $y(x) = x \cdot z(x)$.

Příklad. $y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow y(x) = x\sqrt{\log(K^2x^2)}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{K})$ nebo $x \in (\frac{1}{K}, \infty)$; nebo $y(x) = -x\sqrt{\log(K^2x^2)}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{K})$ nebo $x \in (\frac{1}{K}, \infty)$; $K \in \mathbb{R}$

Lineární rovnice 1. řádu

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{4.3}$$

Budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce na nějakém intervalu (a, b). Je-li $q = 0$, nazývá se rovnice *homogenní*.

Příklad. Nechť p je spojitá funkce na (a, b). Pak obecné řešení rovnice $y' + p(x)y = 0$ má tvar $y(x) = Ke^{-P(x)}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$, kde P je primitivní funkce k p.

Metoda řešení rovnice (4.3) pro p, q spojité na (a, b).

(a) Vyřešíme homogenní rovnici, vyjde

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),\ K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

(b) Hledáme jedno "partikulární" řešení rovnice (4.3) ve tvaru

$$y_p(x) = c(x)e^{-P(x)}.$$

Dosazením do rovnice dostaneme podmínku $c'(x) = q(x)e^{P(x)}$, a tedy za $c(x)$ zvolíme primitivní funkci k $q(x)e^{P(x)}$ na (a, b).

(c) Obecné řešení rovnice (4.3) je tvořeno funkcemi

$$y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),\ K \in \mathbb{R}.$$

(d) Maximální řešení rovnice (4.3) splňující *počáteční podmínku* $y(x_0) = y_0$ nalezneme vhodnou volbou konstanty $K \in \mathbb{R}$.

Přesněji, pokud je obecné řešení rovnice (4.3) tvaru $y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}$, pak pro volbu $K = (y_0 - y_p(x_0))e^{P(x_0)}$ dostáváme, že toto řešení vyhovuje podmínce $y(x_0) = y_0$.

__________ konec přednášky 20.4.2022

Věta 4.3. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť p, q jsou spojité funkce na (a, b). Nechť $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (4.3)*, které splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je navíc definováno na celém (a, b).*

Příklad.

$$y' - xy = x$$

(a) Obecné řešení: $y(x) = -1 + Ke^{\frac{x^2}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.
(b) Řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 37$: $y(x) = -1 + 38e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

(a) *Volný pád s odporem vzduchu* (bylo dříve)
(b) *Spojité úročení*

Vložíme částku s_0 do banky s roční úrokovou sazbou r. Předpokládejme, že úročení probíhá neustále (jde o tzv. spojité úročení). Označme $s(t)$ stav našeho účtu v čase t (čas počítáme v letech). Pak funkce $s(t)$ splňuje diferenciální rovnici

$$s'(t) = rs(t),\ s(0) = s_0.$$

Jde o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými a její řešení je $s(t) = s_0e^{rt}$.
(c) *Mravenec lezoucí po prodlužujícím se gumovém laně*

Mravenec leze po 1 metr dlouhém gumovém laně rychlostí 1 centimetr za sekundu. V okamžiku započetí mravencovy cesty se zároveň lano začne prodlužovat rychlostí 1 metr za sekundu. Doleze mravenec na konec lana?

Řešení: Označme $y(t)$ polohu mravence v čase t (čas počítáme v sekundách, polohu mravence v metrech). Počáteční podmínka je $y(0) = 1$, chceme najít t, aby $y(t) = 0$. Funkce $y(t)$ splňuje diferenciální rovnici

$$y'(t) = -\frac{1}{100} + \frac{y(t)}{1+t},\ y(0) = 1.$$

Jde o lineární diferenciální rovnici prvního řádu a jejím řešením je

$$y(t) = -\frac{1}{100}(1+t)\log(1+t) + 1 + t.$$

Tedy $y(e^{100} - 1) = 0$, tj. mravenec doleze na konec lana za $e^{100} - 1$ sekund (cca $8,52 \cdot 10^{35}$ let :)).
___________ konec přednášky 22.4.2022

