Lineární algebra pro fyziky - LS 10/11

Sada úkolů 2

1. Nechť $W' = \langle \varepsilon^1 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4, \varepsilon^1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^5, \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5 \rangle \leq (\mathbb{R}^5)^*$. Popište všechny vektory z $\mathbb{R}^5$, které patří do jádra všech kovektorů z W'.
2. Najděte duální bázi k bázi $\{(1,1,1),(2,1,1),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
3. Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
matice bilineární formy vzhledem k M. Najděte její matici vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
4. Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,
$$(((T_1)_{jk}),((T_1)_{jk})) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
souřadnice tenzoru $T \in T^1_2(\mathbb{R}^2)$ vzhledem k M, definované předpisem $(T_i)_{jk} := T^i_{jk}$. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
5. Nechť $a = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ se skalárním součinem
$$g = \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1 + 2\varepsilon^2 \otimes \varepsilon^2$$
Definujme tenzor typu $(2,1)$
$$T(u,v,\psi) = g(a,u)\psi(v)$$
Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Pomocí zdvihu/spuštění indexu převeďte T na kovariantní tenzor a spočtěte souřadnice jeho úplné antisymetrizace vzhledem ke kanonické bázi.
6. Nechť $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je endomorfismus definovaný vztahy $\phi((3,2)) = (1,1,0)$, $\phi((4,3)) = (1,0,-1)$. Určete matici duálního endomorfizmu vzhledem ke kanonické bázi a bázi $\{2\varepsilon^1 - \varepsilon^2, 3\varepsilon^1 - \varepsilon^2\}$.