

Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 5 - Exponenciála

1. Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

2. Určete

$$\exp \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2 \end{aligned}$$

s obecnou poč. podmínkou.

4. Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_3 \\ x_2' &= x_1 - x_3 \\ x_3' &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = -1$.

5. Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$. Řešení zapište bez užití komplexních čísel.

6. Obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

převeďte substitucí $z(t) := y'(t)$ na soustavu dvou rovnic prvního řádu. Rovnici vyřešte pro případ $a = 2$, $b = 1$.

7. Dokažte, že pro hermitovskou matici H je matice $\exp(iH)$ unitární. Použijte definici exponenciály.

8. Určete

$$\sin \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$