Teorie míry a integrálu 1, zimní semestr 2024-2025
Seznam vět z přednášky

1. Základní pojmy teorie míry

1.1. **Množinové systémy, pojem míry.** Nechť X je množina. Symbolem $\mathcal{P}(X)$ značíme systém všech podmnožin X.

Definice. Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Systém množin $\mathcal{A}$ se nazývá *σ-algebra*, pokud:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.

Dvojici $(X, \mathcal{A})$ potom nazýváme *měřitelným prostorem.*

Poznámka: Každá σ-algebra je uzavřená i na spočetné průniky, neboť

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k).$$

Příklady: (i) $\{\emptyset, X\}$ je σ algebra.
(ii) $\mathcal{P}(X)$ je σ algebra.
(iii) $\{A \subset X :\ A$ je spočetná, nebo $X \setminus A$ je spočetná $\}$ je σ algebra.
(iv) $\{A \subset \mathbb{N} :\ A$ je konečná, nebo $\mathbb{N} \setminus A$ je konečná $\}$ není σ algebra.

Věta 1.1 (Existence nejmenší σ-algebry). *Nechť $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je libovolný systém podmnožin. Pak existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$. Tuto σ-algebru značíme $\sigma(\mathcal{S})$.*

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{G}(X)$ značí systém všech otevřených podmnožin X. *Borelovské množiny* $\mathcal{B}(X)$ tvoří nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}(X)$, tedy $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G}(X))$.

Poznámka: (i) Otevřené množiny splňují vlastnosti (i), (iii) z definice σ-algebry, ale nejsou uzavřené vzhledem k doplňku.
(ii) Každá uzavřená množina je borelovská, neboť její doplněk je otevřená množina.

Příklad: Nechť $a < b$ jsou reálná čísla. Pak (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ a $(a, b]$ jsou borelovské podmnožiny $\mathbb{R}$.

Poznámka: Všechny podmnožiny $\mathbb{R}$ nejsou borelovské. Platí dokonce $\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R}) < \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud není identicky rovna ∞ a je σ-aditivní, tedy

$$\text{pokud } A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N} \text{ jsou po dvou disjunktní, pak } \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou.* Je-li $\mu(X) = 1$, pak se μ nazývá *pravděpodobnostní míra* a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *pravděpodobnostní prostor.*

Poznámka: Snadno si můžeme rozmyslet, že z definice plyne
(a) $\mu(\emptyset) = 0$: volme $A_k = \emptyset$ pro všechna k
(b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktní: volme $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_k = \emptyset$ pro $k \geq 3$
(c) $\mu(A) \leq \mu(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$: z (b) víme $\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$ a $\mu(B \setminus A) \geq 0$

Příklady: (i) Nechť $x_0 \in X$, pak

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, \text{ pokud } x_0 \in A, \\ 0, \text{ pokud } x_0 \notin A \end{cases}$$

je míra na $\mathcal{P}(X)$. Tato míra se nazývá *Diracova míra* v bodě x_0.

(ii)

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A), & \text{pokud je } A \text{ konečná}, \\ \infty, & \text{pokud je } A \text{ nekonečná} \end{cases}$$

je míra na $\mathcal{P}(X)$. Tato míra se nazývá *aritmetická (počítací) míra* na X.

(iii) Na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ lze definovat míru $\mathcal{L}_1$, která bude splňovat

$$\mathcal{L}_1((a,b)) = b - a.$$

Věta 1.2 (Spojitost míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$.*

(i) *Pokud $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ (tuto situaci značíme $A_k \nearrow A$), pak* $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

(ii) *Pokud $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = A$ (tuto situaci značíme $A_k \searrow A$) a $\mu(A_1) < \infty$, pak* $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

Poznámka: (ii) neplatí bez předpokladu $\mu(A_1) < \infty$. Nechť $A_k = [k, \infty)$, pak $A_k \searrow \emptyset$, ale $\infty = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}_1(A_k) \neq \mathcal{L}_1(\emptyset) = 0$.

__________ konec přednášky 1.10.2024

Definice. Nechť $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Množinu

$$W = \big\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_i < x_i < b_i \text{ pro všechna } i = 1, \dots, n\big\},$$

a také každou množinu, která vnikne záměnou libovolného "$<$" za "$\leq$", nazveme *n-buňka.* Objem n-buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$, a jako $\operatorname{vol}(W) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$, je-li $W \neq \emptyset$.

Věta 1.3 (Rozšíření elementárního objemu)**.** *Existuje právě jedna míra $\mathcal{L}_n$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taková, že pro každou n-buňku W platí $\mathcal{L}_n(W) = \operatorname{vol}(W)$.*

Poznámky: (i) Z konstrukce míry $\mathcal{L}_n$ plyne, že je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ borelovská, $\varepsilon > 0$, pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subset G$ a $\mathcal{L}_n(G \setminus A) < \varepsilon$.

