

Lineární algebra pro fyziky
Požadavky k zápočtu a zkoušce LS 2015/16

1. POČETNÍ POSTUPY

- Výpočet souřadnic lineární a bilineární formy, jejich transformace při změně báze, hledání polární báze symetrickými úpravami. Ověření, že je něco skalární součin, hledání ortogonálního doplňku, určení ortogonální projekce vektoru na podprostor. Hledání ortogonální a ortonormální báze Gram-Schmidtovou ortogonalizací, výpočet Fourierových koeficientů, QR rozklad (i obdélníkové) matice.
- Matice adjungovaného operátoru, aproximativní řešení lineárních rovnic, matice projekce na sloupcový prostor matice. Ortogonální/unitární diagonalizace normálního, tedy speciálně i samosdruženého a unitárního operátoru.
- Určení signatury a ortogonální/neortogonální polární báze kvadratické formy. Nalezení nulové množiny kvadratické formy. Určení a transformace souřadnic bodu vůči afinní bázi. Určení typu kvadriky (regulární v $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, singulární v $\mathbb{R}^2$, i jen pomocí signatur), nalezení kanonického tvaru, význačných bodů, směrů a délek v kvadrice.
- Hledání Jordanova tvaru a Jordanovy báze endomorfismu/matice. Výpočet mocnin matice, test podobnosti matic. Výpočet exponenciály matice. Homogenní soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty.
- Hledání duální báze, výpočet a transformace souřadnic vektoru a kovektoru. Výpočet souřadnic tenzorů, transformace souřadnic tenzorů typu $(2, 0)$, $(1, 1)$ a $(0, 2)$.

2. TEORETICKÉ ZNALOSTI

- Multilineární zobrazení, multilineární forma, lineární forma, bilineární forma, seskvilineární forma, jejich souřadnice, symetrická a antisymetrická bilineární forma. Polární báze, věta o její existenci. Skalární součin na reálném a komplexním prostoru, kolmost, ortogonální doplněk, norma a metrika (obecně i indukované skalárním součinem), ortogonální projekce na vektor a podprostor, její vlastnosti a maticové vyjádření. Pythagorova věta, Schwarzova nerovnost, rovnoběžníkové pravidlo, polarizační identita, velikost a úhel vektorů. Ortogonální a ortonormální báze, Parsevalova rovnost, Fourierovy koeficienty. Věta o Gram-Schmidtově ortogonalizaci, věta o QR rozkladu. Unitární a ortogonální matice.
- Adjungovaný operátor, vlastnosti adjunkce. Normální soustava, aproximativní řešení lineárních rovnic. Samosdružený operátor, unitární operátor, normální operátor, věta o ortogonální/unitární diagonalizaci, spektrální rozklad, vlastní čísla samosdruženého a unitárního operátoru. Různé ekvivalentní charakterizace unitárních operátorů.
- Kvadratická forma, její matice, nulová množina, signatura, polární báze, pozitivně/negativně (semi)definitní kvadratická forma. Ortogonální a neortogonální diagonalizace kvadratických forem. Jacobi-Sylvesterova věta. Afinní prostor, jeho zaměření, příklady, aritmetický afinní prostor, afinní nadrovina, afinní zobrazení, afinní báze, transformace souřadnic vůči ní. Euklidovský prostor, vzdálenost bodů v něm. Kvadrika, její kanonický tvar, klasifikace regulárních kvadrik, střed elipsoidu a hyperboloidu, směr osy paraboloidu.

- Jordanova buňka, Jordanova báze, věta o Jordanově tvaru matice/endomorfismu, zobecněný vlastní podprostor. Nilpotentní endomorfismus a jeho charakterizace pomocí vlastních čísel, stupeň nilpotence, řetízková báze. Nutná a postačující podmínka podobnosti matic. Limita posloupnosti matic, exponenciála matice, její vlastnosti. Věta o řešení homogenní i nehomogenní soustavy lineární diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty.
- Duální prostor, duální báze. Sumační konvence, transformace souřadnic vektoru a kovektoru. Tenzorový součin, souřadnice tenzoru a jejich transformace, kovariantní a kontravariantní tenzory. Věta o izomorfismu mezi prostorem a jeho druhým duálem. Příklady tenzorů nízkého stupně (tj. typu $(0,1), (1,0), (2,0), (0,2), (1,1)$). Izomorfismus prostoru a jeho duálu indukovaný skalárním součinem, zdvihání a spouštění indexu, metrický tenzor a duální metrický tenzor, kontrakce tenzoru.

Vyžadují se samozřejmě také znalosti témat z požadavků na zimní semestr. Polární rozklad a symetrizace a antisymetrizace tenzorů se nevyžadují, stejně jako pojem duálního homomorfismu.