Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 6 - Duální prostor

1. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou lineární formy:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(a,b) = a + bi$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2}$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a,b) = 1 + 2a + 3b$
   (d) $F_x : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, kde $C^\infty(M,\mathbb{R})$ je vektorový prostor všech reálných hladkých funkcí na množině M, $F_x(f) = f(x)$, kde $x \in M$.
   (e) $F : M^{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A$
2. Nechť $W = \langle (1,1,2,1), (3,1,2,1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Popište všechny lineární formy, které vymizí na celém W.
3. Nechť $W' = \langle \varepsilon^1 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4, \varepsilon^1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^5, \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5 \rangle \leq (\mathbb{R}^5)^*$. Popište všechny vektory z $\mathbb{R}^5$, které patří do jádra všech prvků W'. Symboly ε^i označují prvky duální kanonické báze.
4. Nechť $M = \{(1,1), (1,-1)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, najděte souřadnice $\alpha := \varepsilon^1 + 2\varepsilon^2$ vzhledem k M. Symboly ε^i označují prvky duální kanonické báze.
5. Najděte duální bázi k bázi $\{(3,-5), (-2,3)\} \subset \mathbb{R}^2$.
6. Najděte bázi $M \subset \mathbb{R}^2$, k níž je báze $\{3\varepsilon^1 - \varepsilon^2, -8\varepsilon^1 + 3\varepsilon^2\}$ duální. Symboly ε^i označují prvky duální kanonické báze.
7. V prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem uvažujme vektory $u_1 = (4,1)$, $u_2 = (3,1)$ a definujme kovektory $e^i(v) := (u_i, v)$ pro $i = 1,2$. Najděte bázi duální k $\{e^1, e^2\}$.
8. Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ uvažujme lineární formy $e^i : p(x) \mapsto p^{(i)}(0)$, $i \in \{0,1,2\}$. Dokažte, že $\{e^0, e^1, e^2\}$ je báze a najděte bázi k ní duální.