

Lineární algebra pro fyziky
Požadavky k zápočtu a zkoušce ZS 2014/15

1. POČETNÍ POSTUPY

- Řešení soustav rovnic Gaussovou eliminací, homogenních i nehomogenních, zápis řešení pomocí lineárního obalu. Určení existence a počtu řešení pomocí hodnoty matice. Řešení soustav rovnic závislých na parametru nebo parametrech.
- Maticové rovnice tvaru $AX = 0$, $AX = B$, $XA = B$, převádění jiných maticových rovnic na některý z těchto tvarů. Výpočet inverzní matice.
- Počítání s vektory v \mathbb{F}^n , $P(x, \mathbb{F})$, $M_{mn}(\mathbb{F})$. Určení, zda vektor patří do podprostoru. Vyjádření podprostoru zadaného homogenní soustavou jako lineárního obalu a naopak. Nalezení průniku podprostorů zadaných homogenní soustavou, množinou generátorů nebo kombinovaně.
- Ověření, zda je zadaná množina lineárně nezávislá, výběr největší lineárně nezávislé podmnožiny. Ověření, zda zadaná množina generuje vektorový prostor, doplnění množiny na generující množinu. Ověření, zda je množina báze, nalezení báze zadaného prostoru, doplnění množiny na bázi, výběr báze z množiny, určení dimenze. Určení dimenze spojení a průniku podprostorů. Nalezení báze a dimenze řádkového, sloupcového a nulového prostoru matice, určení hodnoty matice (v závislosti na parametru).
- Ověření, že je zadané zobrazení lineární, výpočet jeho jádra a obrazu, rozhodnutí, zda je to epimorfismus, monomorfismus, izomorfismus. Určení matice homomorfismu, pokud je homomorfismus zadán různými způsoby (hodnotami na bázi, předpisem pro obecný vektor, maticí vůči nějakým bázím). Určení matice přechodu a transformace souřadnic vektoru do jiné báze.
- Složení permutací, rozklad na nezávislé cykly, rozklad na transpozice, určení znaménka permutace. Výpočet determinantu elementárními úpravami a rozvojem podle řádku/sloupce. Výpočet inverzní matice pomocí determinantů, použití Cramerova pravidla.
- Určení charakteristického polynomu, vlastních čísel a vektorů, báze z vlastních vektorů, diagonalizace matice. Výpočet mocniny matice pomocí diagonalizace.

2. TEORETICKÉ ZNALOSTI

- Matice, matice soustavy, rozšířená matice soustavy, čtvercová matice, jednotková matice, diagonální matice, (striktně) horní/dolní trojúhelníková matice, matice v (redukovaném) odstupňovaném tvaru. Definice regulární a singulární matice, inverzní matice, transponované matice, symetrické a antisymetrické matice. Elementární úpravy a jejich maticové vyjádření. Komutování matic, stopa matice, sčítání, násobení a mocnění matic. Jednoznačnost inverzní matice, invertování a transponování součinu matic, inverze transponované matice.
- Definice grupy, ověření, že je daná množina s operací grupa. Definice vektorového prostoru, vektorové prostory \mathbb{F}^n , $P(x, \mathbb{F})$, $M_{mn}(\mathbb{F})$, $F(M, \mathbb{F})$. Definice podprostoru, ověření, že je podmnožina podprostorem. Definice lineární kombinace, lineárního obalu, spojení a průniku podprostorů, direktního součtu. Věta o jednoznačnosti zápisu vektoru z direktního součtu pomocí vektorů z jednotlivých sčítanců. Doplněk podprostoru.
- Pojmy lineární (ne)závislosti, množiny generátorů, konečně generovaného prostoru, báze, dimenze. Existence konečné báze, Steinitzova věta a její důsledky. Věta o dimenzi spojení a průniku, věta o dimenzi direktního součtu.

- Řádkový, sloupcový a nulový prostor matice, hodnost matice. Věta o hodnosti transponované matice, věta o hodnosti a nulitě, Frobeniova věta. Chování hodnosti při násobení matic, souvislost hodnosti a regularity matice.
- Maticové zobrazení, lineární zobrazení, jejich souvislost a vlastnosti těchto zobrazení. Jádro, obraz, hodnost a nulita zobrazení. Pojmy epimorfismus, monomorfismus, izomorfismus, endomorfismus, automorfismus. Věta o dimenzi jádra a obrazu. Věta o zachovávání dimenze při izomorfismu, konstrukce izomorfismu mezi dvěma vektorovými prostory stejné dimenze, souřadnice. Věta o zadání homomorfismu hodnotami na bázi. Matice homomorfismu a její vlastnosti, matice přechodu a její vlastnosti. Transformační formule pro změnu matice homomorfismu při změně báze, konjugování, podobnost matic. Prostory $\text{Hom}(V, W)$ a $\text{End}(V)$ a jejich dimenze.
- Grupa permutací, cyklus, transpozice, znaménko permutace a jeho vyjádření pomocí inverzí a transpozic. Chování znaménka vůči skládání permutací. Definice determinantu, jeho vlastnosti, souvislost s regularitou, chování vůči součinu matic a inverzi matice. Věta o rozvoji determinantu podle řádku, determinantová formule pro inverzní matici, Cramerovo pravidlo.
- Vlastní číslo/vektor/podprostor matice/endomorfismu, charakteristický polynom, spektrum, báze z vlastních vektorů, diagonalizace matice. Cayleyova-Hamiltonova věta. Kritérium diagonalizovatelnosti matice. Chování charakteristického polynomu, spektra, stopy, determinantu, hodnosti vůči podobnosti. Souvislost vlastních čísel a stopy/determinantu matice.