(ii) Míra $\mathcal{L}_n$ je invariantní vůči posunutí - pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ platí $\mathcal{L}_n(x + A) = \mathcal{L}_n(A)$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že μ je *úplná* míra, pokud platí:

$$\text{je-li } A \in \mathcal{A} \text{ splňující } \mu(A) = 0 \text{ a } A' \subset A, \text{ pak } A' \in \mathcal{A}.$$

Poznámka: V tom případě nutně $\mu(A') = 0$.

Věta 1.4 (Zúplnění míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $\mathcal{A}_0$ je systém všech množin $E \subset X$, pro něž existují $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Potom $\mathcal{A}_0$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{A}$.*

Definujme $\mu_0(E) = \mu(A)$ pro $E \in \mathcal{A}_0$. Potom $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{A}$ a $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.

Definice. Prostor $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ z předchozí věty nazýváme *zúplněním prostoru* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{A}_0$ se nazývá *zúplnění σ-algebry* $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ a μ_0 se nazývá *zúplnění míry* μ.

Definice. Zúplnění σ-algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vzhledem k $\mathcal{L}_n$ označíme $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ a nazýváme ji σ-algebrou *lebesgueovsky měřitelných množin.* Odpovídající zúplnění míry $\mathcal{L}_n$ značíme opět $\mathcal{L}_n$ a nazýváme ho *Lebesgueova mírou.*

1.2. **Měřitelné funkce.**

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a (Y, τ) metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné*, jestliže $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou.

Navíc, je-li (X, ϱ) metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ systém všech borelovských množin, pak zobrazení f nazýváme *borelovské*.

Poznámka: Nechť (X, ϱ), (Y, τ) jsou metrické prostory. Pak zobrazení $g : X \to Y$ je spojité právě tehdy, když $g^{-1}(V)$ je otevřená pro každou $V \subset Y$ otevřenou. Každé spojité zobrazení je tedy borelovské.

Příklad: Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $A \subset X$. Pak charakteristická funkce množiny A definovaná vztahem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

je měřitelná právě tehdy, když $A \in \mathcal{A}$.

Věta 1.5 (Měřitelnost složeného zobrazení)**.** *Nechť (Y, τ), (Z, σ) jsou metrické prostory a $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Nechť $g : Y \to Z$ je spojité a $f : X \to Y$ je měřitelné zobrazení. Potom $g \circ f$ je měřitelné zobrazení.*

____________ konec přednášky 8.10.2024

Věta 1.6 (Měřitelnost složeného zobrazení v $\mathbb{R}^2$)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $u, v : X \to \mathbb{R}$ jsou reálné měřitelné funkce. Nechť (Y, τ) je metrický prostor a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ je spojité zobrazení. Definujme $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$, pak $h : X \to Y$ je měřitelné zobrazení.*

Důsledek: Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $f, g : X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné. Pak $f + g$ a fg jsou rovněž měřitelné. Stačí použít předchozí větu na $u = f$, $v = g$, $\Phi_1(x, y) = x + y$ a $\Phi_2(x, y) = xy$.

Věta 1.7 (Kritérium měřitelnosti)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, (Y, τ) metrický prostor a $f : X \to Y$.*
(i) *Je-li $\mathcal{M}$ systém všech množin $A \subset Y$, pro něž je $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, potom $\mathcal{M}$ je σ-algebra.*
(ii) *Je-li f měřitelná, $B \subset Y$ borelovská, potom $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*
(iii) *Je-li $Y = [-\infty, \infty]$, pak f je měřitelná právě tehdy, když $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ pro všechna $\alpha \in [-\infty, \infty]$.*

Poznámka: Na množině $Y = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ lze zavést metriku vztahem $\tau(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in Y$, kde

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty, \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R}, \\ 1, & x = \infty. \end{cases}$$

Lze ukázat, že otevřené množiny v (Y, τ) jsou právě ty, které lze zapsat jako sjednocení spočetně mnoha otevřených intervalů nebo intervalů typu $[-\infty, a)$, (b, ∞), kde $a, b \in [-\infty, \infty]$.

Věta 1.8 (Měřitelnost a limitní přechod)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce, $k \in \mathbb{N}$. Definujme $g = sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ a $f = \limsup_{k \to \infty} f_k$. Potom f a g jsou měřitelné funkce.*

Poznámka: (i) Analogické tvrzení platí též pro inf a lim inf.
(ii) Limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná funkce.
(iii) Jsou-li f, g měřitelné, pak $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou rovněž měřitelné.

Definice. Nechť X je množina a $s : X \to [-\infty, \infty]$ je funkce. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, pokud $s(X)$ je konečná podmnožina $[0, \infty)$.

