Lineární algebra pro fyziky

Zápisky z přednášek

Dalibor Šmíd

Část 1

První semestr

KAPITOLA 1

Soustavy lineárních rovnic

1. Úvod

Nejjednodušší lineární rovnicí je

$$2x - y = 3$$

Popisuje přímku v rovině. Podobně

$$2x + 3y + z = 1 \tag{1}$$

je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Obojí můžeme popsat parametricky, například

$$\begin{aligned} y &= t \\ x &= \frac{1}{2}(3 + t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} z &= t \\ y &= s \\ x &= \frac{1}{2}(1 - 3s - t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

je vlastně úloha na průsečík dvou přímek, jímž je v tomto případě bod $(x, y) = (2, 1)$. Můžeme se na ni ale dívat také jako na hledání čísel x a y, která splňují vektorovou rovnost

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výraz nalevo je lineární kombinace sloupcových vektorů s koeficienty x a y. Už víme, že správné koeficienty, s nimiž se pravá strana bude rovnat levé, jsou $x = 2$ a $y = 1$.

Oba dva pohledy na soustavu rovnic, řádkový i sloupcový, v sobě kombinuje maticový zápis

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

který budeme od této chvíle používat. Matice 2×2 se nazývá maticí soustavy lineárních rovnic.

Soustava tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

odpovídá úloze na hledání průniku tří rovin, první z nich je rovina popsaná rovnicí 1. Jedno řešení snadno odhalíme ze sloupcového tvaru: třetí sloupec matice soustavy je

stejný jako sloupec pravých stran, takže lineární kombinace s koeficienty $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ je určitě správně. Je to jediná možnost? Když se podíváme na první dva sloupce, vidíme, že dvojnásobek prvního minus druhý dávají také sloupec pravých stran. Dalším řešením je tedy $(x, y, z) = (2, -1, 0)$. Je také snadno vidět, že každý vektor tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

je řešením, což je vlastně parametrický popis přímky. Průnikem tří rovin může být buď prázdná množina, bod, přímka nebo rovina. První dvě možnosti už jsme vyloučili a poslední také nenastane, protože to by musely všechny tři rovnice popisovat tuto jednu stejnou rovinu, což zjevně není pravda. Tedy přímka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

je úplným řešením soustavy rovnic 2.

1.1. Cvičení.

(1) Najděte průnik rovin $x - y + z = 1$ a $2x + z = 1$.
(2) Zjistěte, zda vektor $(1, 1, 1)$ je lineární kombinací vektorů $(-1, 2, 1)$ a $(3, -1, 1)$.
(3) Najděte kvadratický polynom, který prochází body $[0, 1]$, $[1, 0]$ a $[2, 1]$.
(4) Najděte všechny kvadratické polynomy, které procházejí body $[-1, 1]$ a $[1, 3]$.

2. Vlastnosti řešení soustav

Chceme se naučit řešit soustavy rovnic bez hádání a bez nutnosti se odvolávat na geometrickou intuici. Nejprve zavedeme potřebné pojmy.

DEFINICE 1. **Lineární rovnicí** s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \text{ zkráceně } \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

kde **koeficienty** $a_j, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a **pravá strana** b jsou zadaná reálná nebo komplexní čísla a řešení hledáme také v $\mathbb{R}$, respektive v $\mathbb{C}$. Pokud je rovnic více, řekněme m, mluvíme o **soustavě lineárních rovnic**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Každá n-tice čísel $(x_1, \ldots, x_n)$, která splňuje všech m rovnic, je **řešením soustavy rovnic**.

Tabulka

$$A \equiv (a_{ij})_{1,1}^{m,n} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **matice soustavy** a

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

je **rozšířená matice soustavy**. Sloupec, který přibyl, se nazývá **sloupec pravých stran**. Pokud je celý nulový, nazývá se soustava **homogenní**, v opačném případě **nehomogenní**. **Maticovým zápisem soustavy** budeme rozumět zápis $Ax = b$ neboli

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right)$$

Pokud má soustava $Ax = b$ matici

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right),$$

je vlastně vyřešená, protože musí být $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$. O mnoho složitější není ani případ

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{array}\right),$$

protože z druhé rovnice máme $x_2 = b_2$, což dosadíme do první: $x_1 = b_1 - a_{12}b_2$.

Pojďme přidat jednu neznámou. Soustava s maticí

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \end{array}\right),$$

je splněna pro $x_3 = t$, $x_2 = b_2 - a_{23}t$, $x_1 = b_1 - a_{13}t$, kde t je libovolné. Jakmile jsme položili x_3 rovné parametru, obsahovala už každá z rovnic jen jednu neznámou, které jsme mohli v libovolném pořadí dopočíst. Kdyby koeficient a_{12} nebyl nulový, museli bychom nejprve určit x_2 a až pak dosazením x_1:

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= b_2 - a_{23}t \\ x_1 &= b_1 - a_{13}t - a_{12}(b_2 - a_{23}t) \end{aligned}$$

neboli

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1 - a_{12}b_2 \\ b_2 \\ 0 \end{array}\right) + t \left(\begin{array}{c} a_{12}a_{23} - a_{13} \\ -a_{23} \\ 1 \end{array}\right), t \in \mathbb{R}$$

Pokusme se charakterizovat matice soustav, které se dají řešit takto jednoduše:

Definice 2. Řekneme, že matice $A = (a_{ij})_{1,1}^{m,n}$ má **odstupňovaný tvar**, pokud jsou splněny tyto podmínky

(1) Existuje celé číslo $0 \leq k \leq m$ takové, že pro všechna $i > k$ a všechna j je $a_{ij} = 0$.
(2) Existují přirozená čísla $1 \leq j_1 < j_2 < \dots j_k \leq n$ taková, že pro všechna $i \leq k$ a pro všechna $p < j_i$ je $a_{ip} = 0$ a $a_{ij_i} \neq 0$.

Matice má redukovaný odstupňovaný tvar, pokud navíc pro všechna $i \leq k$ a všechna $q < i$ je $a_{ij_i} = 1$ a $a_{qj_i} = 0$. Sloupce s pořadovými čísly $j_1, \dots, j_k$ se označují jako **pivotní sloupce** a elementy a_{ij_i} jako **pivoty.**

V normálním jazyce první podmínka říká, že všechny řádky matice až na prvních k jsou nulové. Druhá podmínka znamená, na každém z prvních k řádků je jeden koeficient, pivot, který je charakterizován vlastností, že je nenulový a všechny koeficienty před ním jsou nulové, a že každý další pivot má ostře vyšší sloupcový index než ten předchozí. To je ta odstupňovanost. Redukovaná odstupňovanost navíc požaduje, aby pivot byl jedna a všechna čísla nad pivotem byly nuly, tedy pivot je jediným nenulovým koeficientem v daném pivotním sloupci.

Matice v redukovaném odstupňovaném tvaru vypadá třeba takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Když si k ní doplníme nějakou pravou stranu

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right),$$

můžeme rovnou psát řešení

$$\begin{aligned} x_6 &= t \\ x_5 &= 4 + 2t \\ x_4 &= s \\ x_3 &= r \\ x_2 &= 2 - 3r + s + 3t \\ x_1 &= 9 + 2r + 2s + 3t \\ \forall r, s, t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že pokud bychom zvolili sloupec pravých stran nulový, pak by první sloupcový vektor v řešení, jeho absolutní člen, byl také nulový. Řešení homogenních rovnic tedy mají speciální vlastnosti:

VĚTA 1. *Nechť vektory $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic $Ax = 0$. Pak*

(1) *$x' + x''$ je řešením soustavy rovnic $Ax = 0$.*
(2) *$\forall r \in \mathbb{R}$ je rx' řešením soustavy rovnic $Ax = 0$.*

DŮKAZ. Pokud je x', řešením soustavy, pak $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j = 0$ pro všechna i, podobně pro x''. Pak tedy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j + x''_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x''_j = 0 + 0 = 0$$

Podobně se dokáže druhé tvrzení. □

Všimněme si také, že změna pravé strany se projeví pouze změnou absolutního členu řešení, na zbylé tři vektory nemá vliv. I to můžeme vyjádřit obecným tvrzením:

VĚTA 2. *Nechť x', x'' jsou řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$. Pak $y = x'' - x'$ je řešením homogenní soustavy $Ax = 0$. Naopak, pokud x' je řešením nehomogenní soustavy $Ax = b$ a y je řešením homogenní soustavy $Ax = 0$, pak $y + x'$ je řešením nehomogenní soustavy $Ax = b$.*

DŮKAZ. Máme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x''_j = b_i - b_i = 0,$$

tedy $x' - x''$ je řešením soustavy $Ax = 0$. Naopak, pokud platí $Ay = 0$ a $Ax' = b$, pak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y_j + x'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j = 0 + b_i = b_i,$$

tedy $y + x'$ je řešením $Ax = b$. □

Obecné řešení nehomogenní soustavy tedy můžeme získat z obecného řešení příslušné soustavy homogenní přičtením libovolného řešení soustavy nehomogenní, tzv. **partikulárního řešení**. V našem příkladě je obecným řešením homogenní soustavy množina

$$W_A := \left\{ r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

a partikulárním řešením vektor

$$x_P := \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obecné řešení nehomogenní soustavy pak můžeme zapsat jako $x_P + W_A$, čímž myslíme množinu součtů vektoru x_P se všemi prvky množiny W_A.

Všimněte si, že sloupcové vektory vystupující v řešení lze získat i rychleji než zaváděním parametrů a jejich vytýkáním před závorky. Partikulární řešení vznikne tak, že se za všechny neznámé, které odpovídají *nepivotním* sloupcům (tzv. **volné neznámé**), dosadí nuly. Každé ze zbývajících čísel pak určí jedna rovnice nehomogenní soustavy. Tři sloupce charakterizující řešení homogenní rovnice vzniknou obdobně dosazením trojic $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, resp. $(0, 0, 1)$ za volné neznámé a opět dopočtením zbývajících čísel, tentokrát samozřejmě z *homogenní soustavy.*

2.1. Cvičení.

(1) Najděte obecné řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

(2) Najděte obecné řešení nehomogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right),$$

(3) Najděte obecné řešení nehomogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right),$$

(4) Najděte obecné řešení homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 11 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

(5) Nechť x', x'' je řešením nehomogenní soustavy $Ax = b$. Jakou soustavu rovnic řeší vektor $x' + x''$?

3. Gaussova eliminace

Umíme tedy najít obecné řešení soustavy rovnic, ale zatím jen pokud od někoho dostaneme matici v redukovaném odstupňovaném tvaru. Pokud to štěstí nemáme, potřebujeme algoritmus, jak zadanou matici na tento tvar převést. Tento algoritmus se jmenuje Gaussova eliminace a dovolené kroky se nazývají elementární úpravy:

DEFINICE 3. Řekneme, že matice A' vznikne z matice A **elementární úpravou**, pokud A' vznikla z A buď

(1) vynásobením některého řádku nenulovým číslem, nebo
(2) tak, že k nějakému řádku A byl přičten libovolný násobek jiného řádku A, nebo
(3) změnou pořadí řádků, nebo
(4) doplněním nebo vynecháním řádku obsahujícího pouze nuly.

Je hned vidět, že pokud A' vznikne z A elementární úpravou, pak také A vznikne z A' elementární úpravou, jedná se tedy o symetrickou relaci. Je to také relace reflexivní, protože A vznikne z A elementární úpravou. Je to relace ekvivalence? A je ekvivalencí relace „vzniknout konečnou posloupností elementárních úprav“?

LEMMA 1. *Pokud rozšířená matice $(A'|b')$ vznikne z rozšířené matice $(A|b)$ elementární úpravou, pak mají příslušné soustavy rovnic stejnou množinu řešení.*

DŮKAZ. Potřebujeme ověřit, že každé řešení soustavy s rozšířenou maticí $(A|b)$ je zároveň řešením soustavy s rozšířenou maticí $(A'|b')$, a naopak, že každé řešení soustavy $(A'|b')$ je řešením soustavy $(A|b)$. Ve skutečnosti nám ale stačí jen jeden směr, protože "vzniknout elementární úpravou"je symetrická relace. Předpokládejme tedy, že n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vyhovuje rovnicím

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Pokud A' vznikne z A vynásobením k-tého řádku číslem $r \neq 0$, vidíme, že rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} r a_{kj} x_j = r b_k$$

je také splněna a ostatní rovnice se nezměnily, tedy

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j = b'_i$$

pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Podobně pokud A' vznikne přičtením s-násobku l-tého řádku do k-tého řádku, pak k-tá rovnice soustavy $(A'|b')$

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{kj}x_j = \sum_{j=1}^{n}(a_{kj} + sa_{lj})x_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + s\sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j = b_k + sb_l = b'_k$$

je splněna a ostatní rovnice zůstaly opět beze změn.

Změna pořadí rovnic samozřejmě množinu řešení nemění a nulové řádky odpovídají rovnicím splněným pro libovolnou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které tím pádem můžeme přidávat i ubírat bez omezení. □

Gaussova eliminace je následující posloupnost kroků:

(1) Najděme řádek, jehož první nenulový prvek je ze všech prvních nenulových prvků všech řádků v matici nejvíce vlevo. Pokud je takových více, můžeme vzít libovolný z nich. Označme si sloupcový index tohoto prvku k. To je možné pro každou nenulovou matici, nulová matice v odstupňovaném tvaru už je.
(2) Změňme pořadí řádků posunutím řádku nalezeného v předchozím bodě na první pozici. Pokud označíme vzniklou matici A, pak $a_{1k} \neq 0$ a zároveň $a_{ij} = 0$ pro libovolné i a pro všechna $j < k$. Zvolené a_{1k} se stane pivotem v budoucím odstupňovaném tvaru, proto se tomuto kroku říká **pivotace**.
(3) Pro $i = \{2, \ldots, m\}$ přičtěme do i-tého řádku $\left(-\frac{a_{ik}}{a_{1k}}\right)$-násobek prvního řádku. Po této posloupnosti elementárních úprav vznikne matice, která má na pozicích zmíněných v předchozím bodě stále nuly a navíc jsou nulové i všechny koeficienty v k-tém sloupci kromě pivotu.
(4) Aplikujme celý algoritmus na podmatici vzniklou vynecháním prvního řádku.

Je zřejmé, že tímto rekurzivním postupem převedeme libovolnou matici na matici v odstupňovaném tvaru. Na několika místech algoritmu máme určitou libovůli, na níž může záviset i výsledný odstupňovaný tvar.

Pro ilustraci zkusme vyřešit soustavu rovnic

$$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5$$
$$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9$$
$$3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15$$

Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a provedeme pivotaci:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Pod trojkou na prvním řádku chceme získat nuly, proto přičteme (-1)-násobek prvního řádku ke druhému. Poté aplikujeme celý algoritmus na druhý a třetí řádek:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Přičítali jsme $\left(-\frac{3}{2}\right)$-násobek druhého řádku ke třetímu. Matice je nyní v odstupňovaném tvaru. Odtud bychom mohli už získat řešení: zvolili bychom x_3 a x_4 za parametry a určením x_5, x_2 a x_1 postupným dosazováním odspoda. Už ale víme, že z redukovaného odstupňovaného tvaru lze řešení prakticky jen přečíst, takže se vyplatí dalšími úpravami matici na tento tvar převést:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

První matice vznikla přičtením (-2)-násobku třetího řádku ke druhému a (-6)-násobku třetího řádku k prvnímu. Další $\sim$ shrnuje opět dvě úpravy - násobení druhého řádku číslem $\frac{1}{2}$ a poté přičtení devítinásobku nového druhého řádku k prvnímu. Nakonec jen násobíme první řádek jednou třetinou a jsme hotovi. Řešení pak má tvar

$$\begin{pmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

který jsme opět zapsali ve tvaru „partikulární“ plus „řešení homogenní soustavy“.

Z odstupňovaného tvaru můžeme ihned usoudit na počet řešení, které soustava rovnic má:

Věta 3. *Nechť $(A|b)$ je rozšířená matice soustavy a rozšířená matice $(A'|b')$ v odstupňovaném tvaru z ní vznikne konečnou posloupností elementárních úprav. Pak soustava s rozšířenou maticí $(A|b)$ má řešení právě tehdy, když sloupec b' není pivotní. Pokud soustava s rozšířenou maticí $(A|b)$ má řešení, pak je toto řešení právě jedno, právě když všechny sloupce matice soustavy A' jsou pivotní. V opačném případě existuje nekonečně mnoho řešení soustavy.*

Důkaz. Pokud je sloupec b' pivotní, pak v matici $(A'|b')$ existuje řádek tvaru $(00\ldots0|b'_p)$, kde $b'_p \neq 0$. Takový řádek ale odpovídá rovnici, kterou nelze splnit pro žádnou n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$. Pokud naopak sloupec b' pivotní není, pak všechny řádky v $(A'|b')$ (a stejně tak i v jejím redukovaném tvaru) mají svůj pivot v matici soustavy A'. Pokud v A' zbývají ještě sloupce, které neobsahují pivot, pak lze příslušné neznámé položit za parametry a neznámé odpovídající pivotním sloupcům dopočítat, řešení je pak nekonečně mnoho. Pokud žádné takové sloupce nezbývají, vyjadřuje každý řádek v redukovaném odstupňovaném tvaru přímo hodnotu některé neznámé a řešení je tedy jednoznačné. □

Věta i důkaz jsou zatím formulovány trochu krkolomně, protože ještě nemáme zavedeny všechny důležité pojmy. V kapitole o hodnosti matice se k této větě vrátíme a napíšeme ji v elegantnějším podání. V praktické rovině ale už máme všechno, co potřebujeme k vyřešení libovolné soustavy lineárních rovnic, případně k verdiktu, že soustava řešení nemá. Ilustrujme to ještě na dvou krátkých příkladech:

Soustava rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -8 & -8 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

nemá žádné řešení, protože sloupec pravých stran poslední matice je pivotní. Soustava

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

má jediné řešení $(x_1, x_2) = (2, -1)$.

3.1. Cvičení.

(1) Ukažte, že kdybychom v popisu elementární úpravy prvního typu vynechali slovo „nenulovým“ nebo u úpravy druhého typu slovo „jiného“, nebyla by už v textu popisovaná relace symetrická.

(2) Zapište výměnu dvou řádků (speciální případ elementární úpravy třetího typu) jako posloupnost elementárních úpravy prvního a druhého typu.

(3) Ukažte, že pokud bychom aplikovali elementární úpravy na sloupce, množina řešení soustavy se obecně změní.

(4) Ukažte, že úpravu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & \dots & a_{1n}-a_{2n} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & \dots & a_{2n}-a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-a_{11} & a_{m2}-a_{12} & \dots & a_{mn}-a_{1n} \end{pmatrix}$$

není možné napsat jako konečnou posloupnost elementárních úprav.

(5) Kolik operací násobení a kolik sčítání je maximálně potřeba na převedení matice $n \times n$ na odstupňovaný a kolik na redukovaný odstupňovaný tvar?

(6) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 16 \\ 6x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 27 \end{array}$$

(7) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

(8) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(9) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \end{array}$$

(10) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

(11) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & -7 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & -6 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \end{array}$$

(12) Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} ix_1 & + & x_2 & & & = & -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -4+3i \end{array}$$

(13) Najděte všechna komplexní řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & (2+2i)x_2 & + & 2ix_3 & = & 1 \\ (1-i)x_1 & + & (1+3i)x_2 & + & (i-1)x_3 & = & 0 \\ (1+i)x_1 & + & (1-i)x_2 & + & (1+i)x_3 & = & 1 \end{array}$$

(14) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & a^2 \end{array}$$

(15) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & bx_2 & + & (a^2+b^2)x_3 & = & b \\ bx_1 & + & ax_2 & + & (a^2+b^2)x_3 & = & -a \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+b)x_3 & = & 0 \end{array}$$

(16) Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic v závislosti na $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & - & x_4 & = & a^2 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & ax_4 & = & a \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

Řešení: 6. $(3,-1,2)$, 7. nemá řešení, 8. $(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}t,\frac{5}{4}+\frac{1}{2}t,t), t\in\mathbb{R}$, 9. $(2+s-t,s,1+t,t), s,t\in\mathbb{R}$, 10. $(1,1,1,-1)$, 11. nemá řešení, 12. $(1+i,-i,3)$, 13. $(\frac{1-i}{4}+\frac{1-i}{2}t,t,\frac{1-i}{4}+\frac{-1+3i}{2}t), t\in\mathbb{C}$, 14. pro $a\notin\{1,-2\}$ jediné řešení $(-\frac{a+1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{(a+1)^2}{a+2})$, pro $a=1$ nekonečně mnoho řešení tvaru $(1-a-b,b,a), a,b\in\mathbb{R}$, pro $a=-2$ nemá řešení, 15. pro $a=b=0$ nekonečně mnoho řešení tvaru $(-s,s,t), s,t\in\mathbb{R}$, pro $a=b\neq 0$ nemá řešení, jinak jediné řešení $(-\frac{a+b}{b-a},0,\frac{1}{b-a})$, 16. má řešení pouze pro $a=\frac{17}{7}$, všechna řešení mají tvar $(\frac{60}{7}-\frac{7}{5}t,-\frac{5}{2}-t,-\frac{1}{14}+\frac{7}{5}t,t), t\in\mathbb{R}$

KAPITOLA 2

Matice

1. Násobení matic

V minulé kapitole jsme zavedli maticový zápis soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

kde levá strana označuje lineární kombinaci sloupců matice A:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

My nyní tento sloupcový vektor definujeme jako součin matice A a sloupcového vektoru x. A když budeme na x pohlížet jako na speciální případ $n \times 1$ matice, můžeme tuto definici rozšířit na obecnou definici součinu matic:

DEFINICE 4. Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$, A je $m \times n$ matice a X je $n \times p$ matice. Potom součin AX těchto dvou matic je $m \times p$ matice

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{kp} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}x_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}x_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k}x_{kp} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk}x_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{mk}x_{kp} \end{pmatrix}$$

Každý sloupec matice AX je lineární kombinací sloupců matice A s koeficienty v příslušném sloupci matice X.

PŘÍKLAD 1. Hledáme matici X, která splňuje maticovou rovnici $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

To znamená, že sloupce matice X splňují soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Mohli bychom vyřešit každou soustavu zvlášť, ale protože mají stejnou matici soustavy, byl by sled úprav, vedoucích k redukovanému odstupňovanému tvaru, v obou případech totožný. Ušetříme si práci tím, že soustavu budeme upravovat pro obě pravé strany zároveň, tedy s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Dvěma úpravami převedeme na redukovaný odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Každý sloupec za svislou čarou je nyní řešením jedné ze soustav rovnic 3, tedy jedním sloupcem matice X. Maticová rovnice má proto jednoznačné řešení

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1. Cvičení.

(1) Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(5) Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(7) Najděte matici X, pro kterou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) Jak se změní součin matic AB, pokud v matici B vyměníme i-tý a j-tý sloupec? A když vyměníme v A i-tý a j-tý řádek?

(9) Jak se změní součin matic AB, pokud v matici B vynásobíme i-tý sloupec číslem c? A pokud vynásobíme číslem c i-tý řádek matice A?

Řešení:

(1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} r+\frac{2}{3} & s-\frac{5}{3} & t-1 \\ -2r & 2-2s & 1-2t \\ r & s & t \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}, r,s,t \in \mathbb{R}$

(3) nemá řešení

(4) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

(5) nemá řešení

(6) $\begin{pmatrix} r+\frac{1}{2} & s+\frac{1}{2} & t \\ r & s & t \\ -3r+\frac{1}{2} & -3s+\frac{1}{2} & -3t \\ -3r+1 & -3s & -3t+1 \end{pmatrix}, r,s,t \in \mathbb{R}$

(7) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

2. Vlastnosti maticového součinu

Než budeme pokračovat dál, musíme se dohodnout na některých konvencích a označení. V první řadě potřebujeme vědět, jakých hodnot mohou nabývat **elementy** a_{ij} matice A. Pro začátek si vystačíme s tím, že budou patřit buď do množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, nebo do množiny $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel. Souhrnně budeme mluvit o **množině skalárů** $\mathbb{F}$, množinu všech $m \times n$ matic s elementy v $\mathbb{F}$ budeme značit $M_{mn}(\mathbb{F})$, případně, pokud $m = n$ (tzv. **čtvercová matice**), $M_n(\mathbb{F})$. Za skaláry je možné brát i jiné množiny, například konečná tělesa nebo okruhy, ale nuance s tím spojené by nás nyní přiliš zdržovaly. Z praktického hlediska představují reálné a komplexní matice dva nejdůležitější případy.

Definice 5. Nechť $\mathbb{F}$ je množina skalárů, $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

- **Součet** $A + B$ těchto matic je matice $(a_{ij} + b_{ij})_{1,1}^{m,n} \in M_{mn}(\mathbb{F})$.
- **Diagonála** matice A je tvořena prvky a_{ij}, $i = j$.
- **Nulová** matice 0 je taková matice, jejíž všechny elementy jsou nuly.
- **Jednotková** matice E je taková čtvercová matice, jejíž diagonála je tvořena jedničkami a zbylé elementy jsou nuly.

Sčítání matic je tedy definováno přirozeně, po elementech, splňuje proto stejné algebraické vlastnosti jako sčítání skalárů: asociativitu, komutativitu, existenci neutrálního prvku (nulová matice), existenci opačného prvku ke každé matici (a_{ij}) (matice $(-a_{ij})$). Stejně přirozené je definovat **násobení skalárem** $r \in \mathbb{F}$ také po elementech, $r(a_{ij}) := (ra_{ij})$. Algebraická struktura zahrnující sčítání matic a jejich násobení skalárem je tedy velmi podobná jako u vektorů, v příští kapitole pro podobné struktury zavedeme pojem vektorového prostoru.

Oproti tomu násobení matic mezi sebou má některé nezvyklé vlastnosti. Nelze vynásobit jakékoli dvě matice, musí se rovnat počet sloupců první matice a počet řádků druhé. Součin „zdědí“ po první matici počet řádků a po druhé počet sloupců. Z toho plyne, že

(1) pokud je součin AB definován, pak součin BA definován být nemusí,
(2) pokud je BA definován také, nemusí být stejného typu jako AB,

(3) a ani pokud je definován a stejného typu, nemusí se BA rovnat AB.

Najděte příklady ilustrující všechny tři situace! Násobení matic tedy není obecně komutativní. Je ale asociativní a distributivní.

LEMMA 2. *Nechť $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B, D \in M_{np}(\mathbb{F})$, $C, F \in M_{pq}(\mathbb{F})$. Pak platí*

(1) $A(BC) = (AB)C$
(2) $B(C + F) = BC + BF$, $(B + D)C = BC + DC$

DŮKAZ.

(1) ij-tý element matice na levé straně je roven
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$
a na pravé straně
$$\sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$
Na pořadí sumace nezáleží, oba výrazy se tedy rovnají.
(2) Ověřte sami, analogicky jako v předchozím bodě.

□

2.1. Cvičení.

(1) Najděte nenulovou matici A, pro kterou $A^2 = 0$. Najděte matici B, pro kterou $B^2 \neq 0$, ale $B^3 = 0$.
(2) Označme jako $J_n \in M_n(\mathbb{F})$ matici, pro niž $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $(J_n)_{i,i+1} = 1$ a všechny ostatní elementy matice J_n jsou nuly. Určete $(J_n)^k$ pro všechna $k \geq 0$.
(3) Nechť $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ je polynom a
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
matice. Spočtěte $p(A)$.
(4) Dokažte, že pro dvě čtvercové matice A, B platí $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$, právě když spolu A, B **komutují**, tedy platí $AB = BA$.
(5) Nechť A, B jsou dvě čtvercové matice, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud $AB = BA$, pak
$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$
(6) **Stopa** $\operatorname{Tr} A$ čtvercové matice $A \in M_n(\mathbb{F})$ je součet všech elementů na diagonále $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Dokažte, že pro libovolné dvě matice, pro které je definováno AB i BA, platí $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$. Dokažte odtud, že pro žádné dvě matice není splněna rovnost $AB - BA = E$. Pokuste se tvrzení $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$ zobecnit na případ stopy součinu více než dvou matic $\operatorname{Tr} A_1 A_2 \ldots A_q$.
(7) Dokažte, že čtvercová matice $A \in M_n(\mathbb{F})$ komutuje se všemi diagonálními maticemi, právě když je sama diagonální. Dokažte, že pokud A komutuje se všemi maticemi z $M_n(\mathbb{F})$, pak je násobkem jednotkové matice.
(8) Při výpočtech na počítači trvá násobení dvou reálných čísel mnohem déle než sčítání. Proto se při násobení více matic vyplatí využít asociativity a uzávorkovat je tak, aby počet násobení byl co nejmenší. V jakém pořadí je nejlepší provést součin matic 5, 10×20, 20×5 a 5×1?

3. Inverzní matice

Jednotková matice se chová jako neutrální prvek vzhledem k násobení, $EA = AE = A$. Násobení **diagonální maticí**

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_m \end{pmatrix}$$

zleva má za výsledek matici

$$DA = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \dots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_2a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \dots & d_ma_{mn} \end{pmatrix},$$

s řádky přenásobenými diagonálními elementy $d_1, \dots, d_m$. Jaký efekt má násobení diagonální maticí zprava?

Ve speciálním případě, kdy má matice D na diagonále samé jedničky kromě i-té pozice, kde má nenulové číslo $r \in \mathbb{F}$, je matice DA právě ta, která vznikne z A elementární úpravou typu 1 z definice 3. Podobně součin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + sa_{11} & a_{22} + sa_{12} & \dots & a_{2n} + sa_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

způsobí přičtení s-násobku prvního řádku do druhého, tedy příklad elementární úpravy typu 2. Jakou maticí musíme násobit, abychom realizovali obecnou elementární úpravu typu 2? A jaké matice odpovídají úpravám typu 3 a 4?

Na Gaussovu eliminaci se nyní můžeme dívat jako na sled násobení rozšířené matice soustavy $(A|b)$ maticemi elementárních úprav U_1, $U_2, \dots, U_q$ zleva:

$$U_q \dots U_2U_1(A|b) = U_q \dots U_2(U_1A|U_1b) = \\ = \dots = (U_q \dots U_2U_1A|U_q \dots U_2U_1b)$$

V první rovnosti využíváme faktu, že násobení maticí U_1 zleva působí na každý sloupec matice $(A|b)$ zvlášť a také asociativity maticového součinu. Algoritmus Gaussovy eliminace volí úpravy tak, aby matice $U_q \dots U_2U_1A$ měla redukovaný odstupňovaný tvar. Pokud je to přímo jednotková matice E, pak má celá soustava rovnic $Ax = b$ jednoznačné řešení $x = U_q \dots U_2U_1b$.

Maticová rovnice tvaru $AX = B$ je, jak jsme si ukázali, vlastně jen soustava lineárních rovnic, kterou řešíme pro několik pravých stran zároveň. Zvlášť zajímavý je případ, kdy A je čtvercová matice a $B = E$. Pokud lze A upravit na jednotkovou matici, převede se rozšířená matice $(A|E)$ Gaussovou eliminací na tvar

$$(U_q \dots U_2U_1A|U_q \dots U_2U_1E) = (E|U_q \dots U_2U_1)$$

Tedy řešením soustavy rovnic $AX = E$ je přímo součin elementárních úprav $X = U_q \dots U_2U_1$.

LEMMA 3. *Nechť A je čtvercová matice, kterou lze upravit na jednotkovou matici. Pak existuje matice X, pro kterou $AX = XA = E$.*

DŮKAZ. Hledaná matice X je právě součin matic úprav $U_q \dots U_2 U_1$. Tento součin převádí A na jednotkovou matici, takže $XA = E$, a zároveň je řešením maticové rovnice $AX = E$. Splňuje tedy obě požadované vlastnosti. □

DEFINICE 6. Nechť $A \in M_n(\mathbb{F})$. Pokud existuje matice $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ splňující $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, pak říkáme, že matice A je **regulární** a A^{-1} je její **inverzní matice**. Čtvercová matice, která nemá inverzní matici, se nazývá **singulární**.

LEMMA 4. *Nechť A je regulární matice. Pak existuje právě jedna matice C taková, že $AC = E$, právě jedna matice D splňující $DA = E$ a $D = C = A^{-1}$.*

DŮKAZ. Nechť A^{-1} splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, C splňuje $AC = E$ a D splňuje $DA = E$. Pak

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = EC = C$$
$$A^{-1} = EA^{-1} = (DA)A^{-1} = D(AA^{-1}) = DE = D$$

Tedy $C = A^{-1} = D$. □

Víme tudíž, že inverzní matice je určena jednoznačně a máme metodu, jak ji najít. Ukažme si to na příkladě:

PŘÍKLAD 2. Hledejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Upravujeme tedy rozšířenou matici odpovídající maticové rovnici $AX = E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Hledaná inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

jak snadno ověříme vynásobením s A.

TVRZENÍ 1. *Nechť $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ jsou regulární matice. Pak*

(1) *A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$.*
(2) *AB je regulární a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

DŮKAZ. Platí $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E$ a zároveň $AA^{-1} = E$, tudíž díky jednoznačnosti inverzní matice k A^{-1} musí být $(A^{-1})^{-1} = A$. Podobně $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E$, tudíž $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

3.1. Cvičení.

(1) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

(2) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(3) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(4) Určete

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(5) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(6) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(7) Jak se změní A^{-1}, pokud v matici A vyměníme i-tý a j-tý řádek? A když vyměníme sloupce?

(8) Jak se změní A^{-1}, pokud v matici A vynásobíme i-tý řádek číslem c? A co když vynásobíme řádek?

(9) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(10) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(11) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(12) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(13) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(14) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1+a & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

(15) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

(16) Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+nh \\ a+nh & a & a+h & \dots & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a+nh & a & \dots & a+(n-2)h \\ \vdots & & & \ddots & a+h \\ a+h & a+2h & \dots & a+nh & a \end{pmatrix}$$

(17) Nechť $\epsilon = \exp\left(i\frac{2\pi}{n+1}\right)$. Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^n \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \epsilon^{n(n-1)} \\ 1 & \epsilon^n & \dots & \epsilon^{n(n-1)} & \epsilon^{n^2} \end{pmatrix}$$

Řešení.

(1) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Transponovaná matice

DEFINICE 7. Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Pak její transponovaná matice $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$ je matice $(a_{ij}^T)_{1,1}^{n,m}$, kde $a_{ij}^T := a_{ji}$.

Transponování je mnohem jednodušší operace než invertování. Pouze se vymění role řádků a sloupců, matice se „překlopí“ podle hlavní diagonály. Transponovaná matice existuje ke každé matici, zatímco inverzní pouze ke čtvercovým a ještě ne ke všem. Některé vlastnosti mají ale tyto dvě operace společné:

TVRZENÍ 2. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{np}(\mathbb{F})$. Pak*

(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(AB)^T = B^T A^T$

DŮKAZ. Označme $C = (A^T)^T$, potom $c_{ij} = a_{ji}^T = a_{ij}$. Podobně pokud $D = (AB)^T$, pak

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^T a_{kj}^T,$$

což je ij-tý element součinu $B^T A^T$. □

Pokud chceme čtvercovou matici postupně transponovat a invertovat, je příjemné vědět, že nezáleží na pořadí, v jakém to uděláme:

LEMMA 5. *Nechť A je regulární matice. Pak A^T je regulární a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*

DŮKAZ. Matice $(A^{-1})^T$ splňuje

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$$
$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$$

je tedy podle definice 6 a lemmatu 4 inverzní maticí k A^T. □

PŘÍKLAD 3. Najděme matici X, která splňuje $XA = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vztah $XA = B$ platí právě když $(XA)^T = B^T$. Pomocí tvrzení 2 dostáváme $A^T X^T = B^T$, tedy X^T je řešením soustavy rovnic s rozšířenou maticí $(A^T | B^T)$.

Gaussovou eliminací

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

dostáváme

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dosazením ověříme, že skutečně $XA = B$.

Druhá možnost je využít toho, že A je regulární a z příkladu 2 známe její inverzní matici. Platí

$$XA = B \quad \Leftrightarrow \quad XAA^{-1} = BA^{-1},$$

tedy $X = BA^{-1}$. Při takovýchto úpravách maticových rovnic je vždy třeba hlídat, z kterého směru obě strany rovnice násobíme. Násobení maticí A^{-1} zleva by vedlo na

$$A^{-1}XA = A^{-1}B,$$

a protože obecně $A^{-1}X \neq XA^{-1}$, neumožňuje tento vztah vyjádřit hledanou matici X pomocí matic A a B.

4.1. Cvičení.

(1) Řešte maticovou rovnici

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Řešte maticovou rovnici

$$X \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

(3) Matice A se nazývá **symetrická**, pakliže $A = A^T$. Dokažte, že inverzní matice k regulární symetrické matici je symetrická. Je součin dvou symetrických matic vždy symetrická matice?

(4) Matice A se nazývá **antisymetrická**, pakliže $A = -A^T$. Jak vypadá diagonála antisymetrické matice? Dokažte, že inverzní matice k regulární antisymetrické matici je antisymetrická. Kdy je součin dvou antisymetrických matic také antisymetrická matice? A kdy je to symetrická matice?

(5) Dokažte, že pro libovolnou matici A jsou matice AA^T a A^TA symetrické.

(6) Popište všechny matice X, které komutují s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

tedy splňují $AX = XA$. Popište všechny matice X, které s A **antikomutují**, tj. $AX = -XA$.

(7) Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

(8) Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Blokové matice

Blokové matice jsou „matice, jejichž elementy jsou matice“. Například matice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se dá blokově zapsat jako

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jiný blokový zápis téže matice je třeba

$$X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix},$$

kde

$$A' = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme dvě matice $X, Y \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ve stejném blokovém uspořádání, tj.

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & \dots & B_{pq} \end{pmatrix},$$

kde $A_{ij}, B_{ij} \in M_{m_i,n_j}$, $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$. Pak je zřejmé, že

$$X + Y = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1q} + B_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} + B_{p1} & \dots & A_{pq} + B_{pq} \end{pmatrix}$$

Se součinem musíme být trochu opatrnější. Aby se daly dvě obyčejné matice vynásobit, musí souhlasit počet sloupců první a počet řádků druhé. Pro blokové matice musí souhlasit i rozdělení těchto dvou počtů na jednotlivé bloky, výsledný vzorec je ale pak formálně stejný jako pro matice s čísly:

LEMMA 6. *Nechť $X \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $Y \in M_{nk}(\mathbb{F})$ a*

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & \dots & B_{qr} \end{pmatrix},$$

kde $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(\mathbb{F})$, $B_{jl} \in M_{n_j,k_l}(\mathbb{F})$, $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$, $\sum_{j=1}^{q} n_j = n$, $\sum_{l=1}^{r} k_l = k$. Pak má součin XY blokový zápis

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{q} A_{1i}B_{i1} & \sum_{i=1}^{q} A_{1i}B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{q} A_{1i}B_{ir} \\ \sum_{i=1}^{q} A_{2i}B_{i1} & \sum_{i=1}^{q} A_{2i}B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{q} A_{2i}B_{ir} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{q} A_{pi}B_{i1} & \sum_{i=1}^{q} A_{pi}B_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{q} A_{pi}B_{ir} \end{pmatrix}$$

Důkaz. Za cvičení. □

Rozšířená matice soustavy rovnic $(A|B)$ je vlastně speciálním případem blokové matice. Znovu tedy vidíme, že násobení této matice maticí elementární úpravy U zleva je rovno

$$U(A|B) = (UA|UB)$$

Čtvercová matice typu

$$X = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_p \end{pmatrix},$$

kde D_i jsou také čtvercové (tedy rozdělení řádků a sloupců matice X je stejné), se nazývá **blokově diagonální**. Příkladem blokově diagonální matice X z úvodního příkladu, jak je vidět z druhého uvedeného blokového zápisu. Z předchozího lemmatu vyplývá, že součin dvou blokově diagonálních matic stejného typu je blokově diagonální matice téhož typu. Pokud jsou všechny matice D_i regulární, pak inverzní matice k X je

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} (D_1)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (D_2)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (D_p)^{-1} \end{pmatrix},$$

jak se snadno ověří vynásobením X a X^{-1}. Podobně

$$X^T = \begin{pmatrix} D_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^T & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_p^T \end{pmatrix},$$

kde samozřejmě už nemusíme požadovat regularitu matic D_i.

5.1. Cvičení.

(1) Určete, jaký blokový tvar má transponovaná matice od blokové matice

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

(2) Zjistěte, čemu se rovná stopa $\operatorname{Tr} A$ blokové matice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix},$$

jsou-li diagonální bloky A_{ii} čtvercové matice.

(3) Nechť $U \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Najděte blokový tvar inverzní matice k blokové matici

$$\begin{pmatrix} E_m & U \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

kde E_m, E_n jsou jednotkové matice typu $m \times m$, resp. $n \times n$.

(4) Nechť $U \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Najděte blokový tvar inverzní matice k blokové matici

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & U \end{pmatrix},$$

kde E_m, E_n jsou jednotkové matice typu $m \times m$, resp. $n \times n$. Ukažte na příkladě s $n = 3$ a $m = 1$.

(5) Dokažte, že pokud jsou A, C regulární matice, pak existuje matice X taková, že

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

a vyjádřete toto X pomocí matic A, B, C.

KAPITOLA 3

Vektorové prostory

1. Definice vektorového prostoru

Vztah

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

znamená, že sloupcový vektor na pravé straně je lineární kombinací tří sloupcových vektorů na straně levé s koeficienty 1, 2 a 1. Vztahy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a

$$(3x+1) + 2(-x^3 + x^2 - x + 2) + (2x^3 - 1) = 2x^2 + x + 4$$

sice pracují s jinými objekty, ale intuitivně tušíme, že vyjadřují vlastně stejnou skutečnost. Stejně jako sloupcové vektory, i matice, resp. polynomy umíme sčítat a násobit skalárem, tedy i dělat jejich lineární kombinace. Pokud podchytíme klíčové vlastnosti těchto operací se sloupcovými vektory ve formě axiomů, umožní nám to abstrahovat od představy vektoru jako n-tice čísel. S abstraktními vektory se jednak elegantněji zapisují a dokazují tvrzení, především ale tato tvrzení pak platí pro všechny objekty, které axiomy splňují, tedy například i pro polynomy nebo matice.

DEFINICE 8. Nechť $\mathbb{F}$ je množina skalárů. Množinu V s operacemi

$$+ : V \times V \to V,$$
$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V,$$

kterým se říká **sčítání vektorů** a **násobení vektoru skalárem**, nazveme **vektorový prostor nad** $\mathbb{F}$, pokud splňuje následující axiomy:

(1) $\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$ (asociativita)
(2) $\exists 0 \in V : \forall v \in V : 0 + v = v + 0 = v$ (existence neutrálního prvku)
(3) $\forall v \in V : \exists (-v) \in V : v + (-v) = (-v) + v = 0$ (existence opačných prvků)
(4) $\forall u, v \in V : u + v = v + u$ (komutativita)
(5) $\forall r, s \in \mathbb{F}, v \in V : (r + s).v = r.v + s.v$ (distributivita sčítání skalárů a násobení vektoru skalárem)
(6) $\forall r \in \mathbb{F}, u, v \in V : r.(u + v) = r.u + r.v$ (distributivita sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem)
(7) $\forall r, s \in \mathbb{F}, v \in V : (r.s).v = r.(s.v)$ (distributivita, případně asociativita násobení skalárů a násobení vektoru skalárem)
(8) $\forall v \in V : 1.v = v$ (násobení jednotkovým skalárem je identita)

O prvcích množiny V budeme od nynějška mluvit jako o vektorech. První tři axiomy dohromady říkají, že V s operací sčítání vektorů je **grupa**, když přidáme

i čtvrtý axiom, je to **komutativní grupa**. Tyto čtyři axiomy se týkají jen sčítání, zatímco zbylé definují vlastnosti násobení skalárem a jeho vztah k ostatním operacím, ke sčítání vektorů a ke sčítání a násobení skalárů mezi sebou.

POZNÁMKA 1. Vektorový prostor si s ohledem na naše potřeby definujeme pouze nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$, tedy **reálný** nebo **komplexní vektorový prostor**. Využíváme toho, že algebraické vlastnosti těchto číselných množin nepotřebují dalšího komentáře. Obecně se ale vektorové prostory definují nad strukturou **tělesa**, která je definována svou vlastní sadou axiomů, kterou splňují množiny $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ale i množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a další.

PŘÍKLAD 4. V následujících příkladech vektorových prostorů necháváme na čtenáři, aby ověřil splnění axiomů.

(1) Množina $\mathbb{F}^n$ všech uspořádaných n-tic čísel z $\mathbb{F}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ vzhledem ke sčítání a násobení definovanému po složkách. Používá se pojem **aritmetický vektorový prostor**. Prvky $\mathbb{F}^n$ zapisujeme jako řádkové nebo sloupcové vektory.
(2) Množina $M_{mn}(\mathbb{F})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ vzhledem ke sčítání matic a násobení matice skalárem.
(3) Množina $P(x, \mathbb{F})$ všech polynomů v proměnné x s koeficienty v $\mathbb{F}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ vzhledem ke sčítání polynomů a násobení polynomu číslem.
(4) Množina všech nekonečných posloupností z $\mathbb{F}$ je přímé zobecnění aritmetického vektorového prostoru - i zde se sčítá a násobí po jednotlivých členech.
(5) Pokud M je libovolná množina, pak množina $F(M, \mathbb{F})$ všech funkcí z M do $\mathbb{F}$, na níž jsou $\forall f, g \in F(M, \mathbb{F})$, $\forall r \in \mathbb{F}$, $\forall x \in M$ definovány operace předpisem

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(rf)(x) := r.f(x),$$

je vektorový prostor. Jaký je vlastně význam tohoto předpisu? První řádka definuje funkci $f + g$ její hodnotou v bodě x, a to tak, že pro libovolné $x \in M$ je tato hodnota součtem hodnot funkcí f a g v x. Druhá obdobně definuje násobek funkce. Volba $M = \{1, \ldots, n\}$ pokrývá případ aritmetického vektorového prostoru, pro

$$M = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$$

máme prostor matic, pro $M = \mathbb{N}$ zase máme prostor všech nekonečných posloupností. Množina M žádnou algebraickou strukturu mít nemusí, axiomy plynou z vlastností operací na $\mathbb{F}$.
(6) Na množině skalárů záleží. Na množině $\mathbb{C}^n$ nebo obecně $F(M, \mathbb{C})$ můžeme zavést strukturu reálného vektorového prostoru tak, že ponecháme standardní sčítání i násobení, ale dovolíme násobit pouze prvky z $\mathbb{R}$ místo z celého $\mathbb{C}$. Formálně jde pak o jiný vektorový prostor.

