Geometrie, NMAG204 13/14
cvičení 8

Bod plochy se nazývá

- **eliptický**, jestliže v něm platí $K > 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2$ nazývá se **kruhový**.
- **parabolický**, jestliže v něm platí $K = 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ nazývá se **planární**.
- **hyperbolický**, jestliže v něm platí $K < 0$.

Hlavní křivka $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ pro každé t je $\dot{\mathbf{c}}(t)$ hlavním směrem.
Splňuje diferenciální rovnici

$$\det \begin{pmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Asymptotická křivka $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$: pro každé t je $\kappa_n(\dot{\mathbf{c}}(t)) = 0$.
Splňuje diferenciální rovnici

$$h_{11}(\dot{u})^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}(\dot{v})^2 = 0.$$

Geodetická křivost křivky $\mathbf{c}$ na orientované ploše S, kdy $\mathbf{c}(s)$ je její parametrizace obloukem, je

$$\kappa_g = \mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{c}') = \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{N}),$$

kde $\mathbf{N}$ je normála plochy v příslušném bodě.
Geodetika je křivka na orientované ploše, která má v každém svém bodě nulovou geodetickou křivost.
Křivka na orientované ploše je geodetika právě tehdy když v každém svém neinflexním bodě je normála křivky $\mathbf{n}$ kolmá na plochu, tedy $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$.

Příklady

1. Popište eliptické, parabolické a hyperbolické body na toru

$$\mathbf{p}(\alpha, \beta) = [(R + r\sin\alpha)\cos\beta, (R + r\sin\alpha)\sin\beta, r\cos\alpha],$$

   kde $R, r \in \mathbb{R}^+, R > r,\ \alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. *(1 bod)*

2. **[C]** Zjistěte zda na ploše $\mathbf{p}(u, v) = [u, v, u^2 + v^2]$ je nějaký kruhový bod. *(0,5 bodu)*

3. Určete typy bodů na ploše $\mathbf{p}(u, v) = [u, v, u^2 + v^3]$. *(1 bod)*

4. Dokažte, že přímka na ploše je asymptotická křivka. *(0,5 bodu)*

5. **[C]** Určete asymptotické křivky na ploše $z = axy$. *(0,5 bodu)*

6. Určete asymptotické křivky na ploše

$$\mathbf{p}(u, t) = [u\sin t, u\cos t, t(1 + u)].$$

   (1 bod)

7. Parametrické křivky plochy jsou asymptotické, právě když pro všechny body plochy platí $h_{11} = h_{22} = 0$. Dokažte. *(1 bod)*

8. Nalezněte hlavní a asymptotické křivky na Enneperově ploše

$$\mathbf{p}(u, v) = \left[u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2\right], (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (1,5 bodu)

9. Ověřte, že je Enneperova plocha z minulého příkladu minimální plocha, tj. její střední křivost je v každém bodě nulová. *(0,5 bodu)*

10. Nalezněte hlavní křivky rotačního paraboloidu

$$\mathbf{p}(u,v) = \left[u, v, u^2 + v^2\right].$$

(1 bod)

11. Vypočítejte hlavní křivky na obecné rotační ploše

$$\mathbf{p}(t,\phi) = [x(t)\cos\phi, x(t)\sin\phi, z(t)].$$

(1 bod)

12. Ověřte, že křivka

$$\mathbf{c}(t) = [r\cos t + tr\sin t, r\sin t - tr\cos t, 0]$$

je hlavní křivka plochy tečen šroubovice

$$\check{\mathbf{s}}(t) = [r\cos t, r\sin t, ct], c \neq 0.$$

(1 bod)

13. Je dána rotační kuželová plocha $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, qu]$.

   - Ukažte, že křivka $u(t) = t, v(t) = v_0 \in \mathbb{R}$ je geodetikou plochy $\mathbf{p}$.
   - Ukažte, že křivka $u(t) = u_0 \in \mathbb{R}$, $v(t) = t$ není geodetikou plochy $\mathbf{p}$.

(0,5 bodu)

14. Ověřte zda platí $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$ pro poledníky a obecné rovnoběžky rotační plochy

$$\mathbf{p}(u,v) = [x(u)\cos v, x(u)\sin v, u]$$

kde $u \in I, v \in (0, 2\pi)$ a $x(u) \neq 0$ pro $u \in I$. A rozhodněte, kdy se jedná o geodetiky v závislosti na vlastnostech funkce $x(u)$. *(0,5 bodu)*

15. Ověřte zda šroubovice $\check{\mathbf{s}}_c(t) = [r\cos t, r\sin t, ct]$ pro $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ ležící na válcové ploše

$$\mathbf{p}(u,v) = [r\cos u, r\sin u, v]$$

mají normálu kolnou na plochu $\mathbf{p}$ a jsou geodetikami válcové plochy. *(0,5 bodu)*