Poznámka: (i) Každou jednoduchou funkci lze zapsat ve tvaru $s(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, kde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in [0,\infty)$ a A_i jsou po dvou disjunktní podmnožiny X.

(ii) Lze ukázat, že jednoduchá funkce s z části (i) je měřitelná právě tehdy, když jsou všechny množiny A_i měřitelné.

Věta 1.9 (Aproximace jednoduchými funkcemi)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $f : X \to [0,\infty]$ je měřitelná funkce. Pak existují jednoduché měřitelné funkce s_k takové, že $s_k \nearrow f$ (tj. $0 \le s_1 \le s_2 \le \dots$, $\lim_{k\to\infty} s_k = f$).*

Důsledek: Nechť $f, g : X \to [0,\infty]$ jsou měřitelné. Pak $f+g$, fg jsou měřitelné funkce. (Výrazy $0 \cdot \infty$ a $\infty \cdot 0$ definujeme jako 0 - viz příští kapitola.)

Poznámka: Nechť $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné. Pak množiny

$$\{f < g\} = \{x \in X : \ f(x) < g(x)\},\ \{f \le g\},\ \{f = g\},\ \{f \ne g\}$$

patří do σ-algebry $\mathcal{A}$ (ve všech případech jde o vzor borelovské množiny při měřitelném zobrazení $f - g$).

2. Konstrukce Lebesgueova integrálu

2.1. **Definice abstraktního integrálu.** Domluvme se, že pro všechna $a \in [0,\infty]$ máme $a + \infty = \infty$ a pro $a > 0$ je $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$. Dále definujeme $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce. Pro $E \in \mathcal{A}$ definujeme

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Pro $f : X \to [0,\infty]$ měřitelnou definujeme *(abstraktní) Lebesgueův integrál*

$$\int_E f\, d\mu = \sup\Big\{ \int_E s\, d\mu :\ 0 \le s \le f,\ s \text{ je jednoduchá měřitelná} \Big\}.$$

____________ konec přednášky 15.10.2024

Poznámka: Nechť vše je jako v definici výše.

(i) Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in E$, pak $\int_E f\, d\mu = 0$ (a to i v případě, že $\mu(E) = \infty$).

(ii) Je-li $\mu(E) = 0$, pak $\int_E f\, d\mu = 0$ (a to i v případě, že $f = \infty$ na E).

(iii) $\int_E f\, d\mu = \int_X f \chi_E\, d\mu$

Úmluva: V celé této kapitole bude $(X, \mathcal{A}, \mu)$ značit prostor s mírou.

Tvrzení 2.1 (Monotonie integrálu)**.** *Nechť $f, g : X \to [0,\infty]$ splňují $f \le g$ na X. Pak pro $E \in \mathcal{A}$ platí*

$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$

2.2. **Leviho a Lebesgueova věta.**

Věta 2.2 (Leviho věta)**.** *Nechť $f_k : X \to [0,\infty]$ jsou měřitelné funkce, $k \in \mathbb{N}$, a $f_k \nearrow f$. Pak f je měřitelná a*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Věta 2.3 (Linearita integrálu pro nezáporné funkce)**.** *Nechť $f, g : X \to [0,\infty]$ jsou měřitelné funkce. Potom platí*

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

Věta 2.4 (Leviho věta pro řady)**.** *Nechť* $f_k : X \to [0,\infty]$ *jsou měřitelné funkce,* $k \in \mathbb{N}$*. Potom*

$$\int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Věta 2.5 (Fatouovo lemma)**.** *Nechť* $f_k : X \to [0,\infty]$ *jsou měřitelné funkce,* $k \in \mathbb{N}$*. Potom*

$$\int_X (\liminf_{k\to\infty} f_k)\, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Poznámka: Nerovnost ve Fatouově lemmatu může být ostrá. Zvolme $f_k = k\chi_{(0,\frac{1}{k})}$, $k \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, dx = \int_0^1 \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\, dx = 0,$$

ale

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx = \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx = 1.$$

Definice. Označme $L^1(X,\mu)$ množinu všech měřitelných funkcí $f : X \to [-\infty,\infty]$, pro které $\int_X |f| d\mu < \infty$. Pro $f \in L^1(X,\mu)$ a $E \in \mathcal{A}$ definujeme *(abstraktní) Lebesgueův integrál* jako

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu,$$

kde f^+, f^- značí kladnou, resp. zápornou část funkce f. Funkce z $L^1(X,\mu)$ nazýváme lebesgueovsky integrovatelné funkce.

Poznámka: Je-li $f \in L^1(X,\mu)$, pak $|f| \in L^1(X,\mu)$, tj. Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní. Tuto vlastnost nemá Newtonův integrál.
____________ konec přednášky 22.10.2024

Poznámka: Je-li f měřitelná, pak $f^+ = \max\{f,0\}$, $f^- = \min\{f,0\}$ a $|f| = f^+ + f^-$ jsou měřitelné, a definice Lebesgueova integrálu je tedy korektní.
Poznámka: Nechť $f \in L^1(X,\mu)$. Označme $N = \{x \in X :\ f(x) \in \{-\infty,\infty\}\}$. Pak $\mu(N) = 0$.