Na závěr tohoto oddílu ještě zformulujeme několik důsledků axiomů vektorového prostoru, které se budou hodit dále:

LEMMA 7. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Pak $\forall v \in V$, $\forall r \in \mathbb{F}$ platí*

(1) $0.v = 0$
(2) $(-1).v = -v$
(3) $r.0 = 0$

DŮKAZ. Pro libovolný vektor v platí

$$v = 1.v = (1+0).v = 1.v + 0.v = v + 0.v,$$

kde jsme použili nejprve axiom 8, pak vlastnost skalárů, pak axiom 5 a nakonec znovu 8. Z axiomu 3 plyne existence opačného vektoru k v, tedy

$$0 = (-v) + v = (-v) + (v + 0.v) = \\ = ((-v) + v) + 0.v = 0 + 0.v = 0.v,$$

kde jsme dále využili axiomy 1 a 2. Tím je dokázáno první tvrzení. Zbylá dvě necháváme čtenáři za cvičení. □

1.1. Cvičení.

(1) Dokažte, že množiny $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ s operací násobení jsou komutativní grupy. Co je neutrální prvek a co jsou opačné prvky?
(2) Dokažte, že množina všech sudých celých čísel s operací sčítání je grupa. Zobecněte na množinu všech celých čísel dělitelných přirozeným číslem k.
(3) Dokažte, že množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$$

spolu s operací násobení matic je grupa.
(4) Dokažte, že množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \middle| ad - bc = 1 \right\}$$

spolu s operací násobení matic je grupa.
(5) Dokažte, že množina matic

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

s operací maticového násobení je komutativní grupa.
(6) Dokažte, že množina všech regulárních matic z $M_n(\mathbb{F})$ s operací maticového násobení, je grupa. Dokažte, že tato grupa je komutativní pouze pro $n = 1$. Zdůvodněte, proč celá množina $M_n(\mathbb{R})$ spolu s maticovým násobením není grupa.
(7) Ověřte platnost axiomů vektorového prostoru pro množinu $F(M, \mathbb{F})$.
(8) Dokažte, že množina $\mathbb{R}^2$ se sčítáním po složkách a násobením číslem $r + is \in \mathbb{C}$ takto:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (r+is).(x,y) := (rx - sy, sx + ry),$$

je vektorový prostor.
(9) Dokažte, že množina $\mathbb{R}^+$, na níž jsou zavedeny operace

$$a + b := ab \\ r.a := a^r,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$, je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Lze podobně definovat strukturu vektorového prostoru na $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$?

2. Podprostory

Všechny vektorové prostory, kterými se budeme zabývat, budeme konstruovat jako podmnožiny prostorů z příkladu 4. Dobrá zpráva je, že k tomu, aby nějaká podmnožina byla vektorovým prostorem, stačí málo, jen uzavřenost na operace:

DEFINICE 9. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a W je neprázdná podmnožina V taková, že $\forall v, w \in W$, $\forall r \in \mathbb{F}$ platí $v + w \in W$ a $rv \in W$. Pak nazýváme W **podprostorem** vektorového prostoru V, značíme $W \leq V$.

LEMMA 8. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a W jeho podprostor. Pak W je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$.*

DŮKAZ. Podmínky v definici podprostoru zaručují, že součet i násobení jsou uzavřené na W a tedy jsou na něm jakožto operace dobře definovány. Postupně ověříme axiomy, občas s využitím lemmatu 7:

(1) $\forall u, v, w \in W$ platí $u + (v + w) = (u + v) + w$, neboť $u, v, w \in V$ a tam to platí. Podobně komutativita.
(2) Pro libovolný $v \in W$ díky uzavřenosti na násobení $0.v = 0 \in W$.
(3) Pro všechna $v \in W$ patří i opačný prvek $-v = (-1).v$ znovu do W díky uzavřenosti na násobení. Pro v a $-v$ platí z axiomů na V rovnost $v + (-v) = 0$, takže opačný prvek ve V je opačným prvkem i ve W.
(4) Všechny tři distributivní axiomy platí ze stejných důvodů jako asociativita a komutativita. Stejně tak axiom $v = 1.v$.

□

Následující lemma nám umožní sloučit dvě podmínky charakterizující podprostor do jedné a zjednodušit tak následující důkazy:

LEMMA 9. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a W jeho podmnožina. Pak $W \leq V$, právě když $\forall u, v \in W$ a $\forall r, s \in \mathbb{F}$ je $ru + sv \in W$.*

DŮKAZ. Lemma říká, že nějaké dvě podmínky jsou ekvivalentní („právě když“). Je tedy potřeba ověřit, že podmnožina splňující podmínky v definici podprostoru splňuje i podmínku v lemmatu, a naopak, podmnožina splňující podmínku v lemmatu vyhovuje definici. Pokud W je podprostor, $u, v \in W$, $r, s \in \mathbb{F}$, pak rv i su patří do W z druhé podmínky v definici a $rv + su \in W$ z první podmínky. Naopak, pokud všechny $u, v \in W$ splňují $ru + sv \in W$ pro všechny skaláry r, s, pak stačí zvolit $r = 1, s = 1$ a získáváme první podmínku v definici. Volbou $s = 0$ získáváme druhou. □

PŘÍKLAD 5.

(1) Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a v vektor v něm. Pak množina $\langle v \rangle := \{rv | r \in \mathbb{F}\}$ je vektorový podprostor V, který se nazývá **lineární obal** vektoru v. Ve vektorových prostorech, které mají geometrickou interpretaci (třeba $\mathbb{R}^n$), je to vlastně přímka o směru v procházející počátkem.
(2) Nechť $a_j \in \mathbb{F}$ pro $j \in \{1, \ldots, n\}$, pak množina W_a všech vektorů $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, které splňují homogenní lineární rovnici $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0$, je podprostorem $\mathbb{F}^n$. Stačí použít ekvivalentní podmínku z lemmatu 9, neboť pokud $x, y \in W_a$ a $r, s \in \mathbb{F}$, pak

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(rx_j + sy_j) = r\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + s\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = r.0 + s.0 = 0,$$

tedy $rx + sy \in W_a$. Všimněte si, že pokud by v rovnici byla pravá strana nenulová, pak by podmínka splněna nebyla, množina řešení nehomogenní

rovnice tedy není vektorovým prostorem. Jinými slovy, přímka v $\mathbb{F}^n$ je vektorovým podprostorem právě tehdy, když prochází počátkem.

(3) Množina všech matic v odstupňovaném tvaru je podprostor množiny všech matic daného typu (ověřte sami).
(4) Množina všech omezených posloupností je podprostor množiny všech posloupností. Stačí si uvědomit, že součet dvou omezených posloupností je omezená a násobek omezené posloupnosti je také omezená posloupnost.
(5) Množina $P(x, \mathbb{F})$ všech polynomů v proměnné x s koeficienty v $\mathbb{F}$ je vektorový prostor. Jednak je možné chápat jej jako podprostor prostoru všech funkcí na $\mathbb{F}$. Druhá interpretace vychází z toho, že při sčítání polynomů se sčítají příslušné koeficienty u mocnin x a při násobení polynomu číslem se také násobí posloupnost koeficientů člen po členu. Polynom je tedy možné chápat jako posloupnost čísel z $\mathbb{F}$, která má pouze konečný počet nenulových členů. Množina takových posloupností je podprostorem v množině všech posloupností.
(6) Množina $P^k(x, \mathbb{F})$ všech polynomů stupně nejvýše k. Pokud bychom vynechali slovo nejvýše, chyběl by například nulový vektor.
(7) Množina všech omezených funkcí, množina všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, množina všech násobků funkce $\cos x$,... Pokud $p \in M$, pak množina všech funkcí, pro něž $f(p) = 0$, je vektorový prostor, zatímco množina všech funkcí, pro něž $f(p) = 17$, není. Množiny funkcí zadané podmínkou na existenci a nulovost limity či derivace v nějakém bodě jsou vektorové prostory, opět z vlastností limity a derivace funkce.
(8) Podprostor má strukturu vektorového prostoru vždy nad celou číselnou množinou $\mathbb{F}$. Tedy $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$ není podprostorem $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$, ani naopak.

2.1. Cvičení.

(1) Mějme v $\mathbb{R}^2$ obvyklou kartézskou soustavu souřadnic. Rozhodněte, zda následující podmnožiny tvoří podprostor:
   (a) všechny body ležící na dané přímce
   (b) všechny body ležící v prvním kvadrantu
   (c) všechny body ležící v prvním nebo třetím kvadrantu
   (d) všechny body ležící v prvním nebo druhém kvadrantu
(2) Rozhodněte, zda jsou následující podmnožiny v $\mathbb{R}^3$ podprostory:
   (a) $\{(0,0,0)\}$
   (b) $\{(k,0,0)|k \in \mathbb{Z}\}$
   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z = 1\}$
   (d) $\{(t+s, t, -s)|t, s \in \mathbb{R}\}$
   (e) $\{(t+1, t, -t)|t \in \mathbb{R}\}$
   (f) $\{(x+1, y, -z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$
   (g) $\{(x^2, y^2, z^2\}|x, y, z \in \mathbb{R}\}$
   (h) $\{(x^3, y^3, y^3)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$
   (i) $\{(t,0,0)|t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,s,0)|s \in \mathbb{R}\}$
   (j) $\{(r,s,0)|r, s \in \mathbb{R}\} \cap \{(0,t,u)|t, u \in \mathbb{R}\}$
(3) Je $\mathbb{R}$ podprostorem $\mathbb{C}$? Zdůvodněte.
(4) Dokažte, že množina S_n všech symetrických $n \times n$ matic je podprostorem $M_n(\mathbb{F})$, stejně tak množina A_n všech antisymetrických matic. Řekneme, že matice $A \in M_n(\mathbb{C})$ je **hermitovská** (resp. **antihermitovská**), jestliže platí $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (resp. $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$). Ověřte, že hermitovské (resp. antihermitovské) matice tvoří podprostory $M_n(\mathbb{C})$.
(5) Dokažte, že množina všech matic s nulovou stopou tvoří podprostor $M_n(\mathbb{F})$.
(6) Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Rozhodněte, zda je množina $\{X \in M_{nk}(\mathbb{F})|AX = 0\}$ vektorový prostor.

(7) Nechť $A \in M_n(\mathbb{F})$. Dokažte, že množina všech matic $X \in M_{nn}(\mathbb{F})$, které komutují s A, je vektorový prostor.
(8) Dokažte, že množina všech **horních trojúhelníkových matic** (tedy takových, pro které $a_{ij} = 0$ pro $i > j$) tvoří podprostor $M_{mn}(\mathbb{F})$. Dokažte totéž pro množinu všech **dolních trojúhelníkových matic** ($a_{ij} = 0$ pro $i < j$).
(9) Dokažte, že množina všech **ostře horních trojúhelníkových matic** ($a_{ij} = 0$ pro $i \geq j$) z $M_{mn}(\mathbb{F})$ tvoří podprostor $M_{mn}(\mathbb{F})$, podobně pro ostře dolní trojúhelníkové matice.
(10) Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory prostoru všech nekonečných reálných posloupností $(a_i)_0^\infty$ s operacemi sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem. Zdůvodněte.
   (a) množina všech konvergentních posloupností
   (b) množina všech periodických posloupností
   (c) množina všech posloupností splňujících rekurentní vztah $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
   (d) množina všech posloupností se sudým počtem nenulových členů
(11) Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory prostoru všech reálných polynomů se sčítáním polynomů a násobením polynomu číslem. Zdůvodněte.
   (a) množina obsahující všechny polynomy stupně n a nulový polynom
   (b) množina všech polynomů majících pouze reálné kořeny
   (c) množina všech polynomů, pro něž je aritmetický průměr jejich hodnot na množině $\{-1, 1, 3, 7\}$ nulový
   (d) množina všech polynomů, které mají nenulové pouze koeficienty v sudých řádech
(12) Rozhodněte, zda je vektorovým prostorem množina polynomů, které mají kořen 2.
(13) Rozhodněte, zda je vektorovým prostorem množina polynomů, které mají nějaký racionální kořen.
(14) Rozhodněte, zda jsou následující množiny vektorovými podprostory v prostoru $V = F(\langle a, b\rangle, \mathbb{R})$:
   (a) $\{f \in V | f(a) = 1\}$
   (b) $\{f \in V | f(b) = 0\}$
   (c) $\{f \in V | f(a) - 2f(b) = 0\}$
(15) Rozhodněte, zda je množina všech periodických funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ spolu s nulovou funkcí vektorový prostor. A co množina všech funkcí s racionální periodou?

3. Spojení a průnik podprostorů

Každé dva podprostory vektorového prostoru V musí obsahovat nulový vektor, který se tím pádem nachází v průniku libovolné množiny podprostorů. Ve skutečnosti platí pro průnik něco více:

LEMMA 10. *Nechť V je vektorový prostor a $\mathcal{W}$ je množina podprostorů ve V. Pak průnik $\bigcap_{W\in\mathcal{W}} W$ všech prvků množiny $\mathcal{W}$ je podprostor ve V.*

DŮKAZ. Pokud $u, v \in \bigcap_{W\in\mathcal{W}} W$, pak patří u, v do každého podprostoru $W \in \mathcal{W}$. Pak ale i $ru + sv$ patří do každého W pro libovolné skaláry $r, s \in \mathbb{F}$ a tedy $ru + sv \in \bigcap_{W\in\mathcal{W}} W$. □

Označme $W_i \leq \mathbb{F}^n$ prostor všech řešení homogenní rovnice $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, $a_{ij} \in \mathbb{F}$, přičemž i běží přes množinu $I = \{1, \ldots, m\}$. Pak průnik $\bigcap_{i=1}^m W_i$ těchto prostorů je právě množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$A = (a_{ij})_{1,1}^{m,n}$. Z lemmatu plyne, že je to podprostor v $\mathbb{F}^n$, který se nazývá **nulový prostor matice** A a značí $N(A)$. Pozor, neplést s nulovým podprostorem $\{0\}$, který je obsažen v každém vektorovém prostoru.

DEFINICE 10. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, M jeho podmnožina. **Lineární kombinací** vektorů z množiny M nazveme libovolný součet $\sum_{i=1}^{k} r_i v_i$, kde $v_1, \ldots, v_k$ jsou vektory z M a $r_1, \ldots, r_k$ jsou skaláry z $\mathbb{F}$. **Lineární obal** množiny $M \neq \emptyset$ je množina všech lineárních kombinací prvků z M, značíme jej $\langle M \rangle$. Dále definujeme $\langle \emptyset \rangle = 0$

TVRZENÍ 3. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a M podmnožina V. Pak $\langle M \rangle$ je podprostorem V.*

DŮKAZ. Pro $M = \emptyset$ je to jasné, předpokládejme tedy $M \neq \emptyset$. Pokud jsou

$$u = \sum_{i=1}^{k} r_i u_i, \text{kde } u_i \in M, r_i \in \mathbb{F}$$

$$v = \sum_{i=1}^{l} s_i v_i, \text{kde } v_i \in M, s_i \in \mathbb{F}$$

vektory z $\langle M \rangle$, pak

$$ru + sv = \sum_{i=1}^{k} (rr_i) u_i + \sum_{i=1}^{l} (ss_i) v_i$$

je také lineární kombinace prvků z M, a tedy prvek $\langle M \rangle$. □

DEFINICE 11. Nechť V je vektorový prostor a $\mathcal{W}$ je množina podprostorů ve V. Definujme **spojení** všech podprostorů z $\mathcal{W}$ jako

$$\bigvee_{W \in \mathcal{W}} W := \left\langle \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \right\rangle$$

Jinými slovy, spojení podprostorů je lineárním obalem jejich sjednocení, díky tvrzení 3 je to také podprostor. Nejčastěji se setkáme se spojením dvou podprostorů, tedy $\mathcal{W} = \{W_1, W_2\}$. Pak

$$\bigvee_{W \in \mathcal{W}} W \equiv W_1 \vee W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$$

Podobně pro $\mathcal{W} = \{W_1, W_2, \ldots, W_k\}$ používáme obvykle zápis

$$W_1 \vee W_2 \vee \ldots \vee W_k \equiv \langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k \rangle$$

LEMMA 11. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $W_1, W_2, \ldots, W_k$ jeho podprostory. Pak jejich spojení*

$$W_1 \vee W_2 \vee \ldots \vee W_k$$

je rovno množině všech vektorů tvaru

$$w_1 + w_2 + \ldots w_k,$$

kde $w_i \in W_i$.

DŮKAZ. Prvek $w \in W_1 \vee W_2 \vee \ldots \vee W_k$ lze zapsat jako lineární kombinaci prvků z $W_1 \cup \ldots \cup W_k$ a následně ji rozepsat jako součet

$$w = \sum_{i=1}^{n_1} r_{1i} u_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} r_{2i} u_{2i} \ldots + \sum_{i=1}^{n_k} r_{ki} u_{ki},$$

kde $u_{ji} \in W_j$. Označíme-li $w_j := \sum_{i=1}^{n_j} r_{ji} u_{ji}$, dostáváme přesně požadovaný rozklad $w = w_1 + w_2 + \ldots w_k$. □

DEFINICE 12. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V nad $\mathbb{F}$, pro které platí $W_1 \cap W_2 = 0$. Pak jejich spojení $W_1 \vee W_2$ nazýváme **direktní součet**, značíme $W_1 \oplus W_2$.

TVRZENÍ 4. *Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V nad $\mathbb{F}$, pro které platí $W_1 \cap W_2 = 0$. Pak pro každý vektor $w \in W$ existuje právě jeden vektor $w_1 \in W_1$ a právě jeden vektor $w_2 \in W_2$, pro které platí $w = w_1 + w_2$.*

DŮKAZ. Každý vektor $w \in W_1 \vee W_2$ se díky lemmatu 11 dá zapsat jako $w = w_1 + w_2$, kde $w_i \in W_i$. Uvažme druhý takový zápis, $w = w_1' + w_2'$, kde $w_i' \in W_i$. Pak $w_1' - w_1 = w_2 - w_2'$, levá strana patří do W_1, pravá do W_2 a díky $W_1 \cap W_2 = 0$ musí být tedy obě rovny nulovému vektoru. □

Kdybychom chtěli zobecnit pojem direktního součtu na více podprostorů $\mathcal{W} = \{W_1, W_2, W_3, \ldots\}$, intuitivně bychom asi zkusili požadovat, aby průnik $W_i \cap W_j$ každé dvojice podprostorů byl nulový. Brzy bychom ale zjistili, že s takovou definicí se nám nepodaří zobecnit tvrzení 4 o jednoznačném zápisu vektoru ze spojení jako součtu vektorů z jednotlivých podprostorů W_i. Dokonce ani zesílená podmínka, že musí být nulové všechny průniky přes všechny podmnožiny $\mathcal{W}$, nestačí. Je nutné předpokládat ještě více: aby každý podprostor z $\mathcal{W}$ měl nulový průnik se spojením všech ostatních prvků $\mathcal{W}$:

DEFINICE 13. Nechť $\mathcal{W}$ je množina podprostorů vektorového prostoru V nad $\mathbb{F}$ splňující

$$\forall W \in \mathcal{W} : W \cap \left(\bigvee_{W' \in \mathcal{W} \setminus \{W\}} W' \right) = 0$$

Pak označíme

$$\bigoplus_{W \in \mathcal{W}} W := \bigvee_{W \in \mathcal{W}} W$$

jako **direktní součet** všech podprostorů z množiny $\mathcal{W}$

VĚTA 4. *Nechť $\mathcal{W}$ je množina podprostorů vektorového prostoru V nad $\mathbb{F}$ splňující*

$$\forall W \in \mathcal{W} : W \cap \left(\bigvee_{W' \in \mathcal{W} \setminus \{W\}} W' \right) = 0$$

Pak pro každý nenulový vektor $w \in \bigoplus_{W \in \mathcal{W}} W$ existuje právě jedna konečná podmnožina $\{W_1, \ldots, W_k\} \subset \mathcal{W}$ taková, že $w = w_1 + \ldots + w_k$, kde $w_i \in W_i$ jsou nenulové vektory. Tyto vektory jsou určeny jednoznačně.

DŮKAZ. Jako v důkazu lemmatu 11 lze vektor w z direktního součtu zapsat jako lineární kombinaci a tu rozdělit na konečný počet sčítanců patřících do různých prvků $\mathcal{W}$. Pišme tedy

$$w = w_1 + w_2 + \ldots + w_k,$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $w_i \neq 0$ patří do $W_i \in \mathcal{W}$, $W_1, \ldots, W_k$ jsou navzájem různé. Předpokládejme, že existuje ještě další takový zápis $w = \sum_{i \in I} w_i'$, kde I je nějaká konečná množina indexů a opět $0 \neq w_i' \in W_i$. Označme

$$I_1 = \{1, \ldots, k\} \setminus I$$
$$I_2 = I \cap \{1, \ldots, k\}$$
$$I_3 = I \setminus \{1, \ldots, k\}$$

Porovnáním obou vyjádření máme

$$\sum_{i \in I_1} w_i + \sum_{i \in I_2} (w_i - w_i') - \sum_{i \in I_3} w_i' = 0$$

Pro libovolné $j \in I_1$ odtud plyne

$$w_j = -\sum_{i \in I_1 \setminus \{j\}} w_i - \sum_{i \in I_2} (w_i - w_i') + \sum_{i \in I_3} w_i',$$

tedy

$$w_j \in W_j \cap \left(\bigvee_{W' \in \mathcal{W} \setminus \{W_j\}} W' \right) = 0,$$

což je v rozporu s předpokladem $w_j \neq 0$. Podobně pro $j \in I_3$. Zbývá $j \in I_2$, přičemž už víme, že I_1 a I_3 jsou prázdné. Pak

$$w_j - w_j' = \sum_{i \neq j} (w_i' - w_i),$$

což musí být ze stejných důvodů opět nula. Rozklad je tedy jednoznačný. □

DEFINICE 14. Nechť V je vektorový prostor a W jeho podprostor. Podprostor $W' \leq V$ se nazývá **doplněk** podprostoru W ve V, pokud $W \oplus W' = V$.

3.1. Cvičení.

(1) Zjistěte, zda vektor $v \in \mathbb{R}^4$ je lineární kombinací vektorů u_1, u_2, u_3. V kladném případě určete čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, že $v = au_1 + bu_2 + cu_3$:
   (a) $v = (2, 0, 3, 1), u_1 = (1, 0, 1, -2), u_2 = (2, -1, 0, 1), u_3 = (1, -1, -2, -2)$
   (b) $v = (3, 1, -1, 2), u_1 = (1, 1, 1, 2), u_2 = (1, 0, -1, 0), u_3 = (0, -1, 1, -2)$
   (c) $v = (2, 1, 2, -1), u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (1, 2, 1, -2), u_3 = (-1, 1, -1, -1)$

(2) Zjistěte, zda vektor v je v lineárním obalu vektorů u_i:
   (a) $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (0, 1, 2)$, $u_3 = (2, 1, 3)$, $v = (1, 0, 0)$
   (b) $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (3, 0, 2)$, $v = (0, 3, -1)$
   (c) $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (3, 0, 2)$, $v = (4, 3, 2)$
   (d) $u_1 = (1, 0, 1, 2), u_2 = (2, 1, -1, 0), u_3 = (-1, 2, 0, 1), u_4 = (0, 3, -2, -1)$, $v = (1, 5, 0, 4)$
   (e) $u_1 = (1, 0, 1, 2), u_2 = (2, 1, -1, 0), u_3 = (-1, 2, 0, 1), u_4 = (0, 3, -2, -1)$, $v = (2, 1, 3, 1)$

(3) Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 3x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad $\mathbb{R}$)

(4) Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 2x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{\cos x, \sin x, \sin 2x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad $\mathbb{R}$)

(5) Popište průnik podprostorů $\mathbb{R}^5$:

$$V_1 = \langle (1, 2, 1, 0, -1), (2, 1, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 0, 1) \rangle$$
$$V_2 = \langle (1, 2, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, -2), (0, 1, -5, 5, 2) \rangle$$

(6) Popište průnik podprostorů $\mathbb{R}^4$:
   (a)

$$V_1 = \langle (1, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 2), (1, 3, 1, -1) \rangle$$
$$V_2 = \langle (0, 0, 0, 1), (2, 3, -4, -2), (3, 2, -1, 2) \rangle$$

   (b)

$$V_1 = \{x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\}$$
$$V_2 = \{x_3 + x_4 = 0, x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

(7) Popište průnik podprostorů $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$
$$V_2 = \{x_1 + 11x_3 = 0\}$$

(8) Zjistěte, zda vektor v leží ve spojení prostorů V_1 a V_2:
(a)
$$V_1 = \langle (1,0,1,2), (2,1,3,1) \rangle$$
$$V_2 = \langle (1,-1,0,1), (0,-1,-1,1) \rangle$$
$$v = (0,0,0,1)$$
(b)
$$V_1 = \langle (1,0,1,2), (2,1,3,1) \rangle$$
$$V_2 = \langle (1,-1,0,1), (0,-1,-1,1) \rangle$$
$$v = (0,1,1,0)$$
(c)
$$V_1 = \langle (1,1,2), (2,1,1) \rangle$$
$$V_2 = \langle (0,1,3) \rangle$$
$$v = (1,1,1)$$
(d)
$$V_1 = \langle (1,1,2), (2,1,1) \rangle$$
$$V_2 = \langle (0,1,3) \rangle$$
$$v = (3,1,0)$$

(9) Popište průnik podprostorů v $\mathbb{R}^4$:
$$W_1 = \langle (1,0,1,1), (2,1,1,0)$$
$$W_2 = \{x_1 + x_3 = 0, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$$

(10) Popište průnik a spojení podprostorů v $\mathbb{R}^4$:
$$W_1 = \langle (1,1,1,0), (1,0,0,0) \rangle$$
$$W_2 = \langle (0,1,1,0), (0,1,0,0) \rangle$$

(11) Dokažte, že vektorový prostor $M_n(\mathbb{F})$ je direktním součtem podprostoru S_n všech symetrických $n \times n$ matic a podprostoru A_n všech antisymetrických $n \times n$ matic. Dokažte, že $M_n(\mathbb{C})$ je direktním součtem podprostoru hermitovských a antihermitovských matic.

(12) Matici
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
napište jako součet symetrické a antisymetrické matice.

(13) Dokažte, že podprostor všech ostře horních trojúhelníkových matic v $M_{mn}(\mathbb{F})$ a podprostor všech ostře dolních trojúhelníkových matic v $M_{mn}(\mathbb{F})$ mají nulový průnik. Je jejich direktním součtem celý prostor $M_{mn}(\mathbb{F})$?

(14) Dokažte, že spojením podprostoru všech horních trojúhelníkových matic v $M_{mn}(\mathbb{F})$ a podprostoru všech dolních trojúhelníkových matic v $M_{mn}(\mathbb{F})$ je celé $M_{mn}(\mathbb{F})$. Je i jejich direktním součtem?

(15) Za jakých podmínek je sjednocení $W_1 \cup W_2$ dvou podprostorů také podprostor?

(16) Dokažte, že spojení množiny podprostorů $\mathcal{W}$ vektorového prostoru V je nejmenší podprostor ve V obsahující všechny prvky množiny $\mathcal{W}$. Jinými slovy, dokažte, že každý podprostor V obsahující jako podprostory všechny prvky množiny $\mathcal{W}$, obsahuje jako podprostor také jejich spojení.

(17) Nechť V je vektorový prostor W_1, W_2, W_3 podprostory v něm. Rozhodněte, zda platí $(W_1 \vee W_2) \cap W_3 = W_1 \vee (W_2 \cap W_3)$. Odpověď zdůvodněte.

(18) Dokažte, že druhá mocnina matice $A = A_S + A_A$, kde A_S je symetrická a A_A antisymetrická matice, je symetrická právě když $A_S A_A + A_A A_S = 0$. Najděte matici A, která není symetrická ani antisymetrická (tedy $A_S \neq 0$, $A_A \neq 0$), ale A^2 je symetrická.

KAPITOLA 4

Báze a dimenze

1. Lineární nezávislost

Jeden a ten samý vektorový prostor můžeme zapsat jako lineární obal mnoha různých množin. Lineárním obalem množin

$$M_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$$
$$M_2 = \{(1,1,0),(1,-1,0)\}$$
$$M_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$$

je podprostor

$$W = \{(x,y,0)|x,y \in \mathbb{F}\} \leq \mathbb{F}^3$$

Zatímco ale pro první dvě množiny platí, že každý vektor z W se dá zapsat jako lineární kombinace jejich prvků *jednoznačně*, pro M_3 to není pravda:

$$\begin{aligned}(x,y,0) &= x(1,0,0) + y(0,1,0)\\ &= (x-y)(1,0,0) + y(1,1,0)\\ &= (y-x)(0,1,0) + x(1,1,0)\\ &= (x-t)(1,0,0) + (y-t)(0,1,0) + t(1,1,0)\end{aligned}$$

Vidíme, že z M_3 můžeme kterýkoli vektor vynechat a lineárním obalem zůstane W, zatímco v M_1 a M_2 žádné nadbytečné vektory nejsou. Hlavním cílem této kapitoly je takové množiny bez redundancí charakterizovat a naučit se je poznat a najít.

Definice 15. Nechť V je vektorový prostor, M jeho podmnožina. Řekneme, že M **generuje** V, pakliže $\langle M \rangle = V$. Pokud v prostoru V existuje konečná množina, která ho generuje, označíme ho za **konečně generovaný** vektorový prostor. Označme lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{k} r_i v_i$ za **triviální**, pokud všechny koeficienty r_i jsou nulové, jinak je **netriviální**. Řekneme, že M je **lineárně závislá**, pokud existuje nějaká netriviální lineární kombinace vektorů z M, která se rovná nulovému vektoru. V opačném případě je M **lineárně nezávislá**.

Příklad 6. Množiny M_1, M_2 i M_3 generují W, ale pouze první dvě jsou lineárně nezávislé.

Poznámky.

(1) Triviální kombinace dává nulový vektor vždy, jde tedy o to, zda existuje ještě nějaká jiná. Pokud například množina vektorů $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ obsahuje nulový vektor $v_j = 0$, pak stačí vzít $r_j = 1$ a ostatní $r_i = 0$ a pak máme $\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = 0$, tedy M je lineárně závislá.
(2) Pokud množina obsahuje s vektorem v také nějaký jeho další násobek rv, je lineárně závislá, protože stačí brát koeficienty $-r$ a 1 u těchto dvou vektorů a vynulovat koeficienty ostatní.

(3) Alespoň dvouprvková množina vektorů je lineárně závislá právě tehdy, když lze nějaký její vektor vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních: rovnost $v = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$ snadno přepíšeme na $0 = v - \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$ a naopak z netriviální lineární kombinace $\sum_{i=1}^{j} s_i u_i = 0$ můžeme vyjádřit kterýkoli vektor u_i s nenulovým koeficientem s_i pomocí ostatních.
(4) Z definice plyne, že prázdnou množinu považujeme za lineárně nezávislou.
(5) Pokud je množina M lineárně závislá, pak je lineárně závislá i každá její nadmnožina: každá netriviální lineární kombinace prvků z M je totiž zároveň lineární kombinací prvků z nadmnožiny. Ze stejných důvodů platí, že pokud M generuje vektorový prostor V, pak jej generuje i každá $N \subset V$, která je nadmnožinou M.
(6) Místo „M generuje V“ se také používá fráze „M je množinou generátorů V“.

1.1. Cvičení.

(1) Rozhodněte, zda dané množiny vektorů z $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně závislé či nezávislé a zda generují $\mathbb{R}^3$:
   (a) {(2,1,0), (4,1,2), (0,1,-4)}
   (b) {(2,1,0), (-4,-2,0)}
   (c) {(1,2,1), (2,1,3), (0,0,0)}
(2) Rozhodněte, zda dané množiny vektorů z $P^2(x, \mathbb{R})$ jsou lineárně závislé či nezávislé a zda generují $P^2(x, \mathbb{R})$:
   (a) $\{(x+1)^2, (x+1)\}$
   (b) $\{x^2 + 3x + 2, 2x^2 + x + 3, 3x^2 + 2x + 1\}$
   (c) $\{x^2 + 1, 2x^2 - 1, x + 3\}$
(3) Rozhodněte, zda dané množiny vektorů z $\mathbb{R}^4$ jsou lineárně závislé či nezávislé a zda generují $\mathbb{R}^4$:
   (a) {(1,1,0,1), (2,1,0,3), (3,0,1,2)}
   (b) {(2,1,3,2), (1,4,0,1), (5,3,1,0), (-1,9,7,9)}
(4) Rozhodněte, zda jsou dané podmnožiny $M_2(\mathbb{R})$ lineárně závislé či nezávislé a zda generují $M_2(\mathbb{R})$:
   (a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$
   (b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$
(5) Ukažte, že lineární závislost závisí na volbě číselné množiny. Najděte podmnožinu $M \subset \mathbb{C}^2$, která je lineárně nezávislá, pokud bereme $\mathbb{C}^2$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, a lineárně závislá, pokud bereme $\mathbb{C}^2$ standardně nad $\mathbb{C}$.
(6) Dokažte, že prostor $P(x, \mathbb{F})$ není konečně generovaný.
(7) Najděte co největší lineárně nezávislou množinu v prostoru všech symetrických matic $S_n(\mathbb{F})$ a dokažte, že každá její nadmnožina už je lineárně závislá.
(8) Mějme množinu M vektorů v $\mathbb{F}^n$, vytvořme z ní množinu N vektorů v $\mathbb{F}^{n-m}$ tak, že vynecháme u každého vektoru posledních m složek. Dokažte, že pokud je N lineárně nezávislá, pak je M lineárně nezávislá.
(9) Dokažte, že je-li $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{F}$ a $r_{ij} \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$, pak vektory $s_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ tvoří lineárně nezávislou množinu $\{s_1, s_2, \dots s_k\} \subset \mathbb{F}^n$

právě když je lineárně nezávislá množina $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$, kde $v_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} u_j$.

(10) Definujme řetězec vektorových prostorů jako posloupnost $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$, kde $V_0 = 0$ a pro všechna i je V_i vlastním podprostorem V_{i+1}. Délkou řetězce nazveme číslo k. Dokažte, že vektorový prostor není konečně generovaný právě když v něm existuje řetězec libovolné délky.

2. Báze

DEFINICE 16. Lineárně nezávislá množina, která generuje vektorový prostor V, se nazývá **báze** V. Pokud existuje ve V konečná báze, pak označujeme počet prvků této báze jako **dimenzi** prostoru V, píšeme $\dim V$. Pokud ve V žádná taková báze není, pak říkáme, že V je **prostor nekonečné dimenze**.

Tato definice má několik háčků. A priori nevíme, že každý vektorový prostor má bázi, a pokud ji má a je konečná, že má vždy stejný počet prvků. Cesta k ověření těchto skutečností a tím i korektnosti definice dimenze vede přes první komplikovanější výsledek lineární algebry - Steinitzovu větu.

LEMMA 12. *Nechť V je konečně generovaný vektorový prostor, M jeho množina generátorů. Pak existuje konečná množina $K \subset M$, která je bází V.*

DŮKAZ. Pokud $V = 0$, pak má právě dvě podmnožiny, sebe sama a prázdnou množinu. Obě ho generují, ale lineárně nezávislá je pouze $\emptyset$. Ta je jistě podmnožinou každé množiny generátorů V. Dále tedy můžeme předpokládat $V \neq 0$.

Nejprve ukážeme, že z každé nekonečné množiny M generující $V \neq 0$ lze vybrat konečnou podmnožinu, která také generuje V. Protože V je konečně generovaný, existuje množina $N = \{v_1, \ldots, v_k\}$, která generuje V. Protože M generuje V, lze každý vektor z N zapsat jako lineární kombinaci prvků z M, $v_i = \sum_{j=1}^{k_i} r_{ij} u_{ij}$. Označme $M_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{ik_i}\}$. Libovolný vektor $v \in V$ lze zapsat jako lineární kombinaci prvků z N a tedy

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} (s_i r_{ij}) u_{ij},$$

čili jako lineární kombinaci prvků z $M' := \bigcup_{i=1}^{k} M_i$, což je hledaná konečná podmnožina.

Lze proto předpokládat, že množina M generující V je konečná. Nyní mezi všemi podmnožinami množiny M, které generují V, vyberme nějakou $K = \{v_1, \ldots, v_n\}$ s nejmenším počtem prvků. Ukážeme sporem, že K už je lineárně nezávislá, tedy báze V. Je zřejmé, že pokud $n = 1$, pak buď $v_1 = 0$ a $\langle K \rangle = 0 \neq V$, nebo $v_1 \neq 0$ a K je lineárně nezávislá. Stačí se tedy zabývat případem, že K je alespoň dvouprvková.

Pokud by existovala netriviální lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$, pak by bylo možné některý z vektorů v_j vyjádřit pomocí ostatních jako $v_j = -\frac{1}{r_j} \sum_{i \neq j} r_i v_i$. Libovolný vektor $v \in V$ pak lze napsat jako

$$v = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i = \sum_{i \neq j} s_i v_i - \frac{s_j}{r_j} \sum_{i \neq j} r_i v_i = \sum_{i \neq j} \left(s_i - \frac{s_j}{r_j} r_i \right) v_i,$$

tedy jako lineární kombinaci prvků $K \setminus \{v_j\}$. To je ale množina s menším počtem prvků než K, a tudíž podle předpokladu nemůže generovat celé V. Dospěli jsme ke sporu, a tedy K je báze. □

Z tvrzení také plyne, že pojmy „konečně generovaný vektorový prostor“ a „prostor konečné dimenze“ znamenají totéž a můžeme je volně zaměňovat.

VĚTA 5 (Steinitzova věta). *Buď $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru V a $N = \{v_1, \ldots, v_k\}$ lineárně nezávislá množina ve V. Pak platí:*

(1) $k \leq n$
(2) *Při vhodném očíslování vektorů $u_1, \ldots, u_n$ množina $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots u_n\}$ generuje V.*

DŮKAZ. Budeme postupovat indukcí podle počtu k lineárně nezávislých vektorů. Pokud $k = 1$, pak musí být $n \geq k = 1$, $N = \{v_1\}$, protože v opačném případě by $M = \emptyset$ negenerovala V, který je jakožto nadmnožina N nenulový. Protože M generuje V, existují čísla r_i taková, že $v_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$, a protože $v_1 \neq 0$, musí pro některý index j být $r_j \neq 0$. Pokud j není rovno 1, pak přečíslujeme vektory u_i, aby tomu tak bylo. Lze tedy psát $u_1 = \frac{1}{r_1} v_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{r_i}{r_1} u_i$. Každý vektor, který je lineární kombinací $u_1, \ldots, u_n$, je tudíž také lineární kombinací $v_1, u_2, \ldots, u_n$, čili $\langle v_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = V$.

Předpokládejme proto platnost tvrzení pro $k - 1$, ukážeme, že pak musí platit i pro k. Pokud $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jsou lineárně nezávislé, pak $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ jsou lineárně nezávislé a tudíž podle indukčního předpokladu generuje množina $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, u_k, \ldots, u_n\}$ vektorový prostor V. Zároveň musí být $n \geq k$, protože z indukčního předpokladu $n \geq k-1$, a kdyby $n = k-1$, pak by bylo v_k lineární kombinací vektorů $v_1, \ldots, v_{k-1}$, což je ve sporu s lineární nezávislostí množiny $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Tedy v_k lze vyjádřit jako $\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + \sum_{i=k}^{n} r_i u_i$, kde pro nějaké $j \geq k$ musí být $r_j \neq 0$, jinak bychom opět dostali spor s lineární nezávislostí množiny $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Přečíslujme zbylé vektory $u_k, \ldots, u_n$ tak, aby $j = k$, pak je možné podobně jako v případě $k = 1$ vyjádřit u_k jako lineární kombinaci množiny $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$, a tedy i libovolný vektor z V jako lineární kombinaci z této množiny. □

Steinitzova věta (nebo též Steinitzovo lemma o výměně) vlastně říká, že v množině generátorů můžeme vyměnit vhodné prvky „kus za kus“ s prvky nějaké lineárně nezávislé množiny tak, abychom po výměně měli stále množinu generátorů. Plyne z ní celá řada důležitých důsledků:

DŮSLEDEK 1. *Všechny báze vektorového prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků.*

DŮKAZ. Pokud M je báze V o m prvcích a N je báze V o n prvcích, pak ze Steinitzovy věty plyne, že $m \geq n$ a zároveň $n \geq m$, čili $m = n$. □

Toto je dosud nejdůležitější výsledek, kterého jsme dosáhli. Díky němu má pojem dimenze oprávnění a smysl. Zároveň je v něm skryt návod, jak dimenzi určit: stačí najít libovolnou bázi a spočítat, kolik je v ní vektorů.

Někdy budeme ve zkratce psát V_n pro vektorový prostor dimenze n. Nulový prostor $V_0 = 0$ má dimenzi 0.

DŮSLEDEK 2. *Počet prvků každé lineárně nezávislé množiny ve V_n je menší nebo roven n, a pokud je roven, už musí být tato množina bází.*

DŮKAZ. Stačí vzít ve Steinitzově větě za M libovolnou bázi V_n a za N zadanou množinu. □

DŮSLEDEK 3. *Počet prvků každé množiny generátorů prostoru V_n je větší nebo roven n, a pokud je roven, už musí být tato množina bází.*

DŮKAZ. Ukážeme, že n-prvková množina generátorů N prostoru V_n musí být lineárně nezávislá. Kdyby nebyla, bylo by možné z ní vybrat podle lemmatu 12 lineárně nezávislou vlastní podmnožinu N', pro niž $\langle N \rangle = \langle N' \rangle$. Pak ale N' je

báze, která má méně prvků než je dimenze vektorového prostoru, což je spor s důsledkem 1. □

Poslední dvě tvrzení znamenají, že báze jsou právě největší lineárně nezávislé množiny a také právě nejmenší množiny generátorů.

DŮSLEDEK 4. *Každý podprostor W vektorového prostoru V_n má konečnou dimenzi.*

DŮKAZ. Všechny lineárně nezávislé podmnožiny W jsou zároveň lineárně nezávislé podmnožiny V_n a mají tedy nanejvýš n prvků. Zvolme z nich nějakou $N = \{v_1, \ldots, v_k\}$ s maximálním počtem prvků. Pokud by N negenerovala celé W, pak by existoval vektor $u \in W$, pro nějž $u \notin \langle N \rangle$. Kdyby $N \cup \{u\}$ byla lineárně závislá množina, pak by existovala netriviální lineární kombinace $ru + \sum_1^k s_i v_i = 0$. Pak ale buď $r = 0$, což je ve sporu s lineární nezávislostí N, nebo $r \neq 0$, což je zase ve sporu s $u \notin \langle N \rangle$. Tedy $N \cup \{u\}$ musí být lineárně nezávislá podmnožina ve W. O N jsme ale předpokládali, že je maximální lineárně nezávislá množina ve W, takže dostáváme spor s předpokladem a N musí generovat celé W. Tedy W má konečnou dimenzi. □

Následující tvrzení říká, že bázi podprostoru lze doplnit na bázi celého prostoru:

DŮSLEDEK 5. *Nechť $W \leq V_n$, N báze W. Pak existuje její nadmnožina $M \supset N$, která je bází V_n.*

DŮKAZ. Stačí vzít ve V_n libovolnou bázi $\{u_1, \ldots, u_n\}$, pak druhá část Steinitzovy věty říká, že množina $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ generuje V_n, a jelikož je n-prvková, je to báze V_n. □

PŘÍKLAD 7.

(1) Množina vektorů $\{e_1, \ldots, e_n\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$, kde
$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1), \end{aligned}$$
se nazývá **kanonická báze**. Tedy $\dim \mathbb{F}^n = n$.

(2) Množina matic $\{E_{ij}, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$, kde E_{ij} je matice, jejíž ij-tý element je 1 a ostatní 0, je báze prostoru $M_{mn}(\mathbb{F})$ nad $\mathbb{F}$, který má proto dimenzi mn.

(3) Označme $U_n(\mathbb{F})$ prostor všech horních trojúhelníkových matic v $M_n(\mathbb{F})$. Pak množina $\{E_{ij} | i, j \in \{1, \ldots, n\}, j \geq i\}$ je bází $U_n(\mathbb{F})$. Tedy
$$\dim U_n(\mathbb{F}) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
Prostor $L_n^0(\mathbb{F})$ všech striktně dolních trojúhelníkových matic v $M_n(\mathbb{R})$ má bázi $\{E_{ij} | i, j \in \{1, \ldots, n\}, j < i\}$, takže
$$\dim L_n^0(\mathbb{F}) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(4) Množina $\{1, x, x^2, \ldots\}$ je báze prostoru všech polynomů $P(x, \mathbb{F})$ nad $\mathbb{F}$. Je to tudíž prostor nekonečné dimenze.

(5) Množina $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Tento prostor má tedy dimenzi 4, zatímco $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$ má dimenzi 2.

Další důležité příklady uvidíme v následující kapitole, v níž se budeme zabývat vztahem dimenze a existence řešení soustavy lineárních rovnic.