4.2. Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

Lineární rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{4.4}$$

kde p, q, r jsou funkce spojité na intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (4.4) rozumíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.5}$$

Věta 4.4 (Existence řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť p, q, r jsou spojité funkce na intervalu (a, b), a nechť $x_0 \in (a, b)$ a $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (4.4)*, které splňuje podmínky $y(x_0) = z_0$, $y'(x_0) = z_1$. Navíc, toto řešení je definováno na celém intervalu (a, b).*

Značení. Označme

$$\mathcal{C}^2((a, b)) = \{f : (a, b) \to \mathbb{R};\ f \text{ má spojitou druhou derivaci na } (a, b)\}.$$

Věta 4.5 (Struktura řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu)**.**

(a) Obecné řešení rovnice (4.5) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^2((a,b))$ *dimenze* 2.

(b) Nechť y_p *je partikulární řešení rovnice* (4.4)*. Pak obecné řešení rovnice* (4.4) *je*

$$\{y_h + y_p;\ y_h \text{ je řešení rovnice } (4.5) \text{ na intervalu } (a,b)\}.$$

Definice. Báze prostoru maximálních řešení rovnice (4.5) se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (4.5).

Postup při řešení rovnice (4.4):

(a) Najdeme fundamentální systém y_1, y_2 pro rovnici (4.5). To obecně není jednoduché a naučíme se to jen ve speciálních případech.

(b) Najdeme jedno („partikulární“) řešení y_p rovnice (4.4). Známe-li fundamentální systém, pak pro nalezení partikulárního řešení existuje metoda, kterou se zanedlouho naučíme.

(c) Obecné řešení rovnice (4.4) je

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in (a,b).$$

Příklad.

$$y'' + y = x$$

(a) Funkce $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na $\mathbb{R}$.
(b) Partikulární řešení je $y_p(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
(c) Obecné řešení má tvar

$$y(x) = x + c_1 \cos x + c_2 \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$$

Věta 4.6 (Kritérium pro lineární nezávislost řešení homogenní rovnice)**.** *Nechť* y_1*,* y_2 *jsou dvě řešení rovnice* (4.5) *na* (a,b)*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) Funkce y_1*,* y_2 *jsou lineárně nezávislé.*

(b) Tzv. Wronského determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový alespoň v jednom bodě intervalu (a,b) *(pak je nenulový v každém bodě* (a,b)*).*

Příklad.

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{3}{2x^2}y = 0$$

(a) Dokažte, že funkce $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = x^{\frac{3}{2}}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu $(0,\infty)$.
____________ konec přednášky 27.4.2022
(b) Najděte řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$: $y(x) = \frac{1}{x} + 2x^{\frac{3}{2}}$, $x \in (0,\infty)$.

Věta 4.7 (variace konstant)**.** *Nechť funkce* y_1, y_2 *tvoří fundamentální systém řešení rovnice* (4.5)*. Nechť* c_1, c_2 *jsou funkce splňující soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= r \end{aligned}$$

na intervalu (a,b)*. Pak funkce* $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ *je řešením rovnice* (4.4) *na intervalu* (a,b)*.*

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{4.6}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$ a r je funkce spojitá na intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (4.6) rozumíme rovnici

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{4.7}$$

Poznámka. Maximální řešení rovnice (4.7) jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

Definice. *Charakteristickým polynomem* rovnice (4.7) rozumíme polynom

$$\lambda^2 + p\lambda + q.$$

Věta 4.8 (tvar fundamentálního systému). *Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ jsou kořeny charakteristického polynomu rovnice* (4.7).