Tvrzení 2.6 (Integrál a absolutní hodnota)**.** *Nechť* $f \in L^1(X,\mu)$*. Pak*

$$\Big|\int_X f\, d\mu\Big| \le \int_X |f|\, d\mu.$$

Věta 2.7 (Linearita integrálu)**.** *Nechť* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *a* $f,\ g \in L^1(X,\mu)$*. Pak* $\alpha f + \beta g \in L^1(X,\mu)$ *a*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

Věta 2.8 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť* $f_k : X \to [-\infty,\infty]$ *jsou měřitelné funkce,* $k \in \mathbb{N}$*, a* $f = \lim_{k\to\infty} f_k$*. Nechť dále existuje* $g \in L^1(X,\mu)$ *taková, že* $|f_k(x)| \le g(x)$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a* $x \in X$*. Potom*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f|\, d\mu = 0 \quad a \quad \int_X f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

2.3. **Rovnost skoro všude a upravená definice měřitelnosti.**

Definice. Nechť $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že vlastnost V platí *skoro všude* na E, jestliže existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a vlastnost V platí na $E \setminus N$.

Řekneme, že funkce $f, g : X \to \mathbb{R}$ jsou *ekvivalentní* a značíme $f \sim g$, jestliže $f = g$ skoro všude na X, tedy $\mu(\{x \in X :\ f(x) \ne g(x)\}) = 0$.

Definice. (nová definice měřitelnosti) Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f : E \to \mathbb{R}$ pro $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že f je *měřitelná* na X, jestliže $\mu(X \setminus E) = 0$ a $f^{-1}(V) \cap E$ je měřitelná pro každou $V \subset \mathbb{R}$ otevřenou.

Příklad: Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je měřitelná na $[0, 1]$.

Poznámka: (i) Definujeme-li

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in E, \\ 0 & \text{pro } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

kde f, E jsou jako výše, pak $f = \hat{f}$ skoro všude a $\hat{f}$ je měřitelná podle staré definice.
(ii) Stále platí, že limita měřitelných funkcí je měřitelná (neboť spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina).
(iii) Lze ukázat, že Leviho a Lebesgeuova věta platí i v případě, že $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ pro s.v. $x \in X$.

Věta 2.9 (Lebesgueova věta pro řady)**.** *Nechť $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce, $k \in \mathbb{N}$, a nechť $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| d\mu < \infty$. Potom $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně pro skoro všechna $x \in X$ a*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big) \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

2.4. **Integrál závislý na parametru.**

Věta 2.10 (O spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Nechť T je metrický prostor, $\alpha_0 \in T$ a nechť $f : X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť*

(*i*) *pro všechna $\alpha \in T$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná;*

(*ii*) *pro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ spojitá v α_0;*

(*iii*) *existuje $g \in L^1(X, \mu)$ taková, že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in T$.*

Potom funkce F definovaná předpisem

$$F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha) \, d\mu(x), \quad \alpha \in T,$$

je spojitá v α_0.

____________ konec přednášky 29.10.2024

Poznámka: Předchozí věta zůstává v platnosti i v případě, kdy se text "pro všechna $x \in X$" v částech (ii) a (iii) nahradí textem "pro skoro všechna $x \in X$".

Věta 2.11 (O derivaci integrálu podle parametru)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f : X \times I \to \mathbb{R}$. Nechť*

(*i*) *pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná,*

(*ii*) *pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$,*

(*iii*) *existuje $g \in L^1(X, \mu)$ splňující $\left| \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$,*

(*iv*) *existuje $\alpha_0 \in I$ takové, že $F(\alpha_0) = \displaystyle\int_X f(x, \alpha_0) \, d\mu(x) \in \mathbb{R}$.*

Potom $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha) \, d\mu(x) \in \mathbb{R}$ pro všechna $\alpha \in I$, F je diferencovatelná na I a platí

$$F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \, d\mu(x), \quad \alpha \in I.$$

Poznámky: (i) Text "pro všechna $x \in X$" v částech (ii) a (iii) lze nahradit textem "pro skoro všechna $x \in X$".

(ii) Předpoklad (iv) je nutný. Položme $F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$, pak podmínky (i) – (iii) jsou splněny, ale $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$ není definován.

