Lineární algebra pro fyziky - ZS 10/11

Početní test - vzor

1. Lineární zobrazení $f : P^2(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ je dáno předpisem $[f(p)](x) = p'(x+1) - 2p''(x)$. Kanonickou bází prostoru $P^k(\mathbb{R})$ myslíme množinu $\{1, x, \dots, x^k\}$.
   (a) Najděte matici zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $P^2(\mathbb{R})$ a $P^1(\mathbb{R})$. (1b)
   (b) Najděte matici f vzhledem k bázi $B = \{x^2 - 1, x^2 + 1, x\}$ prostoru $P^2(\mathbb{R})$ a bázi $B' = \{3x + 1, 2x + 1\}$ prostoru $P^1(\mathbb{R})$. (2b)
   (c) Souřadnice polynomu $p \in P^2(\mathbb{R})$ vzhledem k bázi B jsou $(1, -2, 1)$. Napište polynom $f(p)$. (1b)
   (d) Určete jádro a hodnost homomorfismu f. (1b)
2. Uvažujme soustavu rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   (a) Určete všechna $a \in \mathbb{R}$, pro něž má tato soustava právě jedno řešení. (1b)
   (b) Najděte řešení pro a z předchozího bodu. (1b)
   (c) Určete všechna $a \in \mathbb{R}$, pro něž soustava namá žádné řešení. (1b)
   (d) Pro všechna ostatní $a \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy. (2b)
3. V prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem uvažujme podprostor

$$W = \langle (1, 1, 1, 1), (3, 0, 0, 1), (4, -1, 3, -2) \rangle$$

   (a) Najděte nějakou ortogonální bázi W. (2b)
   (b) Najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku W. (1b)
   (c) Najděte nějakou ortonormální bázi $\mathbb{R}^5$ obsahující bázi z prvního bodu. (1b)
   (d) Napište matici ortogonální projekce $P_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ na podprostor W vzhledem ke kanonickým bázím. (1b)