2.1. Cvičení.

(1) Najděte nějakou bázi a určete dimenzi následujících podprostorů $\mathbb{R}^3$:
   (a) $\langle(2,1,0),(4,1,2),(0,1,-4)\rangle$
   (b) $\langle(2,1,0),(-4,-2,0)\rangle$
   (c) $\langle(1,2,1),(2,1,3),(0,0,0)\rangle$

(2) Najděte nějakou bázi a určete dimenzi prostoru
   (a) $D_n(\mathbb{F})$ všech čtvercových diagonálních matic stupně n
   (b) $S_n(\mathbb{F})$ všech symetrických matic stupně n
   (c) $A_n(\mathbb{F})$ všech antisymetrických matic stupně n.
   (d) $U_n^0(\mathbb{F})$ všech čtvercových striktně horních trojúhelníhových matic stupně n
   (e) $L_n(\mathbb{F})$ všech čtvercových dolních trojúhelníhových matic stupně n
   (f) $H_n(\mathbb{C})$ všech hermitovských matic stupně n
   (g) $AH_n(\mathbb{C})$ všech antihermitovských matic stupně n.

(3) Najděte nějakou bázi a určete dimenzi prostoru
   (a) $P^n(x,\mathbb{R})$ všech polynomů stupně nejvýše n
   (b) všech polynomů z $P^n(x,\mathbb{R})$, pro které $p(0)=0$.
   (c) všech polynomů z $P^n(x,\mathbb{R})$, pro které $\forall x\in\mathbb{R}: p(x)=-p(-x)$.
   (d) všech polynomů z $P^n(x,\mathbb{R})$, které jsou násobkem polynomu x^3+x+2.

(4) Ukažte, že prostor všech posloupností $(a_i)_1^\infty$, splňujících $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$, je konečně generovaný a určete jeho bázi.

(5) Určete bázi a dimenzi prostoru $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

(6) Najděte nějakou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje bázi daného podprostoru:
   (a) $\langle(1,1,0,1),(2,1,0,3),(3,0,1,2)\rangle$
   (b) $\langle(2,1,3,2),(1,4,0,1),(5,3,1,0),(-1,9,7,9)\rangle$

(7) Nechť V je vektorový prostor dimenze n, $W\le V$, $\dim W=n-1$, M je báze W, $u\in V$. Dokažte, že $M\cup\{u\}$ je báze V právě když u není prvkem W.

(8) Nechť V je vektorový prostor všech reálných posloupností $\{a_i\}_0^\infty$ a $M\subset V$ je podmnožina všech posloupností vyhovujících pro $n\ge 3$ rekurentní relaci $a_n=Aa_{n-1}+Ba_{n-2}+Ca_{n-3}$, kde A,B,C jsou reálné konstanty. Dokažte, že M je vektorový podprostor V dimenze 3.

3. Dimenze spojení a průniku

VĚTA 6 (o dimenzi spojení a průniku). *Nechť V je vektorový prostor a U,W jsou dva jeho podprostory konečné dimenze. Pak*

$$\dim U+\dim W=\dim U\cap W+\dim U\vee W$$

DŮKAZ. Prostor $U\cap W$ je podprostorem prostoru W, a je tedy také konečné dimenze. Zvolme v něm libovolnou bázi $\{v_1,\dots,v_k\}$, tuto bázi lze doplnit podle důsledku 5 vektory $u_1,\dots,u_p$ na bázi U a vektory $w_1,\dots,w_q$ na bázi W. Ukážeme, že množina $M=\{u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_q\}$ je bází $U\vee W$.

Je zřejmé, že M generuje $U\vee W$. Každý vektor $v\in U\vee W$ je součtem nějakého vektoru $u\in U$ a nějakého vektoru $w\in W$. Každý z nich je lineární kombinací prvků M a tedy i v je lineární kombinací prvků M. Předpokládejme nyní, že

$$0=\sum_{i=1}^{p} r_iu_i+\sum_{i=1}^{k} s_iv_i+\sum_{i=1}^{q} t_iw_i$$

Tedy vektor

$$u=-\sum_{i=1}^{p} r_iu_i=\sum_{i=1}^{k} s_iv_i+\sum_{i=1}^{q} t_iw_i$$

je zároveň prvkem U a W, tedy prvkem jejich průniku. Je proto možné jej vyjádřit jako $u = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i$. Pak ale

$$\sum_{i=1}^{k} x_i v_i + \sum_{i=1}^{p} r_i u_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{k} (s_i - x_i) v_i + \sum_{i=1}^{q} t_i w_i = 0$$

Jelikož množiny $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_k\}$ a $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_q\}$ jsou lineárně nezávislé, musí být v obou rovnostech všechny koeficienty nulové. To ale znamená, že i množina M je lineárně nezávislá.

Zkonstruovali jsme tedy z báze prostoru $U \cap W$ báze prostorů U, W a $U \vee W$. Dokazovaná rovnost plyne prostým dosazením počtů prvků těchto bází: $(p + k) + (k + q) = k + (p + k + q)$. □

Všimněte si, jak je v důkazu konstruována báze $U \vee W$. Pro libovolnou bázi tohoto prostoru nemůžeme očekávat, že nějaké její podmnožiny budou bázemi U, V nebo $U \cap V$. Když ale postupujeme zdola, od báze $U \cap V$, lze doplňováním na bázi U a V bázi $U \vee V$ s takovými speciálními vlastnostmi vytvořit.

Příklad 8. Ukážeme modelový příklad užití věty o dimenzi spojení a průniku. Uvažujme dva podprostory v $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$
$$V = \langle (0,0,1), (1,2,3) \rangle$$

Každý je zadán jako lineární obal dvojice lineárně nezávislých vektorů, tedy $\dim U = \dim V = 2$. Sjednocení množin generátorů prostorů U a V

$$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,2,3)\}$$

generuje celé $U \vee V$. První tři vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^3$, takže $U \vee V = \mathbb{R}^3$. Z toho zjistíme dimenzi průniku

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim U \vee V = 1,$$

aniž bychom samotný průnik museli počítat. (Ne že by to v tomto případě bylo extra složité.)

Zobecnění věty o dimenzi spojení a průniku na více podprostorů není tak jednoduché, jak by se mohlo zdát. V nejdůležitějším případě direktního součtu ale funguje dobře:

Věta 7 (O dimenzi direktního součtu). *Nechť $W_1, \ldots, W_k$ jsou podprostory V_n takové, že $\bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ existuje. Pak*

$$\sum_{i=1}^{k} \dim W_i = \dim \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $k = 2$ tvrzení plyne z věty o dimenzi spojení a průniku. Předpokládejme tedy, že platí pro $k-1$. Uvažujme podprostory $W_1, \ldots, W_k$ takové, že $\bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ existuje. Pak

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\}, \quad W_j \cap \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} W_i = 0$$

a tím pádem také

$$\forall j \in \{1, \dots, k-1\}, \quad W_j \cap \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} W_i = 0$$

Tedy $\bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i$ existuje a podle indukčního předpokladu $\sum_{i=1}^{k-1} \dim W_i = \dim \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i$. Protože $W_k \cap \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i = 0$, plyne z věty o dimenzi spojení a průniku

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{k} W_i = \dim W_k + \dim \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_i = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i.$$

□

PŘÍKLAD 9. Ukažme, že prostor $U_n(\mathbb{F})$ všech horních trojúhelníkových matic stupně n je doplňkem prostoru $L_n^0(\mathbb{F})$ všech striktně dolních trojúhelníkových matic stupně n v prostoru $M_n(\mathbb{F})$ všech čtvercových matic stupně n. Víme, že matice, která je zároveň horní trojúhelníková a striktně dolní trojúhelníková, musí být nutně nulová, a ze známých dimenzí $U_n(\mathbb{F})$ a $L_n^0(\mathbb{F})$ plyne

$$\dim U_n(\mathbb{F}) \oplus L_n^0(\mathbb{F}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2,$$

Jediným podprostorem v $M_n(\mathbb{R})$ dimenze n^2 je ale samotné $M_n(\mathbb{R})$, proto nutně $U_n(\mathbb{R}) \oplus L_n^0(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

3.1. Cvičení.

(1) Určete dimenzi průniku podprostorů v $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1,1,2,1), (1,0,0,2) \rangle$$
$$V = \langle (2,1,0,3), (1,2,2,0) \rangle$$

(2) Dokažte, že prostor $A_n(\mathbb{F})$ všech antisymetrických matic je doplňkem prostoru $S_n(\mathbb{F})$ všech symetrických matic v $M_n(\mathbb{F})$.
(3) Dokažte, že $U_n(\mathbb{F}) \oplus A_n(\mathbb{F}) = M_n(\mathbb{F})$
(4) Dokažte, že $D_n(\mathbb{F}) \oplus U_n^0(\mathbb{F}) = U_n(\mathbb{F})$
(5) Dokažte, že $D_n(\mathbb{F}) \oplus L_n^0(\mathbb{F}) \oplus A_n(\mathbb{F}) = M_n(\mathbb{F})$
(6) Označme v $P^n(x, \mathbb{R})$ podmnožiny

$$P_+^n(x, \mathbb{R}) = \{p \in P^n(x, \mathbb{R}) | p(x) = p(-x)\}$$
$$P_-^n(x, \mathbb{R}) = \{p \in P^n(x, \mathbb{R}) | p(x) = -p(-x)\}$$

Dokažte, že

$$P^n(x, \mathbb{R}) = P_+^n(x, \mathbb{R}) \oplus P_-^n(x, \mathbb{R})$$

Dokažte analogické tvrzení pro nekonečnědimenzionální prostory všech polynomů

$$P(x, \mathbb{R}) = P_+(x, \mathbb{R}) \oplus P_-(x, \mathbb{R})$$

KAPITOLA 5

Hodnost matice

1. Čtyři prostory spojené s maticí

DEFINICE 17. Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je matice. Jejím **řádkovým podprostorem** $R(A)$ rozumíme lineární obal množiny všech m řádků matice A, chápaných jako vektory ve vektorovém prostoru $\mathbb{F}^n$. **Sloupcový podprostor** $S(A)$ matice A je lineární obal množiny všech n sloupců matice A, chápaných jako prvky $\mathbb{F}^m$. Definujeme **hodnost** $h(A)$ **matice** A jakožto dimenzi prostoru $R(A)$.

Nyní máme ke každé matici přiřazeny čtyři fundamentální podprostory:

(1) řádkový prostor $R(A)$, jeho dimenze je hodnost $h(A)$
(2) sloupcový prostor $S(A) \equiv R(A^T)$, jeho dimenze je $h(A^T)$
(3) nulový prostor $N(A)$, jeho dimenze se nazývá **nulita matice** $n(A)$
(4) prostor $N(A^T)$, jehož dimenze je $n(A^T)$

V této kapitole budeme studovat, jak spolu tyto čtyři prostory a jejich dimenze souvisí. Z kapitoly o řešení soustav lineárních rovnic víme, že $N(A)$ se zachovává při elementárních řádkových úpravách matice. Z následujícího lemmatu plyne, že se při těchto úpravách zachovává i $R(A)$:

LEMMA 13. *Nechť $M_0 = (v_1, \ldots, v_m)$ je množina vektorů ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{F}$, $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \neq k$, $r, s \in \mathbb{F}$, $r \neq 0$. Označme*

$$M_1 = (v_1, \ldots, v_{k-1}, rv_k, v_{k+1}, \ldots, v_m)$$
$$M_2 = (v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k + sv_j, v_{k+1}, \ldots, v_m)$$

Pak platí, že $\langle M_0 \rangle = \langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$. Dále platí, že M_0 je lineárně nezávislá, právě když je lineárně nezávislá M_1 a právě když je lineárně nezávislá M_2.

DŮKAZ. Dokážeme tvrzení pouze pro M_2, případ M_1 je zcela analogický a vlastně jednodušší. Pokud $v \in \langle M_0 \rangle$, pak existují $r_i \in \mathbb{F}$, že $v = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i$. Pro pohodlnější zápis předpokládejme $k < j$. Pak lze sumu přepsat jako

$$v = \sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + r_k(v_k + sv_j) + \sum_{i=k+1}^{j-1} r_i v_i + (r_j - sr_k)v_j + \sum_{i=j+1}^{m} r_i v_i,$$

tedy v je lineární kombinací vektorů z M_2, $v \in \langle M_2 \rangle$. Naopak pokud $v \in \langle M_2 \rangle$, pak existují $s_i \in \mathbb{F}$ taková, že

$$v = \sum_{i=1}^{k-1} s_i v_i + s_k(v_k + sv_j) + \sum_{i=k+1}^{m} s_i v_i,$$

Přepíšeme lineární kombinaci do tvaru

$$v = \sum_{i=1}^{j-1} s_i v_i + (s_k s + s_j)v_j + \sum_{i=j+1}^{m} s_i v_i,$$

čili $v \in \langle M_0 \rangle$. Tím jsme dokázali obě inkluze $\langle M_0 \rangle \subset \langle M_2 \rangle$ i $\langle M_2 \rangle \subset \langle M_0 \rangle$ a tím pádem rovnost obou množin.

Podobně ověříme, že se zachovává lineární (ne)závislost. Pokud M_2 je lineárně nezávislá a $\sum_{i=1}^{m} r_i v_i = 0$, pak musí být v lineární kombinaci

$$\sum_{i=1}^{k-1} r_i v_i + r_k(v_k + sv_j) + \sum_{i=k+1}^{j-1} r_i v_i + (r_j - sr_k)v_j + \sum_{i=j+1}^{m} r_i v_i,$$

prvků M_2 všechny koeficienty nulové. To ale znamená $r_i = 0$, pokud i není k ani j, dále $r_k = 0$, a díky tomu $r_j = r_j - sr_k = 0$. Tedy lineární kombinace $\sum_{i=1}^{m} r_i v_i$ musí být triviální, a tedy M_0 je lineárně nezávislá. Stejným způsobem lze ověřit opačnou implikaci. □

Příklad 10. Určeme dimenzi lineárního obalu množiny $M = \{(3,-6,1,-1), (1,-2,3,1), (-2,4,0,1), (0,0,2,1)\}$ v $\mathbb{R}^4$. Sestavíme matici A, která má tyto vektory jako řádky, hledaná dimenze je pak rovna hodnosti $h(A)$. Řádkové úpravy podle lemmatu zachovávají lineární obal, takže Gaussovou eliminací

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zjišťujeme, že jednou z bází $\langle M \rangle$ je $\{(1,-2,3,1),(0,0,2,1)\}$. Hledaná dimenze je tedy 2 a jako vedlejší produkt jsme také zjistili, že M je lineárně závislá množina.

1.1. Cvičení.

(1) Dokažte, že $N(A^T) = \{y \in \mathbb{F}^m | y^T A = 0\}$, kde $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ a y chápeme jako sloupcový vektor.

(2) Zjistěte, zda je množina

$$\{(1,-1,1,2),(1,8,7,-7),(1,2,3,-1),(1,5,5,-4)\}$$

lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

(3) Zjistěte, zda je množina

$$\{(0,-4,3,3),(8,1,3,-3),(1,0,0,7),(1,3,4,8)\}$$

lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

(4) Zjistěte, zda je množina $\{(2,1,-1,2,-1),(-4,3,2,-1,1),(3,5,-2,1,-2),(2,2,-1,3,-1),(-1,2,3,1,3)\}$ lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^5$.

(5) Zjistěte, zda je množina

$$\{(1+i,1-i,1+i),(1-i,1+3i,i-1),(1,1+i,i)\}$$

lineárně nezávislá, případně ji doplňte na bázi celého $\mathbb{C}^3$.

(6) Pro která $a \in \mathbb{R}$ je množina $\{(a,-4,-1),(4,-6,-3),(1,1,-a)\}$ lineárně nezávislá? Určete dimenzi jejího lineárního obalu v závislosti na a.

(7) Pro která $a \in \mathbb{R}$ je množina $\{(7,a,-1),(-4,8,-3),(2a,1,-4)\}$ lineárně nezávislá? Určete dimenzi jejího lineárního obalu v závislosti na a.

(8) Najděte bázi

$$\langle (0,1,-3,4),(2,2,2,2),(1,-1,3,7)\rangle \subset \mathbb{R}^4,$$

obsahující vektor $(1,4,-4,-1)$.

(9) Nechť

$$V_1 = \langle (1,0,2,-3), (3,2,1,-5), (-1,2,1,-2) \rangle$$
$$V_2 = \langle (-3,0,2,0) \rangle$$

jsou podprostory $\mathbb{R}^4$. Určete dimenzi $V_1 \cap V_2$.

(10) Najděte dimenze prostorů V, W, $V \cap W$, $V \vee W \subset \mathbb{R}^5$ v závislosti na parametru λ, kde

$$V = \langle (3,-1,-2,2,1), (1,4,0,1,-1), (\lambda,6,-4,6,0) \rangle$$
$$W = \langle (1,-3,2,-3,0), (0,0,0,1,1) \rangle$$

(11) Z vektorů

$$(1,0,2,-3), (3,2,1,-5), (-1,2,1,-2), (-3,0,2,0)$$

vyberte lineárně nezávislou množinu a vyjádřete ostatní vektory jako lineární kombinace prvků této lineárně nezávislé množiny.

(12) Nechť

$$V_1 = \langle (1,3,0,2), (2,0,1,3), (5,-3,3,1) \rangle$$
$$V_2 = \langle (3,-3,2,-2), (3,3,1,5), (2,0,1,1) \rangle$$

jsou podprostory $\mathbb{R}^4$. Určete dimenzi $V_1 \cap V_2$.

(13) Vyberte všechny báze $\mathbb{R}^3$ z množiny

$$\{(1,2,3), (2,3,4), (3,2,3), (4,3,4), (1,1,1)\}$$

.

(14) Najděte dimenzi prostoru

$$\langle \{(1,1,1,a), (1,1,a,1), (1,a,1,1), (a,1,1,1)\} \rangle \subset \mathbb{R}^4$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(15) Vyberte z množiny

$$\{(1,0,1), (3,2,1), (1,2,3), (1,0,-2)\}$$

nějakou bázi $\mathbb{R}^3$ a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.

(16) Z množiny vektorů

$$\{(5,7,-1,3), (1,-3,8,2), (9,17,-10,4), (-2,6,-16,-4)\}$$

v $\mathbb{R}^4$ vyberte nějakou bázi jejího lineárního obalu.

(17) Pro která $a \in \mathbb{R}$ je

$$\{(3,1,1,4), (a,4,10,1), (1,7,17,3), (2,2,4,3)\}$$

lineárně nezávislá množina?

(18) Pro která $a \in \mathbb{R}$ je

$$\{(1,a,-1,2), (2,-1,a,5), (1,10,-6,1)\}$$

lineárně nezávislá množina?

(19) Mějme množinu vektorů $\{(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in T^n, i = 1, \ldots, s \leq n\}$. Dokažte, že pokud pro všechna j platí $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^{s} |a_{ij}|$, pak je tato množina lineárně nezávislá.

2. Hodnost transponované matice

Z příkladu je vidět, že *sloupcový* prostor matice se při *řádkových* úpravách nezachovává. Báze sloupcového prostoru poslední matice je totiž například

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ale žádný sloupec původní matice A v $\langle N \rangle$ neleží. Důležitým a netriviálním faktem ale je, že *dimenzi* sloupcového prostoru ponechávají řádkové úpravy stejnou:

LEMMA 14. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ a A' vznikne z A elementární řádkovou úpravou. Pak* $\dim S(A) = \dim S(A')$.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že prvních k sloupců A tvoří bázi $S(A)$. Ukážeme, že prvních k sloupců A' tvoří bázi $S(A')$, a to postupně pro jednotlivé typy elementárních úprav. Označme sloupce A jako $a_1, \ldots, a_n$ a sloupce A' jako $a'_1, \ldots, a'_n$. Množina $M = \{a_1, \ldots, a_k\}$ tvoří bázi $S(A)$, právě když je lineárně nezávislá a všechny ostatní sloupce a_j, $j > k$ lze zapsat jako lineární kombinaci prvků M (protože pak jde každý vektor z $S(A)$ zapsat jako lineární kombinaci prvků z M).

(1) Vynechání nulových řádků.
   (a) Generování. Pokud $a_j = \sum_{i=1}^{k} r_i a_i$, kde $j > k$, pak zřejmě $a'_j = \sum_{i=1}^{k} r_i a'_i$, neboť vektory a'_i vznikly z a_i pouze vynecháním některých složek. Tedy $\{a'_1, \ldots, a'_k\}$ generuje $S(A')$.
   (b) Lineární nezávislost. Pokud $\sum_{i=1}^{k} r_i a'_i = 0$, pak i $\sum_{i=1}^{k} r_i a_i = 0$, protože a_i vznikly z a'_i přidáním několika složek rovných nule. Ale $\{a_1, \ldots, a_k\}$ je podle předpokladu lineárně nezávislá, tedy musí být $\forall i : r_i = 0$, tedy je i $\{a'_1, \ldots, a'_k\}$ lineárně nezávislá.

(2) Přidání nulových řádků. Analogicky.

(3) Výměna p-tého a q-tého řádku.
   (a) Generování. Pokud $a_j = \sum_{i=1}^{k} r_i a_i$, kde $j > k$, pak zřejmě $a'_j = \sum_{i=1}^{k} r_i a'_i$, neboť vektory a'_i vznikly z a_i pouze výměnou p-té a q-té složky. Tedy $\{a'_1, \ldots, a'_k\}$ generuje $S(A')$.
   (b) Lineární nezávislost. Analogicky.

(4) Přičtení s-násobku p-tého řádku do q-tého řádku, $p \neq q$.
   (a) Generování. Pokud $a_j = \sum_{i=1}^{k} r_i a_i$, kde $j > k$, pak pro q-tou složku a'_j platí

$$\begin{aligned}(a'_j)_q = (a_j)_q + s(a_j)_p &= \sum_{i=1}^{k} r_i (a_i)_q + s \sum_{i=1}^{k} r_i (a_i)_p \\ &= \sum_{i=1}^{k} r_i \left((a_i)_q + s(a_i)_p \right) = \sum_{i=1}^{k} r_i (a'_i)_q\end{aligned}$$

   Ostatní složky a'_i jsou stejné jako v a_i, máme tedy $a'_j = \sum_{i=1}^{k} r_i a'_i$ a $\{a'_1, \ldots, a'_k\}$ generuje $S(A')$.
   (b) Lineární nezávislost. Podobně jako u generování zjistíme, že z $0 = \sum_{i=1}^{k} r_i a'_i$ plyne $0 = \sum_{i=1}^{k} r_i a_i$ a odtud $r_i = 0$.

(5) Násobení q-tého řádku číslem $s \in \mathbb{F}$, $s \neq 0$. Podobně jako předchozí případ.

□

Jednoduchým důsledkem lemmatu je, že řádkové i sloupcové úpravy zachovávají jak $h(A) = \dim R(A)$, tak $h(A^T) = \dim S(A)$. Odtud je jen krok k důkazu velmi důležité věty:

VĚTA 8 (O hodnosti transponované matice). *Pro každou matici $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ platí*

$$h(A) = h(A^T)$$

DŮKAZ. Matici A lze převést řádkovými úpravami na redukovaný odstupňovaný tvar bez nulových řádků, a pak ještě přeuspořádat sloupce tak, aby pivotní byly na prvních p pozicích. Výsledná matice má tvar

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} \end{pmatrix},$$

což můžeme přepsat blokově jako (E, C), kde $C \in M_{pq}(\mathbb{F})$, $q = n - p$. Je zřejmé, že řádky jsou lineárně nezávislé, takže $h(A') \equiv \dim R(A') = p$. Prvních p sloupců zase evidentně tvoří bázi sloupcového prostoru $S(A')$, tedy $h(A'^T) = \dim S(A') = p$. Při všech úpravách se dimenze řádkového i sloupcového prostoru zachovávala, takže $h(A) = h(A^T)$. □

2.1. Cvičení.

(1) Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete také hodnost matice transponované a ověřte, že se rovnají.

(2) Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete také hodnost matice transponované a ověřte, že se rovnají.

(3) V závislosti na $a \in \mathbb{R}$ určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete také hodnost matice transponované a ověřte, že se rovnají.

3. Hodnost a řešení soustav rovnic

VĚTA 9 (O hodnosti a nulitě). *Pro každou matici $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ platí*

$$h(A) + n(A) = n$$

DŮKAZ. Převeďme opět matici A na redukovaný odstupňovaný tvar bez nulových řádků, přečíslujme neznámé tak, aby pivotní sloupce odpovídaly indexům

1 až $p = h(A)$ a zapišme výslednou matici podobně jako v předchozím důkazu $A' = (E, C)$. Množina vektorů

$$\begin{aligned} M = \{&(-c_{11}, -c_{21}, \ldots, -c_{p1}, 1, 0, \ldots, 0) \\ &(-c_{12}, -c_{22}, \ldots, -c_{p2}, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ &(-c_{1q}, -c_{2q}, \ldots, -c_{pq}, 0, 0, \ldots, 1)\} \end{aligned}$$

je lineárně nezávislá a každý její vektor je řešením soustavy rovnic. Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je libovolné řešení soustavy, označme jeho posledních q složek $r_1, \ldots, r_q$. Dosazením do všech rovnic soustavy zjistíme, že pro všechna $i \in \{1, \ldots, p\}$ už musí být $x_i = -\sum_{j=1}^{q} c_{ij} r_j$. Vzniklý vektor řešení

$$\left(-\sum_{j=1}^{q} c_{1j} r_j, -\sum_{j=1}^{q} c_{2j} r_j, \ldots, -\sum_{j=1}^{q} c_{pj} r_j, r_1, \ldots, r_q \right),$$

je lineární kombinací vektorů z M s koeficienty $r_1, \ldots, r_q$. Každé řešení soustavy $Ax = 0$ je tedy v lineárním obalu množiny M, proto je M bází $N(A)$ a $q = n - h(A)$ je dimenze tohoto prostoru $n(A)$. □

Množina M v důkazu je bází prostoru $N(A)$ všech řešení soustavy rovnic $Ax = 0$, její prvky nazýváme **bázová řešení**. Jejich hledání v konkrétních případech už máme zažité z první kapitoly. Jakékoli řešení nehomogenní soustavy rovnic $Ax = b$ získáme díky větě 2 jako součet libovolného, tzv. partikulárního řešení $Ax = b$ a nějakého prvku $N(A) = \langle M \rangle$. Pokud soustava rovnic vede na odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1q} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2q} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{p1} & c_{p2} & \ldots & c_{pq} & b'_p \end{array} \right),$$

je nejpohodlnější volit za toto partikulární řešení $(b'_1, \ldots, b'_p, 0 \ldots, 0)$. Obecné řešení pak vypadá

$$\begin{aligned} &(b'_1, \ldots, b'_p, 0 \ldots, 0) + \\ \langle &(-c_{11}, -c_{21}, \ldots, -c_{p1}, 1, 0, \ldots, 0) \\ &(-c_{12}, -c_{22}, \ldots, -c_{p2}, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ &(-c_{1q}, -c_{2q}, \ldots, -c_{pq}, 0, 0, \ldots, 1) \rangle \end{aligned}$$

V reálných početních příkladech samozřejmě vždy nevyjdou pivotní sloupce na prvních p pozic, jsou s nepivotními promíchány, což se projeví odpovídajícím promícháním složek řešení.

Věta 10 (Frobeniova). *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je matice, $b \in \mathbb{F}^m$ vektor pravých stran. Soustava rovnic $Ax = b$ má řešení, právě když $h(A) = h(A|b)$.*

Důkaz. Soustava $Ax = b$ má řešení, právě když je b lineární kombinací sloupců matice A, jinými slovy když $b \in S(A)$, čili $S(A|b) = S(A)$. Podle věty 8 je pak $h(A) = h(A|b)$. Naopak, pokud $h(A) = h(A|b)$, musí být $b \in S(A)$, jinak by $S(A)$ byl vlastním podprostorem $S(A|b)$ a neměl by stejnou dimenzi. □

3.1. Cvičení.

(1) Dokažte, že množina $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 = 0 \wedge x_2 - 2x_4 = 0\}$ je podprostor $\mathbb{R}^4$ a určete jeho dimenzi.

(2) Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Jaký je vztah mezi $n(A)$ a $n(A^T)$?

(3) O soustavě řekneme, že je řešitelná, pokud má alespoň jedno řešení. Nechť A je čtvercová matice stupně n, B je regulární matice stupně n. Rozhodněte, které z následujících výroků platí:
   (a) $(A|b)$ je řešitelná $\Rightarrow$ $(BA|b)$ je řešitelná
   (b) $(A|b)$ je řešitelná $\Rightarrow$ $(AB|b)$ je řešitelná
   (c) $(AB|b)$ je řešitelná $\Rightarrow$ $(A|b)$ je řešitelná
   (d) $(BA|b)$ je řešitelná $\Rightarrow$ $(A|b)$ je řešitelná
   (e) žádný z předchozích výroků neplatí

   Odpověď zdůvodněte.

(4) Nechť $Ax = b$ je soustava lineárních rovnic, mající alespoň jedno řešení. Určete nutnou a postačující podmínku, aby proměnná x_k měla hodnotu nula v každém řešení této soustavy a dokažte.

(5) Nechť $Ax = b$ je soustava lineárních rovnic, mající alespoň jedno řešení. Určete nutnou a postačující podmínku, aby proměnná x_k měla stejnou hodnotu v každém řešení této soustavy a dokažte.

(6) Určete vektor (a, b, c) tak, aby byl násobkem nějakého řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= a \\ 2x + 2z &= b \\ -x + y + z &= c \end{aligned}$$

(7) Dokažte, že pro libovolnou homogenní soustavu rovnic, jejíž koeficienty jsou racionální čísla, lze sestavit bázi prostoru řešení, v níž každá složka každého vektoru je celé číslo.

(8) Vzhledem k parametrům a, b, c najděte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + by + z &= b \\ x + y + cz &= c \end{aligned}$$

(9) Dokažte, že $\forall y \in \mathbb{F}^n$ je $y^T y \geq 0$, přičemž rovnost nastane pouze pro $y = 0$. Podobně dokažte, že $y^T A^T A y \geq 0$, přičemž rovnost nastane pouze pro $y \in N(A)$. Dokažte odtud, že pro libovolnou matici A platí $N(A) = N(A^T A)$ a $h(A) = h(A^T A)$.

4. Vlastnosti hodnosti

VĚTA 11. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{np}(\mathbb{F})$ jsou matice. Pak $h(AB) \leq \min(h(A), h(B))$.*

DŮKAZ. Sloupce matice AB jsou lineární kombinací sloupců matice A, tedy $S(AB) \leq S(A)$ a tedy $h(AB) \leq h(A)$. Řádky AB jsou zase lineární kombinací řádků B, takže i $h(AB) \leq h(B)$. □

VĚTA 12. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je čtvercová matice. Pak A je regulární právě když $h(A) = n$.*

DŮKAZ. Množina sloupců jednotkové $n \times n$ matice E_n je bází $\mathbb{F}^n$. Pokud A je regulární, pak má inverzní matici A^{-1}, $A^{-1}A = E_n$. Podle předchozí věty tedy $n = h(E_n) = h(A^{-1}A) \leq \min(h(A), h(A^{-1}))$. Řádkové prostory matic A a A^{-1} jsou podprostory $\mathbb{F}^n$, tedy také $h(A) \leq n$, $h(A^{-1}) \leq n$. Musí být tedy $h(A) = h(A^{-1}) = n$.

Pokud naopak $h(A) = n$, pak řádky A tvoří bázi $\mathbb{F}^n$. Označme tyto řádky po řadě $a_1, \ldots, a_n$. Pro libovolný řádek e_i matice E_n, $i \in \{1, \ldots, n\}$ tedy existují čísla b_{ij}, $j \in \{1, \ldots, n\}$, že e_i je lineární kombinací vektorů a_j s koeficienty b_{ij}, čili $e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_j$. Pak ale matice B splňuje vztah $BA = E$ a podle definice je inverzní maticí regulární matice A. □

VĚTA 13. *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je libovolná matice, $B \in M_{mm}(\mathbb{F})$, $C \in M_{nn}(\mathbb{F})$ jsou regulární matice. Pak $h(BAC) = h(A)$.*

DŮKAZ. Platí

$$h(BAC) \leq \min(h(B), h(A), h(C)) = \\ = \min(n, h(A), m) = h(A)$$

a také

$$h(A) = h(B^{-1}BACC^{-1}) \leq \\ \leq \min(h(B^{-1}), h(BAC), h(C^{-1})) = h(BAC)$$

□

4.1. Cvičení.

(1) Dokažte, že pokud B je regulární a A čtvercová matice, pak $h(AB) = h(BA)$.
(2) Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(A^n) \geq h(A^{n+1})$.
(3) Dokažte, že pro libovolné dvě matice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ platí $h(A + B) \leq h(A) + h(B)$.
(4) Dokažte, že hodnost matice

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

kde $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ a $B \in M_{pq}(\mathbb{F})$, je rovna $h(A) + h(B)$.
(5) Dokažte, že v každé matici $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ existuje čtvercová podmatice stupně $h(A)$, která je regulární.
(6) Nechť A, B jsou dvě čtvercové matice řádu n. Platí $h(AB) = h(BA)$? Zdůvodněte.
(7) Dokažte, že čtvercová matice A je singulární, právě když existuje nenulová čtvercová matice B splňující $AB = 0$.
(8) Nechť A je čtvercová matice. Rozhodněte, zda platí: A je singulární $\Leftrightarrow$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(A^n = 0)$. Odpověď zdůvodněte.
(9) Určete hodnost matice v závislosti na parametrech

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

(Návod: $h(A) = h(A^T A)$.)

KAPITOLA 6

Lineární zobrazení

1. Maticová a lineární zobrazení

Uvažujme bod (x_1, x_2) v rovině $\mathbb{R}^2$ a bod (y_1, y_2), kde

$$y_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha$$
$$y_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha,$$

který vznikne jeho rotací o úhel α proti směru hodinových ručiček. Operaci rotace lze zapsat jako zobrazení $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definované předpisem

$$\mathbb{R}_\alpha \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Tento příklad můžeme zobecnit:

DEFINICE 18. Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Zobrazení

$$f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

budeme nazývat **maticovým zobrazením** definovaným maticí A.

TVRZENÍ 5. *Nechť $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $C \in M_{nk}(\mathbb{F})$, $D \in M_n(\mathbb{F})$ regulární. Pak*

(1) $\forall x, y \in \mathbb{F}^n : f_A(x + y) = f_A(x) + f_A(y)$
(2) $\forall x \in \mathbb{F}^n, \forall r \in \mathbb{F} : f_A(rx) = r f_A(x)$
(3) $f_A + f_B = f_{A+B}$
(4) $f_A \circ f_C = f_{AC}$
(5) $f_E = \mathrm{Id}$
(6) $(f_D)^{-1} = f_{D^{-1}}$

DŮKAZ. Vše plyne z vlastností maticového násobení. □

Nyní zobecníme první dvě položky tvrzení 5 a povýšíme je na definici lineárního zobrazení na abstraktních vektorových prostorech:

DEFINICE 19. Nechť V a V' jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : V \to V'$ nazveme **lineárním zobrazením**, nebo též **homomorfizmem vektorových prostorů**, pokud $\forall u, v \in V$ a $\forall r \in \mathbb{F}$ splňuje podmínky

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$
$$f(ru) = r f(u)$$

LEMMA 15. *Nechť V a V' jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $f : V \to V'$ je homomorfizmus, právě když $\forall u, v \in V$ a $\forall r, s \in \mathbb{F}$ platí $f(ru + sv) = rf(u) + sf(v)$.*

DŮKAZ. Podobné sloučení dvou podmínek do jedné jsme viděli už v případě definice podprostoru a důkaz zde je zcela analogický. □

PŘÍKLAD 11.

(1) Na každém vektorovém prostoru máme identické zobrazení $1_V : V \to V$, které je definováno předpisem $\forall v \in V : 1_V(v) = v$. Je to evidentně lineární zobrazení. Nulové zobrazení $0 : V \to V'$, které je definováno $\forall v \in V : 0(v) = 0$, je také homomorfizmus.
(2) $V = M_n(\mathbb{F})$, $V' = \mathbb{F}$. Zobrazení stopa $\mathrm{Tr} : V \to V'$ je lineární zobrazení.
(3) $V = P(x, \mathbb{F}) = V'$, $D : p(x) \to \frac{d}{dx}p(x)$ je lineární zobrazení díky vlastnostem derivace.
(4) V je množina všech konvergentních reálných posloupností, $V' = \mathbb{R}$. Zobrazení limita $\lim : V \to \mathbb{R}$ je homomorfizmem díky větě o algebře limit.
(5) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V' = \mathbb{R}$. Tzv. evaluační zobrazení $E_a : f \to f(a)$ je homomorfizmus.
(6) $V = L(a, b)$ (množina všech funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$, které mají přes tento interval konečný integrál), $V' = \mathbb{R}$, $I_{(a,b)} : f \to \int_a^b f(x)dx$ je homomorfizmus z vlastností integrálu.

Tvrzení 6. *Nechť V_1, V_2, V_3 jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ a $f, h : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ jsou homomorfizmy, $r \in \mathbb{F}$. Pak*

(1) *Součet zobrazení $(f + h) : V_1 \to V_2$ je homomorfismus.*
(2) *Násobek zobrazení $(rf) : V_1 \to V_2$ je homomorfizmus.*
(3) *Složené zobrazení $g \circ f \equiv gf : V_1 \to V_3$ je homomorfizmus.*
(4) *Pokud f je bijekce, pak $f^{-1} : V_2 \to V_1$ je homomorfizmus.*

Důkaz.

(1) Zobrazení $f + h$ je definováno na vektoru $v \in V_1$ předpisem $(f + h)(v) := f(v) + h(v)$. Pokud $s, t \in \mathbb{F}$, $u, v \in V_1$, pak

$$\begin{aligned}(f + h)(su + tv) &= f(su + tv) + h(su + tv) = \\ &= sf(u) + tf(v) + sh(u) + th(v) = s(f + h)(u) + t(f + h)(v)\end{aligned}$$

(2) Násobek zobrazení je definován předpisem $\forall v \in V_1 : (rf)(v) = rf(v)$. Linearita se dokáže stejně jako v předchozím bodě.
(3) Podobně jako předchozí body.
(4) Pokud $s, t \in \mathbb{F}$, $u, v \in V_2$, pak existuje právě jeden vektor $u' \in V_1$, že $f(u') = u$, a právě jeden $v' \in V_1$, že $f(v') = v$. Platí $u' = f^{-1}(u)$, $v' = f^{-1}(v)$. Z linearity f plyne $f(sv' + tu') = sf(u') + tf(v') = ru + sv$, takže

$$f^{-1}(su + tv) = sv' + tu' = sf^{-1}(u) + tf^{-1}(v)$$

□

1.1. Cvičení.

(1) Dokažte tvrzení 5.
(2) Dokažte, že pro každé lineární zobrazení f platí $f(0) = 0$.
(3) Nechť $r \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jsou lineární:
   (a) $(x, y, z, u) \to (xy, y - x, z, u)$
   (b) $(x, y, z, u) \to (ry, y - x, z, u)$
   (c) $(x, y, z, u) \to (0, z, y, x + y + z + u)$
   (d) $(x, y, z, u) \to (1, z + y, z + x, z + u)$

   Zdůvodněte.
(4) Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou lineární:
   (a) $f(z) = \bar{z}$
   (b) $f(z) = iz$
   (c) $f(z) = z + i$

(d) $f(z) = |z|$

(5) Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ jsou lineární:
   (a) $f(X) = X^T$
   (b) $f(X) = X^{-1}$
   (c) $f(X) = X^2$
   (d) $f(X) = B^{-1}XB$, kde B je regulární matice.

(6) Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $f : V \to W$ jsou lineární:
   (a) $V = W$ je prostor všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$ a f je zobrazení přiřazující funkci její absolutní hodnotu $f(g) = |g|$.
   (b) V je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše n, $W = \mathbb{C}^n$ a f je zobrazení přiřazující polynomu p vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jeho kořenů (včetně násobností).
   (c) $V = W$ je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše n a f je zobrazení přiřazující polynomu $p(x)$ polynom $x^2p(x)$

(7) Rozhodněte, zda je zobrazení $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to P_3(x, \mathbb{R})$, definované vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d + (c + 2b)x^2 - x^3,$$

lineární.

(8) Rozhodněte, zda je zobrazení $f : P(x, \mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(2) & p(3) \end{pmatrix}$$

lineární.

(9) Najděte matici A takovou, že maticové zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ splňuje

$$f_A((1, 1)) = (0, 1, 2)$$
$$f_A((1, -1)) = (2, 0, -1)$$

(10) Najděte matici A takovou, že maticové zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ splňuje

$$f_A((1, 1, 1)) = (0, 1, 1)$$
$$f_A((1, 1, 0)) = (1, 0, 2)$$
$$f_A((1, 0, 0)) = (3, 1, -2)$$

(11) Najděte matici A takovou, že maticové zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ splňuje

$$f_A((2, 3, 5)) = (1, 1, 1)$$
$$f_A((0, 1, 2)) = (1, 1, -1)$$
$$f_A((1, 0, 0)) = (2, 1, 2)$$

(12) Najděte matici A takovou, že maticové zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ splňuje

$$f_A((2, 0, 3)) = (1, 2)$$
$$f_A((4, 1, 5)) = (4, 5)$$
$$f_A((3, 1, 2)) = (1, -1)$$

(13) Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ přiřazuje vektoru (x, y, z) vektor (z, y).

(14) Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ přiřazuje vektoru jeho c-násobek.

(15) Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přiřazuje vektoru (x, y, z) vektor osově souměrný podle roviny xz.

(16) Nechť $u \in \mathbb{R}^3$. Najděte matici A takovou, že zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přiřazuje vektoru x vektorový součin $x \times u$.

(17) Řekneme, že podmnožina M vektorového prostoru V je konvexní, pokud pro libovolné dva body $u, v \in M$ je v M i jejich spojnice, tedy množina vektorů $\{tu+(1-t)v | t \in \langle 0, 1\rangle\}$. Dokažte, že lineární zobrazení zachovávají konvexitu množin.

2. Jádro a obraz homomorfizmu

DEFINICE 20. Nechť V a V' jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ a $f : V \to V'$ je homomorfizmus. **Jádrem** f se nazývá množina

$$\operatorname{Ker} f := \{u \in V | f(u) = 0\},$$

obrazem f je množina

$$\operatorname{Im} f := \{u' \in V' | \exists u \in V, f(u) = u'\}.$$

Jádro homomorfizmu f je podmnožina v prostoru V, ve skutečnosti je to podprostor. To ověříme snadno: pokud $u, v \in \operatorname{Ker} f$ a $r, s \in \mathbb{F}$, pak

$$f(ru + sv) = rf(u) + sf(v) = r0 + s0 = 0,$$

tedy $ru + sv \in \operatorname{Ker} f$. Obraz $\operatorname{Im} f$ je zase podprostorem ve V': pokud $u', v' \in \operatorname{Im} f$, pak existují $u, v \in V$, pro něž $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$. Potom ale

$$f(ru + sv) = rf(u) + sf(v) = ru' + sv',$$

tedy i $ru' + sv' \in \operatorname{Im} f$.

Pro maticové zobrazení f_A, kde $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, platí

$$\operatorname{Ker} f_A = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = 0\} \equiv N(A)$$

Obraz $\operatorname{Im} f_A$ je zase roven množině všech vektorů $y \in \mathbb{F}^m$, pro které existuje nějaké $x \in \mathbb{F}^n$ takové, že $y = Ax$. Je to tedy množina všech lineárních kombinací sloupců matice A, jinými slovy její sloupcový prostor $S(A)$. Proto je přirozená následující definice:

DEFINICE 21. Dimenzi $\operatorname{Im} f \leq V'$ nazýváme **hodností** $h(f)$ zobrazení f, dimenzi $\operatorname{Ker} f \leq V$ budeme říkat **nulita** $n(f)$ homomorfizmu f.

Věta o hodnosti a nulitě 9 říká, že pro $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ platí $h(A) + n(A) = n$. Protože

$$h(A) = h(A^T) = \dim S(A) = \dim \operatorname{Im}(f_A) = h(f_A)$$
$$n(A) = \dim N(A) = \dim Ker f_A = n(f_A)$$

a $n = \dim \mathbb{F}^n$, můžeme tvrzení věty 9 přepsat pro případ maticového zobrazení jako

$$\dim \mathbb{F}^n = h(f_A) + n(f_A) \equiv \dim \operatorname{Im}(f_A) + \dim Ker f_A$$

Tato formulace se dá zobecnit pro libovolné lineární zobrazení na prostoru konečné dimenze:

VĚTA 14. *[O dimenzi jádra a obrazu] Nechť V je prostor konečné dimenze a $f : V \to V'$ je homomorfizmus. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

Důkaz. Označme $n := \dim V$. Nejprve nalezneme podprostor W ve V, který bude doplňkem $\operatorname{Ker} f$. Nechť $\{u_1, \dots, u_k\}$ je báze $\operatorname{Ker} f$ (připouštíme i $k = 0$, tedy prázdnou množinu), doplňme ji na bázi $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ celého V. Označme $W = \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle$. Pak množina $W \cup \operatorname{Ker} f$ obsahuje M a tedy generuje celé V, čili $W \vee \operatorname{Ker} f = V$. Zároveň pokud by existoval nenulový vektor $v \in W \cap \operatorname{Ker} f$, pak by bylo možné jej vyjádřit netriviálními lineárními kombinacemi

$$v = \sum_{i=1}^{k} r_i u_i = \sum_{i=k+1}^{n} s_i u_i,$$

což je ve sporu s lineární nezávislostí M. Platí tedy $\operatorname{Ker} f \oplus W = V$ a podle věty 7 o dimenzi direktního součtu $\dim \operatorname{Ker} f + \dim W = n$.

Dále ověříme, že obrazem báze podprostoru $W \leq V$ je báze podprostoru $\operatorname{Im} f \leq V'$. Označme proto $N' = \{f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)\}$. Nejprve ověříme, že N' generuje $\operatorname{Im} f$. Každý vektor $u' \in \operatorname{Im} f$ je obrazem nějakého vektoru $u \in V$ v zobrazení f. Tento vektor u můžeme zapsat jako lineární kombinací prvků báze M, čili existují čísla r_i taková, že $u = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$. Platí tedy

$$u' = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(u_i) = \sum_{i=k+1}^{n} r_i f(u_i),$$

kde jsme nejprve využili linearity f a posléze toho, že $f(u_i) = 0$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Tedy $\operatorname{Im} f = \langle N' \rangle$.

