Geometrie, NMAG204 13/14
cvičení 6

První fundamentální forma plochy S s mapou $\mathbf{p}(u,v)$ je v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}.$$

Délka křivky $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ na ploše s mapou $\mathbf{p}$ je

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{u}, \dot{v}) G (\dot{u}, \dot{v})^T} \, \mathrm{d}\, t,$$

Úhel křivek $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{p}(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$ v jejich společném bodě na ploše s mapou $\mathbf{p}$ je

$$\cos\alpha = \frac{(\dot{u}, \dot{v}) G (\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})^T}{\sqrt{(\dot{u}, \dot{v}) G (\dot{u}, \dot{v})^T} \sqrt{(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}) G (\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})^T}}.$$

Plošný integrál prvního druhu z f přes plochu S, která je pokryta mapou $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$,

$$\int_S f \, \mathrm{d}S := \int_\mathcal{O} f |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_\mathcal{O} f \sqrt{\det G} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Velikost plochy

$$\int_S 1 \, \mathrm{d}S = \iint \sqrt{detG} dudv.$$

Druhá fundamentální forma II_s orientované plochy S v bodě s s jednotkovou normálou $\mathbf{N}_s$ je kvadratická forma definovaná na tečném prostoru T_sS následujícím způsobem: Nechť $\mathbf{w} \in T_sS$ a $\mathbf{c}(t)$ libovolná křivka na ploše S taková, že $\mathbf{c}(t_0) = s$ a $\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{w}$:

$$II_s(\mathbf{w}) := \ddot{\mathbf{c}}(t_0) \cdot \mathbf{N}_s.$$

Je-li $\mathbf{p}(u,v)$ mapa, pak je druhá fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

Pokud je $\mathbf{c}$ obloukem parametrizovaný **normálový řez** (tedy průnik plochy S s rovinou $s + \langle \mathbf{N}_s, \mathbf{w} \rangle$), pak křivost $\mathbf{c}$ v bodě s je rovna $II_s(\mathbf{w})$.

Normálová křivost plochy S v bodě s ve směru $\mathbf{w}$

$$\kappa_n(\mathbf{w}) := \frac{II(\mathbf{w})}{I(\mathbf{w})}.$$

Hlavní křivosti Minimum κ_1 a maximum κ_2 normálové křivosti a odpovídající směry se nazývají **hlavní směry**. Hlavní křivosti a hlavní směry vyjádřené v souřadnicích vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ nalezneme jako řešení rovnice s neznámými λ a $(a,b)^T$

$$(H - \lambda G) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

Eulerova formule V každém bodě $s \in S$ existují dva navzájem kolmé hlavní směry $\langle \mathbf{w}_1 \rangle$ (s minimální normálovou křivostí κ_1) a $\langle \mathbf{w}_2 \rangle$ (s maximální normálovou křivostí). Pro α úhel, který svírají vektory $\mathbf{w}$ a $\mathbf{w}_1$:

$$\kappa_n(\mathbf{w}) = \cos^2(\alpha)\kappa_1 + \sin^2(\alpha)\kappa_2,$$

Příklady

1. **[C]** Určete obecný tvar první fundamentální formy rotační plochy
$$\mathbf{p}(u,v) = [f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)], u \in (0, 2\pi), v \in I. \qquad \textit{(0,5 bodu)}$$

2. Rotací křivky $\mathbf{c}(u) = [a\cosh u, 0, au]$ kolem osy z vznikne katenoid. Určete první fundamentální formu katenoidu a vypočtěte délku křivky $u = v$ pro $u \in (0, \ln(1+\sqrt{2}))$. *(1 bodu)*

3. Jsou dány dvě křivky $\mathbf{c}_1(t_1)$ a $\mathbf{c}_2(t_2)$. Uvažujme plochu, kterou vytvoří středy úseček, jejichž koncové body leží po řadě na křivkách $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$. Najděte atlas této plochy a první fundamentální formu. *(0,5 bodu)*

4. Na ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 2u]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$ jsou dány křivky

   (a) $k_1 : u(t) = 3 - t, v(t) = t/2$ a $k_2 : u(t) = t, v(t) = t^2$, $t \in (0, \infty)$. *(0,5 bodu)*

   (b) $k_1 : u + v = 0$ a $k_2 : u - v = 0$. *(0,5 bodu)*

   Určete úhel křivek v jejich průsečíku.