- *Pokud jsou λ_1, λ_2 různé reálné kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice* (4.7) *tvoří funkce $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.*
- *Pokud $\lambda_1 = \lambda_2$, pak fundamentální systém řešení rovnice* (4.7) *tvoří funkce $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$.*
- *Pokud jsou $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ různé komplexní kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice* (4.7) *tvoří funkce $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ a $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.*

Příklad. $y'' - 6y' + 13y = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{3x}\cos 2x + c_2 e^{3x}\sin 2x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

____________ konec přednášky 29.4.2022

Věta 4.9 (speciální pravá strana). *Nechť*

$$r(x) = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (4.6) *ve tvaru*

$$y_p(x) = x^m e^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně nejvýše $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $a + bi$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Příklad.

$$y'' - y = e^x + e^{2x}$$

(a) Obecné řešení je $y(x) = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{3}e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ je $y(x) = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{5}{12}e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Funkce více proměnných

Definice. *Eukleidovskou metrikou (vzdáleností) na* $\mathbb{R}^n$ rozumíme funkci $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definovanou pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdáleností bodu* x *od bodu* y.

Maximovou metrikou na $\mathbb{R}^n$ rozumíme funkci $\rho_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definovanou pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\rho_{\max}(x, y) := \max\{|x_i - y_i|;\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Lemma 5.1 (porovnání eukleidovské a maximové metriky)**.** *Pro* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$\rho_{\max}(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant \sqrt{n} \cdot \rho_{\max}(x, y).$$

Lemma 5.2 (základní vlastnosti eukleidovské metriky)**.** *Nechť* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pak platí:*

(a) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$;

(c) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$;

(d) $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$.

____________ konec přednášky 4.5.2022

Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $R > 0$. Pak množinu

$$B(x, R) := \{y \in \mathbb{R}^n;\ \rho(x, y) < R\}$$

nazýváme *otevřenou koulí o středu* x *a poloměru* R.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je *vnitřním bodem množiny* A, jestliže existuje takové $R > 0$, že $B(x, R) \subset A$. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *otevřená*, pokud každý bod $x \in A$ je jejím vnitřním bodem. *Vnitřkem* množiny A rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny A a značíme jej $\operatorname{Int} A$.

Příklad. Množina $A = (0, 1) \times [0, 1]$ není otevřená, její vnitřek je $(0, 1) \times (0, 1)$.

Definice. O množině $I \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že to je (otevřený) *interval*, pokud existují (otevřené) intervaly $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ takové, že $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$.

Příklady. $A = (0, 1) \times [0, 1]$ je interval, který není otevřený. Množina $A = (3, 4) \times (15, 17)$ je otevřený interval.

Poznámky. (a) Otevřená koule je otevřená množina, otevřený interval je otevřená množina.

(b) "Otevřená koule vzhledem k maximové metrice" je otevřený interval.

Věta 5.3 (vlastnosti otevřených množin)**.**

(a) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$.

(b) Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.

(c) Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Příklad. Neplatí, že průnik nekonečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Zvolme například $G_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{0\}$ není otevřená.

Definice. Nechť $\{x^k\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\{x^k\}$ *konverguje* k x, jestliže $\lim_{k\to\infty} \rho(x^k, x) = 0$. Značíme $x^k \to x$, nebo také $\lim_{k\to\infty} x^k = x$. Prvek x nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x^k\}$ v $\mathbb{R}^n$. *Konvergentní posloupností* rozumíme posloupnost, která má limitu v $\mathbb{R}^n$.

Lemma 5.4 (vlastnosti konvergence v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $\{x^k\}$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Pak platí:*

(a) $\{x^k\}$ má nejvýše jednu limitu;

(b) $\{x^k\}$ konverguje k x právě tehdy, když konverguje po složkách, tj. pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $x_i^k \to x_i$.

Příklad. $(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}) \to (0, 1)$

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *uzavřená*, pokud platí následující implikace:

$$\{x^k\} \subset A, \quad x^k \to x, \ x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Příklady. Množina $A = [0,1] \times [0,1]$ je uzavřená. Množina $A = (0,1) \times (0,1)$ není uzavřená, ale je otevřená. Množina $A = (0,1) \times [0,1]$ není uzavřená ani otevřená.