Zbývá dokázat lineární nezávislost N'. Pokud pro nějaká čísla s_i, $i \in \{k+1, \dots, n\}$ platí $\sum_{i=k+1}^{n} s_i f(u_i) = 0$, pak vektor $u = \sum_{i=k+1}^{n} s_i u_i$ patří do $\operatorname{Ker} f$ (opět využíváme, že f je lineární). Patří ale zároveň do W, a protože $\operatorname{Ker} f \cap W = 0$, musí být u nulový vektor. Protože množina $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá, jsou všechny koeficienty $s_i = 0$, $i \in \{k+1, \dots, n\}$. To ale znamená, že množina N' je lineárně nezávislá.

Celkově jsme ukázali, že N' je báze $\operatorname{Im} f$, její počet prvků je stejný jako počet prvků báze prostoru W, čili $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$ a tedy $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$. □

2.1. Cvičení.

(1) Nechť $f : U \to V$, $g : V \to W$ jsou homomorfizmy. Dokažte, že $\operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Ker} gf$ a $\operatorname{Im} gf \leq \operatorname{Im} g$. Najděte příklady, kdy platí rovnost a kdy platí ostrá inkluze.

(2) Nechť $f, g : V \to W$ jsou dvě lineární zobrazení. Dokažte, že množina vektorů z V, na nichž se zobrazení f a g rovnají, je vektorový podprostor.

(3) Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadaného vztahem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 4x_1 + x_3)$.

(4) Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadaného vztahem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4, x_2 - 2x_3, x_1 + 4x_3 + x_4)$.

(5) Určete jádro a obraz zobrazení $f_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které přiřazuje vektoru x vektorový součin $x \times u$.

(6) Nechť V je vektorový prostor všech reálných čtvercových matic řádu n. Popište jádro a obraz zobrazení $F : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ které matici A přiřazuje matici $A + A^T$.

(7) Popište jádro a obraz endomorfizmu F množiny M všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$, který je definován vztahem $\forall f \in M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(F(f))(x) = f(x) - f(-x)$.

(8) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte jádro a obraz zobrazení $f : M_{32}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$, které matici X přiřazuje matici AX.

(9) Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Najděte jádro a obraz zobrazení $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{23}(\mathbb{R})$, které matici X přiřazuje matici XA.

(10) Najděte jádro a obraz zobrazení $f : P_n(x, \mathbb{R}) \to P_n(x, \mathbb{R})$, které polynomu přiřazuje jeho první derivaci.

(11) Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{np}(\mathbb{F})$. Rozhodněte, které z následujících výroků platí a odpověď zdůvodněte:
   (a) $\operatorname{Im} f_{AB} = \operatorname{Im} f_B$
   (b) $\operatorname{Im} f_{AB} \supset \operatorname{Im} f_B$
   (c) $\operatorname{Im} f_{AB} \subset \operatorname{Im} f_A$
   (d) $\operatorname{Im} f_{AB} = \operatorname{Ker} f_{B^T}$
   (e) $\operatorname{Im} f_{AB} = \operatorname{Im} f_A$

(12) Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{np}(\mathbb{F})$. Rozhodněte, které z následujících výroků platí a odpověď zdůvodněte:
   (a) $\operatorname{Ker} f_{AB} = \operatorname{Ker} f_A$
   (b) $\operatorname{Ker} f_{AB} \subset \operatorname{Ker} f_A$
   (c) $\operatorname{Ker} f_{AB} \supset \operatorname{Ker} f_B$
   (d) $\operatorname{Ker} f_{AB} = \operatorname{Im} f_{A^T}$
   (e) $\operatorname{Ker} f_{AB} = \operatorname{Ker} f_B$

3. Izomorfizmus

Zobrazení $f : X \to Y$ (ne nutně lineární) je

- **prosté** neboli **injektivní**, pokud pro každý prvek $y \in Y$ existuje nejvýše jedno $x \in X$, že $f(x) = y$
- **na** neboli **surjektivní**, pokud pro každý prvek $y \in Y$ existuje alespoň jedno $x \in X$, že $f(x) = y$
- **vzájemně jednoznačné** neboli **bijektivní**, pokud pro každý prvek $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$, že $f(x) = y$, neboli pokud je f zároveň injektivní i surjektivní.

V případě lineárních zobrazení se pro tyto vlastnosti užívají speciální pojmy a je možné je charakterizovat pomocí dimenzí určitých podprostorů:

DEFINICE 22. Nechť f je homomorfizmus vektorových prostorů. Pak

- pokud je injektivní, nazýváme ho **monomorfizmem**.
- pokud je surjektivní, nazýváme ho **epimorfizmem**.
- pokud je bijektivní, nazýváme ho **izomorfizmem**.

LEMMA 16. *Nechť $f : V \to V'$ je homomorfizmus. Pak*

(1) *f je monomorfizmus, právě když* $\operatorname{Ker} f = 0$
(2) *f je epimorfizmus, právě když* $\operatorname{Im} f = V'$

DŮKAZ.

(1) Pokud f je prosté, pak existuje nejvýše jeden vektor $v \in V$, pro který $f(v) = 0$. Pro každé lineární zobrazení ale platí $f(0) = 0$. Tedy $\operatorname{Ker} f$ obsahuje pouze nulový vektor. Naopak, pokud $\operatorname{Ker} f = 0$ a pro dva vektory $u, v \in V$ platí $f(u) = f(v)$, pak z linearity f plyne $f(u - v) = 0$, čili $u - v \in \operatorname{Ker} f$, tudíž $u - v = 0$, $u = v$, f je prosté.
(2) $\operatorname{Im} f$ je právě množina vektorů z V', které mají nějaký vzor v zobrazení f. Je tedy zřejmé, že f je surjektivní, právě když $\operatorname{Im} f$ je celé V'.

□

Pokud V a V' jsou prostory konečné dimenze, pak $\operatorname{Ker} f = 0$ říká, že nulita $n(f) = 0$, a $\operatorname{Im} f = V'$ znamená, že hodnost $h(f)$ je maximální možná.

LEMMA 17. *Nechť $f : V \to V'$ je homomorfizmus, $\dim V = n$. Pak f je monomorfizmus, právě když $h(f) = n$.*

DŮKAZ. Plyne ihned z věty 14 o dimenzi jádra a obrazu. □

VĚTA 15 (O zachovávání dimenze izomorfizmem). *Nechť V je prostor konečné dimenze, $f : V \to V'$ je izomorfizmus. Pak $\dim V = \dim V'$.*

DŮKAZ. Protože f je monomorfizmus na V, platí podle lemmatu $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$. Je to také epimorfizmus, tedy $\operatorname{Im} f = V'$. Tedy $\dim V' = \dim V$. □

Pokud mezi dvěma vektorovými prostory V a V' existuje nějaký izomorfizmus, říkáme, že jsou **izomorfní**, značíme $V \simeq V'$. Z věty plyne, že jsou-li dva prostory, z nichž jeden je konečné dimenze, izomorfní, pak mají stejnou dimenzi. Platí i opačná implikace, k jejímu důkazu ale budeme potřebovat zkonstruovat pro libovolné dva vektorové prostory stejné dimenze izomorfizmus mezi nimi. K tomu je nutné zavést pojem souřadnic, což učiníme ještě v této kapitole.

LEMMA 18. *Nechť V_1, V_2, V_3 jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$ a $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ jsou izomorfizmy. Pak f^{-1} a $g \circ f$ jsou izomorfizmy.*

DŮKAZ. Zobrazení f^{-1} a $g \circ f$ jsou bijekce a podle tvrzení 6 jsou to homomorfizmy. □

LEMMA 19. *Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f : V \to W$ je izomorfizmus a M skupina vektorů ve V. Pak M je lineárně nezávislá, právě když $f(M)$ je lineárně nezávislá, a M generuje V, právě když $f(M)$ generuje W.*

DŮKAZ. Za cvičení. □

PŘÍKLAD 12.

(1) Pro $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je f_A monomorfizmus, právě když $n(f_A) = 0$, tedy podle věty 14 $h(A) = h(f_A) = n$. Můžeme to také odvodit z toho, že aby $Ax = 0$ nastalo pouze pro $x = 0$, musí mít A lineárně nezávislé sloupce. Zobrazení f_A je epimorfizmus, právě když $h(A) = h(f_A) = m$, čili pokud sloupce generují celé $\mathbb{F}^m$. Konečně f_A je izomorfizmem, právě když A je čtvercová matice hodnosti $n = m$, čili regulární matice.
(2) Nechť $V = P^n(x, \mathbb{F})$, $V' = \mathbb{F}^{n+1}$ a $f : V \to V'$ je zobrazení, které polynomu $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ přiřadí vektor $(a_0, \ldots, a_n)$. Je vidět, že f je lineární a bijektivní zobrazení. Tedy prostory $P^n(x, \mathbb{F})$ a $\mathbb{F}^{n+1}$ jsou izomorfní.
(3) Nechť $V = \mathbb{R}$ se standardními operacemi a $V' = \mathbb{R}^+$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$, kde $u \oplus v = uv$ a $r \odot u = u^r$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Pak $\exp : u \to e^u$ je jejich izomorfizmus.

Nejčastěji pracujeme s homomorfizmy, pro které $V = V'$. Takové lineární zobrazení se nazývá **endomorfizmus**. Výhoda endomorfizmů je, že je můžeme skládat samy se sebou, má tedy smysl psát $f \circ f \equiv f^2$ apod. Pokud je endomorfizmus zároveň izomorfizmem, říkáme mu **automorfizmus**. Pro automorfizmy existuje inverzní automorfizmus f^{-1} a tedy i záporné mocniny f^{-n}. Všimněte si, že z věty o dimenzi jádra a obrazu plyne, že pokud je V konečné dimenze, pak stačí, aby byl endomorfizmus jedním z dvojice monomorfizmus, epimorfizmus, a automaticky už musí být i tím druhým z dvojice, a tedy také automorfizmem.

PŘÍKLAD 13.

(1) Je-li maticové zobrazení f_A endomorfizmem, je matice A čtvercová. Platí $(f_A)^n = f_{A^n}$.
(2) Endomorfizmus $P : V \to V$ splňující $P^2 = P$ se nazývá **projekce**. Příkladem může být zobrazení $P : (a_1, a_2, a_3) \to (a_1, a_2, 0)$, $V = \mathbb{F}^3$.
(3) Endomorfizmus $I : V \to V$ splňující $I^2 = \mathrm{Id}$ se nazývá **involuce**. Příkladem je osová nebo středová souměrnost v $\mathbb{R}^n$.

3.1. Cvičení.

(1) Dokažte, že relace „býti izomorfní“ je relace ekvivalence na množině všech vektorových prostorů.
(2) Najděte nenulový endomorfizmus f, pro nějž $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.
(3) Nechť V, V', V'' jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ jsou dva homomorfizmy. Dokažte následující tvrzení:
   (a) Pokud g a f jsou monomorfizmy, pak gf je monomorfizmus.
   (b) Pokud g a f jsou epimorfizmy, pak gf je epimorfizums.
   (c) Pokud g a f jsou izomorfizmy, pak gf je izomorfizums.
   (d) Pokud gf je monomorfizmus, pak f je monomorfizums.
   (e) Pokud gf je epimorfizmus, pak g je epimorfizmus.
(4) Najděte endomorfizmus $f : V \to V$, který je monomorfizmem, ale není epimorfizmem, a naopak, který je epimorfizmem, ale není monomorfizmem. Může mít V konečnou dimenzi?
(5) Ukažte, že prostory $M_{mn}(\mathbb{F})$ a $\mathbb{F}^{mn}$ jsou izomorfní.
(6) Dokažte, že zobrazení $f : P(x, \mathbb{R}) \to P(x, \mathbb{R})$, které polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $p(x-1)$, je izomorfizmus vektorových prostorů.
(7) Najděte dva různé izomorfizmy mezi prostory $P_n(x, \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{n+1}$.
(8) Najděte dva různé izomorfizmy mezi prostory $M_{mn}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{mn}$.
(9) Dokažte, že zobrazení, které přiřadí čtvercové matici A její symetrickou část $\frac{1}{2}(A + A^T)$ je projekce.
(10) Dokažte, že pro každou projekci $P : V \to V$ platí $\mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Im}\, P = V$.
(11) Dokažte, že $f : V \to V'$ je monomorfizmus, právě když existuje homomorfizmus $g : V' \to V$ takový, že $gf = 1_V$.
(12) Dokažte, že $f : V \to V'$ je epimorfizmus, právě když existuje homomorfizmus $g : V' \to V$ takový, že $fg = 1_{V'}$.
(13) Nechť V_1, V_2 jsou vektorové prostory konečné dimenze, $g : V_1 \to V_2$ a $f : V_2 \to V_1$ jsou homomorfizmy. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Je-li gf izomorfizmus a fg izomorfizmus, pak g je izomorfizmus a f je izomorfizmus. Odpověď zdůvodněte. Rozhodněte, zda tvrzení platí i bez požadavku konečné dimenze.
(14) Najděte příklad dvou homomorfizmů f a g takových, že ani f ani g nejsou izomorfizmy, ale gf izomorfizmus je. Mohou být f a g endomorfizmy?
(15) Dokažte, že jsou-li f a g homomorfizmy a gf je monomorfizmus, pak f je monomorfizmus. Ukažte také, že g monomorfizmus být nemusí.
(16) Uvažujme homomorfizmy $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ takové, že f je monomorfizmus, g je epimorfizmus a $gf = 0$. Dokažte, že potom $\dim V_2 \geq \dim V_1 + \dim V_3$.
(17) Nechť V je vektorový prostor dimenze $2n$ a f endomorfizmus na M. Dokažte, že $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$ právě když $f^2 = 0$ a současně hodnost f je rovna n.
(18) Nechť $f \in \mathrm{End}(V_n)$. Dokažte, že

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = h(f) - h(f^2)$$

(19) Dokažte lemma 19.

4. Souřadnice

Praktické počítání s lineárními zobrazeními se obvykle usnadní, když si ve zdrojovém a cílovém vektorovém prostoru zvolíme nějakou bázi. V této kapitole uvidíme, že taková volba přiřadí lineárnímu zobrazení jisté maticové zobrazení, které sdílí s původním lineárním zobrazením všechny důležité vlastnosti.

DEFINICE 23. Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{F}$, $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jeho báze a $v \in V$. **Souřadnicemi** vektoru v vzhledem k bázi N budeme rozumět sloupcový vektor $(v)_N := (x_1, \ldots, x_n)^T$, kde x_i jsou koeficienty lineární kombinace $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

POZNÁMKA 2. Formálně vzato bychom v této kapitole měli bázi chápat nikoli jako množinu, ale jako *uspořádanou* n-tici vektorů. Změníme-li totiž pořadí vektorů báze, změní se i pořadí souřadnic, a aritmetický vektor například $(1, 2, 3)$ jistě není totožný s $(2, 1, 3)$. V dalším výkladu budeme psát dál slovo množina, ale budeme implicitně předpokládat, že vektory v ní jsou očíslované a pracuje se s nimi ve standardním pořadí.

TVRZENÍ 7. *Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{F}$, $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jeho báze. Zobrazení*

$$\begin{aligned} \sigma_N : V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\to (v)_N \end{aligned}$$

je izomorfizmus vektorových prostorů.

DŮKAZ. Souřadnice vektoru (a tedy i zobrazení s_N) jsou dobře definovány, protože

(1) každý vektor z V se dá vyjádřit jako lineární kombinace prvků báze N,
(2) toto vyjádření je jednoznačné. Pokud by existovala dvě taková vyjádření $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n y_i v_i$, pak z lineární nezávislosti N plyne, že $0 = \sum (x_i - y_i) v_i$ lze splnit pouze triviální lineární kombinací, čili $\forall i : x_i = y_i$.

Zároveň každá n-tice čísel $(x_1, \ldots, x_n)$ je souřadnicemi právě jednoho vektoru $v := \sum_{i=1}^n x_i v_i$ vzhledem k bázi N. Tedy σ_N je bijekce. Zbývá ukázat, že σ_N je lineární zobrazení. Pokud ale $(v)_N = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $(w)_N = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $r, s \in \mathbb{F}$ pak

$$rv + sw = r \sum_{i=1}^n x_i v_i + s \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n (r x_i + s y_i) v_i,$$

čili $(rv + sw)_N = (rx_1 + sy_1, \ldots, rx_n + sy_n)$. Podle definice s_N pak

$$\sigma_N(rv + sw) = (rv + sw)_N = r(v)_N + s(w)_N = r\sigma_N(v) + s\sigma_N(w)$$

□

VĚTA 16 (O zadání homomorfizmu hodnotami na bázi). *Nechť V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je báze V a $w_1, \ldots, w_n$ je n-tice vektorů z W. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $f : V \to W$, pro které $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : f(v_i) = w_i$.*

DŮKAZ. Dokazujeme existenci a jednoznačnost. Existenci dokážeme tak, že definujeme hodnotu zobrazení $f : V \to W$ na libovolném vektoru $v \in V$ předpisem

$$f(v) := \sum_{i=1}^n x_i w_i,$$

kde $(x_1, \ldots, x_n)^T = (v)_N$. Pro f určitě platí, že $\forall i : f(v_i) = w_i$. Ověřte sami, že takto definované zobrazení f je lineární.

Naopak lineární zobrazení $g : V \to W$, splňující $\forall i : g(v_i) = w_i$, musí nabývat na vektoru $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ hodnoty

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i,$$

tedy stejné jako zobrazení f, proto $g = f$. □

LEMMA 20. *Zobrazení f z věty 16 je epimorfizmus, právě když množina $\{w_1, \ldots, w_n\}$ generuje V', monomorfizmus, právě když je lineárně nezávislá, a izomorfizmus, právě když je to báze V'.*

DŮKAZ. Za cvičení. □

VĚTA 17 (O invarianci dimenze). *Nechť V a W jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad $\mathbb{F}$. Pak V a W jsou izomorfní právě když $\dim V = \dim W$.*

DŮKAZ. Implikaci $\Rightarrow$ jsme už dokázali jako větu 15. K druhé implikaci potřebujeme sestrojit izomorfizmus V a W. Pokud $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je báze V a $M = \{w_1, \ldots, w_n\}$ je báze W, pak podle věty 16 existuje jednoznačně určený homomorfizmus $f : V \to W$ splňující $\forall i : f(v_i) = w_i$. Podle lemmatu 20 je f izomorfizmus. □

Alternativně bychom mohli větu dokázat pomocí tvrzení 7 a lemmatu 18. Z nich plyne, že zobrazení $(\sigma_M)^{-1} \circ \sigma_N : V \to W$ je izomorfizmus.

DEFINICE 24 (Matice homomorfizmu). Nechť V, W jsou vektorové prostory, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $N \subset V$, $M \subset W$ jejich báze, $f : V \to W$ homomorfizmus. Maticové zobrazení

$$\begin{aligned} f_A :&\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m \\ :&(v)_N \to (f(v))_M, \end{aligned}$$

které přiřazuje n-tici souřadnic vektoru v vzhledem k bázi N m-tici souřadnic jeho obrazu $f(v)$ vzhledem k bázi M nazýváme **maticovým zobrazením příslušným lineárnímu zobrazení f vzhledem k bázím N a M**. Matici A označujeme symbolem $(f)_{MN}$ a říkáme jí **matice homomorfizmu f vzhledem k bázím N a M**

TVRZENÍ 8 (Vlastnosti matice homomorfizmu). *Nechť V, W, N, M, f jsou jako v předchozí definici, $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $M = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Pak*

(1) *Zobrazení f_A z definice 24 je skutečně maticovým zobrazením ve smyslu definice 18. Jeho matice $A \equiv (f)_{MN}$ má $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ svůj j-tý sloupec roven vektoru $(f(v_j))_M$, tedy vektoru souřadnic f-obrazu j-tého vektoru báze N vzhledem k bázi M.*
(2) $\forall v \in V : (f(v))_M = (f)_{MN}(v)_N$.
(3) *Pokud U je vektorový prostor, $P = \{u_1, \ldots, u_k\}$ jeho báze a $g : U \to V$ homomorfizmus, pak*

$$(fg)_{MP} = (f)_{MN}(g)_{NP}$$

(4) *Pokud f je izomorfizmus, pak $\left(f^{-1}\right)_{NM} = ((f)_{MN})^{-1}$.*
(5) $h(f) = h\left((f)_{MN}\right)$

DŮKAZ.

(1) Vektor $v \in V$ lze zapsat jako $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, kde $(x_1, \ldots, x_n)^T = (v)_N$. Označme a_{ij} i-tou souřadnici $f(v_j)$ vzhledem k M, tedy $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Pak

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) w_i \tag{6}$$

Závorka v posledním výrazu je rovna i-té souřadnici vektoru $f(u)$ vzhledem k M. Podle definice 24 tedy musí být matice $A = (a_{ij})$ maticí maticového zobrazení f_A. Sloupce matice A mají přesně tvar požadovaný tvrzením.

(2) Pouze trochu jinak přepsaná definice $(f)_{MN}$.

(3) Nechť $u \in U$. Podle definic

$$((fg)(u))_M = (f(g(u)))_M = (f)_{MN}(g(u))_N = (f)_{MN}(g)_{NP}(u)_P$$

Tedy $(f)_{MN}(g)_{NP}$ je matice fg vzhledem k P a M.

(4) Podle předchozího bodu platí $\forall v \in V$, $\forall w \in W$

$$(v)_N = ((f^{-1} \circ f)(v))_N = (f^{-1})_{NM}(f)_{MN}(v)_N$$
$$(w)_M = ((f \circ f^{-1})(w))_M = (f)_{MN}(f^{-1})_{NM}(w)_M$$

Oba součiny $(f^{-1})_{NM}(f)_{MN}$ i $(f)_{MN}(f^{-1})_{NM}$ musí tedy být rovny jednotkové matici, čili $\left(f^{-1}\right)_{NM} = ((f)_{MN})^{-1}$.

(5) Platí

$$h(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim\langle f(v_1), \ldots f(v_n)\rangle$$
$$= \dim\langle (f(v_1))_M, \ldots, (f(v_n))_M\rangle = h\left((f)_{MN}\right),$$

kde jsme nejprve použili definici hodnosti homomorfizmu, pak lemma 19 pro případ souřadnicového izomorfizmu σ_M a nakonec definici hodnosti matice a skutečnost, že $(f(v_j))_M$ je j-tý sloupec matice $(f)_{MN}$.

□

Příklad 14. Spočtěme matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které je definováno předpisem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 - 2x_2)$ vzhledem ke kanonickým bázím

$$K_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$
$$K_2 = \{(1,0), (0,1)\}$$

Snadno vidíme, že

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a protože

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)_{K_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{K_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

znamená to, že

$$(f)_{K_2 K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní zvolme jiné báze

$$N = \{(1,-1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$$
$$M = \{(1,2),(1,3)\}$$

a určeme $(f)_{MN}$. Dosazením do předpisu pro f dostáváme

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Souřadnice těchto tří vektorů vzhledem k M jsou podle prvního bodu tvrzení 8 rovny sloupcům $(f)_{MN}$. Vyřešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right),$$

dostáváme, že

$$(f)_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Označme množinu všech homomorfizmů z vektorového prostoru V do vektorového prostoru W symbolem $\mathrm{Hom}(V,W)$. Díky prvním dvěma bodům tvrzení 6 víme, že $\mathrm{Hom}(V,W)$ je podmnožina prostoru všech zobrazení z V do W uzavřená na součty a skalární násobky, je to tedy vektorový prostor.

Tvrzení říká, že ke každému lineárnímu zobrazení $f : V \to W$, kde $\dim V = n$ a $\dim W = m$, lze přiřadit jeho zobrazení maticové podle definice 24, tedy prvku $\mathrm{Hom}(V,W)$ matici z $M_{mn}(\mathbb{F})$. Naopak pro libovolnou matici $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ lze definovat homomorfizmus, který vektor v_j z báze N zobrazí na lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ vektorů w_i tvořících bázi M. Podle věty 16 je homomorfizmus určen tímto požadavkem jednoznačně. Tato dvě přiřazení jsou navzájem inverzní, získali jsme tedy bijekci mezi množinami $\mathrm{Hom}(V,W)$ a $M_{mn}(\mathbb{F})$. Ve skutečnosti jde o izomorfizmus vektorových prostorů:

VĚTA 18. *Nechť V, W jsou vektorové prostory,* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Pak* $\mathrm{Hom}(V,W)$ *je izomorfní* $M_{mn}(\mathbb{F})$ *a* $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = mn$.

DŮKAZ. Zvolme ve V a W bázi N, resp. M, označme $N = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Stačí dokázat, že zobrazení $\Sigma_{MN} : \mathrm{Hom}(V,W) \to M_{mn}(\mathbb{F})$, které homomorfizmu f přiřadí jeho matici $(f)_{MN}$, je lineární. Jsou-li f, g z $\mathrm{Hom}(V,W)$ a $r, s \in \mathbb{F}$, pak $\Sigma_{MN}(rf + sg) = (rf + sg)_{MN}$ je matice, jejíž j-tý sloupec je

$$((rf + sg)(u_j))_M = (rf(u_j) + sg(u_j))_M = r(f(u_j))_M + s(g(u_j))_M,$$

tudíž i celá matice splňuje $(rf+sg)_{MN} = r(f)_{MN} + s(g)_{MN}$. Podle poznámek před větou je Σ_{MN} bijekce, musí to tedy být izomorfizmus. Protože $\dim M_{mn}(\mathbb{F}) = mn$, podle věty 15 také $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = mn$. □

Všimněte si formální podobnosti mezi zobrazeními $\sigma_N : V \to \mathbb{F}^n$ a $\Sigma_{MN} : \mathrm{Hom}(V,W) \to M_{mn}(\mathbb{F})$, resp. mezi tvrzením 7 a větou 18. V obou případech konstruujeme izomorfizmus mezi abstraktním vektorovým prostorem a aritmetickým

vektorových prostorem (chápeme-li prostor matic jako zvláštní případ aritmetického vektorového prostoru). Díky této analogii můžeme interpretovat matici homomorfizmu $(f)_{MN} \equiv \Sigma_{MN}(f)$ jakožto mn-tici souřadnic homomorfizmu f vzhledem k vhodné bázi. Zkuste si rozmyslet, že touto bází je množina homomorfizmů $\{f_{ij} | i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ kde $f_{ij} : V \to W$ přiřazuje j-tému prvku báze N i-tý vektor báze M a ostatním prvkům N nuly.

Množinu všech endomorfizmů na vektorovém prostoru V, tedy vlastně $\mathrm{Hom}(V, V)$, označujeme zkráceně $\mathrm{End}(V)$, množinu všech automorfizmů na V značíme $\mathrm{Aut}(V)$. Podle věty 18 má $\mathrm{End}(V)$ dimenzi n^2, zatímco $\mathrm{Aut}(V)$ není vektorový prostor (například chybí nula, protože nulový endomorfizmus není automorfizmem).

4.1. Cvičení.

(1) Najděte souřadnice vektoru $u = (7, -3, 4, 12)$ vzhledem k bázi $M = \{(2, 3, 1, 4), (1, -2, 2, 3), (-3, 2, 1, -2)\}$ podprostoru $\langle M \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

(2) Určete matici homomorfizmu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_2, x_3)$ vzhledem ke kanonickým bázím $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ a vzhledem k bázím

$$M = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$$

a

$$M' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$$

. Určete jádro a obraz f.

(3) Určete matici homomorfizmu $f : P_2(x, \mathbb{R}) \to P_2(x, \mathbb{R})$ přiřazujícího polynomu $p(x)$ polynom $p'(x) - 2p(x)$, kde $p'(x)$ je první derivace $p(x)$, vzhledem k bázím $M = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$ a $N = \{x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$.

(4) Nechť $v \in \mathbb{R}^3$. Určete matici homomorfizmu $f_v(x) = v \times x$ daného vektorovým součinem s v vůči kanonickým bázím. Určete jádro a obraz tohoto homomorfizmu.

(5) Nechť $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ je homomorfizmus určený vztahem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3 - 2x_4)$$

Najděte nějakou bázi M jádra zobrazení f a nějakou bázi N obrazu zobrazení f. Dále najděte nějaký doplněk W podprostoru $\mathrm{Ker}\, f$ v $\mathbb{R}^4$ a takovou jeho bázi P, aby matice zúženého zobrazení $f|W$ vzhledem k bázím P a N byla jednotková matice.

(6) Nechť $v \in \mathbb{R}^n$ a $p_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení dané pro libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ vztahem $(p_v(x))_i = (\sum_{j=1}^n v_j x_j) v_i$. Ověřte, že p_v je lineární zobrazení, najděte matici zobrazení p_v vzhledem ke kanonickým bázím a určete jádro, obraz a hodnost zobrazení p_v. Co musí splňovat v, aby p_v byla projekce?

(7) Nechť V je prostor všech reálných čtvercových matic stupně 2 a definujme zobrazení $f : V \to V$ vztahem $f(X) = BXB^{-1}$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete matici endomorfizmu f vzhledem k bázi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(8) Dokažte, že zobrazení $f : P_n(x, \mathbb{R}) \to P_n(x, \mathbb{R})$ přiřazující polynomu $p(x)$ polynom $p(x-1)$ je automorfizmus a najděte jeho matici vzhledem k bázi $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

(9) Nechť V, V' jsou vektorové prostory, $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$ je množina generující V, která není bází. Ukažte, že existují vektory $v_1, \ldots, v_n$ takové, že neexistuje lineární zobrazení $f : V \to V'$ splňující $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ je $f(u_i) = v_i$.
(10) Dokažte lemma 20.
(11) Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, $f : V \to V$ je endomorfizmus, $V = V_1 \oplus V_2$ a pro $i = 1, 2$ je N_i báze V_i a platí $f(V_i) \subset V_i$. Ukažte, že matice $(f)_{NN}$, kde $N = N_1 \cup N_2$, je blokově diagonální.

5. Transformace souřadnic

DEFINICE 25. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $N' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ dvě báze v něm. Vektory báze N' lze vyjádřit jako lineární kombinace vektorů báze N:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : v'_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} v_i$$

Matici $R \equiv (r_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{F})$ nazýváme **maticí přechodu** od báze N k bázi N'.

TVRZENÍ 9 (Vlastnosti matice přechodu). *Nechť V, N, N', R jsou jako v předchozí definici. Pak*

(1) *$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ je i-tý sloupec R vektorem souřadnic vektoru u'_i vzhledem k bázi N*
(2) *$R = (1_V)_{NN'}$*
(3) *$\forall v \in V : (v)_N = R(v)_{N'}$*
(4) *Pokud N'' je další báze V a S je matice přechodu od N' k N'', pak RS je matice přechodu od N k N''.*
(5) *Matice přechodu od N' k N je R^{-1}*

DŮKAZ.

(1) Pouze přepis definice.
(2) Podle prvního bodu tvrzení 8 je j-tý sloupec matice $(1_V)_{NN'}$ tvořen souřadnicemi $1_V(v'_j) \equiv v'_j$ vzhledem k bázi N. Podle definice matice přechodu tedy $(1_V)_{NN'} = R$.
(3) Z předchozího bodu a druhého bodu tvrzení 8.
(4) Z třetího bodu tvrzení 8 dostáváme

$$(1_V)_{NN''} = (1_V \circ 1_V)_{NN''} = (1_V)_{NN'}(1_V)_{N'N''} = RS$$

(5) Ze čtvrtého bodu tvrzení 8 a faktu $1_V^{-1} = 1_V$.

□

PŘÍKLAD 15. Spočtěme matici přechodu od báze P k bázi M v $\mathbb{R}^2$, kde

$$P = \{(0, 1), (1, 1)\}$$
$$M = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

Podle druhého bodu tvrzení 9 je to vlastně matice homomorfizmu $1_{\mathbb{R}^2}$ vzhledem k bázím M a P. Podobně jako v druhé části příkladu 14 tedy zobrazíme identitou vektory báze M a spočítáme jejich souřadnice vzhledem k P. Řešíme proto soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

tedy hledaná matice přechodu je

$$(1_{\mathbb{R}^2})_{PM} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Můžeme otestovat, že tato matice skutečně správně transformuje souřadnice, například na vektoru $u = (1, 2)$. Jeho souřadnice vzhledem k bázím P a M jsou

$$(u)_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (u)_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a skutečně platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

neboli $(1_{\mathbb{R}^2})_{PM}(u)_M = (u)_P$.

Příklad 16. Chceme-li počítat matici přechodu od kanonické báze, například $(1_{\mathbb{R}^3})_{K_3N}$, kde $N = \{(1, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, není vlastně co upravovat, protože soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

je už v redukovaném odstupňovaném tvaru, takže její pravá polovina je už hledaná $(1_{\mathbb{R}^3})_{K_3N}$. V opačném směru můžeme využít pátý bod tvrzení 9:

$$(1_{\mathbb{R}^3})_{NK_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Věta 19 (O transformaci matice homomorfizmu). *Nechť V, W jsou dva vektorové prostory konečné dimenze nad $\mathbb{F}$, N, N' báze V, M, M' báze W a $f : V \to W$ homomorfizmus. Pak*

$$(f)_{M'N'} = (1_W)_{M'M} (f)_{MN} (1_V)_{NN'}$$

Důkaz. Použijeme třetí bod tvrzení 8 na f zapsané jako složení $1_W \circ f \circ 1_V$. □

Věta se nejčastěji používá v případě $V = W$, $M = N$, $M' = N'$. Matice $A := (f)_{NN}$ se nazývá **maticí endomorfizmu f vzhledem k bázi** N a $A' := (f)_{N'N'}$ je matice endomorfizmu f vzhledem k bázi N'. Pak s využitím $(1_V)^{-1}_{N'N} = (1_V)_{NN'} \equiv R$ dostáváme

$$(f)_{N'N'} = (1_V)^{-1}_{NN'} (f)_{NN} (1_V)_{NN'},$$

nebo v kompaktnějším zápise $A' = R^{-1}AR$. Operaci, při níž se matici A přiřadí matice $R^{-1}AR$, nazýváme **konjugováním** matice A maticí R. Z pátého bodu tvrzení 8 nebo též z věty 13 plyne, že konjugování zachovává hodnost a podle poslední věty vlastně odpovídá vyjadřování endomorfizmu v různých bázích. O maticích A a B, pro něž existuje regulární matice Q taková, že $B = Q^{-1}AQ$, se říká, že jsou **podobné**, značíme $A \sim B$. Podobné matice mají kromě hodnosti stejné i některé další veličiny, jak uvidíme v kapitolách o determinantech a vlastních číslech.

Příklad 17. Spočtěme jádro zobrazení gf, kde f je jako v příkladě 14 a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ je lineární zobrazení přiřazující vektoru $(0, 1)$ vektor $(1, -1, 0, 1)$ a vektoru $(1, 1)$ vektor $(-1, 1, 0, -1)$. Zobrazení g je zadáno svými hodnotami na bázi ve smyslu věty 16, prvky báze $P = \{(0, 1), (1, 1)\}$ zobrazuje na zadané vektory v $\mathbb{R}^4$. Z toho se dá okamžitě určit matice g vzhledem k P a K_4:

$$(g)_{K_4P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matice složeného homomorfizmu gf je podle třetího bodu tvrzení 8 rovna

$$(gf)_{K_4N} = (g)_{K_4P}(f)_{PN} = (g)_{K_4P}(1_{\mathbb{R}^2})_{PM}(f)_{MN},$$

kde jsme zvolili báze tak, abychom mohli použít matice, které už jsme spočítali v předchozích příkladech. Vynásobením matic

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

dostáváme

$$(gf)_{K_4N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matice má hodnost 1 a nulitu tudíž 2. Jádro maticového zobrazení určeného maticí $(gf)_{K_4N}$ obsahuje vektory souřadnic vektorů jádra zobrazení gf. Jinými slovy $u \in \operatorname{Ker} gf$, právě když

$$(u)_N \in \langle (1,1,0), (2,0,1) \rangle$$

Lepší by ale bylo mít výsledek zapsán přímo, ne pomocí souřadnic k bázi N. Podle vztahu

$$(gf)_{K_4K_3} = (gf)_{K_4N}(1_{\mathbb{R}^3})_{NK_3}$$

k tomu potřebujeme matici přechodu od N ke K_3, kterou jsme získali v příkladu 16:

$$(gf)_{K_4K_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

což je

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Odtud $u \in \operatorname{Ker} gf$, právě když

$$u \equiv (u)_{K_3} \in \langle (-2,1,0), (-2,0,1) \rangle$$

PŘÍKLAD 18. Můžeme také ještě jednou spočítat $(f)_{K_2K_3}$ pomocí věty 19. Z matic na pravé straně rovnosti

$$(f)_{K_2K_3} = (1_{\mathbb{R}^2})_{K_2M}(f)_{MN}(1_{\mathbb{R}^3})_{NK_3}$$

jsme dosud nespočítali jen $(1_{\mathbb{R}^2})_{K_2M}$, ale ta má podobně jako $(1_{\mathbb{R}^3})_{K_3N}$ v příkladu 16 sloupce rovné vektorům báze M. Potřebujeme tedy určit součin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

který má očekávanou hodnotu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1. Cvičení.

(1) Určete matici přechodu od báze $N = \{(1,0,1),(2,0,3),(0,1,0)\}$ k bázi $N' = \{(0,1,2),(0,1,1),(1,0,0)\}$ a naopak v $\mathbb{R}^3$.

(2) Určete matici přechodu od báze $N = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}$ k bázi $N' = \{x^2+2, x^2-3x+1, x^2+x+3\}$ v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2.

(3) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Najděte matici přechodu od báze $N = \{1, x, x^2 \ldots, x^n\}$ k bázi $N' = \{1, x-a, (x-a)^2 \ldots, (x-a)^n\}$ a naopak v $P_n(x, \mathbb{R})$.

(4) Homomorfizmus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonickým bázím matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete jeho matici vzhledem k bázím $\{(1,1),(2,0)\}$ a $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

(5) Homomorfizmus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázím $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ a $\{(1,1),(2,0)\}$ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím a obraz vektoru (x,y,z).

(6) Je dán homomorfizmus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ předpisem $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

$$f\left(a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = a\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Rozhodněte, jestli je f automorfizmus a pokud ano, najděte matici inverzního automorfizmu vzhledem ke kanonickým bázím.

(7) V prostoru $M_2(\mathbb{R})$ uvažujme báze

$$N = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$N' = \left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

Určete matici přechodu od N k N' a naopak. Nechť $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je dáno předpisem $f(X) = B^{-1}XB$, kde

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Určete $(f)_{NN}$ a $(f)_{N'N'}$.

(8) Ukažte, že pokud $A \sim B$, pak $A^k \sim B^k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a pokud A je regulární, pak $A^k \sim B^k$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

KAPITOLA 7

Determinant matice

1. Permutace

Permutace je bijektivní zobrazení konečné množiny na sebe. Množina může být jakákoliv, ale obvykle se bere prostě $\{1, \ldots, n\}$. Množinu všech permutací této množiny značíme S_n. Složení dvou permutací je permutace, identické zobrazení je permutace a inverzní zobrazení k permutaci je také permutace. Tedy S_n s operací skládání tvoří grupu, tzv. **symetrickou grupu** na n prvcích. Místo skládání někdy mluvíme o součinu permutací. Obvyklý zápis permutace π je pomocí dvou řádků

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

a pokud nehrozí nedorozumění, můžeme psát jenom řádek obrazů $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$. Pozor, nepleťte si tento zápis s podobným zápisem pro vektory a matice. Je snadné dokázat indukcí, že na n prvcích existuje právě $n!$ permutací.

Příklad 19. Grupa S_3 sestává právě z šesti prvků: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ a $(3,2,1)$. Inverzní prvek k $\pi = (2,3,1)$ je $\pi^{-1} = (3,1,2)$, protože $\pi(1) = 2$, takže musí být $\pi^{-1}(2) = 1$, atd. Příklad složení dvou permutací zapíšeme pro přehlednost ve dvouřádkovém zápise:

$$\pi \circ \rho \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Levá strana je složení dvou permutací, takže nejprve je třeba zobrazit každý prvek permutací ρ a poté permutací π, např.

$$(\pi \circ \rho)(1) = \pi(\rho(1)) = \pi(3) = 1$$

Definice 26. Nechť $\pi \in S_n$ a (i,j), $i < j$ je dvojice indexů z $\{1, \ldots, n\}$ Řekneme, že $(\pi(i), \pi(j))$ **tvoří inverzi** v π, pakliže $\pi(i) > \pi(j)$. Počet všech takových dvojic nazveme $I(\pi)$, **počet inverzí** permutace π.

Pozor, pojmy tvořit inverzi a počet inverzí nemají žádnou souvislost s inverzní permutací nebo dokonce inverzní maticí, jsou to prostě ty dvojice čísel, které se na druhém řádku zápisu permutace vyskytují v opačném pořadí než na prvním. Například pro permutaci $(4,2,1,3)$ tvoří inverzi dvojice $(4,2)$, $(4,1)$, $(4,3)$ a $(2,1)$.

Lemma 21. *Nechť $\pi, \rho \in S_n$. Pak existuje celé číslo k takové, že $I(\pi \circ \rho) = I(\pi) + I(\rho) + 2k$.*

Důkaz. Nechť $i < j$, pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$\begin{aligned}
(--): &\quad \rho(i) < \rho(j), \pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j)) \\
(-+): &\quad \rho(i) < \rho(j), \pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j)) \\
(+-): &\quad \rho(i) > \rho(j), \pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j)) \\
(++): &\quad \rho(i) > \rho(j), \pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j))
\end{aligned}$$

Označme počty dvojic odpovídající těmto variantám jako I_{--}, I_{-+}, I_{+-} a I_{++}. Varianty $(+-)$ a $(++)$ dávají inverzi permutace ρ, varianty $(-+)$ a $(++)$ inverzi permutace π a varianty $(-+)$ a $(+-)$ inverzi permutace $\pi \circ \rho$. Tedy

$$I(\pi \circ \rho) = I_{-+} + I_{+-} = \\ = (I_{-+} + I_{++}) + (I_{+-} + I_{++}) - 2I_{++} = I(\pi) + I(\rho) + 2k,$$

kde $k = -I_{++}$. □

DEFINICE 27. Nechť $\pi \in S_n$. **Znaménkem permutace** budeme rozumět číslo $\operatorname{sgn}(\pi) := (-1)^{I(\pi)}$.

Identická permutace id neobsahuje žádnou inverzi, tedy její znaménko je $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$. Naopak permutace $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ obsahuje maximální možný počet inverzí, protože převrací pořadí všech $\binom{n}{2}$ dvojic. Z lemmatu plyne, že $\operatorname{sgn}(\pi\circ\rho) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho)$, a z těchto dvou vlastností dohromady, že $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}\circ\pi) = 1$, tedy $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$.

DEFINICE 28 (Homomorfizmus grup). Nechť $(G, \cdot, e_G)$ je grupa s operací $\cdot$ a neutrálním prvkem e_G a $(H, \odot, e_H)$ je grupa s operací $\odot$ a neutrálním prvkem e_H. Zobrazení $\phi : G \to H$, které splňuje

(1) $\forall g_1, g_2 \in G : \phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \odot \phi(g_2)$
(2) $\phi(e_G) = e_H$

se nazývá **homomorfizmus grup** G a H.

Z kapitoly o vektorových prostorech víme, že každý vektorový prostor je grupa vzhledem k operaci sčítání. Homomorfizmus $f : V \to W$ vektorových prostorů V a W splňuje $\forall u, v \in V$

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$
$$f(0) = 0,$$

je to tedy i homomorfizmus grup. Zde jsou obě operace $\cdot$ a $\odot$ reprezentovány sčítáním na V resp. W a neutrálními prvky grup jsou nulové vektory.

Označíme-li $\mathbb{Z}_2$ grupu tvořenou množinou $\{1, -1\}$ s operací násobení, je jejím neutrálním prvkem prvek 1. V symetrické grupě je operací skládání a neutrálním prvkem identita. Vidíme tedy, že zobrazení $\operatorname{sgn} : S_n \to \mathbb{Z}_2$ je homomorfizmus grup.

Podobně jako u vektorových prostorů, i u grup pojem homomorfizmus vyjadřuje, že se zobrazení „chová hezky“ k dané struktuře, v tomto případě struktuře grupy. Můžeme definovat i analogické pojmy:

DEFINICE 29. Nechť $\phi : G \to H$ je homomorfizmus grup. Definujeme jeho **jádro** a **obraz**

$$\operatorname{Ker}\phi = \{g \in G | \phi(g) = e_H\}$$
$$\operatorname{Im}\phi = \{h \in H | \exists g \in G : \phi(g) = h\}$$

Podobně jako jsou jádro a obraz homomorfizmu vektorových podprostorů podprostory, jsou jádro a obraz homomorfizmu grup podgrupy. Nemůžeme ale definovat například nulitu nebo hodnost homomorfizmu grup, protože pro grupy neexistuje rozumná definice dimenze.

DEFINICE 30. Podgrupu $\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} \leq S_n$ nazýváme **grupou všech sudých permutací** nebo také **alternující podgrupou**, značíme A_n. Permutace je tedy **sudá**, pokud je její znaménko 1. Permutace se znaménkem -1 jsou **liché**.

Liché permutace podgrupu netvoří, protože součin dvou lichých permutací je permutace sudá.

PŘÍKLAD 20. Pro grupy můžeme definovat pojem monomorfizmus, epimorfizmus, endomorfizmus, automorfizmus, mluvit o izomorfních grupách. Například grupa S_3 je izomorfní grupě všech symetrií rovnostranného trojúhelníka: stačí očíslovat vrcholy $1, 2, 3$ a přiřadit každé permutaci π shodné zobrazení, které převádí vrchol 1 na $\pi(1)$, 2 na $\pi(2)$ a 3 na $\pi(3)$. To je bijekce, která splňuje vlastnosti homomorfizmu, tedy je to izomorfizmus grup. Podobně je izomorfní S_4 s množinou všech symetrií pravidelného čtyřstěnu. Podgrupa A_3, resp. A_4 se pak v tomto izomorfizmu zobrazuje na podgrupu přímých shodností. Není těžké si rozmyslet, že ve skutečnosti každá konečná grupa G je izomorfní podgrupě v S_n, kde n je počet prvků G.

