Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 9 - Sylvestrovo kritérium a tenzory

1. Určete signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$$

2. Určete $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, aby kvadratická forma Q na $\mathbb{R}^3$ byla pozitivně definitní, přičemž

$$Q(u) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + \lambda x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

3. Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$ s maticí vzhledem ke kanonické bázi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^2$ dané vztahem

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2$$

5. Zapište matici

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

jako součin U^TU.

6. Určete signaturu blokové $2n \times 2n$ matice

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková $n \times n$ matice.

7. Najděte souřadnice bivektoru $(1,1) \otimes (1,3)$ vzhledem k bázi $M = \{(1,2),(-2,-5)\}$.

8. Označme $K^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ duální kanonickou bázi v $(\mathbb{R}^2)^*$ a definujme tři kovektory

$$\alpha = \varepsilon^1 + 2\varepsilon^2$$
$$\beta = \varepsilon^1 - \varepsilon^2$$
$$\gamma = \varepsilon^2$$

Určete souřadnice trilineární formy $\alpha \otimes \beta \otimes \gamma$ vzhledem k bázi $\{(1,2),(1,3)\}$.