Věta 5.5 (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom A je uzavřená právě tehdy, když $\mathbb{R}^n \backslash A$ je otevřená.*

____________ konec přednášky 6.5.2022

Věta 5.6 (vlastnosti uzavřených množin)**.**

(a) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$.

(b) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

(c) Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Funkce více proměnných: limita, spojitost a parciální derivace

Příklad. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je funkce dvou proměnných. Jejím grafem je podmnožina $\mathbb{R}^3$, kterou nazýváme paraboloid.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f *je spojitá v bodě* x, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in B(x, \delta) \colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in A$. Řekneme, *že f je spojitá v bodě x vzhledem k A*, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in B(x, \delta) \cap A \colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že f *je spojitá na množině* A, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in A$ vzhledem k A a že f *je spojitá*, jestliže je spojitá na $\mathbb{R}^n$.

Příklad.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 > 1. \end{cases}$$

Pak f není spojitá v bodech splňujících $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (tj. v bodech jednotkové kružnice), je ale spojitá v těchto bodech vzhledem k množině $A = \{(x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$. Dále platí, že f je spojitá na množině A.

Lemma 5.7. *Pro každé $i = 1, \dots, n$ je funkce $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ spojitá.*

Věta 5.8 (operace zachovávající spojitost)**.** (i) *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Jsou-li funkce f a g jsou spojité v bodě x vzhledem k A, potom také funkce αf, $f+g$ a fg jsou spojité v bodě x vzhledem k A. Pokud navíc funkce g je nenulová v bodě x, pak je spojitá i funkce f/g v bodě x vzhledem k A.*

(ii) *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ a $y \in A$. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ jsou funkce spojité v bodě y vzhledem k A a $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \in B$ pro každé $x \in A$. Nechť f je spojitá v bodě $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_m(y))$ vzhledem k B. Potom složená funkce*

$$F(x) := f((\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))), \quad x \in A$$

je spojitá v bodě y vzhledem k A.

Příklady. (i) $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$;

(ii) $f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ je spojitá na množině $\{(x_1, x_2) :\ x_2 \neq 0\}$;

(iii) $f_3(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$;

(iv) $f_4(x_1, x_2) = \log(x_1 + x_2^2)$ je spojitá na množině $\{(x_1, x_2) :\ x_1 + x_2^2 > 0\}$.

Definice. Řekneme, že funkce n proměnných f má v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta) \backslash \{x\} \colon |f(y) - A| < \varepsilon.$$

Tuto skutečnost zapisujeme jako $\lim_{y \to x} f(y) = A$.

Poznámka. f je spojitá v x právě tehdy, když $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$.

Příklad.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 1, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

není spojitá v $(0,0)$, ale má tam limitu rovnou 0.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $x \in \mathbb{R}^n$ a $i = 1, \dots, n$. Pak *parciální derivaci funkce f v bodě x podle i-té proměnné* definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t},$$

pokud tato limita existuje vlastní.

Příklad. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2.$

____________ konec přednášky 13.5.2022

Věta 5.9 (spojitost a otevřené / uzavřené množiny)**.** *Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí*

(a) Množiny $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) > c\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) < c\}$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$.

(b) Množiny $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \leqslant c\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \geqslant c\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = c\}$ jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$.

Příklady. (i) Jednotková kružnice $\{(x_1, x_2) :\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^2$.

(ii) Otevřená jednotková koule $\{(x_1, x_2) :\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$.

(iii) $\{(x_1, x_2, x_3) :\ x_1 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^2$.

Další příklady k limitám a parciálním derivacím funkcí více proměnných

Příklad.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

pak $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$.

Příklad. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ neexistuje.

Příklad. $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

(i) Definiční obor f je množina $\{(x,y):\ |y|\leqslant|x|\}$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$, pokud $|y|<|x|$. Pokud $|y|\geqslant|x|$, pak žádná z parciálních derivací neexistuje.

Příklad.

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right), & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0, & \text{jinak,}\end{cases}$$

pak $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, ale dvojnásobné limity $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ a $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ neexistují.