Označme $\operatorname{Supp}\pi$ **nosič permutace**, tedy množinu všech indexů $i \in \{1, \ldots, n\}$ takových, že $\pi(i) \neq i$. Permutace s dvouprvkovým nosičem se nazývají **transpozice**, vlastně pouze vyměňují nějaký prvek i s jiným prvkem j. Takovou transpozici budeme značit $[i, j]$, například $(1, 4, 3, 2)$ je transpozice $[2, 4] \equiv [4, 2]$.

Transpozice $[1, 2]$ obsahuje právě jednu inverzi a je to tedy lichá permutace. Transpozici $[i, j]$, $i < j$ lze zapsat jako $\rho^{-1} \circ [1, 2] \circ \rho$, kde ρ je libovolná permutace, pro kterou $\rho(i) = 1$, $\rho(j) = 2$. Pak ale

$$\operatorname{sgn}([i, j]) = \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) \operatorname{sgn}([1, 2]) \operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}([1, 2]),$$

tedy každá transpozice je lichá permutace.

Transpozice je speciální případ **cyklu**, což je permutace s k-prvkovým nosičem $\{i_1, i_2, \ldots i_k\}$ taková, že $\pi(i_j) = i_{j+1}$ pro všechna $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ a $\pi(i_k) = i_1$. Cyklus označíme $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$, číslo k se nazývá **délkou cyklu**. Dva cykly nazveme nezávislými, pokud jsou jejich nosiče disjunktní.

VĚTA 20. *Každou permutaci lze zapsat jako součin nezávislých cyklů. Každou permutaci lze zapsat jako součin transpozic.*

DŮKAZ. Stačí vzít libovolný prvek $i_{1,1} \in \operatorname{Supp}\pi$. Jeho obraz označíme $i_{1,2} := \pi(i_{1,1})$, dále $i_{1,3} := \pi(i_{1,2})$ atd. Množina je konečná, takže pro nějaké $k_1 \in N$ musí nastat $i_{1,k_1+1} = i_{1,1}$. Definujme π_1 permutaci, jejíž nosič je $\{i_{1,1}, \ldots, i_{1,k_1}\}$ a na této množině má stejné hodnoty jako π, je to zjevně cyklus délky k_1. Zvolme $i_{2,1} \in \operatorname{Supp}\pi \setminus \operatorname{Supp}\pi_1$ a opakujme postup, získáme takto N cyklů π_j o délce k_j, které jsou nezávislé a platí $\pi = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_N$.

Cyklus $[i_1, \ldots, i_k]$ je roven například součinu transpozic $[i_1, i_2][i_2, i_3] \ldots [i_{k-1} i_k]$ (rozmyslete si podrobně). Pokud tento rozklad použijeme pro každý cyklus $\pi_1, \ldots, \pi_N$, dostáváme zápis permutace jako součinu transpozic. □

Z důkazu je zřejmé, že rozklad na nezávislé cykly je až na pořadí jednoznačný. Rozklad na transpozice jednoznačný zdaleka není, už cyklus lze rozložit na transpozice mnoha jinými způsoby (najděte nějaký) a také lze do kteréhokoli místa rozkladu vložit součin typu $[i, j][j, i]$, čímž dostaneme jiný rozklad s jiným počtem transpozic. Protože ale víme, že transpozice je lichá permutace a že sgn je grupový homomorfizmus, vidíme, že znaménko permutace lze také spočítat jako $(-1)^N$, kde N je počet transpozic v nějakém (a tedy libovolném) rozkladu na transpozice, nebo také $(-1)^C$, kde C je počet cyklů sudé délky v rozkladu na nezávislé cykly. To bývá obvykle rychlejší metoda výpočtu znaménka permutace než vypisování seznamu všech inverzí.

PŘÍKLAD 21. Určeme znaménko permutace $\pi = (7, 3, 5, 1, 2, 4, 6, 8)$. Vidíme, že $\pi(1) = 7$, $\pi(7) = 6$, $\pi(6) = 4$ a $\pi(4) = 1$, což dává cyklus $[1, 7, 6, 4]$. Dále $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 5$ a $\pi(5) = 2$, dalším nezávislým cyklem je $[2, 3, 5]$. Tím jsme vyčerpali celý $\operatorname{Supp}\pi$, tedy $\pi = [1, 7, 6, 4][2, 3, 5]$ a znaménko je -1, protože v rozkladu je jeden cyklus sudé délky.

VĚTA 21. *Nechť $n > 1$. Grupa A_n má $\frac{n!}{2}$ prvků.*

DŮKAZ. Zvolme pevnou transpozici, například $[1,2]$. Zobrazení $T : S_n \to S_n$ definované jako $T(\pi) = [1,2] \circ \pi$ je bijekce na konečné množině S_n, přičemž obrazem liché permutace je sudá a naopak. Pak ale množina lichých a sudých permutací musí být stejně velká, tedy sudých permutací je právě $\frac{n!}{2}$. □

1.1. Cvičení.

(1) Je součin permutací komutativní?

(2) Dokažte, že grupa všech symetrií čtyřstěnu je izomorfní (tedy existuje bijektivní grupový homomorfizmus) grupě S_4. Čemu v tomto izomorfizmu odpovídá grupa A_4?

(3) Patnácka je klasický hlavolam tvaru čtvercové mřížky 4×4, v níž je 15 pohyblivých dlaždic očíslovaných 1 až 15. V základní pozici je volné pravé dolní pole a dlaždice 1 až 15 jsou srovnány v pořadí odleva doprava a odshora dolů. Hlavolam se stal slavným v roce 1880, kdy Samuel Lloyd nabídl odměnu 1000 dolarů tomu, kdo se dokáže ze základní pozice dostat do pozice, v níž je volné pole na stejném místě, ale dlaždice 14 a 15 jsou vyměněny. Dokažte, že tato úloha nemá řešení.

(4) Permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 & 7 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

rozložte na součin transpozic dvěma způsoby.

(5) Rozložte následující permutaci na nezávislé cykly a určete znaménko:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 8 & 12 & 3 & 13 & 11 & 4 & 5 & 6 & 1 & 14 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

(6) U permutace z předchozí úlohy určete π^k, kde k je počet dnů od vašeho narození. Dále určete nejmenší $k > 1000$ takové, že $\pi^k = \pi^{-1}$.

(7) Spočtěte součin $(1523)(62)(137)(1234567)(152)$ v S_7. Pište rovnou jako rozklad na nezávislé cykly.

(8) Řešte v S_6 „permutační rovnici“ $AXB = C$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(9) Určete znaménko permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 2 & 5 & 8 & \dots \\ & & & & & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ & & & & & \dots & 3n-1 & 1 & 4 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$$

(10) Stačí $n-1$ transpozic na vytvoření libovolné permutace na n prvcích?

(11) Charakterizujte permutace, pro které $\pi^{-1} = \pi$.

(12) Nechť π je permutace z S_6. Spočtěte π^{60}.

(13) Nechť $\pi \in S_n$. Označme E_π matici která se dostane z jednotkové matice E_n permutací jejích řádků pomocí permutace π. Dokažte, že pro každou

matici $X \in M_{mn}(\mathbb{F})$ existují permutace $\pi \in S_m$, $\rho \in S_n$ takové, že v matici

$$E_\pi X E_\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

je podmatice A regulární a její rovnost je rovna hodnosti X. Takovému zápisu X se říká **blokový zápis s plnou hodností**. Tvrzení říká, že u každé matice lze přeuspořádat řádky a sloupce tak, aby prvních $h(X)$ řádků tvořilo bázi řádkového prostoru a prvních $h(X)$ sloupců bázi sloupcového.

(14) Nechť

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

je blokový zápis s plnou hodností. Dokažte, že pak $D = CA^{-1}B$.

(15) Pomocí předchozího cvičení (anebo i bez něj) dokažte, že pro matici X typu $m \times n$ hodnosti r existují matice W typu $m \times r$ a Y typu $r \times n$ takové, že $X = WY$. Matice W a Y mají plnou hodnost, proto se tomu říká **faktorizace s plnou hodností**.

2. Výpočet determinantu

DEFINICE 31. Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$. **Determinantem matice** A nazveme číslo

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

Vidíme tedy, že determinant je součet $n!$ členů, z nichž každý je součinem n elementů matice vynásobeným znaménkem permutace. V každém takovém součinu se vyskytuje právě jeden element z každého řádku a právě jeden element z každého sloupce. Místo $\det A$ budeme také používat označení $|A|$ nebo u konkrétní matice nahradíme závorky svislicemi.

PŘÍKLAD 22.

(1) Pokud A je matice 2×2, pak

$$\begin{aligned} \det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(12) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(21) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

(2) Podobně

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} \end{aligned}$$

(3) Pro obecné n je determinant součtem $n!$ sčítanců, každý je součinem n čísel a znaménka. Je tedy jasné, že pro praktický výpočet se definice determinantu příliš nehodí.

(4) Pokud je $A \in M_n(\mathbb{F})$ diagonální, pak

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn},$$

protože každý z ostatních sčítanců obsahuje alespoň jeden mimodiagonální element. Ve skutečnosti obsahuje alespoň jeden element nad diagonálou a alespoň jeden pod diagonálou, takže stejný výsledek platí i pro horní a dolní trojúhelníkové matice.

Označme řádky matice A jako $a_1, a_2, \dots, a_n$, determinant matice A bude výhodné občas značit také jako $|a_1, \dots, a_n|$.

TVRZENÍ 10. *Nechť* $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$, $a'_i \in \mathbb{F}^n$, $r \in \mathbb{F}$.

(1) $|A| = |A^T|$
(2) $|a_1, \dots, ra_i, \dots, a_n| = r|a_1, \dots, a_i, \dots, a_n|$.
(3) *Pokud* $1 \leq i \leq n$, *pak*

$$|a_1, \dots, a_i + a'_i, \dots, a_n| = \\ = |a_1, \dots, a_i, \dots, a_n| + |a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n|$$

(4) *Pokud* $1 \leq i < j \leq n$, *pak*

$$|a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n| = -|a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n|$$

DŮKAZ. Podle definice

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) a_{1\rho^{-1}(1)} a_{2\rho^{-1}(2)} \dots a_{n\rho^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} a_{\rho(2)2} \dots a_{\rho(n)n} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a^T_{1\rho(1)} a^T_{2\rho(2)} \dots a^T_{n\rho(n)} = |A^T| \end{aligned}$$

Nejprve jsme využili toho, že pokud ρ běží přes celou S_n, pak ρ^{-1} také, pak jsme přeuspořádali činitele v součinu a použili $\operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\rho^{-1})$.

Druhé tvrzení plyne z

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots (ra_{i\pi(i)}) \dots a_{n\pi(n)} = r \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)}$$

a podobně zřejmé je i tvrzení třetí.

Zobrazení, které permutaci π přiřazuje permutaci $\pi' = \pi \circ [i, j]$, je bijekce S_n na S_n, takže

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\pi' \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi') a_{1\pi'(1)} \dots a_{i\pi'(i)} \dots a_{j\pi'(j)} \dots a_{n\pi'(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi \circ [i, j]) a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(j)} \dots a_{j\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} \\ &= -\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{j\pi(i)} \dots a_{i\pi(j)} \dots a_{n\pi(n)}, \end{aligned}$$

čímž je dokázáno i poslední tvrzení. □

POZNÁMKY.

(1) Z prvního tvrzení plyne, že druhé a třetí tvrzení platí i pro sloupce.
(2) Determinant matice, která obsahuje nulový řádek (nebo sloupec), je nulový, stačí v druhém tvrzení položit $r = 0$.
(3) Pokud má A dva stejné řádky (nebo sloupce), je $\det A = 0$, z druhého nebo ze čtvrtého tvrzení.
(4) Druhé a třetí tvrzení se dají přeformulovat tak, že pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a libovolných $n - 1$ vektorů $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ z $\mathbb{F}^n$ je zobrazení

$$\begin{aligned} f : \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F} \\ a_j &\mapsto |a_1, \dots, a_n| \end{aligned}$$

lineární. Pozor, neznamená to, že determinant je lineární zobrazení z vektorového prostoru $M_n(\mathbb{F})$ do $\mathbb{F}$!

(5) Ze čtvrtého tvrzení plyne, že pokud $\pi \in S_n$, pak

$$|a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}| = \operatorname{sgn}(\pi)|a_1, \dots, a_n|,$$

(6) Pokud do i-tého řádku matice přičteme r-násobek j-tého řádku pro $i \neq j$, pak se determinant nezmění. Plyne to z druhého a třetího tvrzení.

Tato pozorování umožňují rychlý praktický výpočet determinantů. Řádkovými a sloupcovými úpravami je možné převést matici na horní nebo dolní trojúhelníkový tvar. Hodnota determinantu se buď nemění (úprava typu 2), nebo se změní znaménko (úprava typu 3) nebo se determinant vynásobí číslem (úprava typu 1). Stačí tedy provádět Gaussovu eliminaci (s případným využitím sloupcových úprav, když je to výhodné) a zaznamenávat si případné změny hodnoty determinantu vyvolané změnami pořadí řádků/sloupců a násobením řádku/sloupce číslem.

VĚTA 22. *Matice $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je regulární, právě když $|A| \neq 0$.*

DŮKAZ. Matice A je regulární právě když $h(A) = n$. Pokud matici převedeme Gaussovou eliminací na horní trojúhelníkovou, pak se hodnost zachová a nulovost či nenulovost determinantu také. Ale determinant horní trojúhelníkové matice je nenulový, právě když jsou nenulové všechny prvky na diagonále a právě tehdy je i hodnost matice rovna n. □

To je tedy první důležitá věc, na kterou se determinant hodí: jeho nulovost či nenulovost detekuje regularitu matice. Součin dvou regulárních matic je regulární matice a součin dvou singulárních je singulární, takže nulovost determinantu se musí zachovávat i při součinech. Ve skutečnosti platí mnohem silnější tvrzení:

VĚTA 23. *Nechť $A, B \in M_{nn}(\mathbb{F})$. Pak $|AB| = |A||B|$.*

DŮKAZ. V matici AB je i-tý řádek lineární kombinací řádků matice B s koeficienty z i tého řádku matice A. Z linearity determinantu v každém řádku plyne

$$\begin{aligned} |AB| &= \left| \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} b_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} b_{i_n} \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} |b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}| \end{aligned}$$

Determinant $|b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}|$ je nulový, pokud jsou v něm dva řádky stejné, jinými slovy pokud zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe, přiřazující indexu k index i_k, není permutace. Stačí tedy zachovat jen ty členy, pro které to permutace je:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} |b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \dots, b_{\pi(n)}| \\ &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} \operatorname{sgn} \pi |b_1, b_2, \dots, b_n| \\ &= |A||B| \end{aligned}$$

Zde jsme využili toho, že přeuspořádání řádků permutací π má za následek vynásobení determinantu číslem $\operatorname{sgn}(\pi)$ a poslední krok už je jen definice determinantu. □

Protože $|E| = 1$, plyne z této věty, že $|A^{-1}A| = 1$ neboli $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ a také že $|R^{-1}AR| = |A|$. To znamená, že determinant matice endomorfizmu nezávisí na volbě báze a má tedy smysl definovat pro $f \in V_n$ veličinu $\det f$ jako determinant matice f vzhledem k libovolné bázi.

2.1. Cvičení.

(1) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

(2) Vyčíslete determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(3) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

(4) Určete determinant matice $(a_{ij})_{1,1}^{n,n}$, kde $a_{ij} = i + j$ a n je $1, 2, 3$. Určete tento determinant pro obecné n.
(5) Určete determinant matice $(a_{ij})_{1,1}^{n,n}$, kde $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ a n je $1, 2, 3$. Určete tento determinant pro obecné n.
(6) Pomocí determinantu určete, pro která reálná čísla k má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z - w &= 2 \\ x + y - 2z + w &= 3 \\ x + kz - w &= 4 \\ 2x + y - w &= 2 \end{aligned}$$

právě jedno řešení.
(7) Jak se změní determinant, pokud matici $A \in M_n(\mathbb{F})$ vynásobíme číslem $r \in \mathbb{F}$?
(8) Jak se změní determinant, pokud jeho elementy převrátíme vůči středu matice. Zdůvodněte.
(9) Dokažte, že pokud pro libovolné indexy $i_1, \ldots, i_k$; $j_1, \ldots, j_l$ platí $a_{i_a j_b} = 0$ a $k + l > n$, pak je determinant matice (a_{ij}) roven nule.
(10) Jak se změní determinant matice, pokud pro všechna i, j její (i, j)-tý element vynásobíme číslem c^{i-j}, $c \in \mathbb{R}$? Zdůvodněte.
(11) Jak se změní determinant, pokud od každého řádku odečteme následující řádek, jen od posledního řádku odečteme první řádek? Zdůvodněte.
(12) Jak se změní determinant, pokud matici potočíme o 90 stupňů okolo „středu“ matice? Zdůvodněte.
(13) Čísla $1, 2, \ldots, 9$ mohou být rozmístěna do 3×3 matice $9!$ způsoby. Najděte součet determinantů všech těchto matic.
(14) Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je nula.

(15) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(16) Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$$

(17) Řešte rovnici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

(18) Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

(19) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

(20) Dokažte, že množina reálných čtvercových matic řádu n s nenulovým determinantem tvoří grupu vůči násobení (značíme $GL(n, \mathbb{R})$ - general linear group).

(21) Dokažte, že množina $SL(n, \mathbb{F}) := \{A \in M_n(\mathbb{F}) | \det A = 1\}$ je grupa vzhledem k násobení matic.

(22) Určete determinant matice $n \times n$, která vznikne jako levý horní roh Pascalova trojúhelníku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \end{vmatrix}$$

3. Aplikace determinantu

DEFINICE 32. Nechť $A \in M_n(\mathbb{F})$. Nechť A_{IJ} je podmatice A vzniklá vynecháním řádků s indexy z množiny $I \subset \{1,\dots,n\}$ a sloupců z množiny $J \subset \{1,\dots,n\}$. Pokud I a J mají stejný počet prvků, pak lze spočítat $|A_{IJ}|$, takovému determinantu se říká IJ-tý **minor** matice A. Pokud $I = J$, mluvíme o **hlavním minoru** a pokud $I = \{i\}$ a $J = \{j\}$, je to **první minor**, značíme $|A_{ij}|$. Číslo $\hat{A}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ nazýváme ij-tým **kofaktorem** nebo též **algebraickým doplňkem** matice A.

Následující věta nám mimojiné dává rekurzivní formulku, jak spočítat determinant matice pomocí jejích algebraických doplňků.

VĚTA 24. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$, $j,k \in \{1,\dots,n\}$. Pak*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\hat{A}_{ki} = \begin{cases} |A| & \text{pro } j = k \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases}$$

DŮKAZ. Dokazujme nejprve případ $j = k = n$. V definici determinantu vytkneme z každého členu prvek na n-tém řádku. Pak

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} \sum_{\substack{\pi\in S_n \\ \pi(n)=i}} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n-1,\pi(n-1)}$$

Pokud $i = n$, pak můžeme π chápat jako permutaci množiny $\{1,\dots,n-1\}$ a n-tý sčítanec v sumě je roven $|A_{nn}| = \hat{A}_{nn}$. Pro ostatní členy π zobrazuje n na jiný index $i \neq n$. Složená permutace $\pi' := \pi_i \circ \pi$, kde $\pi_i := [n, n-1, \dots, i+1, i]$ zobrazuje opět n na n a $\operatorname{sgn}(\pi') = (-1)^{n-i}\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{n+i}\operatorname{sgn}(\pi)$. Tedy i-tý sčítanec lze přepsat jako

$$(-1)^{n+i} \sum_{\pi'\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi') a_{1,\pi(1)} \dots a_{n-1,\pi(n-1)} = \\ = (-1)^{n+i}|A_{ni}| = \hat{A}_{ni},$$

protože prvek $a_{p,\pi(p)}$ je vlastně prvkem $a'_{p,\pi'(p)}$ matice $A' \equiv A_{ni}$ po přečíslování sloupců způsobeném vynecháním indexu i z $\{1,\dots,n\}$. Tím je tvrzení dokázáno pro $j = k = n$.

Pokud $j = k \neq n$, pak stačí přeuspořádat řádky matice A permutací π_j, která převádí j-tý řádek na pozici n a posouvá všechny následující řádky beze změny jejich pořadí, platí $\operatorname{sgn}\pi_j = (-1)^{n-j}$. Označíme-li takto vzniklou matici $\tilde{A}$, pak

$$|A| = (-1)^{n-j}|\tilde{A}| = (-1)^{n+j}\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ni}(-1)^{n+i}|\tilde{A}_{ni}| = \\ = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(-1)^{i+j}|A_{ji}|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Konečně pokud $j \neq k$, pak součet $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\hat{A}_{ki}$ vůbec nezávisí na hodnotách elementů na k-tém řádku matice A. Je proto stejný i pro matici A', která vznikne z A tím, že do k-tého řádku napíšeme j-tý řádek a jinak se matice nezmění. Pak je ale výraz $\sum_{i=1}^{n} a'_{ji}\hat{A}'_{ki} \equiv \sum_{i=1}^{n} a'_{ki}\hat{A}'_{ki}$ roven determinantu matice A', který je nulový, protože se jedná o matici mající dva stejné řádky. □

Věta nám také dává přímé vyjádření jednotlivých prvků inverzní matice. Definujeme-li $b_{jk} := \frac{1}{|A|}\hat{A}_{kj}$, pak je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \equiv \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{kj}$$

rovno jedné pro $i = k$ a rovno 0 pro $i \neq k$, čili $AB = E$, $B = A^{-1}$. Pro matice 2×2 odtud dostáváme snadno zapamatovatelnou formulku

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

tedy že inverzní matice se dostane prohozením prvků na hlavní diagonále, nahrazením prvků na vedlejší diagonále prvky opačnými a vydělením determinantem.

Z výrazu pro inverzní matici můžeme také odvodit vztah pro řešení soustav rovnic, známý jako **Cramerovo pravidlo**. Pokud A je regulární matice, pak řešením soustavy rovnic $Ax = b$ je $x = A^{-1}b$. Dosazením vzorce pro inverzní matici dostáváme, že

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{A}_{ji}\frac{1}{|A|}b_j$$

Označme $A_{b,i}$ matici, která vznikne z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b, pak rozvoj podle tohoto sloupce dává $|A_{b,i}| = \sum_{j=1}^{n} \hat{A}_{ji}b_j$, protože kofaktory matic $A_{b,i}$ a A odpovídající vynechání i-tého sloupce jsou stejné. Dostáváme tedy

Věta 25. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ je regulární matice a $b \in \mathbb{F}^n$. Pak hodnota i-té složky (jediného) řešení $x \in \mathbb{F}^n$ soustavy rovnic $Ax = b$ je rovna $\frac{|A_{b,i}|}{|A|}$.*

Pokud $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_n$, pak výraz $|a_1, \ldots, a_n|$ splňuje téměř všechny přirozené vlastnosti, které by měl splňovat objem rovnoběžnostěnu určeného vektory a_i. Skutečně: pokud jeden z vektorů r-krát prodloužíme, pak determinant r-násobně vzroste, stejně se chová i objem. Pokud k vektoru přičteme lineární kombinaci ostatních vektorů, pak se „výška“ rovnoběžnostěnu nezmění, a tedy ani jeho objem. Stejně tak se nezmění ani determinant. Pokud a_i jsou prvky kanonické báze, je rovnoběžnostěnem krychlička o hraně jedna, která má objem také jedna a stejnou hodnotu má i determinant. Pokud jsou a_i lineárně závislé, pak jsou objem i determinant rovny nule. Jedinou vadou na kráse tedy zůstává, že determinant může narozdíl od objemu být i záporný. Ve skutečnosti to ale není vada, nýbrž vlastnost: znaménko determinantu nám umožňuje definovat, kdy je báze $\{a_1, \ldots, a_n\}$ kladně a kdy záporně orientovaná.

3.1. Cvičení.

(1) Řešte pomocí Cramerova pravidla pro ta $a \in \mathbb{R}$, pro něž se toto pravidlo dá použít:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

Jinou metodou pak dořešte pro ostatní hodnoty a.

(2) Určete pouze element na pozici 12 inverzní matice k

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(3) Vypočtěte determinantovou metodou inverzní matici k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

(5) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(6) Řešte pomocí Cramerova pravidla

$$\begin{aligned} (1+a)x + y + z &= 1 \\ x + (1+a)y + z &= a \\ x + y + (1+a)z &= a^2 \end{aligned}$$

(7) Spočtěte tzv. Vandermonduv determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

(8) Numerické přiblížení n-té derivace: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou volbu vesměs ruzných reálných čísel $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ najděte reálné koeficienty $q_0, q_1, \dots, q_n$, aby

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} q_i f(x + h\alpha_i)}{h^n} = f^{(n)}(x).$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla převeďte tuto podmínku na soustavu $n+1$ lineárních rovnic a tu pak řešte Cramerovým pravidlem.

(9) Dokažte

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

(10) Dokažte, že determinant blokově diagonální matice

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{lk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

je roven $\det A \det B$.

(11) Spočtěte determinant n-tého řádu

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$$

Návod: Sestavte rekurentní formuli pro D_n a ukažte, že její řešení lze hledat ve tvaru $D_n = ax^n + by^n$ pro vhodné konstanty $a, b, x, y \in \mathbb{C}$.

(12) Dokažte, že inverzní matice k regulární antisymetrické matici je antisymetrická.

(13) Určete obsah rovnoběžníku vytýčeného vektory $(1, 2)$ a $(2, 1)$.

(14) Určete objem rovnoběžnostěnu vytýčeného vektory $(1, 1, 0)$, $(3, 5, -2)$ a $(4, 0, 7)$.

(15) Dokažte, že hodnost matice je rovna velikosti největšího jejího nenulového minoru.

(16) Pro matici

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde A je regulární, definujme $Z := D - CA^{-1}B$, tzv. **Schurův doplněk** A v X. Je vidět, že pokud jde o blokový zápis s plnou hodností, je $Z = 0$. Dokažte, že $\det X = \det A \det Z$. Nápověda: Rozložte X na součin blokově dolní trojúhelníkové matice a blokově horní trojúhelníkové matice.

(17) Nechť

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde A, D a X jsou regulární. Dokažte, že pak je i Z regulární a

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}(E + BZ^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}BZ^{-1} \\ -Z^{-1}CA^{-1} & Z^{-1} \end{pmatrix}$$

KAPITOLA 8

Diagonalizace matic

Uvažujme následující jednoduchý populační model. V roce n žije v Kocourkově K_n obyvatel a v Tramtárii T_n obyvatel. Každý rok se 1/10 obyvatel Kocourkova odstěhuje do Tramtárie a 1/5 obyvatel Tramtárie do Kocourkova. Jiná místa (například Houby nebo Onen Svět) neuvažujeme, takže kdo se nestěhuje, zůstává na místě. Víme, kolik obyvatel měl Kocourkov i Tramtárie za krále Klacka (rok 0) a chceme vědět, kolik jich budou mít, až naprší a uschne (rok 42).

Situaci v roce n lze popsat stavovým vektorem $v_n := (K_n, T_n)$ a vývoj v čase maticovým zobrazením

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} K_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_n \\ T_n \end{pmatrix} = A v_n$$

Pak ovšem $v_{42} = A^{42} v_0$, takže potřebujeme nějak efektivně spočítat mocninu matice A. Ideální by bylo, kdyby A byla podobná diagonální matici, tedy kdyby existovaly diagonální matice D a regulární matice U taková, že $A = UDU^{-1}$. Pak totiž

$$\begin{aligned} A^{42} &= \underbrace{UDU^{-1}UDU^{-1}\dots UDU^{-1}}_{42} \\ &= UDEDE\dots EDU^{-1} = UD^{42}U^{-1} \end{aligned}$$

Pro diagonální matici (nejen) druhého řádu platí, že její mocnina je diagonální matice:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

A skutečně, takové matice existují! Platí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

a první a poslední matice jsou opravdu navzájem inverzní. Proto

$$\begin{aligned} A^{42} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{42} & 0 \\ 0 & 0.7^{42} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\doteq \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde jsme zanedbali číslo $0.7^{42} \doteq 3.10^{-7}$. Až naprší a uschne, bude rozložení obyvatelstva dáno vektorem

$$\begin{pmatrix} K_{42} \\ T_{42} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(K_0 + T_0) \\ \frac{1}{3}(K_0 + T_0) \end{pmatrix}$$

Jinými slovy, třetina celkové populace bude v Tramtárii a zbylé dvě třetiny v Kocourkově. Dalo by se na to přijít i tak, že bychom hledali rozložení obyvatel, které je stabilní vůči zadané migraci. Jak ale přijdeme na matice U a D?

1. Vlastní čísla a vlastní vektory

Stabilní rozložení z předchozího příkladu je charakterizováno vlastností, že jej dané maticové zobrazení zobrazuje na „jednonásobek“ sebe sama:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

Tuto situaci zobecníme na libovolný endomorfizmus a libovolný násobek:

DEFINICE 33. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** endomorfismu $f \in \mathrm{End}(V)$, pakliže pro nějaký nenulový vektor $v \in V$ platí $f(v) = \lambda v$. Každý vektor, který toto splňuje, se nazývá **vlastním vektorem** f příslušným vlastnímu číslu λ. Množinu $\mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V)$ nazýváme **vlastním podprostorem** f s vlastním číslem λ. Pokud je $f \equiv f_A$ maticové zobrazení, pak mluvíme o vlastních číslech, vektorech a podprostorech matice.

Všechny vektory tvaru $(2t, t)$, $t \in \mathbb{C}$ jsou tedy vlastními vektory matice A s vlastním číslem 1. Kdybychom dopředu věděli, že 1 je vlastním číslem A, mohli bychom je hledat jako řešení úlohy $Av - Ev = 0$, tedy jako prvky nulového prostoru matice

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

která je zjevně singulární. Prostor $N(A - E)$ je právě vlastním podprostorem $\mathrm{Ker}(f_A - 1_{\mathbb{C}^2})$ maticového zobrazení f_A.

Stejně tak je singulární matice

$$A - \frac{7}{10}E \equiv \begin{pmatrix} \frac{9}{10} - \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} - \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

a libovolný prvek jejího nulového prostoru splňuje $Av = \frac{7}{10}v$, je tedy vlastním vektorem s vlastním číslem $\frac{7}{10}$, prvkem vlastního podprostoru $\mathrm{Ker}(f_A - \frac{7}{10}1_{\mathbb{C}^2})$.

PŘÍKLAD 23.

(1) Zobrazení $f : P^n(x, \mathbb{C}) \to P^n(x, \mathbb{C})$ definované jako derivace polynomu $[f(p)](x) := p'(x)$ má jediné vlastní číslo 0, příslušný vlastní podprostor je tvořen konstantními polynomy.
(2) Pro diagonální matici $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ jsou vlastními čísly matice D její diagonální prvky $d_1, \ldots, d_n$ a příslušné vlastní vektory jsou prvky kanonické báze $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{C}^n$. Matice horní nebo dolní trojúhelníková se stejnou diagonálou má stejná vlastní čísla, ale jiné vlastní vektory.
(3) Pokud $Ax = \lambda x$ a A je regulární, pak $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$, čili inverzní matice má stejné vlastní vektory, ale převrácená vlastní čísla.
(4) Pokud $A = Q^{-1}BQ$, pak $Ax = \lambda x$ znamená $BQx = \lambda Qx$, tedy λ je vlastním číslem B s vlastním vektorem Qx. Podobné matice mají tedy stejná vlastní čísla.

Zvolíme-li bázi $M \subset V$, pak $f(v) = \lambda v$ znamená $(f)_{MM}(v)_M = \lambda(v)_M$. Tedy vlastní číslo endomorfizmu je vlastním číslem i jeho matice vzhledem ke kterékoli bázi. Všechny tyto matice jsou navzájem podobné, což je alternativní způsob, jak se dívat na poslední bod přechozího příkladu.

Jak určit vlastní čísla matice? Podle definice víme, že to musí být taková $\lambda \in \mathbb{C}$, aby $N(A - \lambda E)$ neobsahoval pouze nulový vektor. To je ale ekvivalentní požadavku, aby $A - \lambda E$ byla singulární matice, čili (v našem příkladě) aby

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{10} - \lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \frac{17}{10}\lambda + \frac{7}{10} = 0$$

Kořeny tohoto polynomu jsou čísla 1 a $\frac{7}{10}$. Vlastní vektory už jsme pro ně nalezli dříve, žádná další vlastní čísla ani vektory tedy už matice A mít nemůže.

DEFINICE 34. Nechť A je čtvercová matice. Jejím **charakteristickým polynomem** nazýváme polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$, $f \in \operatorname{End} V$. **Charakteristickým polynomem endomorfizmu** f rozumíme charakteristický polynom jeho matice vzhledem k nějaké bázi $M \subset V$, značíme $p_f(\lambda)$. Množinu všech kořenů p_f nazýváme **spektrum endomorfismu** f, značíme $\sigma(f)$, podobně definujeme **spektrum matice** $\sigma(A)$.

Charakteristický polynom endomorfizmu nezávisí na volbě báze M. Pokud $B = QAQ^{-1}$ je matice f vzhledem k jiné bázi, pak

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda E) &= \det(QAQ^{-1} - \lambda QQ^{-1}) \\ &= \det Q \det(A - \lambda E) \det Q^{-1} = \det(A - \lambda E)\end{aligned}$$

Protože

$$\det(A - \lambda E) = \det((A - \lambda E)^T) = \det(A^T - \lambda E),$$

mají matice A a A^T stejný charakteristický polynom a tedy i vlastní čísla. Vlastní podprostory $N(A - \lambda E)$ a $N(A^T - \lambda E)$ jsou ale obecně různé.

Charakteristický polynom matice lze rozepsat

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda) + \dots \\ &= (-\lambda)^n + \sum_{i=1} a_{ii}(-\lambda)^{n-1} + \dots,\end{aligned}$$

kde členy označené trojtečkou nemohou obsahovat λ ve vyšší mocnině než $n - 2$. Příspěvky k $(n-1)$. mocnině tedy pochází jen z prvního členu a dávají dohromady $\operatorname{Tr} A(-\lambda)^{n-1}$. Absolutní člen polynomu je roven jeho hodnotě v nule $p_A(0) = \det A$. Celkově tedy

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \operatorname{Tr} A(-\lambda)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} A_i(-\lambda)^i + \det A$$

Popsat čísla A_i je trochu komplikovanější, ale ne o moc: jsou to součty všech hlavních minorů matice A stupně $n - i$. Pomocí Viètových vztahů mezi koeficienty polynomu a jeho kořeny se dají koeficienty p_A vyjádřit v termínech vlastních čísel. Pokud $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, kde každé vlastní číslo bereme tolikrát, kolik je jeho násobnost jakožto kořenu p_A, pak dostáváme například $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ a $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Tyto vztahy se dají použít jako alternativní definice determinantu a stopy endomorfizmu a dokonce jako základy pro definici determinantu a stopy vhodné třídy endomorfizmů na prostorech nekonečné dimenze. My se zde, pokud nebude řečeno jinak, omezíme na konečnědimenzionální případ.

VĚTA 26 (Cayleyova-Hamiltonova). *Pokud dosadíme matici A do jejího charakteristického polynomu, dostaneme nulovou matici, čili $p_A(A) = 0$.*

DŮKAZ. Z věty o rozvoji determinantu podle řádku máme

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} - \lambda\delta_{ik})(-1)^{j+k}(A - \lambda E)_{(j),(k)} = p_A(\lambda)\delta_{ij}$$

Každý první minor $(A - \lambda E)_{(j),(k)}$ je polynom stupně nejvýše $n - 1$, označme jeho koeficienty takto:

$$(-1)^{j+k}(A - \lambda E)_{(j),(k)} \quad =: \quad (B_0)_{kj} + (B_1)_{kj}\lambda + \dots + (B_{n-1})_{kj}\lambda^{n-1}$$

Získali jsme n matic B_i splňujících vztahy

$$\begin{aligned} AB_0 &= p_0 E \\ AB_1 - B_0 &= p_1 E \\ &\vdots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= p_{n-1} E \\ -B_{n-1} &= p_n E, \end{aligned}$$

kde p_i jsou koeficienty $p_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} p_i \lambda^i$. Nyní stačí vynásobit i-tou rovnici maticí A^{i-1} a všechny sečíst, dostaneme $0 = p_A(A)$. □

Poznámka 3. Proč nefunguje důkaz $p_A(A) = \det(A - AE) = 0$? Dosadit matici B do polynomu $p_A(\lambda)$ lze, stejně jako spočítat $\det(A - BE)$. Ale $p_A(B)$ je matice, kdežto $\det(A - BE)$ číslo, čili to nemůže být totéž.

Cayleyova-Hamiltonova věta může být užitečná tehdy, když chceme spočítat mocninu matice, aniž bychom znali vlastní čísla a vektory. Dává nám rekurentní formuli pro výpočet libovolné mocniny $n \times n$ matice pomocí předchozích n mocnin. Použití této formule bude jistě efektivnější než počítání mocniny matice z definice maticového násobení. Zároveň pro celočíselnou matici vystačíme s celočíselnými operacemi, zatímco při výpočtu vlastních čísel bychom museli obecně používat numerické metody pro hledání kořenů polynomu a výsledek by tedy byl pouze přibližný.

Příklad 24.

(1) Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají obě charakteristický polynom λ^2, jediným vlastním číslem je nula. Mají ale různou hodnost, tedy nemohou být podobné. Podobné matice tedy mají stejné charakteristické polynomy, ale opačná implikace neplatí. Vlastním vektorem první matice je kterýkoli vektor v $\mathbb{C}^2$, zatímco vlastní vektor druhé matice je $e_1 \equiv (1, 0)$ (a jeho násobky).

(2) Matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $-\lambda^3$ a podle Cayleovy-Hamiltonovy věty platí $A^3 = 0$, což je hned vidět i z matice samotné. Platí dokonce $A^2 = 0$, tedy matice nuluje i polynom $m_A(\lambda) = \lambda^2$. Polynom $m_A(\lambda)$ má nejmenší možný stupeň mezi všemi polynomy, které dávají nulu po dosazení A, takový polynom se nazývá **minimální polynom matice** A. Vidíme, že charakteristický polynom obecně není minimálním polynomem matice. Jaké jsou vlastní vektory A?

(3) Charakteristický polynom matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$(-\lambda)^2 + \operatorname{Tr} A(-\lambda) + \det A = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ tedy hledáme vektory $x \in \mathbb{C}^2$ splňující $(A-2E)x = 0$, čili řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Vlastní podprostor příslušný 2 je tedy $\langle v_1 \rangle$, kde $v_1 = (1, -3)$. Podobně vlastní podprostor příslušný $\lambda_2 = 4$ je lineární obal $v_2 = (1, -1)$. Vidíme, že množina $M = \{v_1, v_2\}$ je báze $\mathbb{C}^2$. Pokud budeme chápat A jako matici homomorfismu f_A vzhledem ke kanonickým bázím, pak

$$\begin{aligned}(f_A)_{MM} &= (1)_{MK}(f_A)_{KK}(1)_{KM} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

V bázi z vlastních vektorů má tedy matice diagonální tvar, což odpovídá tomu, že tyto vektory homomorfismus f_A jenom vynásobí příslušným vlastním číslem. Ověřte sami, že stejným způsobem je možné získat i rozklad UDU^{-1} z úvodního příkladu.

(4) Rotace o úhel $\alpha \neq k\pi$ ve dvojrozměrném prostoru na první pohled vlastní vektory mít nemůže, protože žádný směr se při otočení nezobrazí na svůj násobek. Uvažujme pro jednoduchost rotaci o $\frac{\pi}{2}$, která je dána maticí

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom $\lambda^2 + 1$ má kořeny $\pm i$, příslušné vlastní vektory jsou $(1, \pm i)$ a diagonalizace vypadá

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla a vektory existují díky tomu, že jsme se rozhodli celou úlohu řešit v komplexním prostoru.

1.1. Cvičení.

(1) Sestavte charakteristický polynom matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Najděte vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(4) Dokažte, že matice je regulární, právě když všechna její vlastní čísla jsou nenulová.

(5) Najděte nějakou matici 2×2, která není horní ani dolní trojúhelníková a má vlastní čísla 5 a 6.

(6) Určete koeficient u λ^2 v charakteristickém polynomu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7) Ověřte Cayley-Hamiltonovu větu pro matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

přímým dosazením do charakteristického polynomu.

(8) Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $f : P^2(x, \mathbb{C}) \to P^2(x, \mathbb{C})$ daného vztahem

$$f(a + bx + cx^2) = (5a + 6b + 2c) - (b + 8c)x + (a - 2c)x^2$$

(9) **(2)** Dokažte, že pokud A je matice taková, že každý její řádek má součet c, pak je c kořenem jejího charakteristického polynomu. Dokažte totéž pro sloupce.

(10) Spočítejte charakteristický polynom matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

(11) Vypočtěte pomocí Hamilton-Cayleovy věty (bez určení vlastních čísel)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{25}$$

(12) Spočtěte vlastní čísla a vektory zobrazení $F : M_{22}(\mathbb{C}) \to M_{22}(\mathbb{C})$ definovaného předpisem

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{pmatrix}$$

(13) Označme koeficienty charakteristického polynomu vyjádřením $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + D_1\lambda^{n-1} + \ldots + D_n$. Dokažte, že $Tr(A^m) = \sum \lambda_i^m$, kde λ_i jsou vlastní čísla A, a pomocí tohoto tvrzení tvrzení a Vietových vztahu pro D_i dokažte rekurentní formuli

$$mD_m + D_{m-1}Tr(A) + D_{m-2}Tr(A^2) + \ldots + Tr(A^m) = 0$$

pro $1 \leq m \leq n$. Využijte toho k napsání charakteristického polynomu ve stupni 3 a 4 pouze pomocí stop mocnin A.

(14) Dokažte, že pro libovolnou matici A a libovolný polynom $p(x)$ platí $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ (Věta o obrazu spektra). Dokažte odtud, že $p(A)$ je regulární, právě když žádné vlastní číslo A není kořenem $p(x)$.

2. Diagonalizovatelnost matice

Jak jsme viděli v prvním z předchozí série příkladů, dvě matice se stejným charakteristickým polynomem a tedy i stejnými vlastními čísly včetně násobností nemusí být nutně podobné. Jinými slovy, ne u každé matice lze sestavit z vlastních vektorů bázi a pomocí ní matici diagonalizovat. Rozlišujeme proto dva druhy násobnosti vlastního čísla:

DEFINICE 35. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$, $f \in \mathrm{End}(V)$. **Algebraickou násobností vlastního čísla** λ endomorfizmu f rozumíme jeho násobnost jakožto kořenu charakteristického polynomu p_f. **Geometrickou násobností** λ označujeme číslo $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V)$.

PŘÍKLAD 25. Matice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má jediné vlastní číslo 0. Jeho algebraická násobnost je tedy 2. Matice $A - 0E \equiv A$ má ale nulitu 1, geometrická násobnost vlastního čísla 0 je tedy 1. Všechny vlastní vektory jsou násobky $(1, 0)$, nelze z nich tedy sestavit bázi $\mathbb{C}^2$ a tedy ani diagonalizovat A.

VĚTA 27 (Kritérium diagonalizovatelnosti endomorfizmu). *Nechť $f \in \mathrm{End}(V)$. Pokud se pro každé vlastní číslo rovnají jeho algebraická a geometrická násobnost, pak existuje báze V sestávající z vlastních vektorů f. V této bázi má matice f diagonální tvar s vlastními čísly na diagonále.*

DŮKAZ. Pro každý prvek $\sigma(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, kde λ_i jsou vzájemně různá vlastní čísla s algebraickými násobnostmi $m_1, \ldots, m_q$, označme $V_i := \mathrm{Ker}(f - \lambda_i 1_V)$. Uvažujme libovolnou q-tici nenulových vektorů $v_1, \ldots, v_q$, přičemž $v_i \in V_i$. Ukážeme, že jsou lineárně nezávislé. Pokud by nebyly, mohli bychom z nich vybrat lineárně nezávislou vlastní podmnožinu $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$, která má stejný lineární obal jako $\{v_1, \ldots, v_q\}$. Pro $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ lze v_j vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních $v_j = \sum_{p=1}^{k} \nu_p v_{i_p}$. Pak ale

$$\lambda_j \sum_{p=1}^{k} \nu_p v_{i_p} = \lambda_j v_j = f(v_j) = \sum_{p=1}^{k} \nu_p f(v_{i_p}) = \sum_{p=1}^{k} \nu_p \lambda_{i_p} v_{i_p}$$

Tedy $\sum_{p=1}^{k} \nu_p (\lambda_{i_p} - \lambda_j) v_{i_p} = 0$. Protože jsme vlastní čísla brali vzájemně různá a ν_p také nemohou být všechny nula, dostáváme spor s lineární nezávislostí $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$.

Lineární nezávislost libovolné q-tice $v_1, \ldots, v_q$, $v_i \in V_i$ znamená, že žádný podprostor V_i není ve spojení $\bigvee_{i \neq j} V_j$ všech ostatních. Proto prostory V_i tvoří direktní součet, jeho dimenze $n' := \dim \bigoplus_{i=1}^{q} V_i$ je rovna součtu dimenzí jednotlivých V_i, tedy součtu geometrických násobností všech vlastních čísel. Pokud se rovnají algebraické a geometrické násobnosti všech vlastních čísel, pak n' je rovno stupni charakteristického polynomu, čili $\dim V$. Pak ale $V = \bigoplus_{i=1}^{q} V_i$ a bázi V lze zkonstruovat jako $M := \bigcup_{i=1}^{q} M_i$, kde M_i je libovolná báze V_i.

Tvar matice f v bázi M plyne z definice matice homomorfismu. □

POZNÁMKY.

(1) Speciálním případem je tzv. **prosté spektrum**, kdy mají všechna vlastní čísla algebraickou násobnost 1. Z důkazu věty plyne, že když ke každému vlastnímu číslu zvolíme libovolný vlastní vektor, bude tato množina lineárně nezávislá. Protože je vlastních čísel n, musí to být báze. Z toho je vidět, že v takovém případě jsou všechny geometrické násobnosti také jedna.