Příklad: Nechť $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x} \, dx$, pak F je diferencovatelná na $(-1, \infty)$,

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-(\alpha+1)x} \, dx = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha \in (-1, \infty).$$

To plyne z předchozí věty, kterou použijeme na intervalech tvaru $I = (p, \infty)$, $p \in (-1, 0)$. Tedy

$$F(\alpha) = F(\alpha) - F(0) = \log(\alpha + 1), \quad \alpha \in (-1, \infty).$$

Poznámka: (vztah Lebesgueova, Riemannova a Newtonova integrálu)
(i) Nechť f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Pak $f \in L^1([a, b], \mathcal{L}_1)$ a

$$(R) \int_a^b f = \int_{[a,b]} f \, d\mathcal{L}_1.$$

(ii) Nechť f je spojitá na (a, b). Pak $(N) \int_a^b f$ konverguje absolutně právě tehdy, když konverguje $\int_{(a,b)} f \, d\mathcal{L}_1$. V tomto případě mají oba integrály společnou hodnotu.

3. Vícerozměrná integrace

3.1. **Fubiniova věta v $\mathbb{R}^n$.**

Definice. Nechť X a Y jsou množiny a f je funkce na $X \times Y$. Definujeme pro $x \in X$ funkci

$$f_x(y) = f(x, y), \quad y \in Y,$$

a pro $y \in Y$ definujeme funkci

$$f^y(x) = f(x, y), \quad x \in X.$$

Značení: Pro $n \in \mathbb{N}$ budeme značit $L^1(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n)$.

Věta 3.1 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^{p+q})$, nebo f je lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^{p+q}$ a $f \geq 0$. Potom pro $\mathcal{L}_p$-s.v. $x \in \mathbb{R}^p$ existuje (pro $f \geq 0$ může být ∞)*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x \, d\mathcal{L}_q = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) \, d\mathcal{L}_q(y)$$

a pro $\mathcal{L}_q$-s.v. $y \in \mathbb{R}^q$ existuje

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \, d\mathcal{L}_p = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) \, d\mathcal{L}_p(x)$$

a platí

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \, d\mathcal{L}_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi \, d\mathcal{L}_p = \int_{\mathbb{R}^q} \psi \, d\mathcal{L}_q.$$

Příklad: $\int_{\mathbb{R}^2} x^y \chi_{[0,1]\times[1,2]}(x, y) \, d\mathcal{L}_2(x, y) = \log \frac{3}{2}$
____________ konec přednášky 12.11.2024

Příklad: Nechť M je množina omezená křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$. Pak $\mathcal{L}_2(M) = \frac{3}{2} - \log 2$.

3.2. **Dynkinovy systémy.**

Definice. Nechť Z je množina a $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(Z)$. Řekneme, že $\mathcal{D}$ je *Dynkinův systém*, jestliže

(i) $Z \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow Z \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_j \in \mathcal{D}$ jsou po dvou disjunktní $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$.

Poznámky: (i) Každá σ-algebra je Dynkinův systém, ale naopak to neplatí. Nechť $Z = \{1, 2, \dots, 2024\}$, $\mathcal{D} = \{D \subset Z : \ D \text{ má sudý počet prvků}\}$. Pak $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém, ale není to σ-algebra.

(ii) Nechť $A, B \in \mathcal{D}$ a $B \subset A$, pak $A \setminus B \in \mathcal{D}$. Pro obecné množiny A, B to ale neplatí (zvolme $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ u systému $\mathcal{D}$ z části (i)).

Věta 3.2 (Vztah σ-algebry a Dynkinova systému)**.** *Nechť $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. Potom $\mathcal{D}$ je σ-algebra právě tehdy, když $\mathcal{D}$ je uzavřený vzhledem k průniku (tedy $E, D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \cap D \in \mathcal{D}$).*

Poznámka: Nechť Z je množina a $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$. Potom existuje nejmenší Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$, značíme ho $\delta(\mathcal{S})$. Platí

$$\delta(\mathcal{S}) = \bigcap \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(Z) : \ \mathcal{D} \text{ je Dynkinův systém}, \ \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

Zřejmě též $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$.

Věta 3.3 (O nejmenším Dynkinově systému)**.** *Nechť Z je množina a $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$ je systém množin uzavřený vzhledem k průniku. Potom $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.*

Definice. Míra μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ se nazývá *σ-konečná*, jestliže existují $S_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, takové, že $\mu(S_k) < \infty$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $S_k \nearrow X$.

Věta 3.4 (O jednoznačnosti míry)**.** *Nechť Z je množina, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$ je systém množin uzavřený vzhledem k průniku, $S_k \in \mathcal{S}$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $S_k \nearrow Z$. Nechť μ_1 a μ_2 jsou míry na $\sigma(\mathcal{S})$, $\mu_1(S) = \mu_2(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$ a $\mu_1(S_k) < \infty$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom $\mu_1 = \mu_2$ na $\sigma(\mathcal{S})$.*

Důsledek: Je-li μ míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ taková, že $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý omezený interval I, pak nutně $\mu = \mathcal{L}_1$.
__________ konec přednášky 19.11.2024

3.3. **Součin měr a Fubiniova věta.**

Definice. Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Řekneme, že $M \subset X \times Y$ je *obdélník*, jestliže existují $A \subset X$ a $B \subset Y$ takové, že $M = A \times B$. Pokud $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$, pak M nazveme *měřitelný obdélník*.

