

Lineární algebra pro fyziky
Požadavky k zápočtu a zkoušce LS 2013/14

1. POČETNÍ POSTUPY

- Určení charakteristického polynomu, vlastních čísel a vektorů, báze z vlastních vektorů, diagonalizace matice. Hledání Jordanova tvaru a Jordanovy báze endomorfismu/matice. Výpočet mocnin matice, test podobnosti matic. Výpočet exponenciály matice. Homogenní a nehomogenní soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty.
- Výpočet souřadnic lineární a bilineární formy, jejich transformace při změně báze, hledání polární báze symetrickými úpravami. Ověření, že je něco skalární součin, hledání ortogonálního doplňku, určení ortogonální projekce vektoru na podprostor. Hledání ortogonální a ortonormální báze Gram-Schmidtovou ortogonalizací, výpočet Fourierových koeficientů, QR rozklad (i obdélníkové) matice.
- Matice adjungovaného operátoru. Ortogonální/unitární diagonalizace samosdruženého a unitárního operátoru. Polární rozklad operátoru, výpočet signatury operátoru.
- Určení signatury a ortogonální/neortogonální polární báze kvadratické formy.
- Hledání duální báze, výpočet a transformace souřadnic tenzoru.

2. TEORETICKÉ ZNALOSTI

- Vlastní číslo/vektor/podprostor matice/endomorfizmu, charakteristický polynom, spektrum, báze z vlastních vektorů, diagonalizace matice. Cayleyova-Hamiltonova věta. Kritérium diagonalizovatelnosti matice. Chování charakteristického polynomu, spektra, stopy, determinantu, hodnoty vůči podobnosti. Souvislost vlastních čísel a stopy/determinantu matice. Současná diagonalizovatelnost matic.
- Jordanova buňka, Jordanova báze, věta o Jordanově tvaru matice/endomorfismu, zobecněný vlastní podprostor. Nilpotentní endomorfismus a jeho charakterizace pomocí vlastních čísel, stupeň nilpotence, řetězková báze. Nutná a postačující podmínka podobnosti matic. Limita posloupnosti matic, exponenciála matice, její vlastnosti. Věta o řešení homogenní a nehomogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty.
- Multilineární zobrazení, multilineární forma, lineární forma, bilineární forma, jejich souřadnice, symetrická a antisymetrická bilineární forma. Polární báze, věta o její existenci. Skalární součin na reálném a komplexním prostoru, kolmost, ortogonální doplněk, norma a metrika (obecné i indukované skalárním součinem), ortogonální projekce na vektor a podprostor. Pythagorova věta, Schwarzova nerovnost, rovnoběžníkové pravidlo, polarizační identita. Ortogonální a ortonormální báze, Parsevalova rovnost, Fourierovy koeficienty. Věta o Gram-Schmidtově ortogonalizaci, věta o QR rozkladu. Unitární a ortogonální matice.
- Adjungovaný operátor, vlastnosti adjunkce. Samosdružený operátor, unitární operátor, normální operátor, věta o ortogonální/unitární diagonalizaci, vlastní čísla samosdruženého a unitárního operátoru. Různé ekvivalentní charakterizace unitárních operátorů. Pozitivně/negativně (semi)definitní operátor, signatura. Modul operátoru, polární rozklad.
- Kvadratická forma, její matice, nulová množina, signatura, polární báze. Ortogonální a neortogonální diagonalizace kvadratických forem. Jacobi-Sylvesterova věta.

- Duální prostor, duální báze. Sumační konvence, transformace souřadnic vektoru a kovektoru. Tenzorový součin, souřadnice tenzoru a jejich transformace, kovariantní a kontravariantní tenzory. Věta o izomorfismu mezi prostorem a jeho druhým duálem. Příklady tenzorů nízkého stupně (tj. typu $(0,1), (1,0), (2,0), (0,2), (1,1)$). Zvyšování a snižování indexů, duální homomorfismus, jeho vztah k adjungovanému homomorfismu.

Vyžadují se samozřejmě také znalosti témat z požadavků na zimní semestr.