(2) Opačná implikace, tedy že pokud se alespoň u jednoho vlastního čísla algebraická a geometrická násobnost nerovnají, pak není matice diagonalizovatelná, platí také. Důkaz je ale podstatně náročnější, plyne z existence a jednoznačnosti tzv. Jordanova tvaru matice.

2.1. Cvičení.

(1) Najděte matici přechodu od báze vlastních vektorů do kanonické báze pro matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) Ověřte, že báze vlastních vektorů následující matice je ortogonální (vzhledem ke standarnímu skalárnímu součinu):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Diagonalizujte matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(4) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte matici U takovou, že $UAU^{-1} = B$.

(5) Diagonalizujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) Diagonalizujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(7) Diagonalizujte matici

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

(8) Dokažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

není diagonalizovatelná pro žádné nenulové c.

(9) Rekurentní posloupnost $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $a_1 = a_2 = 1$ lze formulovat jako zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dané vztahem

$$f : \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+1} + a_n \end{pmatrix}$$

Diagonalizujte matici tohoto zobrazení a vypočtěte její n-tou mocninu. Odvoďte odtud vztah pro n-tý člen posloupnosti.

(10) V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2 najděte bázi, v níž je matice zobrazení T, které reálnému polynomu $f(x)$ přiřazuje polynom $(Tf)(x) = f(0) + f(1)(x + x^2)$, diagonální.

(11) Určete limitu

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{4^m} \begin{pmatrix} 7 & -9 & -15 \\ 3 & 7 & 3 \\ 3 & -9 & -11 \end{pmatrix}^m$$

(12) Spočítejte pravděpodobnost vítězství ve hře hrané na hracím plánu se čtyřmi políčky 1,2,3,4. Na začátku je figurka na poli 2, dosáhnout pole 4 je prohra, dosáhnout pole 1 je vítězství. V každém tahu si hodíme kostkou a na 1,2 posuneme figurku o jedno pole doleva, na 3,4,5,6 o jedno pole doprava. Použijte při tom vlastní čísla a limitní přechod, případný alternativní výpočet jen jako kontrolu.

(13) Označme $O(n) := \{A \in M(n \times n) | A^T A = E\}$ a $SO(n) := O(n) \cap \{A | \det A = 1\}$. Ukažte, že pro libovolná matice $A \in SO(3)$ zachovává nějaký vektor $v \in \mathbb{R}^3$ a v rovině na něj kolmé působí jako rotace o úhel $\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\, A - 1)$.

(14) Na kružnici se pohybují bez tření dvě tělesa, první má hmotnost m a velikost rychlosti u_0, druhé má hmotnost M a velikost rychlosti v_0. Rychlosti nejsou stejné a zároveň stejně orientované, tedy časem dojde ke srážce. Považujme všechny srážky za dokonale pružné a označme u_i, v_i velikosti rychlosti obou těles po i-té srážce. Sestavte soustavu diferenčních rovnic, jíž se tato posloupnost dvojic velikostí rychlostí řídí a vyřešte ji.

(15) Dokažte, že reálná matice lichého řádu má alespoň jedno reálné vlastní číslo.

3. Současná diagonalizovatelnost

Ve fyzice, zejména v kvantové mechanice, se často řeší úloha, kterak diagonalizovat více matic zároveň *totožnou* transformací:

DEFINICE 36. Řekneme, že množina matic $\mathcal{A} \subset M_{nn}(\mathbb{C})$ je **současně diagonalizovatelná**, pokud existuje regulární matice $Q \in M_{nn}(\mathbb{C})$ taková, že $\forall A \in \mathcal{A}$ je $Q^{-1}AQ$ diagonální matice.

Pokud $A, B \in \mathcal{A}$ a $D_A := Q^{-1}AQ$ a $D_B := Q^{-1}BQ$ jsou diagonální, pak

$$AB = QD_AQ^{-1}QD_BQ^{-1} = QD_AD_BQ^{-1} = \\ = QD_BD_AQ^{-1} = BA$$

tedy AB nutně komutují. Ukážeme, že je to i postačující podmínka:

VĚTA 28 (O diagonalizaci množiny matic). *Nechť $\mathcal{A} \subset M_{nn}(\mathbb{F})$ je množina diagonalizovatelných matic. Pak $\mathcal{A}$ je současně diagonalizovatelná, právě když každé dvě matice v ní komutují.*

DŮKAZ. Zbývající implikaci dokážeme indukcí podle n. Matice 1×1 komutují všechny a všechny jsou automaticky diagonální, takže není co dokazovat. Uvažujme $\mathcal{A}$ množinu komutujících diagonalizovatelných matic typu $n \times n$, $n > 1$, kterě nejsou všechny skalární (tj. nejsou násobkem jednotkové matice). Vyberme $A \in \mathcal{A}$, která není skalární, takže existuje regulární matice R taková, že $D := R^{-1}AR$ je diagonální. Pro každou matici $B \in \mathcal{A}$ platí, že $C := R^{-1}BR$ komutuje s D. Matici D můžeme psát v blokově diagonálním tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{n_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m E_{n_m} \end{pmatrix},$$

kde λ_i jsou navzájem různá. Je snadno vidět, že C musí být také blokově diagonální

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_m \end{pmatrix},$$

kde $C_i \in M_{n_i n_i}(\mathbb{F})$. Podle indukčního předpokladu existují regulární matice $S_i \in M_{n_i n_i}(\mathbb{F})$ takové, že pro všechny takto získané matice C a

$$S := \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & S_m \end{pmatrix}$$

je $S^{-1}CS$ diagonální matice. Pak pro všechna $A \in \mathcal{A}$ a $Q := RS$ je $Q^{-1}AQ$ diagonální matice. □

Větu můžeme formulovat i tak, že pokud množina matic komutuje, pak lze najít společnou bázi z vlastních vektorů. Je-li spektrum prosté, stačí spočítat vlastní vektory jedné matice a ty budou vlastními vektory i pro ostatní.

Část 2

Druhý semestr

KAPITOLA 9

Ortogonalita

1. Multilineární zobrazení

DEFINICE 37. Nechť V, W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro zobrazení

$$T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \to W$$

platí, že $\forall u, v, v_1, \ldots, v_k \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$

$$T(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda u + \mu v, v_{i+1}, \ldots, v_k) = \\ = \lambda T(v_1, \ldots, u, \ldots, v_k) + \mu T(v_1, \ldots, v, \ldots, v_k),$$

nazýváme ho **multilineárním** nebo specifičtěji k**-lineárním zobrazením**. Pokud $W = \mathbb{F}$, mluvíme o **multilineární formě**.

POZNÁMKA 4. Někdy se připouští, aby argumenty multilineárního zobrazení patřily do různých vektorových prostorů $V_1, \ldots, V_k$, principiální rozdíl v tom není. Počet argumentů (nejen lineárního) zobrazení se nazývá **arita**.

PŘÍKLAD 26.

(1) 1-lineární zobrazení je obyčejné lineární zobrazení, tedy prvek $\mathrm{Hom}(V, W)$.
(2) 1-lineární formě se říká prostě **lineární forma**. Pokud $V = \mathbb{F}^n$, pak je každá lineární forma zadaná maticí $1 \times n$, tedy řádkovým vektorem $\xi^T \in \mathbb{F}^n$:

$$f(x) = \xi^T x = \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matice ξ^T je vlastně maticí $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$ vzhledem ke kanonickým bázím. Proto takto vypadá i souřadnicové vyjádření libovolné lineární formy na vektorovém prostoru konečné dimenze.
(3) Příkladem 2-lineární neboli **bilineární formy** je

$$g : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$$
$$(x, y) \mapsto x^T A y \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Za chvíli uvidíme, že v konečné dimenzi a v souřadnicích vypadají všechny bilineární formy takto.

DEFINICE 38. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, $M = (e_1, \ldots, e_n)$ jeho báze, T je k-lineární forma na něm. **Souřadnicemi** $(T)_M$ formy T vzhledem k bázi M rozumíme sadu n^k čísel

$$(T_{i_1,\ldots,i_k} := T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) | i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\})$$

PŘÍKLAD 27. Vektor ξ^T, resp. matice A z předchozího příkladu jsou souřadnicemi lineární formy f, resp. bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi. Souřadnice bilineární formy označujeme jako **matici bilineární formy** vzhledem k bázi M.

DEFINICE 39. Bilineární forma g na V se nazývá **symetrickou**, pakliže $\forall u, v \in V$ platí $g(u,v) = g(v,u)$, a **antisymetrickou**, pokud $g(u,v) = -g(v,u)$.

Snadno se ověří, že bilineární forma je (anti-)symetrická právě když je její matice vzhledem k libovolné bázi (anti-)symetrická.

TVRZENÍ 11. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, $M = (e_1, \dots, e_n)$, $M' = (e'_1, \dots, e'_n)$ jeho dvě báze. $R = (1_V)_{MM'}$ matice přechodu od M k M'.*

(1) *Pokud f je lineární forma na V se souřadnicemi $(f)_M = \xi^T$, $(f)_{M'} = \xi'^T$, pak platí*
$$\xi'^T = \xi^T R$$
(2) *Pokud g je bilineární forma na V se souřadnicemi $(g)_M = G$, $(g)'_M = G'$, pak platí*
$$G' = R^T G R$$

DŮKAZ. Stačí dosadit definující vlastnost matice přechodu $e'_j = \sum_{i=1}^n r_{ij} e_i$ do definice souřadnic:
$$\xi'_j = f(e'_j) = f\left(\sum_{i=1}^n r_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_{ij} f(e_i) = \sum_{i=1}^n r_{ij} \xi_i$$
$$g'_{pq} = g(e'_p, e'_q) = \sum_{i,j=1}^n r_{ip} r_{jq} g(e_i, e_j) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n r_{ip} r_{jq} g_{ij} = \sum_{i,j=1}^n r^T_{pi} g_{ij} r_{jq}$$
□

DEFINICE 40. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, M jeho báze, g symetrická bilineární forma na něm. Pokud je matice bilineární formy g vzhledem k bázi M diagonální, nazýváme bázi M **polární bází** symetrické bilineární formy g.

LEMMA 22. *Nechť g je nenulová symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru V. Pak existuje $v \in V$, pro který $g(v,v) \neq 0$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že pro všechny vektory $v \in V$ platí $g(v,v) = 0$, ale že existují vektory $u, w \in V$ takové, že $g(u,w) \neq 0$. Pak ale
$$0 = g(u+w, u+w) = g(u,u) + g(u,w) + g(w,u) + g(w,w) =$$
$$= 0 + 2g(u,w) + 0,$$
což je spor. □

VĚTA 29. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze a g je symetrická bilineární forma na něm. Pak má polární bázi.*

DŮKAZ. Budeme postupovat indukcí podle dimenze V. Pro $\dim V = 1$ není co dokazovat, předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny prostory dimenze menší než n a že V má dimenzi n. Pro $g = 0$ není co dokazovat. Pro $g \neq 0$ vyberme vektor u_1 tak, aby $g(u_1, u_1) \neq 0$ a doplňme jej na bázi $M = \{u_i\}_1^n$. Označme matici g vzhledem k M písmenem G. Chceme najít R takové, aby $G' = R^T G R$ byla diagonální.

Volme nejprve matici přechodu ve speciálním tvaru a pišme blokově

$$G_1 := R_1^T G R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & h^T \\ h & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^T \\ 0 & E \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} g_{11} & r^T g_{11} + h^T \\ r g_{11} + h & \tilde{G}' \end{pmatrix},$$

kde $\tilde{G}' := \tilde{G} + r h^T + h r^T + g_{11} r r^T$ je symetrická matice. Protože $g_{11} = g(u_1, u_1) \neq 0$, můžeme volbou $r = -\frac{1}{g_{11}} h$ zajistit, že G' bude blokově diagonální. Podle indukčního předpokladu existuje matice $\tilde{R}$, že $\tilde{R}^T \tilde{G}' \tilde{R}$ je diagonální. Pak ale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{R}^T \end{pmatrix} R_1^T G R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix}$$

je hledaná diagonální G'. □

Příklad 28. Diagonalizujme symetrickou bilineární formu

$$g(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Vzhledem ke kanonické bázi má forma matici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Chceme najít matici S takovou, že SGS^T je diagonální ($S = R^T$ z důkazu). Element g_{11} je nenulový, můžeme tedy jako v důkazu volit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

To je vlastně matice řádkové úpravy, která do druhého řádku matice G přičte (-2)-násobek prvního řádku. Násobení maticí S^T zprava je pak odpovídající sloupcová úprava, která do druhého sloupce matice SG přičte (-2)-násobek prvního sloupce. Mluvíme proto o metodě **diagonalizace symetrickými úpravami**. Výsledná matice je

$$SGS^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že sloupcová část úpravy už jenom vynulovala prvek na pozici 12 a prvek na pozici 22 zůstal zachován. Pokud by G byla matice typu $n \times n$, pak by S zahrnovala všechny řádkové úpravy nulující první sloupec pod pivotem a následná aplikace S^T zprava by na $n-1 \times n-1$ blok $\tilde{G}$ neměla vliv, pouze by dopsala nuly do prvního řádku. Podobně jako v Gaussově eliminaci by se pak algoritmus aplikoval na blok $\tilde{G}$.

Komplikace může nastat, když $g_{11} = 0$, jako u symetrické bilineární formy, jejíž matice je

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hledáme matici S takovou, aby SGS^T byla diagonální ($S = R^T$ v důkazu). Pak je nejsnazší provést symetrickou úpravu, která G převede na matici, v níž už je pivot nenulový. Zde například přičtení druhého řádku do prvního a následné přičtení

druhého sloupce do prvního vede na matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kterou jsme pak už normálně diagonalizovali. Poslední symetrická úprava je násobení druhého řádku a sloupce dvojkou. Všimněte si, že taková úprava zachovává znaménko prvku na diagonále. Je to indikace důležitého výsledku, který dokážeme později: pro všechny polární báze symetrické bilineární formy g je počet vektorů z báze, pro něž je $g(v,v)$ kladné vždy stejný, totéž platí pro počet záporných nebo nulových hodnot.

Obvykle chceme znát i bázi, v níž je matice formy diagonální, tedy matici S, jejíž *řádky* jsou souřadnicemi nové báze vzhledem ke staré. Používá se podobný trik jako při výpočtu inverzní matice, tedy rozšíření matice formy o pravou stranu, která je za začátku jednotkovou maticí a do níž se zaznamenávají pouze řádkové úpravy (jinak bychom skončili s maticí SS^T). Pro první formu z tohoto příkladu vypadá takový výpočet

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Hledaná báze je tedy $\{(1,0),(-2,1)\}$.

Nezaměňujte proces diagonalizace symetrickými úpravami s diagonalizací pomocí vlastních čísel: tam jde o hledání diagonální matice mezi maticemi tvaru $R^{-1}AR$, nikoli R^TAR. První vzorec je transformací matice lineárního zobrazení, druhý matice bilineární formy.

1.1. Cvičení.

(1) Pro A čtvercovou matici označme její řádky $a_1,\dots,a_n$. Dokažte, že zobrazení

$$\det : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \ldots \times \mathbb{F}^n}_{n} \to \mathbb{F}$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \det(A)$$

je ***n*-lineární forma**.

(2) Dokažte, že zobrazení

$$V = \mathbb{F}^n, x \mapsto x_1$$
$$V = M_{nn}(\mathbb{F}), A \mapsto \operatorname{Tr} A$$
$$V = P^n(x,\mathbb{F}), p \mapsto p(2)$$
$$V = C^\infty(\langle 0,1\rangle,\mathbb{R}), f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$

jsou lineární formy.

(3) Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou lineární formy:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(a,b) = a + bi$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a,b) = 1 + 2a + 3b$
   (d) $F_x : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, kde $C^\infty(M,\mathbb{R})$ je vektorový prostor všech reálných hladkých funkcí na množině M, $F_x(f) = f(x)$, kde $x \in M$.

(4) Dokažte, že každá netriviální lineární forma na vektorovém prostoru dimenze n má jádro o dimenzi $n-1$.
(5) Nechť $W = \langle (1,1,2,1), (3,1,2,1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Popište všechny lineární formy, které vymizí na celém W.
(6) Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, $(f)_M = (1,2)$ souřadnice lineární formy vzhledem k M. Najděte její souřadnice vzhledem k $M' := \{(3,1),(3,2)\}$.
(7) Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

matice bilineární formy vzhledem k M. Najděte její matici vzhledem k bázi $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
(8) Nechť g je symetrická bilineární forma na $\mathbb{R}^3$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte nějakou její polární bázi a matici g vzhledem k této bázi.
(9) Nechť g je symetrická bilineární forma na $\mathbb{R}^3$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte nějakou její polární bázi a matici g vzhledem k této bázi.
(10) Nechť g je bilineární forma na $\mathbb{R}^3$ zadaná předpisem

$$g(x,y) = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1$$

Najděte nějakou její polární bázi a matici g vzhledem k této bázi.
(11) Nechť g je bilineární forma na $P^2(\mathbb{R})$ definovaná vztahem $g(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Ověřte, že je symetrická a najděte nějakou její polární bázi a matici g vzhledem k této bázi.

2. Skalární součin

Definice 41. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, přičemž $\mathbb{F}$ je $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Zobrazení $g : V \times V \to \mathbb{F}$, které splňuje $\forall u,v,w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$

(1) $g(u,v) = \overline{g(v,u)}$
(2) $g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w)$
(3) $g(\lambda u, v) = \lambda g(u,v)$
(4) $g(u,u) \geq 0$
(5) $g(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

nazýváme **skalární součin** na V. Dvojice (V,g) se označuje jako **prostor se skalárním součinem** nebo **unitární prostor**.

Poznámky.

(1) Z prvního a druhého axiomu plyne $g(u,v+w) = g(u,v) + g(u,w)$, tedy aditivita i v druhém argumentu.
(2) Z prvního a třetího plyne $g(u,\lambda v) = \bar{\lambda} g(u,v)$. V případě $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tedy první tři axiomy říkají, že skalární součin je symetrická bilineární forma. Matice skalárního součinu vzhledem k dané bázi je pak přirozeně matice této bilineární formy.

(3) V případě $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ je g v druhém argumentu **antilineární** a označuje se jako **seskvilineární forma**. Zavedeme-li matici seskvilineární formy stejným způsobem jako pro formu bilineární, zjistíme, že první axiom znamená, že pro skalární součin je tato matice hermitovská. Mluvíme proto o **hermitovské seskvilineární formě**.
(4) Poslední dva axiomy dohromady znamenají, že g je **pozitivně definitní**. Podrobněji se tímto pojmem budeme zabývat v kapitole o kvadratických formách. Pokud je matice symetrické bilineární formy diagonální, je tato forma pozitivně definitní právě když jsou všechny diagonální elementy kladné. Pomocí symetrických úprav tedy umíme poznat, jestli je jakákoli bilineární forma na reálném prostoru konečné dimenze skalární součin. Upravit předpis pro transformaci souřadnic a zavést analogii symetrických úprav pro hermitovské seskvilineární formy není těžké, necháváme to čtenáři za cvičení.
(5) Na $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$ máme k dispozici skalární součin

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \equiv x^T E \bar{y},$$

tzv. **standardní skalární součin**.

DEFINICE 42. Nechť (V, g) je unitární prostor. Pokud dva vektory $u, v \in V$ splňují $g(u, v) = 0$, říkáme, že jsou **kolmé**, neboli **ortogonální**, značíme $u \perp v$. Množina všech vektorů kolmých na vektor u se nazývá **ortogonální doplněk** vektoru u a značí $u^\perp$. Obdobně definujeme ortogonální doplněk množiny $M \subset V$ jako

$$M^\perp = \{u \in V | \forall v \in M : u \perp v\}$$

TVRZENÍ 12. *Ortogonální doplněk libovolné množiny je podprostor ve V.*

DŮKAZ. Za cvičení. □

DEFINICE 43. Nechť V je vektorový prostor. Zobrazení

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : & V \to \mathbb{R}_0^+ \\ & v \to \|v\|, \end{aligned}$$

které splňuje $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$

(1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

se nazývá **norma** na vektorovém prostoru V.

Norma je funkce, která má měřit délku vektoru. Proto je přirozené požadovat, že je nezáporná, přiřazuje nulu jen nulovému vektoru a při vynásobení vektoru číslem λ se násobí jeho absolutní hodnotou. Poslední axiom se označuje jako **trojúhelníková nerovnost pro normu**.

PŘÍKLAD 29. Nejčastěji užívané normy na $\mathbb{F}^n$ jsou

$$\|v\|_\infty := \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |v_i|$$
$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$
$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2},$$

nazývané maximová, manhattanská a eukleidovská norma.

DEFINICE 44. Nechť M je množina. Funkci $\rho : M\times M \to \mathbb{R}$ nazýváme metrikou na M, pakliže splňuje pro všechny body $x, y, z \in M$ následující axiomy:

(1) $\rho(x, y) \geq 0$ a $\rho(x, y) = 0$ právě když $x = y$
(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
(3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Dvojici (M, ρ) pak nazýváme **metrický prostor**.

První axiom říká, že vzdálenost je vždy nezáporná a žádné dva různé body nemohou mít nulovou vzdálenost. Druhý axiom vyjadřuje symetrii pojmu vzdálenosti a třetímu se říká **trojúhelníková nerovnost pro metriku**. Zdůrazňujeme, že metrický prostor nemusí být prostorem vektorovým, nepředpokládáme, že jsou na něm definované nějaké operace nebo, pokud jsou, že se k nim metrika chová „hezky“.

VĚTA 30. *Nechť V je vektorový prostor, $\|\cdot\|$ norma na něm, $u, v \in V$. Pak funkce*

$$\rho(u, v) = \|u - v\|$$

je metrika na V.

DŮKAZ. Nezápornost je zřejmá. První axiom plyne z prvního axiomu pro normu. Symetrie metriky je důsledek druhého axiomu normy a trojúhelníková nerovnost pro metriku vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti pro normu. □

Norma tedy definuje na vektorovém prostoru strukturu prostoru metrického. To se hodí kdykoli chceme na vektorovém prostoru použít prostředky matematické analýzy, tj. především definovat konvergenci posloupností, řad a funkcí mezi vektorovými prostory.

2.1. Cvičení.

(1) Rozhodněte, které z následujících matic jsou matice skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
(2) Nechť $A \in M_n(\mathbb{R})$ je regulární matice. Dokažte, že bilineární forma $g(x, y) = x^T A^T A y$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$.
(3) Nechť $A \in M_n(\mathbb{C})$ je regulární matice. Dokažte, že seskvilineární forma $g(x, y) = x^T A^+ A\overline{y}$ je skalární součin na $\mathbb{C}^n$, kde $A^+ = \overline{A}^T$ je matice hermitovsky sdružená k A.
(4) Ověřte, že seskvilineární forma na $M_{mn}(\mathbb{C})$ definovaná předpisem
$$(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T\overline{B})$$
je skalární součin.

(5) Ověřte, že bilineární forma na $P(x, \mathbb{C})$ definovaná předpisem

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)\overline{q(x)}dx$$

je skalární součin.

(6) Přizpůsobte metodu symetrických úprav pro hermitovské seskvilineární formy na komplexním prostoru. Najděte pomocí ní polární bázi a diagonální tvar hermitovské seskvilineární formy na $\mathbb{C}^2$, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

(7) Dokažte, že pokud $W \leq V$ je podprostor unitárního prostoru, pak $W^\perp$ je jeho doplněk ve smyslu definice 14.

(8) Najděte v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru $\langle (1, 1, 2, 3), (3, 1, 1, 0) \rangle$

(9) Najděte v $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru $\langle (2, 0, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 1) \rangle$.

(10) Na $\mathbb{R}^3$ uvažujme skalární součin, jehož matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ověřte, že je to skutečně skalární součin a najděte ortogonální doplněk k množině $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 0, -2)\}$ vzhledem k tomuto skalárnímu součinu.

(11) Na $\mathbb{C}^3$ uvažujme skalární součin, jehož matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 3 & -1 \\ 1-i & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ověřte, že je to skutečně skalární součin a najděte ortogonální doplněk k vektoru $(1 + i, i, 2 - i)$ vzhledem k tomuto skalárnímu součinu.

(12) V prostoru $P^2(x, \mathbb{R})$ se skalárním součinem

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

najděte $\{x^2 - 1, 2x + 1\}^\perp$.

(13) V prostoru $M_2(\mathbb{R})$ uvažujme bilineární formu

$$(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$$

Dokažte, že je to skalární součin a najděte ortogonální doplněk matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k tomuto skalárnímu součinu.

(14) Uvažujme $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Dokažte, že čtyři fundamentální prostory matice jsou svázány rovnostmi $N(A) = (R(A))^\perp$, $N(A^T) = (S(A))^\perp$. Odvoďte z toho, že $N(A) \oplus R(A) = \mathbb{R}^n$ a $N(A^T) \oplus S(A) = \mathbb{R}^m$.

(15) Nechť V je prostor se skalárním součinem, $\dim V = n$, $W \leq V$. Dokažte, že $\dim W = n - \dim W^\perp$.

(16) Nechť V je konečnědimenzionální prostor se skalárním součinem, W jeho podprostor. Dokažte, že $(W^\perp)^\perp = W$.

3. Indukovaná norma

DEFINICE 45. Nechť (V, g) je unitární prostor. Pak funkce definovaná

$$\|v\|_g := \sqrt{g(v,v)}$$

se nazývá **norma indukovaná skalárním součinem** g.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme na unitárním prostoru uvažovat vždy indukovanou normu. Skalární součin budeme značit pouze závorkou $(u, v) := g(u, v)$ a jeho indukovanou normu $\|\cdot\|$. Ještě jsme ale neověřili, že indukovaná norma je skutečně norma. Nezápornost normy a první dva axiomy plynou jednoduše z axiomů skalárního součinu. Třetí axiom normy, tzv. trojúhelníková nerovnost, je třeba dokázat. K tomu budeme potřebovat tři další důležitá tvrzení:

VĚTA 31 (Pythagorova věta). *Nechť $(V, (,))$ je unitární prostor, $u, v \in V$, $u \perp v$. Pak*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

DŮKAZ. Z definic indukované normy a kolmosti dostáváme

$$(u+v, u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) = (u,u) + (v,v)$$

□

LEMMA 23 (Ortogonální projekce). *Nechť $v \neq 0$ je vektor v unitárním prostoru (V, g). Definujme zobrazení*

$$\begin{aligned} P_v :& V \to V \\ & u \mapsto \frac{(u,v)}{\|v\|^2} v \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} P_{v^\perp} :& V \to V \\ & u \mapsto u - \frac{(u,v)}{\|v\|^2} v \end{aligned}$$

Pak platí

(1) P_v, $P_{v^\perp}$ *jsou lineární zobrazení.*
(2) $P_v + P_{v^\perp} = 1_V$
(3) $\operatorname{Ker} P_v = \operatorname{Im} P_{v^\perp} = v^\perp$,
(4) $\operatorname{Ker} P_{v^\perp} = \operatorname{Im} P_v = \langle v \rangle$
(5) $P_v \circ P_v = P_v$, $P_{v^\perp} \circ P_{v^\perp} = P_{v^\perp}$

DŮKAZ. První bod plyne z axiomů skalárního součinu, druhý je zřejmý. Zjevně $u \in v^\perp$ právě když $P_v(u) = 0$, takže $\operatorname{Ker} P_v = v^\perp$. Pro každé $u \in V$ je $P_v(u)$ násobek v a $P_v(\lambda v) = \lambda v$, takže $\operatorname{Im} P_v = \langle v \rangle$. Z linearity P_v máme $\forall u \in V$

$$(P_v \circ P_v)(u) = P_v\left(\frac{(u,v)}{\|v\|^2} v\right) = \frac{(u,v)}{\|v\|^2}\frac{(v,v)}{\|v\|^2} v = P_v(u)$$

Vlastnosti $P_{v^\perp}$ se dokážou analogicky. □

Druhý bod tvrzení nám dává užitečný ortogonální rozklad $u = P_v(u) + P_{v^\perp}(u)$ libovolného vektoru na složku podél vektoru v a na složku kolmou na v.

VĚTA 32 (Schwarzova nerovnost). *Nechť $(V, (,))$ je unitární prostor, $u, v \in V$. Pak*

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$$

DŮKAZ. Pro $v = 0$ tvrzení platí, předpokládejme tedy $v \neq 0$. Z Pythagorovy věty a vlastností ortogonální projekce máme

$$\|u\|^2 = \|P_v(u)\|^2 + \|P_{v^\perp}(u)\|^2 = \\ = \frac{|(u,v)|^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 + \|P_{v^\perp}(u)\|^2 \geq \frac{|(u,v)|^2}{\|v\|^2}$$

Násobením číslem $\|v\|^2$ dostáváme Schwarzovu nerovnost. □

VĚTA 33 (Trojúhelníková nerovnost). *Nechť $(V,(,))$ je unitární prostor, $u, v \in V$. Pak*

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

DŮKAZ.

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + (u,v) + (v,u) + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u,v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|(u,v)| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

Ve čtvrtém kroku jsme využili Schwarzovu nerovnost. □

VĚTA 34 (Rovnoběžníkové pravidlo). *Nechť $(V,(,))$ je unitární prostor, $\|\cdot\|$ norma indukovaná skalárním součinem. Pak*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

DŮKAZ. Dosazením. □

Pomocí rovnoběžníkového pravidla se dá ověřit, že norma není indukovaná skalárním součinem. Zkuste si to pro maximovou a manhattanskou normu. V případě, že norma indukovaná skalárním součinem je, lze tento skalární součin z normy zrekonstruovat:

VĚTA 35 (Polarizační identita). *Nechť $(V,(,))$ je unitární prostor, $\|\cdot\|$ norma indukovaná skalárním součinem. Pak*

$$(u,v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2,$$

kde i je komplexní jednotka. Pokud je V reálný vektorový prostor, pak platí i

$$\begin{aligned}(u,v) &= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right)\end{aligned}$$

DŮKAZ. Dosazením. Poslední dvě vyjádření reálné polarizační identity také plynou z prvního pomocí rovnoběžníkového pravidla. □

DEFINICE 46. Nechť $(V,(,))$ je reálný unitární prostor, $\|\cdot\|$ norma indukovaná skalárním součinem. **Úhlem** dvou nenulových vektorů u, v rozumíme $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$, pro který

$$\cos\theta = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$

Díky Schwarzově nerovnosti je pravá strana v absolutní hodnotě menší nebo rovna než 1 a úhel je tedy dobře definován. Dosazením definice úhlu do poslední verze polarizační identity dostáváme cosinovou větu

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

3.1. Cvičení.

(1) Najděte všechny různé úhly a délky vyskytující se mezi hranami, stěnovými úhlopříčkami a tělesovými úhlopříčkami krychle v $\mathbb{R}^3$. Řešte analogickou úlohu v $\mathbb{R}^4$.
(2) Určete délku úhlopříčky n-rozměrné jednotkové krychle, její úhel s libovolnou hranou a délku průmětu hrany do směru úhlopříčky. Dokažte, že ortogonální průměty vrcholů dělí úhlopříčku na n stejných částí.
(3) Dokažte, že pokud $x \in \mathbb{C}^n$ se standardním skalárním součinem, $\|x\| = 1$ pak matice ortogonální projekce $(P_x)_K$ vzhledem ke kanonické bázi je rovna $x\bar{x}^T$. Ověřte, že je to hermitovská matice.
(4) Dokažte, že maximová a manhattanská norma jsou normy, ale že nesplňují rovnoběžníkové pravidlo.
(5) Dokažte rovnoběžníkové pravidlo.
(6) Dokažte polarizační identitu.
(7) Nechť (V, g) je unitární prostor konečné dimenze, f lineární forma na V. Dokažte, že existuje vektor $u \in V$ takový, že $\forall v \in V$ platí $f(v) = (u, v)$.
(8) Nechť $v \in \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, K kanonická báze. Určete matici $(P_v)_{KK}$ a $(P_{v^\perp})_{KK}$, nejprve obecně a potom pro $v = (1, 1, 1)$. Určete hodnosti těchto matic.

4. Ortonormální báze

DEFINICE 47. Nechť $(V, (,))$ je unitární prostor. Množina $M \subset V$, která neobsahuje nulový vektor a splňuje

$$\forall u_i, u_j \in M, u_i \neq u_j \quad : \quad u_i \perp u_j$$

se nazývá **ortogonální množina**. Pokud navíc platí

$$\forall u_i \in M \quad : \quad \|u_i\| = 1,$$

mluvíme o **ortonormální množině**. Pokud M generuje V, pak mluvíme o **ortogonální**, resp. **ortonormální bázi**.

Ortonormalita se dá ekvivalentně vyjádřit předpisem

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq j \\ 1 \text{ pro } i = j \end{cases}$$

Symbol δ_{ij} označujeme Kroneckerovo delta. Při výpočtech se chová jako jednotková matice, např.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$$

odpovídá maticovému vztahu $AE = A$.

Každá ortogonální množina je lineárně nezávislá. Pokud totiž F je konečná podmnožina M a $\sum_{u_i \in F} r_i u_i = 0$, stačí spočítat skalární součin levé strany s vektorem $u_j \in F$ a dostáváme $r_j \|u_j\|^2 = 0$, čili $r_j = 0$.

LEMMA 24. *Nechť $(V,(,))$ je unitární prostor a $F=\{u_1,\dots,u_n\}$ konečná ortonormální množina v něm, $W=\langle F\rangle$. Pro každý vektor $u\in V$ definujme*

$$P_W(u):=\sum_{i=1}^{n}(u,u_i)u_i$$

Platí

(1) *$u\in W$ právě když $P_W(u)=u$*
(2) *$\forall u\in V:\|P_W(u)\|\leq\|u\|$, přičemž rovnost nastává právě když $u\in W$*
(3) *$\forall v\in W:\|u-P_W(u)\|\leq\|u-v\|$, přičemž rovnost nastává právě když $v=P_W(u)$.*

DŮKAZ. Pokud $P_W(u)=u$, pak je zjevně u lineární kombinací vektorů z F, tedy patří do W. Naopak pokud $u=\sum_{j=1}^{n}r_ju_j\in W$, pak

$$\begin{aligned}P_W(u)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_ju_j,u_i)u_i=\sum_{i,j=1}^{n}r_j(u_j,u_i)u_i\\&=\sum_{i,j=1}^{n}r_j\delta_{ji}u_i=\sum_{i=1}^{n}r_iu_i=u\end{aligned}$$

Pro důkaz druhého tvrzení spočtěme

$$\begin{aligned}(u-P_W(u),u_j)=(u,u_j)-\sum_{i=1}^{n}(u,u_i)(u_i,u_j)=\\=(u,u_j)-\sum_{i=1}^{n}(u,u_i)\delta_{ij}=0\end{aligned}$$

Tedy $u-P_W(u)$ je kolmé na všechny vektory z F, tedy i na celé W a tedy i na $P_W(u)$. Podle Pythagorovy věty 31 potom

$$\|u\|^2=\|P_W(u)\|^2+\|u-P_W(u)\|^2\geq\|P_W(u)\|^2,$$

přičemž rovnost nastává právě když $P_W(u)=u$, což je podle předchozího tvrzení právě když $u\in W$.

Podobně vektor $P_W(u)-v\in W$ je kolmý na $u-P_W(u)$, takže Pythagorova věta říká

$$\|u-v\|^2=\|u-P_W(u)\|^2+\|P_W(u)-v\|^2\geq\|u-P_W(u)\|^2,$$

s rovností právě v případě $v=P_W(u)$. □

Lemma říká, že $P_W(u)$ je právě ten vektor z W, který je vektoru u nejblíže, čili jeho **ortogonální projekce**. Přestože definice $P_W(u)$ odkazuje na konkrétní ortonormální bázi, díky jednoznačnosti dokázané v třetím bodu lemmatu víme, že na volbě této báze nezáleží.

Nejjednodušší situace nastává, pokud W je celé V:

VĚTA 36 (Parsevalova rovnost). *Nechť $(V,(,))$ je unitární prostor konečné dimenze, $M=\{u_1,\dots,u_n\}$ jeho ortonormální báze, $u\in V$. Pak*

$$u=\sum_{i=1}^{n}(u,u_i)u_i$$

Pokud $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, $v = \sum_{i=1}^n y_i u_i$, *pak*

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$
$$(u,v) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$$

DŮKAZ. Tvar koeficientů $x_i = (u, u_i)$ plyne z lemmatu 24 a z jednoznačnosti vyjádření vektoru vůči bázi. Pak

$$\|u\|^2 = \sum_{i,j=1}^n (u,u_i)\overline{(u,u_j)}(u_i,u_j) = \sum_{i=1}^n |(u,u_i)|^2$$

Poslední rovnost se dostane z předchozí pomocí polarizačních identit 35 pro normu $\|\cdot\|$ a standardní normu na $\mathbb{F}^n$. □

První část věty říká, že souřadnice vektoru vzhledem k ortonormální bázi lze vypočítat jako skalární součiny s vektory báze. Tyto souřadnice se vzhledem k souvislosti s nekonečnědimenzionálním případem označují jako **Fourierovy koeficienty** vektoru u. Z druhé části věty plyne, že matice skalárního součinu vzhledem k libovolné ortonormální bázi je jednotková matice.

VĚTA 37 (Gramova-Schmidtova ortogonalizace). *Nechť* $(V,(,))$ *je unitární prostor a* $M = \{u_1,\dots,u_n\}$ *jeho báze. Pak existuje ortonormální báze* $M' = \{u'_1,\dots,u'_n\}$ *prostoru* V *taková, že* $\forall k \in \{1,\dots,n\}$: $\langle u_1,\dots,u_k\rangle = \langle u'_1,\dots,u'_k\rangle$.

DŮKAZ. Budeme postupovat indukcí podle n. Pokud $n = 1$, pak definujme $v_1 := u_1$, $u'_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$, tvrzení věty platí. Nechť nyní $n > 1$ a předpokládejme platnost tvrzení pro všechny prostory dimenze menší nebo rovné n. Takovým prostorem je i $W := \langle u_1,\dots,u_n\rangle$, takže podle indukčního předpokladu v něm máme ortonormální bázi $\{u'_1,\dots,u'_n\}$, pro kterou $\forall k \in \{1,\dots,n\}$: $\langle u_1,\dots,u_k\rangle = \langle u'_1,\dots,u'_k\rangle$. Definujme nyní

$$v_{n+1} = u_{n+1} - P_W(u_{n+1}) = u_{n+1} - \sum_{i=1}^n (u_{n+1},u'_i)u'_i$$

Pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$ platí

$$(v_{n+1},u'_j) = (u_{n+1},u'_j) - \sum_{i=1}^n (u_{n+1},u'_i)(u'_i,u'_j) = 0,$$

takže $v_{n+1} \in W^\perp$. Po úpravě definice v_{n+1} vidíme, že $u_{n+1} \in \langle v_{n+1}\rangle \vee W$, tedy v_{n+1} nemůže být nulový vektor, jinak by $\{u_1,\dots,u_{n+1}\}$ nebyla lineárně nezávislá. Proto má smysl jej normalizovat předpisem $u'_{n+1} := \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}$. Je pak zjevné, že $\|u'_{n+1}\| = 1$, u'_{n+1} je kolmý na všechny vektory $u'_1,\dots,u'_n$ a $\langle u'_1,\dots,u'_{n+1}\rangle = \langle u_1,\dots,u_{n+1}\rangle$. Tím je věta dokázána. □

Z věty plyne, že v každém unitárním prostoru konečné dimenze existuje ortonormální báze. Důkaz věty napovídá, jak ji hledat. Začneme s libovolnou bází $M = \{u_1,\dots,u_n\}$ bázi V_n a definujeme $v_1 := u_1$. Vektor

$$v_2 := u_2 - \frac{(u_2,v_1)}{\|v_1\|^2}v_1,$$

je kolmý na v_1, protože jsme od u_2 odečetli právě ortogonální projekci u_2 na v_1. Dále definujme

$$v_3 := u_3 - \frac{(u_3,v_1)}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{(u_3,v_2)}{\|v_2\|^2}v_2,$$

který je kolmý na v_1 i na v_2, protože odečtený výraz je právě ortogonální projekce u_3 na rovinu $\langle v_1, v_2\rangle$, která je díky předchozí konstrukci totožná s rovinou $\langle u_1, u_2\rangle$ Pokračováním tohoto postupu získáme ortogonální bázi a vydělením každého vektoru jeho normou bázi ortonormální. Odložit normalizaci až na konec je výhodnější zejména kvůli přehlednějšímu výpočtu, vyhneme se odmocninám.

PŘÍKLAD 30. Nalezněme ortonormální bázi podprostoru

$$\langle (1,2,2,-1), (1,1,-5,3), (3,2,8,-7)\rangle$$

v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Označme vektory po řadě u_1, u_2, u_3 a vezměme $v_1 := u_1$. Platí $\|v_1\|^2 = 10$ a $(u_2, v_1) = 1 + 2 - 10 - 3 = -10$. Tedy

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,1,-5,3) - \frac{-10}{10}(1,2,2,-1) \\ &= (2,3,-3,2) \end{aligned}$$

Vidíme, že skutečně $v_2 \perp v_1$. Spočteme $\|v_2\|^2 = 26$, $(u_3, v_1) = 30$ a $(u_3, v_2) = -26$, takže

$$\begin{aligned} v_3 &= (3,2,8,-7) - \frac{30}{10}(1,2,2,-1) - \frac{-26}{26}(2,3,-3,2) \\ &= (2,-1,-1,-2), \end{aligned}$$

což je opět vektor kolmý na v_2 i v_1, $\|v_3\|^2 = 10$. Nakonec vydělíme každý vektor jeho normou a získáváme ortonormální bázi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,-1), \frac{1}{\sqrt{26}}(2,3,-3,2), \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,-2) \right\}$$

VĚTA 38 (QR rozklad matice). *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ je matice s lineárně nezávislými sloupci. Pak existuje právě jedna dvojice matic $Q \in M_{mn}(\mathbb{C})$, $R \in M_{nn}(\mathbb{C})$, která splňuje podmínky*

(1) $A = QR$
(2) *Sloupce Q tvoří ortonormální množinu vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^m$*
(3) *R je horní trojúhelníková s kladnými čísly na diagonále.*

DŮKAZ. Označme sloupce matice A postupně $u_1, \ldots, u_n$ a vektory, které z nich vzniknou Gram-Schmidtovou ortogonalizací, postupně $u'_1, \ldots, u'_n$. Podle lemmatu 24 platí pro k-tý sloupec matice A

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} (u_k, u'_i) u'_i,$$

protože $u_k \in \langle u'_1, \ldots, u'_k\rangle$. Označíme-li Q matici, jejíž sloupce jsou postupně u'_1 až u'_n, dá se poslední rovnost přepsat jako

$$A = Q \begin{pmatrix} (u_1, u'_1) & (u_2, u'_1) & \ldots & (u_n, u'_1) \\ 0 & (u_2, u'_2) & \ldots & (u_n, u'_2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & (u_n, u'_n) \end{pmatrix}$$

Označme poslední matici jako R. V označení z důkazu věty 37 je

$$(u_k, u'_k) = \left(v_k + \sum_{i=1}^{k-1} (u_k, u'_i) u'_i, u'_k \right) =$$

$$= (v_k, u'_k) = \left(v_k, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right) = \|v_k\| > 0$$

kde jsme v druhém kroku využili ortogonalitu báze $\{u'_i\}$. Tedy diagonální prvky R jsou skutečně kladné.

Jednoznačnost nebudeme dokazovat, ponecháváme ji jako (netriviální) cvičení. □

4.1. Cvičení.

(1) Nechť V je unitární prostor konečné dimenze, W jeho podprostor generovaný ortonormální bází M a N je báze V vzniklá sjednocením báze M a nějaké (ne nutně ortonormální) báze prostoru $W^\perp$. Ověřte, že zobrazení $P_W : V \to V$ je lineární a najděte jeho matici vzhledem k bázi N.

(2) V $\mathbb{C}^3$ uvažujme množinu

$$\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2i}{3},\frac{i}{3},-\frac{2i}{3}\right)\right\}$$

Ověřte, že je to ortonormální báze, najděte Fourierovy koeficienty vektoru $(1-i,i,2)$ vzhledem k této bázi a ověřte, že jsou skutečně rovny souřadnicím.

(3) Buď $(\mathbb{R}^3, g)$ prostor se skalárním součinem daným předpisem $g(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_2 + x_2y_3$. Najděte ortogonální bázi $\{u_1,u_2,u_3\}$ prostoru (V_3,g), která obsahuje vektor $u_1 = (1,2,0)$. Najděte příslušnou ortonormální bázi.

(4) Na stejném prostoru se stejným skalárním součinem najděte ortonormální bázi podprostoru $\langle u,v\rangle$, $u = (5,1,-1)$, $v = (0,1,-1)$ a rozšiřte ji na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^3$

(5) V $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte ortonormální bázi podprostoru $\langle(1,-1,2,4),(1,-2,2,3),(2,-2,5,7)\rangle$ obsahující kladný násobek vektoru $(1,0,2,5)$. Najděte ortogonální doplněk tohoto podprostoru.

(6) V $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najděte ortonormální bázi prostoru

$$\{(1,1,1,1),(2,-3,0,-3)\}^\perp$$

a doplňte ji na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^4$

(7) V $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem najděte ortonormální bázi, která obsahuje ortonormální bázi prostoru

$$\langle(1,i,i-1),(1+i,0,2i-1)\rangle$$

(8) Nechť Nechť $(V,(,))$ je unitární prostor W jeho podprostor konečné dimenze, $M = \{u_1,\ldots,u_n\}$ jeho báze. Dokažte, že

$$P_W = P_{u_1} + P_{u_2} + \ldots + P_{u_n}$$

právě když M je ortogonální báze.