Definujeme *součinovou σ-algebru* $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ jako nejmenší σ-algebru obsahující každý měřitelný obdélník.

Definice. Nechť $E \subset X \times Y$, $x \in X$ a $y \in Y$. Potom definujeme *řezy* množiny E

$$E_x = \{y \in Y : \ (x, y) \in E\} \text{ a } E^y = \{x \in X : \ (x, y) \in E\}.$$

Věta 3.5 (O měřitelnosti řezu)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Nechť $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, $x \in X$ a $y \in Y$. Pak $E_x \in \mathcal{T}$ a $E^y \in \mathcal{S}$.*

Věta 3.6 (O měřitelnosti míry řezu)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou a $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Potom $x \mapsto \nu(E_x)$, $x \in X$, je měřitelná funkce na $(X, \mathcal{S})$ a $y \mapsto \mu(E^y)$, $y \in Y$, je měřitelná funkce na $(Y, \mathcal{T})$.*

Věta 3.7 (Existence a jednoznačnost součinové míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou. Potom existuje právě jedna míra $\mu \times \nu$ na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ taková, že*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \text{ pro každou } A \in \mathcal{S} \text{ a } B \in \mathcal{T}.$$

Je-li $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, pak

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y)\, d\nu(y).$$

Lemma 3.8 (Měřitelnost řezu funkce)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelná na $X \times Y$. Potom pro každé $x \in X$ je f_x $\mathcal{T}$-měřitelná a pro každé $y \in Y$ je f^y $\mathcal{S}$-měřitelná.*

____________ konec přednášky 26.11.2024

Věta 3.9 (Fubiniova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnou mírou a nechť f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelná funkce na $X \times Y$. Předpokládejme, že $0 \leq f \leq \infty$ nebo $f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$. Potom pro μ-s.v. $x \in X$ existuje $\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu$, pro ν-s.v. $y \in Y$ existuje $\psi(y) = \int_X f^y\, d\mu$ a platí*

$$\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu.$$

Poznámka: Je-li $\varphi^*(x) = \int_Y |f_x|\, d\nu$ a $\int_X \varphi^*\, d\mu < \infty$, nebo $\psi^*(y) = \int_X |f^y|\, d\mu$ a $\int_Y \psi^*\, d\nu < \infty$, pak $f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Značení: Pro $n \in \mathbb{N}$ značí $\mathcal{B}^n$ systém všech borelovských množin v $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{B}_0^n$ systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$.

Věta 3.10 (O součinu borelovských množin v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, pak*

$$\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q \subset \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q \subset \mathcal{B}_0^{p+q}$$

a $\mathcal{B}_0^{p+q}$ je zúplněním σ-algebry $\mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q$ vzhledem k míře $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$.

Poznámka: Z předchozí věty plyne, že $\mathcal{L}_{p+q}$ je zúplněním $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$. Za použití této informace pak lze dokázat Větu 3.1 z předchozích dvou vět.

3.4. **Věta o substituci.** Připomeňme si následující tvrzení z lineární algebry.

Tvrzení: Nechť M je matice typu $n \times n$. Potom existují ortonormální matice A, B a diagonální matice C tak, že $M = ACB$.

Důsledek. Nechť M je regulární matice typu $n \times n$ a φ je lineární zobrazení dané vztahem $\varphi(x) = Mx$, $x \in \mathbb{R}^n$. Pak pro každou otevřenou množinu O platí

$$\mathcal{L}_n(\varphi(O)) = |\det M| \mathcal{L}_n(O).$$

Definice. Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1. Definujeme *Jakobiho matici* zobrazení φ jako

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

a *Jakobián* tohoto zobrazení jako $J_\varphi(x) = \det D\varphi(x)$, $x \in V$.

Definice. Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1. Řekneme, že φ je *difeomorfismus*, je-li φ prosté a platí $J_\varphi(x) \neq 0$ pro všechna $x \in V$ (tj. φ je regulární).