5. Je dána mapa $\mathbf{p}(u,v)$ plochy s maticí první základní formy $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4+u^2 \end{pmatrix}$. Určete úhel křivek v dané mapě splňující $k_1 : u + v = 0$ a $k_2 : u - v = 0$. *(0,5 bodu)*

6. Na ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ je dána křivka
$$k : u(v) = e^{\frac{v \operatorname{cotg} \beta}{\sqrt{2}}}, \ \beta \in \mathbb{R}.$$
   Vypočtěte délku křivky k mezi body $v = 0$ a $v = \pi$. Dále ukažte, že konstanta β vyjadřuje velikost úhlu, který svírá k s parametrickými křivkami $v =$ konst. plochy. *(1 bod)*

7. Vypočítejte plošný integrál prvního druhu

   (a) $\int_S xz\, dS$ přes plochu $S = [\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u]$, $v,\ u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *(0,5 bodu)*

   (b) $\int_S \frac{x}{\sqrt{y^2+2z+2}}\, dS$ přes plochu $S = [u+v, u-v, uv]$, $v,\ u \in [0,1]$ *(0,5 bodu)*

8. Určete obsah plochy zadané rovnicí $x^2 + y^2 = z$, kde $z \leq 1$. *(0,5 bodu)*

9. Pomocí první fundamentální formy vypočtěte obsah

   (a) kulové plochy o poloměru r, *(0,5 bodu)*

   (b) válcové plochy o poloměru r a výšce v, *(0,5 bodu)*

   (c) toru o poloměrech R, r. *(0,5 bodu)*

10. Sférická kružnice se středem $s \in S^2$ a poloměrem R je množina bodů S^2 majících sférickou vzdálenost (po hlavní kružnici) R od s. Ukažte, že pokud $0 \leq R \leq \frac{\pi}{2}$, platí:

    (a) Sférická kružnice o poloměru R je kružnice o poloměru $\sin R$. *(0,5 bodu)*

    (b) Plocha ohraničená sférickým kruhem o poloměru R je $2\pi(1 - \cos R)$. *(0,5 bodu)*

11. Pro nenulový reálný parametr a je dána plocha $\mathbf{p}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, av]$, $u \in (0, \infty)$, $v \in \mathbb{R}$. Na této ploše určete délku křivky dané v parametrech rovnicí $v = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})$. Dále určete obsah části $\mathbf{p}(\Omega)$ této plochy, kde $\Omega : (u,v) \in (0,a) \times (0,1)$. *(1 bod)*

12. Na válcové ploše s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [r\cos u, v, r\sin u]$, $r \in \mathbb{R}^+$ je poloměr, $v \in \mathbb{R}$, $u \in (0, 2\pi)$ je dána třída šroubovic $\mathbf{c}(u) = \mathbf{p}(u, au + k)$, $a, k \in \mathbb{R}$. Najděte křivky ležící na této válcové ploše, které budou kolmé na všechny $\mathbf{c}(u)$. *(1 bod)*

13. Na toru s mapou $\mathbf{p}(u,v) = [(R+r\sin u)\cos v, (R+r\sin u)\sin v, r\cos u]$, $u, v \in (0, 2\pi)$ a $R > r$ pomocí první základní formy plochy vypočtěte délky parametrických křivek $k_1 : u =$ konst. a $k_2 : v =$ konst. procházejících bodem $[R + r, 0, 0]$. *(0,5 bodu)*

14. **[C]** V libovolném bodě sféry $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ určete normálovou křivost v obecném směr, hlavní křivosti a hlavní směry. *(0,5 bodu)*

15. V libovolném bodě plochy $x\sin z - y\cos z = 0$ vypočítejte normálovou křivost v obecném směru a hlavní křivosti. *(0,5 bodu)*

16. V obecném bodě určete hlavní křivosti na kuželové ploše. *(0,5 bodu)*

17. Určete hlavní křivosti a hlavní směry v libovolném bodě toru s mapou

$$\mathbf{p}(u,v) = [(R + r\sin u)\cos v, (R + r\sin u)\sin v, r\cos u], \ u, v \in (0, 2\pi) \text{ a } R > r.$$

(0,5 bodu)

18. Určete první a druhou fundamentální formu plochy nějaké mapy elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Najděte body, kde se obě hlavní křivosti rovnají. *(1 bod)*