(9) Klasická Gram-Schmidtova metoda spočívá v $k+1$-ním kroku v odečtení projekce na prostor $W = \langle u'_1,\ldots,u'_k\rangle$, kde $\{u'_i\}$ je ortonormální báze:

$$v_{k+1} = u_{k+1} - P_W(u_{k+1}),$$

a poté normalizace $u'_{k+1} = v_{k+1}/\|v_{k+1}\|$. Pokud kvůli zaokrouhlovacím chybám nebudou vektory u'_i zcela kolmé, bude se tato chyba šířit i na vektor u'_{k+1}. Proto se v přibližných výpočtech používá tzv. modifikovaná Gram-Schmidtova metoda, v níž je k-tý krok

$$v_{k+1} = u_{k+1} - P_{u'_k{}^\perp}\ldots P_{u'_2{}^\perp}P_{u'_1{}^\perp}(u_{k+1}),$$

opět následován normalizací $u'_{k+1} = v_{k+1}/\|v_{k+1}\|$. Každá projekce $P_{u'_i{}^\perp}$ zobrazuje do $u'_i{}^\perp$ bez ohledu na to, jaké zaokrouhlovací chyby obsahoval

vektor, který jsme do ní dosadili. Dokažte, že v přesné aritmetice dávají oba vzorce stejný výsledek.

(10) Označme P^n prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Dokažte, že zobrazení

$$(\cdot,\cdot) : P^n \times P^n \to \mathbb{R}$$
$$p \times q \to \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

je skalární součin na P^n. Ortogonalizací báze $\{1, x, x^2\}$ najděte ortonormální bázi prostoru P^2 s tímto skalárním součinem.

(11) Pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$ zaveďme polynomy

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

Dokažte, že množina $\{P_0, P_1, \dots P_n\}$ tvoří ortogonální bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýše n. Dokažte, že jsou to až na násobek právě ty polynomy, které získáte ortogonalizací báze $\{1, x, \dots, x^n\}$.

(12) Metoda nejmenších čtverců je speciálním případem počítání projekce na podprostor. Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ naměřené hodnoty nějaké veličiny v bodech $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Chceme tuto závislost y na x co nejlépe aproximovat lineární funkcí, tedy najít taková čísla $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ bylo co nejmenší. Interpretujeme proto $y = (y_1, \dots, y_n)$ jako prvek vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Množina všech vektorů z $\mathbb{R}^n$, které se dostanou jako $(ax_1 + b, \dots, ax_n + b)$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$ je vlastně podprostor $W := \langle (1, \dots, 1), (x_1, \dots, x_n)\rangle$ v tomto prostoru. Pak projekce $P_W(y)$ je hledaný vektor, protože podmínka minimality součtu čtverců je vlastně podmínka nejmenší vzdálenosti v euklidovské normě. Tato projekce je vektor W, který je určený konkrétními hodnotami a a b v závislosti na x_i, y_i. Najděte vztahy vyjadřující tuto závislost.

(13) Nechť V_n je vektorový prostor se skalárním součinem a $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ jeho báze. Dokažte, že pak existuje $M^* = \{v_1, \dots, v_n\}$, tzv. báze duální k M, splňující podmínky (u_i, v_j) je rovno 1 pro $i = j$ a 0 jindy. Jaká je duální báze k ortogonální bázi? A k ortonormální? Jak souvisí matice přechodu od báze M k M' s maticí přechodu od M'^* k M^*?

(14) Proveďte QR-faktorizaci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(15) Proveďte QR-faktorizaci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Unitární a ortogonální matice

VĚTA 39. *Nechť V je unitární prostor, M, N jeho dvě ortonormální báze, U matice přechodu od M k N. Pak $U^+U = UU^+ = E$.*

DŮKAZ. Pokud $M = \{v_1, \dots, v_n\}$, $N = \{w_1, \dots, w_n\}$, pak dle definice matice přechodu $U = \{1_V\}_{MN}$ platí $w_j = \sum_{i=1}^n u_{ij}v_i$. Z podmínek ortonormality bází pak

dostáváme

$$\delta_{kj} = (w_k, w_j) = \left(\sum_{l=1}^{n} u_{lk} v_l, \sum_{i=1}^{n} u_{ij} v_i\right) = \\ = \sum_{i,l=1}^{n} u_{lk}\overline{u_{ij}}(v_l, v_i) = \sum_{i,l=1}^{n} u_{kl}^T \overline{u_{ij}}\delta_{li} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_{ki}^+ u_{ij}}$$

Protože $E = (\delta_{ij})$ je reálná matice, plyne odsud $U^+U = E$. Protože U je čtvercová a inverzní matice je určena jednoznačně, platí i $UU^+ = E$. □

Důsledek 6. *Nechť V je unitární prostor, M, N jeho dvě ortonormální báze, U matice přechodu od M k N. Pak U^+ je matice přechodu od N k M.*

Důkaz.

$$(1_V)_{NM} = (1_V)_{MN}^{-1} = U^{-1} = U^+$$

□

Definice 48. Čtvercová komplexní matice U, která splňuje $U^+U = UU^+ = E$, se nazývá **unitární**. Čtvercová reálná matice U, která splňuje $U^TU = UU^T = E$, se nazývá **ortogonální.**

Lemma 25. *Nechť U je čtvercová matice. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *U je unitární.*
(2) *Sloupce U tvoří ortonormální bázi vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^n$*
(3) *Řádky U tvoří ortonormální bázi vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^n$*

Důkaz. Podmínku $U^+U = E$ lze přeformulovat jako $\overline{u_i}^T u_j = \delta_{ij}$, kde u_j je j-tý sloupec U. Levá strana je ale rovna $\overline{(u_i, u_j)}$, takže $U^+U = E$ je ekvivalentní ortonormalitě sloupců. Podobně se ukáže, že $UU^+ = E$ je ekvivalentní ortonormalitě řádků. □

Pokud je f endomorfizmus unitárního prostoru V a M, M' ortonormální báze a označíme

$$A = (f)_{MM} \quad A' = (f)_{M'M'} \quad U = (1_V)_{MM'},$$

dostáváme z věty 19 transformační vzorec

$$A' = U^+ AU$$

V reálném případě, pokud A je navíc symetrická matice, dostáváme $A' = U^T AU$, což je totožný předpis jako kdyby A byla matice symetrické bilineární formy, viz tvrzení 11. Souvislost symetrických bilineárních forem s endomorfizmy majícími symetrickou matici vytěžíme v následující kapitole.

Příklad 31. Zajímavým příkladem unitární $n \times n$ matice je

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & \omega^{(n-1)} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

kde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ je n-tá odmocnina jedničky. Skutečně, skalární součin p-tého a q-tého sloupce je roven

$$(f_p, f_q) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}\overline{\omega}^{kq} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(p-q)}$$

Pokud $p = q$, pak je výsledek roven jedné, pokud $p \neq q$, označme $\nu := \omega^{p-q}$ další n-tou odmocninu jedničky. Pak

$$0 = 1 - \nu^n = (1-\nu)(1 + \nu + \nu^2 + \dots \nu^{n-1})$$

Protože $|p-q| < n$, máme $\nu \neq 1$ a tudíž $\sum_{k=0}^{n-1} \nu^k = 0$, čili $(f_p, f_q) = 0$.

Matice F se označuje jako matice **diskrétní Fourierovy transformace**. Tu můžeme chápat jako změnu báze v $\mathbb{C}^n$. Pokud $x = (x_0, \dots, x_{n-1})^T$ jsou souřadnice vektoru x vzhledem ke kanonické bázi, pak veličiny

$$\hat{x}_q := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=0}^{n-1} x_i e^{-\frac{2\pi i p q}{n}}$$

tvoří vektor

$$\hat{x} = F^+ x \equiv F^{-1}x \equiv (1_{\mathbb{C}^n})_{MK}(x)_K,$$

který je vektorem souřadnic vektoru x vzhledem k bázi M tvořené sloupci matice $F = (1_{\mathbb{C}^n})_{KM}$. Odtud je také zřejmé, že inverzní Fourierova transformace je $x = F\hat{x}$, čili

$$x_q = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=0}^{n-1} \hat{x}_i e^{\frac{2\pi i p q}{n}}$$

Protože jak x, tak $\hat{x}$ jsou souřadnice stejného vektoru vzhledem k ortonormální bázi, plyne z Parsevalovy rovnosti **??**

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{x}_k|^2$$

POZNÁMKA 5. Pokud je A čtvercová regulární matice a $A = QR$ její QR rozklad, je Q unitární a Q^+ samozřejmě také. Pak vzorec $Q^+A = R$ můžeme chápat jako převod matice A na horní trojúhelníkový tvar, ovšem pouze pomocí *unitárních* řádkových transformací. Elementární řádkové úpravy ze standardní Gaussovy eliminace unitární nejsou, ale existují standardní typy elementárních unitárních transformací, které mají podobný efekt, jmenovitě tzv. Givensovy rotace nebo Householderovy reflexe. Ty mají navíc oproti Gram-Schmidtově metodě QR-rozkladu lepší numerické vlastnosti.

5.1. Cvičení.

(1) Dokažte, že množina všech unitárních $n \times n$ matic je grupa vzhledem k maticovému násobení.
(2) Dokažte, že množina všech ortogonálních $n \times n$ matic je grupa vzhledem k maticovému násobení.
(3) Dokažte, že pokud λ je vlastní číslo unitární matice, pak $|\lambda| = 1$.
(4) Dokažte, že pokud λ je reálné vlastní číslo ortogonální matice, pak λ je 1 nebo -1. Uveďte příklad reálné ortogonální matice, jejíž vlastní čísla nejsou reálná.
(5) Dokažte jednoznačnost QR-faktorizace. Návod: Začněte případem, kdy A (a tedy i Q) je čtvercová matice. Pokud $QR = \tilde{Q}\tilde{R}$, pak $\tilde{Q}^+Q = \tilde{R}R^{-1}$. Jaká mohou být vlastní čísla levé strany a jaká pravé?

(6) Označme $F_n \in M_n(\mathbb{C})$ matici diskrétní Fourierovy transformace na vektorech z $\mathbb{C}^n$. Napište matice F_2 a F_4. Najděte matici U, pro kterou platí

$$F_4 = U \begin{pmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tento vzorec je základem tzv. rychlé Fourierovy transformace, která umožňuje spočítat transformaci vektoru z (x_0, x_1, x_2, x_3) jako lineární kombinaci transformací vektorů (x_0, x_2) a (x_1, x_3). Pokuste se jej zobecnit na vyjádření F_{2n} pomocí F_n.

(7) Nechť U je unitární matice. Dokažte, že $E + \frac{1}{2}U$ je regulární.

KAPITOLA 10

Operátory na unitárních prostorech

1. Adjungovaný operátor

Pokud nebude řečeno jinak, budou všechny vektorové prostory v této kapitole konečnědimenzionální unitární prostory. Pod pojmem **operátor** budeme rozumět lineární zobrazení

$$\mathbb{A} : V \to W$$

mezi dvěma vektorovými prostory. Operátor je tedy jen jiné označení pro homomorfizmus vektorových prostorů. Užívá se standardně ve funkcionální analýze, která je vlastně rozšířením lineární algebry do prostorů nekonečné dimenze, a díky tomu i ve fyzice. Operátory budeme značit tučnými (blackboard bold) písmeny a pro obraz vektoru $v \in V$ zavedeme zjednodušené značení $\mathbb{A}v$ místo $\mathbb{A}(v)$.

Definice 49. Nechť $\mathbb{A} : V \to W$ je operátor. Operátor $\mathbb{A}^* : W \to V$ nazveme **adjungovaný operátor** k $\mathbb{A}$ (někdy též **sdružený operátor**), pakliže $\forall v \in V, w \in W$

$$(\mathbb{A}v, w) = (v, \mathbb{A}^* w)$$

Všimněte si, že $\mathbb{A}^*$ zobrazuje v opačném směru než $\mathbb{A}$ a tudíž i v definici je na levé straně skalární součin na W a na pravé skalární součin na V.

Lemma 26. *Nechť V, W, X jsou tři vektorové prostory, $N = \{v_i\}_1^n \subset V$, $M = \{w_i\}_1^m \subset W$ jsou ortonormální báze, $\mathbb{A}, \mathbb{B} : V \to W$, $\mathbb{D} : W \to X$ jsou operátory. Pak $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí*

(1) $(\alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B})^* = \bar{\alpha}\mathbb{A}^* + \bar{\beta}\mathbb{B}^*$
(2) $(\mathbb{D}\mathbb{A})^* = \mathbb{A}^*\mathbb{D}^*$
(3) $(\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}$
(4) $\operatorname{Ker}\mathbb{A} = (\operatorname{Im}\mathbb{A}^*)^\perp, \operatorname{Ker}\mathbb{A}^* = (\operatorname{Im}\mathbb{A})^\perp$
(5) $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^*)$
(6) $\operatorname{Ker}\mathbb{A} = \operatorname{Ker}\mathbb{A}^*\mathbb{A}$, $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^*\mathbb{A})$
(7) $(\mathbb{A}^*)_{NM} = (\mathbb{A})^+_{MN}$

Důkaz. První tři tvrzení plynou okamžitě z definice. Pro vektor $v \in V$ platí $\mathbb{A}v = 0$, právě když $\forall w \in W$ je $(\mathbb{A}v, w) = 0$, tedy právě když $v \perp \mathbb{A}^* w$. Analogicky se dokáže i druhá půlka čtvrtého tvrzení. Páté tvrzení odtud plyne aplikací věty o dimenzi jádra a obrazu:

$$h(\mathbb{A}) = n - \dim\operatorname{Ker} A = n - \dim(\operatorname{Im}\mathbb{A}^*)^\perp = \\ = \dim\operatorname{Im}\mathbb{A}^* = h(\mathbb{A}^*)$$

V šestém tvrzení je zřejmé, že $\operatorname{Ker}\mathbb{A} \leq \operatorname{Ker}\mathbb{A}^*\mathbb{A}$. Pokud ale $\mathbb{A}^*\mathbb{A}v = 0$, pak

$$0 = (v, \mathbb{A}^*\mathbb{A}v) = (\mathbb{A}v, \mathbb{A}v) = \|\mathbb{A}v\|^2,$$

tedy $\mathbb{A}v$ musí být 0. Druhá část opět plyne z věty o dimenzi jádra a obrazu.

Pro důkaz posledního tvrzení označme $A := (\mathbb{A})_{MN}$, $A^* := (\mathbb{A}^*)_{NM}$. Podle definice matice homomorfizmu platí

$$\mathbb{A}v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$
$$\mathbb{A}^* w_k = \sum_{i=1}^{m} a^*_{ik} v_i$$

Z ortonormality bází M a N pak plyne

$$(\mathbb{A}v_j, w_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i, w_k \right) = a_{kj}$$
$$(v_j, \mathbb{A}^* w_k) = \left(v_j, \sum_{i=1}^{n} a^*_{ik} v_i \right) = \overline{a^*_{jk}}$$

Tedy matice A a A^* jsou hermitovsky sdružené. □

Poznámka 6. Pátý bod, sedmý bod a druhá část šestého bodu dávají smysl pouze pokud prostory V a W mají konečnou dimenzi.

Je užitečné lemma aplikovat na případ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$ se standardním skalárním součinem. Všechny operátory mají tvar maticového zobrazení $x \mapsto Ax$. Kanonická báze je ortonormální, takže sedmý bod lemmatu říká, že adjungované zobrazení má transponovanou, resp. hermitovsky sdruženou matici. Pátý bod je pak alternativním důkazem rovnosti $h(A) = h(A^T)$ a návdavkem i $h(A) = h(A^+)$. Čtvrtý bod pro A reálnou matici říká, že $N(A)$ je ortogonálním doplňkem $R(A)$ a $N(A^T) = S(A)^\perp$. Z druhého bodu plyne známá vlastnost transponování a hermitovského sdružení $(AB)^T = B^T A^T$ a $(AB)^+ = B^+ A^+$.

Příklad 32. Uvažujme operátor $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ definovaný předpisem $\mathbb{A}x = Ax$, kde $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Předpokládejme, že v $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$ máme standardní skalární součin. Pak je matice $\mathbb{A}^*$ rovna A^+. Nechť $b \in \mathbb{C}^m$, pak soustava rovnic $Ax = b$ má řešení právě když $b \in \operatorname{Im}\mathbb{A} = S(A)$, jinými slovy, pokud b je lineární kombinací sloupců matice A. Pokud řešení neexistuje, můžeme hledat alespoň jeho nejlepší aproximaci, určenou požadavkem, aby $\|Ax - b\|$ bylo minimální. To nastane právě tehdy, když

$$Ax = P_{S(A)} b,$$

kde $P_{S(A)}$ je ortogonální projekce do sloupcového prostoru matice A. Označme $a_1, \ldots, a_n$ sloupce matice A. Pro libovolný sloupec a_k pak platí

$$0 = (b - Ax, a_k) = \sum_{i=1}^{m} \overline{(a_k)}_i (b - Ax)_i$$

Poslední výraz je vlastně k-tá složka sloupcového vektoru $A^+(b - Ax)$. Hledané x tedy splňuje soustavu rovnic $A^+Ax = A^+b$, tzv. **normální soustavu** příslušnou soustavě $Ax = b$.

Pokud je $\mathbb{A}$ prostý operátor, je podle šestého bodu lemmatu $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ také prostý. Protože je to endomorfizmus prostoru konečné dimenze, musí to být nutně izomorfizmus, tedy A^+A je regulární $n \times n$ matice. Potom je řešení soustavy možné získat aplikací inverzní matice $x = (A^+A)^{-1}A^+b$. Toto řešení je nejlepší aproximací (neexistujícího) řešení soustavy rovnic $Ax = b$ ve smyslu nejmenších čtverců, tedy minimalizující eukleidovskou vzdálenost $\|Ax - b\|$.

Odtud můžeme vyjádřit projekci na $S(A)$ jako

$$P_{S(A)} b = Ax = A(A^+A)^{-1}A^+b$$

Pozoruhodné na tom je, že jsme získali matici $A(A^+A)^{-1}A^+$ ortogonální projekce na podprostor $S(A)$, aniž bychom potřebovali ortogonální bázi tohoto podprostoru. Pokud tedy budeme mít lineárně nezávislou množinu vektorů $N = \{a_1, \dots, a_n\}$ generující podprostor W v $\mathbb{C}^m$, pak stačí sestavit $m \times n$ matici A, jejíž množina sloupců je právě N, a potom $A(A^+A)^{-1}A^+$ je matice projekce P_W vzhledem ke kanonické bázi. Regulární hermitovská $n \times n$ matice A^+A splňuje

$$(A^+A)_{ij} = \bar{a}_i^T a_j = \overline{(a_i, a_j)} =: \overline{G_{ij}}$$

Matice

$$G = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_n) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \dots & (a_n,a_n) \end{pmatrix}$$

se nazývá **Gramova matice** množiny vektorů N. V případě reálného skalárního součinu platí $G = A^T A$.

Příklad 33. Výše uvedenou metodu lze použít například na fitování dat lineárním obalem množiny funkcí. Nejjednodušším příkladem je lineární regrese, kdy fitujeme funkcemi tvaru $ax + b$. Uvažujme data ve tvaru dvojic $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Pak minimalizace výrazu

$$\sum_{i=1}^{k} |ax_i + b - y_i|^2$$

odpovídá aproximaci řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

Hledaná dvojice (a, b) se najde jako řešení příslušné normální soustavy

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

čili

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k x_i^2 & \sum_{i=1}^k x_i \\ \sum_{i=1}^k x_i & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k x_i y_i \\ \sum_{i=1}^k y_i \end{pmatrix}$$

Explicitní tvar řešení je možné získat například použitím Cramerova pravidla.

1.1. Cvičení.

(1) Nechť V je unitární prostor a $\mathbb{A} : V \to V$ samosdružený operátor. Dokažte, že $\mathbb{A} = 0$, právě když $\forall v \in V : (\mathbb{A}v, v) = 0$.

(2) Najděte aproximativní řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Proložte body $(-2,4)$, $(-1,3)$, $(0,1)$, $(2,0)$ přímkou $ax+b$ metodou nejmenších čtverců.
(4) Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-2,1)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$ lineární a kvadratickou funkci. Porovnejte součet čtverců odchylek v obou případech.
(5) Proložte body $(-2,4)$, $(-1,2)$, $(0,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$ parabolou.
(6) Proložte body $(1,1,3)$, $(0,3,6)$, $(2,1,5)$, $(0,0,0)$ rovinou metodou nejmenších čtverců.
(7) Najděte projekci na sloupcový podprostor matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

a to jednak Gramovou-Schmidtovou metodou, jednak pomocí adjungovaného zobrazení.
(8) Najděte ortogonální projekce na podprostory $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$, $\operatorname{Im}\mathbb{A}$, $\operatorname{Ker}\mathbb{A}^*$, $\operatorname{Im}\mathbb{A}^*$, kde $\mathbb{A}:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ je operátor $\mathbb{A}x = Ax$ definovaný maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) Nechť $N = \{v_1,\dots,v_k\}$ je lineárně nezávislá množina v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že odmocnina z determinantu Gramovy matice množiny N udává objem k-rozměrného rovnoběžnostěnu určeného vektory z N.
(10) Definice Gramovy matice dává smysl, i pokud vektory $a_1,\dots,a_n$ nepatří do aritmetického vektorového prostoru, ale nějakého obecného unitárního prostoru $(V,(,))$. Dokažte, že je Gramova matice množiny $N = \{a_1,\dots,a_n\}$ regulární, právě když je N lineárně nezávislá.

2. Ortogonální diagonalizace

Uvažujme hermitovskou matici $A \in M_n(\mathbb{C})$ a standardní skalární součin na $\mathbb{C}^n$. Pokud platí $Ax = \lambda x$, pak

$$\lambda(x,x) = (Ax,x) = (x,Ax) = \bar\lambda(x,x),$$

tedy x je nulový vektor nebo λ je reálné číslo. Vlastní čísla hermitovských matic jsou tedy nutně reálná. Pokud dále $Ay = \mu y$, pak

$$\lambda(x,y) = (Ax,y) = (x,Ay) = \bar\mu(x,y) = \mu(x,y),$$

tedy x je kolmé na y nebo $\lambda = \mu$. Vlastní vektory hermitovských matic s různými vlastními čísly jsou tedy kolmé. Pokud bychom tyto vlastní vektory normalizovali a nalezli jich dost na to, aby vytvořily bázi $M \subset \mathbb{C}^n$, byla by matice přechodu U z kanonické báze do M unitární. Víme už z kapitoly 8, že v bázi z vlastních vektorů má matice endomorfizmu diagonální tvar D, takže z úvahy za lemmatem 25 dostáváme

$$A = UDU^+,$$

čili unitární diagonalizaci matice A. Pokud je A reálná a symetrická, pak jsou její vlastní čísla také reálná a tedy i vlastní vektory a matice U. Pak mluvíme o diagonalizaci ortogonální. V tomto oddíle tedy dokážeme, že tento proces je skutečně možný, a to v obecnějším případě tzv. **normálního operátoru**.

Věta 40 (Základní věta algebry). *Každý nekonstantní polynom $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.*

DŮKAZ. Nebudeme dokazovat. Pěkný obrázkový „důkaz“ je zde `http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~severa/la/zva.swf` □

DŮSLEDEK 7. *Každá komplexní matice má alespoň jedno komplexní vlastní číslo.*

DŮKAZ. Vlastní číslo je kořenem charakteristického polynomu. □

VĚTA 41 (Schurova reprezentace operátoru). *Nechť V je komplexní vektorový prostor konečné dimenze. Pro každý operátor $\mathbb{A} : V \to V$ existuje ortonormální báze, vzhledem k níž je jeho matice horní trojúhelníková.*

DŮKAZ. Budeme postupovat indukcí podle dimenze V. Případ $\dim V = 1$ je triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny operátory na prostorech dimenze $n-1$. Nechť V má dimenzi n a $\mathbb{A}$ má díky větě 40 vlastní vektor u s vlastním číslem λ, lze předpokládat $\|u\| = 1$. Označme $W = \langle u \rangle^\perp$ a zvolme nějakou ortonormální bázi M ve W. Pak vzhledem k bázi $\{u\} \cup M$ má matice operátoru $\mathbb{A}$ blokový tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

kde B je matice $(n-1)\times(n-1)$ a $x \in \mathbb{C}^{n-1}$. Matice B definuje operátor $\mathbb{B} : W \to W$ a podle indukčního předpokladu existuje ve W ortonormální báze M', vzhledem k níž je matice

$$B' := (\mathbb{B})_{M'M'} = (1_W)_{M'M}(\mathbb{B})_{MM}(1_W)_{MM'} = U^+BU$$

operátoru $\mathbb{B}$ horní trojúhelníková. Matice operátoru $\mathbb{A}$ vzhledem k $\{u\} \cup M'$ pak je

$$\begin{aligned} A' :&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & xU \\ 0 & U^+BU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & xU \\ 0 & B' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

což je horní trojúhelníková matice. Báze $\{u\} \cup M'$ je hledanou ortonormální bází ve V. □

DEFINICE 50. Operátor $\mathbb{N} : V \to V$ se nazývá

- **normální**, pakliže $\mathbb{N}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}\mathbb{N}^*$
- **samosdružený**, pakliže $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$
- **unitární**, pakliže $\mathbb{N}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}\mathbb{N}^* = 1_V$

Matici $N \in M_n(\mathbb{C})$, která splňuje $N^+N = NN^+$, nazveme **normální matice**.

Z lemmatu 26 vyplývá, že vůči ortonormální bázi má normální, samosdružený, resp. unitární operátor normální, hermitovskou, resp. unitární matici. Z definice je také zřejmé, že každý unitární operátor/matice i každý samosdružený operátor/matice je nutně normální.

VĚTA 42. *Nechť V je komplexní vektorový prostor, $\mathbb{N} : V \to V$ normální operátor. Potom existuje ortonormální báze V složená z vlastních vektorů $\mathbb{N}$.*

DŮKAZ. Vzhledem k větě o Schurově reprezentaci operátoru stačí ukázat, že každá normální horní trojúhelníková matice je diagonální. Pro matice 1×1 je to jasné, předpokládejme, že to platí pro všechny matice až do stupně $(n-1)\times(n-1)$. Zapišme horní trojúhelníkovou $n \times n$ matici N a její hermitovské sdružení blokově jako

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & M \end{pmatrix}, N^+ = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ x^+ & M^+ \end{pmatrix},$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in M_{1,n-1}(\mathbb{C})$ a $M \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$ Podmínka normality matice N se přepíše jako rovnost matic

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ x^+ & M^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \bar{\lambda}x \\ \lambda x^+ & x^+x + M^+M \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ x^+ & M^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 + x^+x & xM^+ \\ Mx^+ & MM^+ \end{pmatrix}$$

Porovnáním levého horního rohu vidíme, že $0 = x^+x \equiv \sum_1^{n-1} |x_{1,i}|^2$, tedy $x = 0$. Pak ale $M^+M = MM^+$, tedy M je normální horní trojúhelníková matice, ta je podle indukčního předpokladu diagonální, tedy N je diagonální. □

VĚTA 43 (Spektrální rozklad normálního operátoru). *Nechť $\mathbb{A} : V \to V$ je normální operátor, $\mathbb{P}_\lambda : V \to V$ operátor ortogonální projekce na vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ. Pak lze operátor zapsat jako spektrální rozklad*

$$\mathbb{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \lambda \mathbb{P}_\lambda$$

DŮKAZ. Nechť $\{u_i\}_1^n$ je ortonormální báze, vzhledem k níž má $\mathbb{A}$ diagonální matici. Vektor u_i je vlastním vektorem $\mathbb{A}$ s vlastním číslem $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, takže $\mathbb{P}_\lambda u_i = u_i$ a $\mathbb{P}_\mu u_i = 0$, pokud $\mu \neq \lambda$. Pravá i levá strana rovnosti tedy mají na u_i hodnotu λu_i, rovnají se proto na bázi a tudíž i jako operátory. □

V praxi potřebujeme větu 42 především pro samosdružené operátory. Následující věta i její důkaz jsou jen reformulací pozorování, které jsme učinili na začátku pro hermitovskou matici:

VĚTA 44. *Vlastní čísla samosdruženého operátoru jsou reálná.*

DŮKAZ. Pokud $\mathbb{A}v = \lambda v$ a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$, pak

$$\lambda \|v\|^2 = (\lambda v, v) = (\mathbb{A}v, v) = \\ = (v, \mathbb{A}^* v) = (v, \mathbb{A}v) = (v, \lambda v) = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

Protože $v \neq 0$, musí být $\lambda = \bar{\lambda}$. □

Samosdružené operátory tedy můžeme diagonalizovat, a na diagonále budou stát reálná čísla. Právě tato vlastnost je důvodem, proč jsou pozorovatelné veličiny v kvantové teorii reprezentovány právě samosdruženými operátory.

PŘÍKLAD 34. Proveďme unitární diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla jsou 4 a -2, druhé z nich je dvojnásobné. Příslušné vlastní podprostory jsou $\langle (1,1,1) \rangle$ a $\langle (1,-1,0), (0,1,-1) \rangle$, vidíme, že jsou skutečně navzájem kolmé. Ve druhém z nich pomocí Gramovy-Schmidtovy metody najdeme ortogonální bázi $\{(1,-1,0), (1,1,-2)\}$. V předpisu pro diagonalizaci $A = UDU^+$ je matice U přechodu od kanonické báze do báze z vlastních vektorů unitární, její sloupce tedy tvoří normalizované vlastní vektory. V tomto případě, kdy bylo možné vzít všechny vlastní vektory reálné, je $U^+ = U^T$, tedy U je ortogonální matice. Celkově máme A zapsáno jako součin

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

TVRZENÍ 13. *Nechť V je vektorový prostor dimenze n, $M = \{v_i\}_1^n \subset V$ ortonormální báze, $\mathbb{U} : V \to V$ je operátor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) $\mathbb{U}$ *je unitární operátor.*
(2) $\forall v \in V : \|\mathbb{U}v\| = \|v\|$
(3) $\forall v, w \in V$, $(\mathbb{U}v, \mathbb{U}w) = (v, w)$
(4) $U := (\mathbb{U})_{MM}$ *je unitární matice.*
(5) $\{\mathbb{U}v_i\}_1^n$ *je ortonormální báze V.*
(6) $\mathbb{U}$ *je normální operátor, jehož vlastní čísla leží na jednotkové kružnici.*

DŮKAZ. Pokud $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = 1_V$, pak $\forall v \in V$

$$\|v\|^2 = (\mathbb{U}^*\mathbb{U}v, v) = (\mathbb{U}v, \mathbb{U}v) = \|\mathbb{U}v\|^2,$$

tedy z 1) plyne 2). Bod 3) plyne z 2) pomocí polarizační identity. Pokud

$$(\mathbb{U}v, \mathbb{U}w) \equiv (\mathbb{U}^*\mathbb{U}v, w) = (v, w),$$

pro libovolný vektor w, pak musí být $\mathbb{U}^*\mathbb{U}v = v$ a obdobně se ukáže $\mathbb{U}\mathbb{U}^*v = v$, čímž z 3) plyne 1). Ekvivalence 1) a 4) plyne z posledního bodu lemmatu 26. Bod 5) plyne z 3). Naopak, pokud přepokládáme 5), pak jsou díky Parsevalově rovnosti 36 sloupce matice U ortonormální, čili platí 4).

Z 2) plyne, že pokud $\mathbb{U}v = \lambda v$, pak $|\lambda| = 1$, tedy 6). Naopak, pokud platí 6), pak existuje ortonormální báze M', vzhledem k níž má $\mathbb{U}$ diagonální matici D, která je zároveň unitární. Označíme-li V matici přechodu od M k M', pak $U = VDV^+$. Tedy U je součinem unitárních matic a je proto také unitární, čím jsme dokázali 4). □

2.1. Cvičení.

(1) Ukažte, že matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

je normální, ačkoli není hermitovská ani unitární. Najděte její spektrum a ortonormální bázi z vlastních vektorů.

(2) Proveďte ortogonální diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Proveďte ortogonální diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) Proveďte unitární diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) Proveďte unitární diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(6) Proveďte ortogonální diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Co znamená toto zobrazení geometricky?

(7) Proveďte ortogonální diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(8) Ukažte, že operátor ortogonální projekce $P_W : V \to V$ na podprostor W ve V je samosdružený.
(9) Dokažte, že operátor $\mathbb{N} : V \to V$ je normální, právě když $\forall v \in V$ platí $\|\mathbb{N}v\| = \|\mathbb{N}^* v\|$. Odvoďte z toho, že Pokud $\mathbb{N}$ je normální operátor a v jeho vlastní vektor s vlastním číslem λ, pak je v vlastním vektorem $\mathbb{N}^*$ s vlastním číslem $\bar{\lambda}$.
(10) S pomocí předchozího cvičení dokažte, že ve větě 42 platí ve skutečnosti ekvivalence.
(11) Ukažte, že složení dvou samosdružených operátorů nemusí být samosdružený operátor.

3. Polární rozklad operátoru

Komplexní číslo $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$ lze zapsat jako $e^{i\phi}|z|$, kde $e^{i\phi}$ leží na jednotkové kružnici a $|z|$ je nezáporné reálné číslo. Čísla (r, ϕ) jsou polárními souřadnicemi vektoru (z_1, z_2). Pokud chápeme z, $e^{i\phi}$ a $|z|$ jako 1×1 matice, jde o rozklad komplexní matice na součin matice unitární a hermitovské pozitivně semidefinitní. V tomto oddíle nalezneme zobecnění této vlastnosti, tzv. polární rozklad.

Definice 51. Samosdružený operátor $A : V \to V$ nazýváme **pozitivně definitní**, resp. **pozitivně semidefinitní**, pakliže pro každý nenulový $v \in V$ je

$$(\mathbb{A}v, v) > 0, \text{ resp. } (\mathbb{A}v, v) \geq 0,$$

značíme $\mathbb{A} > 0$, resp. $\mathbb{A} \geq 0$. Analogicky definujeme pojem **negativně (semi)definitního operátoru**. Všechny ostatní operátory nazýváme **indefinitní**. **Signaturou** samosdruženého operátoru označujeme trojici čísel (p, q, n), kde p je počet kladných vlastních čísel $\mathbb{A}$ včetně násobností, q počet záporných vlastních čísel a n násobnost nuly jakožto vlastního čísla.

Poznámka 7. Všechny tyto pojmy budeme používat i v souvislosti se symetrickými a hermitovskými maticemi. Zavedeme je také pro symetrické bilineární a hermitovské seskvilineární formy. Souvislost je zřejmá: pokud g je hermitovská seskvilineární forma, pak je její matice hermitovská a odpovídá tedy samosdruženému operátoru $\mathbb{A}$ předpisem

$$g(u, v) = \sum_{i,j} a_{ij} u_i \bar{v}_j = (\mathbb{A}u, v),$$

kde u_i, v_j jsou souřadnice u, v vzhledem k nějaké ortonormální bázi M a a_{ij} je zároveň matice formy g i operátoru $\mathbb{A}$ vzhledem k této bázi.

Z věty o diagonalizaci samosdruženého operátoru je zřejmá souvislost mezi definovanými pojmy a vlastními čísly operátoru. Signatura má tvar

- $(p, 0, 0)$ pro pozitivně definitní operátor
- $(p, 0, n)$ pro pozitivně semidefinitní operátor
- $(0, q, 0)$ pro negativně definitní operátor
- $(0, q, n)$ pro negativně semidefinitní operátor
- $(p, q, 0)$ pro regulární indefinitní operátor
- (p, q, n) pro singulární indefinitní operátor,

přičemž všechny vyznačené hodnoty p, q, n se rozumí nenulové.

VĚTA 45. *Nechť $\mathbb{A} \geq 0$ je pozitivně semidefinitní operátor. Pak existuje právě jeden pozitivně semidefinitní operátor $\sqrt{\mathbb{A}}$, který splňuje $(\sqrt{\mathbb{A}})^2 = \mathbb{A}$.*

DŮKAZ. Operátor $\mathbb{A}$ má vzhledem k ortonormální bázi M diagonální matici $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s nezápornými elementy, lze předpokládat $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Definujme $\sqrt{\mathbb{A}}$ jako operátor, který má vzhledem k M matici $\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Je zřejmé, že $\sqrt{\mathbb{A}}$ má požadované vlastnosti.

Ukažme ještě jednoznačnost. Pokud $\mathbb{B}$ je pozitivně semidefinitní operátor splňující $\mathbb{B}^2 = \mathbb{A}$, pak lze najít bázi M', vzhledem k níž má $\mathbb{B}$ matici $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ s nezápornými elementy, opět předpokládejme $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$. Pak ale má $\mathbb{A}$ vzhledem k této bázi matici $\operatorname{diag}(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2)$, tedy vlastní podprostory $\mathbb{B}$ a $\mathbb{A}$, a tedy i $\sqrt{\mathbb{A}}$, se shodují a pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\mu_i^2 = \lambda_i$. Tedy $\mathbb{B} = \sqrt{\mathbb{A}}$. □

DEFINICE 52. Nechť $\mathbb{A} : V \to W$ je operátor. **Modulem** operátoru $\mathbb{A}$ rozumíme pozitivně semidefinitní operátor $|\mathbb{A}| := \sqrt{\mathbb{A}^*\mathbb{A}} : V \to V$.

Definice je korektní, neboť $\mathbb{A}^*\mathbb{A} = (\mathbb{A}^*\mathbb{A})^*$ a $(v, \mathbb{A}^*\mathbb{A}v) = \|\mathbb{A}v\|^2$ je vždy nezáporné číslo. Platí

$$\||\mathbb{A}|v\|^2 = (|\mathbb{A}|v, |\mathbb{A}|v) = (v, |\mathbb{A}|^2 v) = (v, \mathbb{A}^*\mathbb{A}v) = \|\mathbb{A}v\|^2$$

a tedy i $\operatorname{Ker}\mathbb{A} = \operatorname{Ker}|\mathbb{A}|$ a $\dim \operatorname{Im}\mathbb{A} = \dim \operatorname{Im}|\mathbb{A}|$.

VĚTA 46 (Polární rozklad operátoru). *Nechť $\mathbb{A} : V \to V$ je operátor. Pak existuje unitární operátor $\mathbb{U} : V \to V$ takový, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}|\mathbb{A}|$. Je-li $\mathbb{A}$ izomorfizmus, pak je $\mathbb{U}$ určen jednoznačně.*

DŮKAZ. Zkonstruujeme operátor $\mathbb{U}$ nejprve na $\operatorname{Im}|\mathbb{A}|$. Nechť $|\mathbb{A}|v = w$, definujeme $\mathbb{U}w = \mathbb{A}v$. To je korektní definice, protože pro jiný vektor $v' \in V$ splňující $|\mathbb{A}|v' = w$ je $v - v' \in \operatorname{Ker}|\mathbb{A}| = \operatorname{Ker}\mathbb{A}$, a tedy $\mathbb{A}v' = \mathbb{A}v = \mathbb{U}w$. Je zřejmé, že $\mathbb{U}$ je lineární zobrazení na $\operatorname{Im}|\mathbb{A}|$. Platí

$$\|\mathbb{U}w\|^2 = \|\mathbb{U}|\mathbb{A}|v\|^2 = \|\mathbb{A}v\|^2 = \||\mathbb{A}|v\|^2 = \|w\|^2$$

Zbývá předepsat operátor $\mathbb{U}$ na $(\operatorname{Im}|\mathbb{A}|)^\perp$. Prostory $\operatorname{Im}|\mathbb{A}|$ a $\operatorname{Im}\mathbb{A}$ mají stejnou dimenzi, stejně tak jejich ortogonální doplňky. Zvolme $\{u_i\} \subset (\operatorname{Im}|\mathbb{A}|)^\perp$, $\{v_i\} \subset (\operatorname{Im}\mathbb{A})^\perp$ ortonormální báze a definujme $\forall i$, $\mathbb{U}u_i = v_i$. Tím je definován na celém V unitární operátor, který zjevně splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{U}|\mathbb{A}|$.

Pokud je $\mathbb{A}$ izomorfizmus, je i $|\mathbb{A}|$ izomorfizmus a $\mathbb{U} = \mathbb{A}|\mathbb{A}|^{-1}$ je určen jednoznačně. □

3.1. Cvičení.

(1) Najděte symetrické 2×2 matice A, B takové, aby pro různé hodnoty parametru t byla matice $A + tB$ všech možných typů (pozitivně (semi)definitní, negativně semi(definitní) indefinitní).
(2) Ukažte, že pokud $\mathbb{A} \geq 0$ a $\mathbb{B} > 0$, pak $\mathbb{A} + \mathbb{B} > 0$.
(3) Ukažte, že $1_V > 0$. Dále ukažte, že pro každý samosdružený operátor $\mathbb{A} : V \to V$ a dostatečně malé ϵ je $1_V + \epsilon\mathbb{A} > 0$.
(4) Dokažte, že $|\det \mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}|$.
(5) Proveďte polární rozklad matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) Proveďte polární rozklad reálné matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7) Proveďte polární rozklad matice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(8) Proveďte polární rozklad matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(9) Dokažte, že pro každý operátor $\mathbb{A} : V \to V$ existuje také polární rozklad ve tvaru $\mathbb{A} = |\mathbb{A}^+|\mathbb{U}$, kde $\mathbb{U}$ je unitární.

(10) Dokažte, že každou čtvercovou matici lze zapsat jako $A = P\Sigma Q^+$, kde P, Q jsou unitární matice a Σ je diagonální pozitivně semidefinitní matice. Návod: Na diagonále Σ jsou vlastní čísla matice $|A|$. Pokuste se zobecnit tvrzení na situaci, kdy A je obdélníková matice. Zápis $A = P\Sigma Q^+$ se označuje jako **singulární rozklad matice** (singular value decomposition).

(11) Nechť $\mathbb{A} : V \to V$ je operátor. Jeho **operátorovou normou** rozumíme číslo

$$\|\mathbb{A}\| := \max\{\|\mathbb{A}v\| | v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

Dokažte, že je to skutečně norma na vektorovém prostoru $\mathrm{End}(\mathbb{V})$, že není indukována žádným skalárním součinem, a že je rovna největšímu vlastnímu číslu operátoru $|\mathbb{A}|$. Pokud $\mathbb{A}$ je regulární, čemu se pak rovná $\|\mathbb{A}^{-1}\|$?

(12) Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ je matice. Matice $A^\dagger \in M_{nm}(\mathbb{C})$, která splňuje

- $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
- $A A^\dagger A = A$
- $A^\dagger A$ je hermitovská matice
- $A A^\dagger$ je hermitovská matice

se nazývá **Moore-Penroseova pseudoinverze** matice A. Jak vypadá pseudoinverze blokové matice

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde X je regulární? Jak vypadá pseudoinverze matice zapsané v singulárním rozkladu $A = P\Sigma Q^+$?

(13) Jak vypadá pseudoinverze blokové matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde X je regulární čtvercová matice? A jak, když je X obecná, třeba i obdélníková matice?

(14) Dokažte, že pro matici A s lineárně nezávislými sloupci platí $A^\dagger = (A^+A)^{-1}A^+$. Pokuste se najít a dokázat obdobný vzorec pro matici s lineárně nezávislými řádky.

KAPITOLA 11

Kvadratické formy

V této kapitole budeme předpokládat, že všechny vektorové prostory jsou reálné a konečnědimenzionální.

1. Kvadratické formy

DEFINICE 53. Nechť $g : V \times V \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma. **Kvadratická forma** příslušná g je zobrazení $Q_g : V \to \mathbb{R}$ definované předpisem $Q_g(v) = g(v, v)$. **Signaturou** , resp. **maticí kvadratické formy** rozumíme signaturu, resp. matici příslušné formy bilineární. **Nulovou množinou** kvadratické formy Q_g rozumíme všechny vektory $v \in V$, pro něž $Q_g(v) = 0$. **Polární bází** rozumíme bázi prostoru V, vzhledem k níž má matice kvadratické formy diagonální tvar.

Poznámky:

(1) Ze znalosti kvadratické formy můžeme zrekonstruovat příslušnou symetrickou bilineární formu polarizační identitou

$$g(v, w) = \frac{1}{2}\left(Q_g(v + w) - Q_g(v) - Q_g(w)\right)$$

Tedy symetrické bilineární a kvadratické formy jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci.

(2) Spolu se signaturou máme pro kvadratické formy definovány i pojmy indefinitní a pozitivně/negativně (semi)definitní.

(3) Pokud je g skalární součin, pak $Q_g(v) = \|v\|_g^2$.

Už víme, že každá kvadratické forma má polární bázi, lze ji nalézt symetrickými úpravami její matice. Metoda ortogonální diagonalizace nám umožňuje dokonce nalézt polární bázi, která je ortonormální:

VĚTA 47. *Nechť Q je kvadratická forma na prostoru V se skalárním součinem. Pak existuje polární báze Q, která je zároveň ortonormální.*

DŮKAZ. Nechť $Q = Q_g$, $M = \{u_i\}_1^n$ je ortonormální báze a G je matice g vzhledem k M. Matice G je symetrická a tedy existuje ortogonální matice R taková, že $R^T G R$ je diagonální. Matice R je maticí přechodu od ortonormální báze M k jiné ortonormální bázi $M' = \{u_i'\}_1^n$ a $R^T G R$ je matice Q vzhledem k M'. Tedy M' je hledaná báze. □

Ortogonální diagonalizace kvadratických forem tedy využívá ortogonalitu vlastních vektorů symetrických matic. Vzniklá polární báze sestává z vlastních vektorů a vzhledem k této bázi má matice formy na diagonále vlastní čísla. Signaturu kvadratické formy pak určíme přímo z definice. Výpočet vlastních čísel je ale z početního hlediska velmi náročná úloha, kterou většinou umíme vyřešit jen přibližně. Proto má smysl umět i jiné metody (neortogonální) diagonalizace a přesvědčit se, že se pomocí nich dá signatura spočítat také. K tomu nám poslouží následující geometrická charakterizace signatury:

LEMMA 27. *Nechť D je diagonální matice se signaturou (p,q,n), $p+q+n=m$. Pak p je maximální dimenze podprostoru v $\mathbb{R}^m$, na němž je D pozitivně definitní a q je maximální dimenze podprostoru v $\mathbb{R}^m$, na němž je D negativně definitní.*

DŮKAZ. Označme $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, $Q(x)=x^TDx$ a předpokládejme, že prvních p čísel λ_i je kladných, dalších q záporných a posledních n jsou nuly. Lineární obal prvních p vektorů kanonické báze označme W. Je zřejmé, že Q je na W pozitivně definitní. Nechť W' je jiný podprostor, na němž je Q pozitivně definitní. Definujme lineární zobrazení $f:W'\to W$ předpisem

$$f((x_1,\dots,x_m))=(x_1,\dots,x_p,0\dots,0)$$

Pokud $x\in\operatorname{Ker}f$, pak $x_1=\dots=x_p=0$, a tedy

$$Q(x)=\sum_{i=p+1}^{m}\lambda_i x_i^2\le 0$$

Protože Q je na W' pozitivně definitní a $x\in W'$, musí být $x=0$. Tedy $\operatorname{Ker}f=0$. Pak je ale f monomorfismus a

$$\dim W'=\dim\operatorname{Im}f+\dim\operatorname{Ker}f=\dim\operatorname{Im}f\le\dim W=p$$

Druhé tvrzení plyne z prvního pro matici $-D$. □

Signaturu kvadratické formy lze tedy ekvivalentně definovat pomocí maximálních dimenzí podprostorů, na nichž je forma pozitivně, resp. negativně definitní. Tyto dimenze se dají spočítat z každého jejího diagonálního vyjádření. Proto k určení signatury nemusíme počítat vlastní čísla, stačí použít neortogonální diagonalizaci a spočítat kolik je na diagonále kladných a záporných čísel.