Věta 3.11 (Věta o substituci). *Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus. Nechť $M \subset \varphi(V)$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_M f \, d\mathcal{L}_n = \int_{\varphi^{-1}(M)} (f \circ \varphi)|J_\varphi| \, d\mathcal{L}_n,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Příklad: (zobecněné polární souřadnice) Nechť $a, b > 0$, $V = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : \; r > 0, \; \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha) := (ar \cos \alpha, br \sin \alpha)$, $(r, \alpha) \in V$. Pak φ je difeomorfismus a $J_\varphi(r, \alpha) = abr$ pro $(r, \alpha) \in V$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^2$ lebesgueovsky měřitelná množina a f je lebesgueovsky měřitelná funkce na E, pak

$$\int_E f(x, y) d\mathcal{L}_2(x, y) = \int_{\varphi^{-1}(E) \cap V} abr \cdot f(ar \cos \alpha, br \sin \alpha) d\mathcal{L}_2(r, \alpha),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

__________ konec přednášky 3.12.2024

Příklad: (zobecněné válcové souřadnice) Nechť $a, b > 0$, $V = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3 : \; r > 0, \; \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha, z) := (ar \cos \alpha, br \sin \alpha, z)$, $(r, \alpha, z) \in V$. Pak φ je difeomorfismus a $J_\varphi(r, \alpha, z) = abr$ pro $(r, \alpha, z) \in V$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^3$ lebesgueovsky měřitelná množina a f je lebesgueovsky měřitelná funkce na E, pak

$$\int_E f(x, y, z) d\mathcal{L}_3(x, y, z) = \int_{\varphi^{-1}(E) \cap V} abr \cdot f(ar \cos \alpha, br \sin \alpha, z) d\mathcal{L}_3(r, \alpha, z),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Příklad: (zobecněné sférické souřadnice) Nechť $a, b, c > 0$, $V = \{(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : \; r > 0, \; \alpha \in (-\pi, \pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ a zobrazení $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha, \beta) := (ar \cos \alpha \cos \beta, br \sin \alpha \cos \beta, cr \sin \beta)$, $(r, \alpha, \beta) \in V$. Pak φ je difeomorfismus a $J_\varphi(r, \alpha, \beta) = abcr^2 \cos \beta$ pro $(r, \alpha, \beta) \in V$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^3$ lebesgueovsky měřitelná množina a f je lebesgueovsky měřitelná funkce na E, pak

$$\int_E f(x, y, z) d\mathcal{L}_3(x, y, z) = \int_{\varphi^{-1}(E) \cap V} abcr^2 \cos \beta \cdot f(ar \cos \alpha \cos \beta, br \sin \alpha \cos \beta, cr \sin \beta) d\mathcal{L}_3(r, \alpha, \beta),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Příklad: Koule v $\mathbb{R}^3$ o poloměru 1 má objem roven $\frac{4\pi}{3}$.

4. Rozklad měr, distribuční funkce a různé druhy konvergence

4.1. **Prostory L^p a různé druhy konvergence.**

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 \leq p < \infty$. Pak definujeme *prostor* $L^p(X, \mu)$ jako

$$L^p(X, \mu) := \{f : X \to [-\infty, \infty] : \; f \text{ je měřitelná a } \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

kde

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Poznámka: (i) Výraz ∞^p interpretujeme jako ∞.

(ii) Je-li $f \in L^p(X, \mu)$, pak f je konečná μ-s.v. (toto platí též pro případ $p = \infty$ definovaný níže).

Definice. Nechť $g : X \to [0, \infty]$ je měřitelná. *Esenciální supremum* g definujeme jako

$$\operatorname{esssup} g := \inf\big\{\alpha \geq 0 : \ \mu(\{x \in X : \ g(x) > \alpha\}) = 0\big\}.$$

Prostor $L^\infty(X, \mu)$ definujeme jako

$$L^\infty(X, \mu) := \{f : X \to [-\infty, \infty] : \ \|f\|_{L^\infty} := \operatorname{esssup} |f| < \infty\}.$$

Tvrzení: (Čebyševova nerovnost) Nechť $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(X, \mu)$, $c > 0$. Pak

$$\mu(\{x \in X : \ |f(x)| \geq c\}) \leq \frac{\|f\|_{L^p}^p}{c^p}.$$

Poznámka: V přednášce Matematická analýza 3 bylo dokázáno, že pokud $f_k \to f$ v L^p, $1 \leq p < \infty$, pak existuje podposloupnost f_{k_j} taková, že $f_{k_j}(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in X$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f, \ f_k : X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné pro $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f_k *konvergují podle míry* μ k f a značíme $f_k \xrightarrow{\mu} f$, jestliže pro každé $\delta > 0$ platí

$$\lim_{k \to \infty} \mu\big(\{x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}\big) = 0.$$

Věta 4.1 (Vztah konvergence v L^p a konvergence v míře)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p < \infty$ a $f, \ f_k : X \to \mathbb{R}$ jsou funkce z $L^p(X, \mu)$. Pokud $f_k \to f$ v $L^p(X, \mu)$, pak $f_k \xrightarrow{\mu} f$.*

Věta 4.2 (Vztah konvergence s.v. a konvergence v míře)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mu(X) < \infty$, a nechť $f, \ f_k : X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné.*
(i) Nechť $f_k \to f$ μ-s.v., pak $f_k \xrightarrow{\mu} f$.
(ii) Nechť $f_k \xrightarrow{\mu} f$, pak existuje vybraná posloupnost f_{k_j}, která konverguje k f μ-s.v.

____________ konec přednášky 10.12.2024

Příklady: (i) Zkonstruovali jsme posloupnost funkcí f_k takovou, že $f_k \to 0$ v L^p, $1 \leq p < \infty$ a $f_k \to 0$ v míře, ale ne s.v. ("klouzající hrbol").
(ii) $f_k(x) = \frac{1}{kx}$ konverguje na $(0, 1)$ k nule v míře a s.v., ale ne v L^p pro $1 \leq p \leq \infty$.

4.2. **Radonova-Nikodýmova věta.**

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ, ν jsou míry na $\mathcal{A}$. Řekneme, že ν je *absolutně spojitá* vzhledem k μ a píšeme $\nu << \mu$, pokud

$$\text{pro všechny } A \in \mathcal{A} \text{ platí } \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Řekneme, že ν je *singulární* vzhledem k μ a píšeme $\nu \perp \mu$, pokud

$$\text{existuje } S \in \mathcal{A} \text{ taková, že } \mu(S) = 0 \text{ a } \nu(X \setminus S) = 0.$$

Příklad: Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f \geq 0$ měřitelná na X. Pak $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, je míra na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\nu << \mu$.

Příklad: Nechť $x \in \mathbb{R}$, pak pro Diracovu míru v bodě x platí $\delta_x \perp \mathcal{L}_1$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$. Řekneme, že μ je *znaménková míra*, pokud

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) μ nabývá nejvýše jedné z hodnot $-\infty$, ∞,

(ii) jsou-li $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.

Věta 4.3 (Hahnův rozklad)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Potom existuje $P \in \mathcal{A}$ taková, že pro každou $A \in \mathcal{A}$ platí*

$$\mu(A \cap P) \geq 0 \ \text{a} \ \mu\big(A \cap (X \setminus P)\big) \leq 0.$$

Věta 4.4 (Radonova-Nikodýmova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\nu << \mu$,

(ii) existuje $f \in L^1(X, \mu)$, $f \geq 0$ *taková, že* $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ *pro všechny* $A \in \mathcal{A}$.

Věta 4.5 (Lebesgueův rozklad)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že ν je σ-konečná. Potom existuje jednoznačný rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ takový, že $\nu_a << \mu$ a $\nu_s \perp \mu$.*

___________ konec přednášky 17.12.2024

4.3. **Distribuční funkce.**

Definice. Řekneme, že $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *distribuční funkce*, je-li neklesající, zprava spojitá, $F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ a $F(\infty) := \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Příklady: (i) $F(x) = P($výsledek hodu kostkou je $\leq x)$
(ii) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ (distribuční funkce tzv. normálního rozdělení)

Definice. Řekneme, že μ je *borelovská* míra na $\mathbb{R}^n$, je-li to míra na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Věta 4.6 (Existence distribuční funkce)**.** *Nechť μ je borelovská pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}$ a definujme $F(x) = \mu((-\infty, x])$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom F je distribuční funkce.*

Věta 4.7 (Charakterizace distribuční funkce)**.** *Nechť F je distribuční funkce. Potom existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra μ na $\mathbb{R}$ taková, že $F(x) = \mu((-\infty, x])$ pro $x \in \mathbb{R}$.*

Příklad: Položme $C_0 = [0, 1]$ a indukcí definujme $C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1})$, $n \geq 1$. Množina $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ se nazývá Cantorovo diskontinuum. Cantorovu funkci definujeme následovně: Položme $F(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $F(x) = 1$ pro $x \geq 1$. Je-li $x \in (0, 1)$ zapsáno v trojkovém rozvoji jako $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$, kde $x_j \in \{0, 1, 2\}$, pak označíme $n(x) = \inf\{j \in \mathbb{N} : \ x_j = 1\}$ a klademe

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n(x)} \frac{\min\{x_j, 1\}}{2^j}, \quad x \in (0, 1).$$

Funkce F je distribuční funkcí tzv. Cantorovy míry. Lze ukázat, že F je spojitá na $\mathbb{R}$ a $F'(x) = 0$ pro $\mathcal{L}_1$-s.v. $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Nechť F je distribuční funkce. Pak existují neklesající funkce F_a, F_C a F_J takové, že

$$F = F_a + F_C + F_J$$

s následujícími vlastnostmi. Funkce skoků lze napsat jako

$$F_J(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{[b_j, \infty)}(x),$$

Cantorovská část je spojitá na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $F_C'(x) = 0$ pro $\mathcal{L}^1$-s.v. $x \in \mathbb{R}$ a pro absolutně spojitou část existuje $f \in L^1(\mathbb{R})$ taková, že

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) \, dy.$$

___________ konec přednášky 7.1.2025