Třetí metodou, jak diagonalizovat kvadratickou formu, je užití Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace, místo skalárního součinu ale vezmeme regulární symetrickou bilineární formu g na V, kterou chceme diagonalizovat. Dva vektory $u,v\in V$ jsou na sebe **kolmé vzhledem ke g**, pokud $g(u,v)=0$, analogicky se definuje i norma $\|\cdot\|_g$, ortogonální doplněk a ortogonální báze vzhledem ke g. Drobnou komplikací je, že existují nenulové vektory $u\in V$, pro něž $g(u,u)=0$, tedy vektory kolmé samy na sebe či jinak řečeno s nulovou normou. Mohou existovat také vektory se zápornou normou, ani ty nebude možné vzhledem k g normalizovat, pojem ortonormální báze vzhledem ke g tedy zavádět nebudeme.

Nechť A je matice $n\times n$. Pro $k\in\{1,\dots,n\}$ označme A_k její $k\times k$ podmatici vzniklou vyškrtnutím posledních $n-k$ řádků a sloupců.

VĚTA 48 (Jacobi-Sylvesterova). *Nechť g je regulární symetrická bilineární forma na V, $M=\{u_i\}_1^n$ je báze V a A je matice g vzhledem k této bázi. Předpokládejme, že $\forall k\in\{1,\dots,n\}$, $\det A_k\neq 0$. Definujme navíc $\det A_0=1$. Pak existuje ve V báze $M'=\{v_i\}_1^n$, $v_k=\sum_{j=1}^k r_{jk}u_j$, ortogonální vzhledem ke g, kde*

$$g(v_k,v_k)=\frac{\det A_{k-1}}{\det A_k}.$$

Tedy signatura g je $(p,q,0)$, kde q je počet znaménkových změn v posloupnosti

$$\det A_0,\det A_1,\dots,\det A_n$$

DŮKAZ. Pro $k=1$ zvolme $v_1=\frac{1}{a_{11}}u_1$, tedy $g(v_1,v_1)=\frac{1}{a_{11}}$. Předpokládejme, že jsme zkonstruovali vektory v_1 až v_{k-1}, tedy i matici $R_{k-1}=(r_{ij};i,j\le k-1)$. To je horní trojúhelníková matice s nenulovou diagonálou, je tedy regulární, proto je to matice přechodu od $\{u_i\}_1^{k-1}$ k $\{v_i\}_1^{k-1}$ v prostoru $\langle u_1,\dots,u_{k-1}\rangle$. Hledáme

vektor v_k tak, aby byl kolmý na $v_1, \dots, v_{k-1}$, tedy ekvivalentně na $u_1, \dots, u_{k-1}$. To dává $k-1$ podmínek na čísla r_{1k} až r_{kk}:

$$0 = g(u_i, \sum_{j=1}^{k} r_{jk} u_j) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} r_{jk}$$

Přidejme k tomu normalizační podmínku $g(u_k, v_k) = 1$ a máme soustavu rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 1 \end{array}\right)$$

Protože $\det A_k \neq 0$, řešení existuje a je jednoznačné. Z Cramerova pravidla pak dostáváme

$$g(v_k, v_k) = g(r_{jk} u_j, v_k) = r_{kk} = \frac{\det A_{k-1}}{\det A_k}$$

□

1.1. Cvičení.

(1) Určete, pro která λ je kvadratická forma

$$f_2(u) = x_1^2 - 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 + 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$

pozitivně definitní.

(2) Diagonalizujte následující kvadratickou formu na $\mathbb{R}^4$ pomocí symetrických úprav a uveďte matici přechodu od báze kanonické do báze polární.

$$9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8t^2 + 8yz - 4yt + 4zt$$

(3) Proveďte ortogonální diagonalizaci kvadratické formy $7x^2 - 12xy - 2y^2$ na $\mathbb{R}^2$.

(4) Na $\mathbb{R}^3$ pomocí Jacobi-Sylvestrovy věty určete signaturu kvadratické formy

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 2x_2 x_3$$

(5) Určete signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 2x_1 x_4 + x_2^2 + \\ + 4x_2 x_3 + 4x_2 x_4 + x_3^2 + 2x_3 x_4 + x_4^2$$

(6) Na $\mathbb{R}^4$ diagonalizujte kvadratickou formu

$$Q(x) = 2x_1 x_2 - 4x_3 x_4$$

pomocí symetrických úprav.

(7) Diagonalizujte kvadratickou formu, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

a to ortogonálně i symetrickými úpravami.

(8) Nechť ϕ je netriviální lineární forma na $\mathbb{R}^n$. Určete signaturu kvadratické formy dané vztahem $f_2(u) = \phi(u)^2$.

(9) Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^2$ dané vztahem

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1 x_2$$

(10) Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$ s maticí vzhledem ke kanonické bázi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Afinní prostor

Každý vektorový prostor obsahuje privilegovaný prvek - nulový vektor. Všechny podprostory tento prvek obsahují a všechna lineární zobrazení ho zachovávají. Tím pádem ale mnohé přirozené geometrické pojmy jako například rovnoběžnost nebo posunutí nemají v jazyce vektorových prostorů přirozené vyjádření. V tomto oddíle nastíníme způsob, jak tento nedostatek formálně překonat.

DEFINICE 54. Nechť V je vektorový prostor a W jeho podprostor. Množina $A \subset V$, která splňuje

$$\forall a \in A, \forall v \in W : a + v \in A$$

se nazývá **afinní podprostor** vektorového prostoru V se **zaměřením** W. Množinu A zapisujeme také jako $a + W$.

PŘÍKLAD 35. Pokud $V = \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $W = \langle v \rangle$ a $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pak množina

$$p = \{(x_1, x_2) + t(v_1, v_2) | t \in \mathbb{R}\} \equiv x + \langle v \rangle$$

je afinní přímka, procházející bodem (x_1, x_2). Vektorovým podprostorem bude právě když $(x_1, x_2) \in W$.

PŘÍKLAD 36. Množina řešení soustavy rovnic $Ax = b$ je $x_P + N(A)$, kde x_P je partikulární řešení a $N(A)$ je množina řešení homogenní soustavy rovnic. Je to tedy afinní prostor se zaměřením $N(A)$.

PŘÍKLAD 37. Množina

$$A_n := \{x \in \mathbb{F}^{n+1} | x = (1, x_1, \ldots, x_n)\}$$

je afinní podprostor $\mathbb{F}^{n+1}$ se zaměřením

$$V_n := \{x \in \mathbb{F}^{n+1} | x = (0, x_1, \ldots, x_n)\}$$

DEFINICE 55. Afinní podprostor

$$A_n := \{x \in \mathbb{F}^{n+1} | x = (1, x_1, \ldots, x_n)\}$$

v $\mathbb{F}^{n+1}$ budeme nazývat **aritmetickým afinním prostorem**.

Jak body A_n, tak body jeho zaměření V_n jsou vyjádřeny jako n-tice čísel. Abychom mezi nimi snáze rozlišovali, označíme

$$a = [a_1, a_2, \ldots, a_n] := (1, a_1, \ldots, a_n)$$
$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) := (0, v_1, \ldots, v_n)$$

a mluvit krátce o bodech a vektorech afinního prostoru. Rozdíl dvou bodů

$$\begin{aligned} a - b &= [a_1, \ldots, a_n] - [b_1, \ldots, b_n] \\ &= (1, a_1, \ldots, a_n) - (1, b_1, \ldots, b_n) \\ &= (0, a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n) \end{aligned}$$

je prvek z V_n, tedy v naší úsporné terminologii vektor afinního prostoru A_n.

Jsou-li a, b dva body A_n, pak přímku, která je spojuje, lze zapsat různými způsoby:

$$\begin{aligned} p &= \{a + s(b-a) | s \in \mathbb{F}\} \\ &= \{ra + sb | r + s = 1, r, s \in \mathbb{F}\} \\ &= \{ra + sb | r, s \in \mathbb{F}\} \cap A_n \end{aligned}$$

První způsob je standardní parametrický tvar, základem druhého je **afinní lineární kombinace** $ra + sb, r + s = 1$ bodů a, b, třetí pak vyjadřuje přímku jako průnik dvojrozměrného podprostoru v $\mathbb{F}^{n+1}$ a afinního prostoru A_n. Analogicky je možné popsat libovolný afinní podprostor v A_n. Speciálně průnik podprostoru $W \leq \mathbb{F}^{n+1}$, popsaného homogenní rovnicí

$$W := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) | a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

(tedy jádra lineární formy) s afinním prostorem

$$A_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) | x_0 = 1\}$$

je množina bodů

$$\{[x_1, \ldots, x_n] | a_0 + a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0\},$$

neboli **afinní nadrovina.**

DEFINICE 56. **Vzdálenost bodů** $a, b \in A_n$ definujeme jako $\|b-a\|$, kde $\|\cdot\|$ je norma indukovaná standardním skalárním součinem na $\mathbb{F}^{n+1}$. Prostor A_n s takto definovanou metrikou označujeme jako E_n, **euklidovský prostor** dimenze n.

LEMMA 28. *Nechť $A \in M_{n+1}(\mathbb{F})$ je matice. Maticové zobrazení f_A zachovává množiny A_n a V_n, právě když má A blokový tvar*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & B \end{pmatrix},$$

kde $B \in M_n(\mathbb{F})$, $r \in \mathbb{F}^n$. Dále, zobrazení f_A zachovává vzdálenost libovolných dvou bodů v E_n, právě když B je unitární matice.

DŮKAZ. Má-li A blokový tvar

$$\begin{pmatrix} b & s^T \\ r & B \end{pmatrix},$$

pak

$$\begin{pmatrix} b & s^T \\ r & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + s^Tx \\ r + Bx \end{pmatrix}$$

Pokud má pravá strana pro všechna $x \in \mathbb{F}^n$ patřit do A_n, musí být $b = 1$ a $s^T = 0$. Platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \end{pmatrix},$$

takže zobrazení zachovává i V_n. Zobrazení navíc zachovává vzdálenosti v A_n právě když zachovává normy vektorů z V_n, což podle poslední rovnosti nastane právě když B je unitární matice. □

DEFINICE 57. Maticové zobrazení zachovávající A_n nazýváme **afinním zobrazením**. **Afinní bází** afinního prostoru A_n rozumíme dvojici (a, M), kde $a \in A_n$, M je báze V_n. Řekneme, že afinní báze je ortogonální/ortonormální, pakliže je ortogonální/ortonormální báze M.

Uvažujme dvě afinní báze (a, M), (a', M') v A_n, kde $M = \{v_i\}_1^n$ a $M' = \{v_i'\}_1^n$. Libovolný bod $b \in A_n$ lze zapsat jako (jednoznačnou) lineární kombinaci prvků jedné i druhé afinní báze:

$$b = a + \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = a' + \sum_{i=1}^{n} x_i' v_i'$$

Pokud U je matice přechodu od M k M' a r je vektor souřadnic vektoru $a' - a$ vzhledem k M, pak

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_j v_j &= (a' - a) + \sum_{i=1}^{n} x_i' \sum_{j=1}^{n} u_{ji} v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j v_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{ji} x_i' \right) v_j\end{aligned}$$

Z jednoznačnosti souřadnic vektoru vzhledem k bázi M plyne

$$x_j = r_j + \sum_{i=1}^{n} u_{ji} x_i',$$

což se dá zapsat i maticově ve formě

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix}$$

Pokud M a M' jsou ortonormální báze, je U unitární matice.

3. Kvadriky

Kvadrika je množina bodů $x \in A_n$ zadaná rovnicí $f(x) = 0$, kde

$$f(x) = x^T A x + 2b^T x + c$$

Zde A je nějaká symetrická matice, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Podobně jako v případě podprostorů afinního prostoru, i kvadriku můžeme zapsat jako průnik nulové množiny kvadratické formy

$$Q((x_0, x^T)) := \begin{pmatrix} x_0 & x^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}$$

s množinou A_n. Kvadriku nazveme regulární, pokud je matice Q regulární. K určení typu kvadriky budeme hledat afinní bázi, v níž bude mít matice této kvadratické formy jednodušší tvar. Určitě existuje matice U taková, že $U^T A U =: D$ je diagonální. Pak

$$\begin{pmatrix} 1 & r^T \\ 0 & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & U \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c + b^T r + r^T b + r^T A r & (b^T + r^T A) U \\ U^T (b + A r) & U^T A U \end{pmatrix}$$

je matice Q vzhledem k nejaké jiné afinní bázi. Nejjednodušší situace nastane, pokud jsou matice A i

$$\begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix}$$

regulární. Volba $r = -A^{-1} b$ vede k diagonalizaci matice kvadratické formy:

$$\begin{pmatrix} c - b^T A^{-1} b & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

přičemž $c' := c - b^T A^{-1} b$ není 0 a $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je regulární. Označíme-li souřadnice bodu vzhledem k nové afinní bázi jako x'^T, je rovnice kvadriky v těchto souřadnicích

$$c' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 = 0$$

. Bod, který má v čárkované bázi souřadnice $x'^T = 0$, budeme považovat za **střed** kvadriky. V původní bázi jsou jeho souřadnice

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix},$$

tedy $x = r + Ux' = -A^{-1}b$.

Tvrzení 14. *Nechť*

$$x^T A x + 2b^T x + c = 0$$

je regulární kvadrika a matice A je taktéž regulární se signaturou $(p, q, 0)$. Označme $c' := c - b^T A^{-1} b$. Pak

- *Je-li $c' > 0$ a $q = 0$ nebo $c' < 0$ a $p = 0$, je kvadrika prázdnou množinou.*
- *Je-li $c' > 0$ a $p = 0$ nebo $c' < 0$ a $q = 0$, je kvadrika elipsoidem.*
- *V ostatních případech je kvadrika hyperboloid.*

Důkaz tvrzení je ihned vidět z diagonálního tvaru. Pokud je matice U ortogonální, jsou čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonále D vlastními čísly matice A. Potom se dá rovnice kvadriky zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{-c'} x_i'^2 = 1,$$

který budeme označovat jako **kanonický tvar** rovnice elipsoidu/hyperboloidu. Čísla $\sqrt{\left|\frac{c'}{\lambda_i}\right|}$ označujeme jako **poloosy** elipsoidu/hyperboloidu.

Pokud je f regulární kvadrika, ale matice A je singulární, předpokládejme, že nuly jdou na diagonále D jako poslední. Pak je ale vidět, že jich nemůže být víc než jedna, jinak by byly poslední dva řádky matice

$$\begin{pmatrix} c + b^T r + r^T b + r^T A r & (b^T + r^T A)U \\ U^T(b + Ar) & D \end{pmatrix}$$

lineárně závislé a f by nebyla regulární kvadrika. Musí proto být $h(A) = n - 1$. Předpokládejme, že U je ortogonální matice a označme $b' = U^T b$, $r' = U^T r$, $\tilde{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, $\tilde{b'} = (b'_1, \ldots, b'_{n-1})$, $\tilde{r'} = (r'_1, \ldots, r'_{n-1})$. Matice formy Q má v tomto označení tvar

$$\begin{pmatrix} c + b'^T r' + r'^T b + r'^T D r' & b'^T + r'^T D \\ b' + D r' & D \end{pmatrix}$$

Když oddělíme v blokové struktuře poslední řádek a sloupec, můžeme matici zapsat jako

$$\begin{pmatrix} c + \tilde{b}'^T \tilde{r}' + \tilde{r}'^T \tilde{b} + \tilde{r}'^T \tilde{D} \tilde{r}' + 2b'_n r'_n & \tilde{b}'^T + \tilde{r}'^T \tilde{D} & b'_n \\ \tilde{b}' + \tilde{D}\tilde{r}' & \tilde{D} & 0 \\ b'_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Položme nyní

$$\tilde{r'} := -\tilde{D}^{-1}\tilde{b}'$$

$$r'_n := \frac{1}{2b'_n}(c - \tilde{b'}^T \tilde{D}^{-1} \tilde{b}'),$$

matice se tím zjednoduší na

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b'_n \\ 0 & \tilde{D} & 0 \\ b'_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a rovnice kvadriky v čárkovaných souřadnicích je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i'^2 + 2b'_n x_n = 0$$

Jedná se o paraboloid, jehož typ je určen signaturou matice $\tilde{D}$. **Směrem osy** paraboloidu je vektor, který lze v čárkovaných souřadnicích vyjádřit jako $(0, \dots, 0, 1)$ a tedy jako vlastní vektor matice D s vlastním číslem 0. V původních souřadnicích ho tedy můžeme hledat jako vlastní vektor matice A s vlastním číslem 0 (je určen až na násobek, protože $h(A) = n - 1$).

Rozbor singulárních kvadrik necháváme na čtenáři.

3.1. Cvičení.

(1) Určete typ kuželoseček pouze počítáním signatur a determinantů:
   (a) $6x^2 - 12y^2 + 14xy - 26x + 10y + 8 = 0$
   (b) $9x^2 + y^2 - 6xy + 12x - 4y + 3 = 0$
   (c) $4x^2 + 2y^2 + 6xy + 2x + 2y + 3 = 0$

   U elips a hyperbol určete jejich střed, u parabol směr osy.

(2) Určete kuželosečku (kvadriku) v $\mathbb{R}^2$ s rovnicí

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 14y + 7 = 0,$$

napište její rovnici v kanonickém tvaru a vyjádření nových souřadnic pomocí starých.

(3) Určete kuželosečku v $\mathbb{R}^2$ s rovnicí

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 14x - 2y - 27 = 0,$$

napište její rovnici v kanonickém tvaru a vyjádření nových souřadnic pomocí starých.

(4) Ověřte, že kuželosečka

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 2y + 3 = 0$$

v $\mathbb{R}^2$ je parabola, napište její kanonickou rovnici a určete její směr osy a souřadnice vrcholu.

(5) Určete následující kvadriku v $\mathbb{R}^3$

$$5x^2 - 16xy - 16xz - 7y^2 - 32yz - 7z^2 + 6x + 66y + 12z + 27 = 0,$$

její typ, rovnici v kanonickém tvaru, případně střed.

(6) Určete následující kvadriku v $\mathbb{R}^3$

$$5x^2 - 4xy + 8xz + 8y^2 + 4yz + 5z^2 - 86x - 88y + 32z + 161 = 0,$$

její typ, rovnici v kanonickém tvaru, případně střed.

(7) Určete následující kvadriku v $\mathbb{R}^3$

$$-x^2 + 4xz + y^2 + 4yz - 14x + 6y - 14z + 14 = 0,$$

její typ, rovnici v kanonickém tvaru, případně střed.

KAPITOLA 12

Jordanův tvar endomorfizmu

1. Jordanova buňka

Ve větě 27 jsme se dozvěděli, že ne všechny matice jsou diagonalizovatelné. Prototypem nediagonalizovatelné matice je **Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem λ**

$$J_{\lambda,k} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{C})$$

Jediné vlastní číslo této matice je λ, vlastní vektory jsou násobky $(1, 0, \dots, 0)^T$, nelze z nich tedy sestavit bázi $\mathbb{C}^k$.

Hlavním smyslem diagonalizace matice je výpočet jejích mocnin (a dalších funkcí, jak uvidíme). Pokud $A = UDU^{-1}$, pak $A^n = UD^nU^{-1}$, a spočíst mocniny diagonální matice D je jednoduché. Mocniny Jordanovy buňky nám pomůže určit následující lemma:

LEMMA 29 (Binomická věta). *Nechť $A, B \in M_k(\mathbb{F})$, $AB = BA$. Pak*

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-j} B^j$$

DŮKAZ. Indukcí s využitím relací pro kombinační čísla a komutování matic A,B. Detaily za cvičení. □

Binomickou větu aplikujeme na rozklad $J_{\lambda,k} = \lambda E + J_{0,k}$, čili

$$(\lambda E + J_{0,k})^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} (J_{0,k})^j$$

Protože $(J_{0,k})^j$ je matice s pásem jedniček paralelně s hlavní diagonálou začínajícím na pozici $1, j+1$, je výsledek roven

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & \dots & \binom{n}{k-2}\lambda^{n-k+2} & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-3}\lambda^{n-k+3} & \binom{n}{k-2}\lambda^{n-k+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

kde pro jednodušší zápis užíváme konvenci $\binom{n}{j} = 0$ pro $j > n$.

Hlavním výsledkem této kapitoly je

VĚTA 49 (Jordanův tvar matice). *Nechť $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ její vlastní čísla o algebraických násobnostech $q_1, \ldots, q_m$. Pak existuje regulární matice U taková, že $A = UJ_AU^{-1}$, kde matice J_A má blokově diagonální tvar*

$$\begin{pmatrix} K_{\lambda_1,q_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K_{\lambda_2,q_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & K_{\lambda_m,q_m} \end{pmatrix},$$

kde každý diagonální blok $K_{\lambda,q} \in M_q(\mathbb{C})$ má blokově diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda,k_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda,k_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & J_{\lambda,k_r} \end{pmatrix},$$

kde $k_1 \geq \ldots \geq k_r$. Matice J_A je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Postup bude následující. Pro zadaný endomorfizmus f na prostoru V dimenze n budeme hledat bázi, vzhledem k níž je jeho matice tvaru J_A, tzv. **Jordanovu bázi**. Nejprve se omezíme na případ, kdy má f jediné vlastní číslo λ a ukážeme, že má ve vhodné bázi matici $K(\lambda, n)$. Poté ukážeme, že V lze zapsat jako direktní součet podprostorů

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} V_\lambda,$$

přičemž $\dim V_\lambda$ je rovna algebraické násobnosti vlastního čísla λ a f má na V_λ jediné vlastní číslo λ.

V dalším budeme vždy předpokládat, že V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$.

DEFINICE 58. Nechť $f \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \sigma(f)$, označme $f_\lambda := f - \lambda 1_V$. **Zobecněným vlastním podprostorem** příslušným λ nazýváme množinu

$$V_\lambda := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\, f_\lambda^m$$

Definice zobecněného vlastního prostoru se dá napsat také jako

$$V_\lambda = \{v \in V | \exists m \in \mathbb{N} : f_\lambda^m(v) = 0\}$$

V následujícím lemmatu ukážeme, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $V_\lambda = \mathrm{Ker}\, f_\lambda^k$.

LEMMA 30. *Nechť $F \in \mathrm{End}(V)$. Pak $\exists k \in \mathbb{N}$, že $\forall l \in \mathbb{N}$ je $\mathrm{Ker}\, F^k = \mathrm{Ker}\, F^{k+l}$, $\mathrm{Im}\, F^k = \mathrm{Im}\, F^{k+l}$. Pro toto k platí rozklad*

$$V = \mathrm{Ker}\, F^k \oplus \mathrm{Im}\, F^k,$$

který je invariantní vůči F, přesněji řečeno $F(\mathrm{Ker}\, F^k) \subset \mathrm{Ker}\, F^k$, $F(\mathrm{Im}\, F^k) = \mathrm{Im}\, F^k$.

DŮKAZ. Pokud $F^j(v) = 0$, pak jistě $F^{j+1}(v) = 0$, tedy $\mathrm{Ker}\, F^j \leq \mathrm{Ker}\, F^{j+1}$. V posloupnosti

$$0 \leq \mathrm{Ker}\, F \leq \mathrm{Ker}\, F^2 \leq \ldots \leq \mathrm{Ker}\, F^j \leq \mathrm{Ker}\, F^{j+1} \leq \ldots$$

nemohou být všechny inkluze ostré, protože se jedná o podprostory v prostoru V, který má konečnou dimenzi. Pokud k je nejmenší takové, že $\mathrm{Ker}\, F^k = \mathrm{Ker}\, F^{k+1}$, a $v \in \mathrm{Ker}\, F^{k+l}$ pro nějaké $l > 1$, pak $F^{l-1}(v) \in \mathrm{Ker}\, F^{k+1} = \mathrm{Ker}\, F^k$, tedy $F^{k+l-1}(v) = 0$. Opakovaným použitím této úvahy plyne, že $v \in \mathrm{Ker}\, F^k$, čímž je dokázáno první tvrzení.

Pokud $v = F^{j+1}(w)$, pak také $v = F^j(F(w))$, čili $\operatorname{Im} F^j \geq \operatorname{Im} F^{j+1}$. Věta o dimenzi jádra a obrazu pro F^k říká, že

$$\dim \operatorname{Ker} F^k + \dim \operatorname{Im} F^k = \dim V,$$

a odtud plyne, že $\dim \operatorname{Im} F^k = \dim \operatorname{Im} F^{k+1}$, a tedy nutně $\operatorname{Im} F^k = \operatorname{Im} F^{k+1}$. Tím je dokázáno i druhé tvrzení.

Pro třetí tvrzení stačí dokázat, že každý vektor $v \in \operatorname{Ker} F^k \cap \operatorname{Im} F^k$ už musí být nulový. Takový vektor lze ale psát jako $v = F^k(w)$, kde $F^{2k}(w) = 0$, čili $w \in \operatorname{Ker} F^{2k} = \operatorname{Ker} F^k$. Tedy $v = F^k(w) = 0$.

Pokud $v \in F(\operatorname{Ker} F^k)$, pak pro $w \in \operatorname{Ker} F^k$ takové, že $F(w) = v$ platí $0 = F^{k+1}(w) = F^k(v)$, tedy $v \in \operatorname{Ker} F^k$. Poslední tvrzení je nejjednodušší: platí

$$F(\operatorname{Im} F^k) = \operatorname{Im} F^{k+1} = \operatorname{Im} F^k.$$

□

Aplikujeme-li lemma na $F = f_\lambda$, kde λ je vlastní číslo f, dostáváme, že $\operatorname{Ker} f_\lambda^k$ je právě zobecněný vlastní podprostor V_λ. Obyčejný vlastní podprostor je $\operatorname{Ker} f_\lambda$, což je nějaký (obecně netriviální) podprostor $\operatorname{Ker} f_\lambda^k$. Později ukážeme, že doplněk $\operatorname{Im} f_\lambda^k$ prostoru V_λ ve V je právě direktním součtem všech ostatních zobecněných vlastních podprostorů. Nejprve se ale omezíme na případ, kdy V_λ je rovno celému V.

1.1. Cvičení.

(1) Najděte vlastní podprostory a zobecněné vlastní podprostory matice $J_{0,k}$ a $J_{0,k}^2$.
(2) Formulujte a dokažte binomickou větu pro komutující endomorfizmy $f, g \in \operatorname{End}(V)$.
(3) Najděte zobecněné vlastní prostory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Sestavte blokově diagonální 6×6 matici J s Jordanovými buňkami na diagonále tak, aby dimenze $N(J^i)$ byly postupně pro $i = 1, 2, 3$ rovny $3, 5, 6$.

2. Nilpotentní endomorfismus

DEFINICE 59. Endomorfizmus $F \in \operatorname{End}(V)$ se nazývá **nilpotentní**, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $F^k = 0$. Nejmenší takové k se nazývá **stupeň nilpotence** endomorfizmu F. Podobně **nilpotentní matice** je taková, jejíž nějaká mocnina je nulová matice.

LEMMA 31. *Endomorfismus F vektorového prostoru V je nilpotentní, právě když jeho jediné vlastní číslo je nula.*

DŮKAZ. Pokud má F nenulové vlastní číslo λ a příslušný vlastní vektor je v, pak $F^j(v) = \lambda^j v$, takže $F^j \neq 0$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme naopak, že jediné vlastní číslo F je 0. Podle lemmatu 30 existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\operatorname{Im} F^k = \operatorname{Im} F^{k+1}$ a pokud označíme $W := \operatorname{Im} F^k$, je F na W izomorfizmus. Pokud $W \neq 0$, má F na W vlastní číslo, které ale nemůže být nulové, pokud je F izomorfizmus. Musí tedy být $W = 0$, pak ovšem $F^k = 0$. □

Lemma opět aplikujeme na f_λ, které má stejné vlastní vektory jako f, ale vlastní čísla posunutá o λ. Tedy f_λ je nilpotentní, právě když jediným vlastním číslem f je λ. Pro lepší čitelnost označme f_λ již osvědčeným symbolem F. Máme tedy řetězec podprostorů

$$0 \lneq \operatorname{Ker} F \lneq \operatorname{Ker} F^2 \lneq \ldots \lneq \operatorname{Ker} F^{k-1} \lneq \operatorname{Ker} F^k \equiv V,$$

Pro libovolné $v \in V$ existuje řetízek vektorů

$$v \xrightarrow{F} F(v) \xrightarrow{F} F^2(v) \xrightarrow{F} \ldots$$

Protože stupeň nilpotence F je k, obsahuje každý řetízek nejvýše k nenulových vektorů. Poslední nenulový prvek každého řetízku zobrazuje F na nulový vektor, je to tedy prvek $\operatorname{Ker} F \equiv \operatorname{Ker} f_\lambda$, jinými slovy vlastní vektor f s vlastním číslem λ. Ostatní vektory v řetízku se nazývají **přidružené vlastní vektory**. Definujme **stupeň přidruženého vlastního vektoru** v jako nejmenší číslo j takové, že $F^j(v) = 0$.

Lemma 32. *Nechť $R_1, \ldots, R_r$ jsou řetízky vektorů spojených nilpotentním endomorfizmem F a $v_1, \ldots, v_r$ vlastní vektory F v jednotlivých řetízcích. Pak množina $R_1 \cup \ldots \cup R_r$ všech vektorů ve všech řetízcích je lineárně nezávislá, právě když je lineárně nezávislá množina vlastních vektorů $\{v_1, \ldots, v_r\}$.*

Důkaz. Pokud je $R_1 \cup \ldots \cup R_r$ lineárně nezávislá, pak musí být nutně lineárně nezávislá i její podmnožina $\{v_1, \ldots, v_r\}$. Nechť naopak existují vektory $w_1, \ldots, w_p$ z $R_1 \cup \ldots \cup R_q$ takové, že $\sum_{i=1}^{p} r_i w_i = 0$, kde všechna r_i jsou nenulová čísla. Nechť K je maximální stupeň vektoru z $M := \{w_1, \ldots, w_p\}$, vyberme podmnožinu $N \subset M$ tvořenou všemi vektory stupně K. Pak

$$0 = F^{K-1}\left(\sum_{i=1}^{p} r_i w_i\right) = \sum_{w_i \in N} r_i F^{K-1}(w_i)$$

Protože vektory $F^{K-1}(w_i)$ jsou v $\operatorname{Ker} F$, tvoří podmnožinu $\{v_1, \ldots, v_r\}$, která je lineárně závislá. □

Pokud by existoval jediný řetízek

$$M = \{F^{k-1}(v), F^{k-2}(v), \ldots, F(v), v\},$$

který by již tvořil bázi V, pak podle definice matice homomorfizmu

$$(F)_{MM} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv J_{0,k}$$

a tedy

$$(f)_{MM} = (F + \lambda 1_V)_{MM} = J_{0,k} + \lambda E = J_{\lambda,k}$$

Když dokážeme, že existuje báze, která je sjednocením množiny řetízků, bude mít vzhledem k této bázi f matici tvaru

$$K_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} J_{\lambda,k_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda,k_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & J_{\lambda,k_r} \end{pmatrix},$$

kde k_i jsou délky řetízků.

LEMMA 33. *Nechť $F \in \mathrm{End}(V)$ je nilpotentní endomorfizmus stupně k. Pak existují řetízky $R_1, \ldots, R_r$ takové, že $R_1 \cup \ldots \cup R_r$ je báze V.*

DŮKAZ. Nejprve zkonstruujme bázi $\mathrm{Ker}\, F$ následujícím postupem:

(1) Zvolíme libovolnou bázi $M_1 = \{v_1, \ldots, v_{r_1}\}$ prostoru $\mathrm{Ker}\, F \cap \mathrm{Im}\, F^{k-1}$.
(2) Protože $\mathrm{Im}\, F^{k-1} \leq \mathrm{Im}\, F^{k-2}$, doplníme ji množinou vektorů $M_2 = \{v_{r_1+1}, \ldots, v_{r_2}\}$ na bázi $M_1 \cup M_2$ prostoru $\mathrm{Ker}\, F \cap \mathrm{Im}\, F^{k-2}$.
(3) Takto doplňujeme až k bázi $M_1 \cup \ldots \cup M_{k-1}$ prostoru $\mathrm{Ker}\, F \cap \mathrm{Im}\, F$.
(4) Doplníme množinou vektorů $M_k = \{v_{r_{k-1}+1}, \ldots, v_{r_k}\}$ na bázi celého $\mathrm{Ker}\, F$.

Pro každý vektor $v \in M_i$, $i < k$ existuje $w \in V$ takový, že $v = F^{k-i}(w)$. Označme pro $r_{i-1} < j \leq r_i$

$$R_j := \{F^{k-i}(w), \ldots, F(w), w\}$$

a $R_j = \{v_j\}$ pro $r_{k-1} < j \leq r_k$. $M = R_1 \cup \ldots \cup R_r$ je sjednocení řetízků, jejichž vektory stupně 1 (tj. vlastní vektory F) tvoří bázi $\mathrm{Ker}\, F$. Podle lemmatu 32 je tedy M lineárně nezávislá. Zbývá dokázat, že generuje V.

Předpokládejme, že existuje vektor $w \notin \langle M \rangle$ a vyberme mezi všemi takovými ten, jehož stupeň $1 \leq K \leq k$ bude minimální. Pak $F^{K-1}(w) \in \mathrm{Ker}\, F \cap \mathrm{Im}\, F^{K-1}$ a tedy existují čísla $a_1, \ldots, a_{r_{k-K+1}}$, pro něž

$$F^{K-1}(w) = \sum_{j=1}^{r_{k-K+1}} a_j v_j$$

Ke každému vektoru v_j, $1 \leq j \leq r_{k-K+1}$ existuje v příslušném řetízku w_j takové, že $F^{K-1}(w_j) = v_j$. Pak ale

$$F^{K-1}\left(w - \sum_{j=1}^{r_{k-K+1}} a_j w_j\right) = F^{K-1}(w) - \sum_{j=1}^{r_{k-K+1}} a_j v_j = 0,$$

našli jsme tedy vektor $w - \sum_{j=1}^{r_{k-K+1}} a_j w_j$ stupně $K-1$, který také neleží v $\langle M \rangle$, což je spor s volbou w. □

Tím jsme dokázali větu 49 pro případ nilpotentního endomorfizmu, resp. pro případ endomorfizmu s jediným vlastním číslem. Jednoznačnost posloupnosti velikostí Jordanových buněk je zřejmá, jakmile si uvědomíme, že se tyto velikosti dají vyjádřit pomocí dimenzí určitých podprostorů svázaných s endomorfizmem F. Počet Jordanových buněk velikosti j je roven počtu řetízků délky j a ten je zase roven

$$\dim \mathrm{Ker}\, F \cap \mathrm{Im}\, F^{j-1} - \dim \mathrm{Ker}\, F \cap \mathrm{Im}\, F^{j}$$

PŘÍKLAD 38. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $(\lambda - 3)^4$, takže jediným vlastním číslem matice

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je nula a tedy je to matice nilpotentní. Vidíme, že $h(A-3E) = 2$, tedy geometrická násobnost vlastního čísla 3 je

$$\dim \mathrm{Ker}(A - 3E) = 4 - h(A - 3E) = 2$$

Spočteme mocniny $A-3E$:

$$(A-3E)^2=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},(A-3E)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Stupeň nilpotence $A-3E$ je 3 a to bude také délka nejdelšího řetízku. Potřebujeme už jen jeden vektor, abychom měli čtyři do báze, takže zbývající řetízek musí mít délku 1. Jordanův tvar matice A je proto

$$J_A:=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Nyní najdeme Jordanovu bázi. Horním vektorem dlouhého řetízku může být libovolný vektor mimo $\mathrm{Ker}(A-3E)^2$, například $v=(1,0,0,0)^T$. Jeho obrazy pomocí $(A-3E)$ a $(A-3E)^2$ jsou

$$(A-3E)v=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},(A-3E)^2v=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Vektor $(A-3E)^2v$ už je v $\mathrm{Ker}(A-3E)$, které má dimenzi 2. Libovolný vektor z $\mathrm{Ker}(A-3E)$, který není násobkem $(-1,-1,0,1)^T$, můžeme vzít jako zbývající řetízek délky 1, například $(0,0,1,0)^T$. Homomorfismus f_A má pak matici J_A vzhledem k bázi

$$M=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

a platí

$$A\equiv(f_A)_{KK}=(1)_{KM}(f_A)_{MM}(1)_{MK}=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Všimněte si, že výpočet $(A-3E)^3$ už nebyl nutný: jakmile jsme zjistili , že $h((A-3E)^2)=1$, bylo jasné, že v dalším kroku musí hodnost klesnout na nulu. V tu chvíli už bylo také jasné, že řetízky budou délek 3 a 1, protože jsme z $\dim\mathrm{Ker}(A-3E)$ věděli, že budou dva a kdyby měly oba délku 2, pak by stupeň nilpotence $A-3E$ musel být také 2. Jordanova báze, jak vidno, není jednoznačně určena, vždy máme určitou volnost při volbě vektorů, které jsou vrcholy řetízků.

PŘÍKLAD 39. Uvažujme vektorový prostor $V=P^n(x,\mathbb{C})$ a na něm zobrazení $f=\frac{d}{dx}$. Je zřejmé, že je to nilpotentní zobrazení stupně $n+1$ a že báze V je tvořena jediným řetízkem:

$$0\leftarrow 1\leftarrow x\leftarrow\tfrac{x^2}{2}\leftarrow\ldots\leftarrow\tfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}\leftarrow\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\leftarrow\tfrac{x^n}{n!}$$

Vzhledem k této bázi má tedy zobrazení matici $J_{0,n+1}$.

Pro $V=P^{2k-1}(x,\mathbb{C})$ a $f=\frac{d^2}{dx^2}$ je stupeň nilpotence k a $\mathrm{Ker}\,f=\langle 1,x\rangle$. Očekáváme tedy dva řetízky. Oba začínají ve $V\setminus\mathrm{Ker}\,f^k$ a za jejich začátky můžeme

zvolit nějaké násobky x^{2k-1} a x^{2k-2}. Dostáváme tedy

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow \tfrac{x^2}{2} \leftarrow \tfrac{x^4}{4!} \leftarrow \ldots \leftarrow \tfrac{x^{2k-4}}{(2k-4)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

$$0 \leftarrow x \leftarrow \tfrac{x^3}{3!} \leftarrow \tfrac{x^5}{5!} \leftarrow \ldots \leftarrow \tfrac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

a matice f má vzhledem k této bázi (seřazené po řádcích) blokově diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} J_{0,k} & 0 \\ 0 & J_{0,k} \end{pmatrix}$$

Stejné zobrazení na $V = P^{2k}(x, \mathbb{C})$ má stejnou dimenzi jádra, takže znovu dva řetízky. Stupeň nilpotence je o jedna větší, $\langle x^{2k} \rangle$ je doplněk $\operatorname{Ker} f^k$ ve V, jeho obrazy vytvářejí řetízek končící $(2k)!$. Druhý vektor řetízku $f(x^{2k}) = 2kx^{2k-2}$ leží v $\operatorname{Ker} f^k \setminus \operatorname{Ker} f^{k-1}$, rozdíl dimenzí je ale 2. Stačí doplnit vektor x^{2k-1} a

$$\langle x^{2k-2}, x^{2k-1} \rangle \oplus \operatorname{Ker} f^{k-1} = \operatorname{Ker} f^k$$

Druhý řetízek vzniklý zobrazením (nějakého násobku) x^{2k-1} už spolu s (také pro přehlednost přeškálovaným) prvním dává bázi V:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow \tfrac{x^2}{2} \leftarrow \tfrac{x^4}{4!} \leftarrow \ldots \leftarrow \tfrac{x^{2k-4}}{(2k-4)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$0 \leftarrow x \leftarrow \tfrac{x^3}{3!} \leftarrow \tfrac{x^5}{5!} \leftarrow \ldots \leftarrow \tfrac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

a Jordanova matice je

$$\begin{pmatrix} J_{0,k+1} & 0 \\ 0 & J_{0,k} \end{pmatrix}$$

2.1. Cvičení.

(1) Napište všechny možné Jordanovy tvary nilpotentní matice 5x5.
(2) Nechť $V = P^{16}(x, \mathbb{C})$, $f \in \operatorname{End}(V)$ je definováno jako třetí derivace $f(p(x)) = p'''(x)$. Najděte Jordanovu bázi a Jordanův tvar matice endomorfismu f.
(3) Existuje na $\mathbb{C}^2$ nilpotentní zobrazení stupně 3?
(4) Nechť N je nilpotentní matice a $M = QNQ^{-1}$. Co lze říci o nilpotenci, případně stupni nilpotence matice M?
(5) Nechť f je nilpotentní zobrazení stupně 4. Jaký je vztah mezi $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f^3$?
(6) Dokažte, že pokud A, B jsou dvě komutující nilpotentní matice, pak je nilpotentní i jejich součet a součin.
(7) Jsou všechny nilpotentní matice singulární? Jsou všechny singulární matice nilpotentní? Najděte důkaz nebo protipříklad.
(8) Nechť J_0 je Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem 0. Najděte matici J_0^{k-1} a určete její Jordanův tvar a Jordanovu bázi.
(9) Najděte Jordanův tvar nilpotentní matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(10) Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

(11) Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

(12) Najděte Jordanův tvar matice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(13) Najděte Jordanův tvar matice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(14) Nechť $V = M_n(\mathbb{C})$, $S \in V$, $f_S \in \mathrm{End}(V)$ je definováno předpisem $f_S(A) := SA - AS$. Dokažte, že pokud je S nilpotentní matice, pak f_S je nilpotentní endomorfizmus. Platí opačná implikace?

(15) Nechť p je polynom. Dokažte, že

$$p(J_{0,k}) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) & \frac{p''(0)}{2!} & \dots & \frac{p^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \\ 0 & p(0) & p'(0) & \dots & \frac{p^{(k-2)}(0)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & p(0) & \dots & \frac{p^{(k-3)}(0)}{(k-3)!} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

(16) Nechť A je nilpotentní matice, označme číslem k maximální délku řetízku v Jordanově bázi. Pomocí předchozí úlohy dokažte, že dva libovolné polynomy p a q splňují $p(A) = q(A)$ právě tehdy, když $p^{(i)}(0) = q^{(i)}(0)$ pro všechna $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

(17) Dokažte, že pokud je N nilpotentní matice, pak $E - N$ je regulární, a určete $(E - N)^{-1}$.

3. Jordanův tvar

Obraťme nyní pozornost k obecnému případu, kdy homomorfismus f může mít více různých vlastních čísel.

LEMMA 34. *Nechť $f \in \mathrm{End}(V)$. Pak $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} V_\lambda$.*

DŮKAZ. Nechť λ, μ jsou dvě různá vlastní čísla f. Pak

$$f_\lambda \equiv f - \lambda 1_V = f_\mu + (\mu - \lambda) 1_V$$

Označme P, Q nejmenší čísla, pro něž je

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}\, f_\lambda^P, V_\mu = \mathrm{Ker}\, f_\mu^Q$$

Existence P a Q je zaručena lemmatem 30. Protože f_μ a $(\mu-\lambda)1_V$ jsou komutující endomorfizmy, platí pro ně analogie lemmatu 29, tj. binomické věty:

$$f_\lambda^P = \sum_{p=0}^{P} \binom{P}{p} (\mu-\lambda)^{P-p} f_\mu^p$$

Ukážeme nejprve, že $V_\lambda \cap V_\mu = 0$. Uvažujme vektor $w \in V_\lambda \equiv \operatorname{Ker} f_\lambda^P$. Pak z předchozí rovnice plyne, že při označení čísla $c_p = -(\lambda-\mu)^{-p}\binom{P}{p}$, pro něž

$$w = \sum_{p=1}^{P} c_p f_\mu^p(w) \in \operatorname{Im} f_\mu$$

Pokud toto vyjádření w znovu dosadíme do pravé strany, obdržíme w jako lineární kombinaci vektorů $f_\mu^p(w)$ pro $p \geq 2$. Opakováním tohoto postupu zjistíme, že $w \in \operatorname{Im} f_\mu^Q =: W$. Z lemmatu 30 víme, že $V_\mu \cap W = 0$, tudíž je-li $w \in V_\mu$, musí být $w = 0$. Vedlejším produktem našich úvah je, že pokud je w ve V_λ, pak je i v $\operatorname{Im} f_\mu^Q$, což jak víme, je doplněk V_μ z lemmatu 30.

Tvrzení věty nyní dokážeme indukcí podle počtu různých vlastních čísel. Případ jediného vlastního čísla pokrývá lemma 31. Předpokládejme tedy, že pro všechny endomorfizmy s méně než m vlastními čísly věta platí a f má právě m vlastních čísel. Z lemmatu 30 víme, že $f_\mu(W) = W$ a tedy i $f(W) \subset W$. Označme zúžený endomorfizmus symbolem $f' := f|_W$. Každé vlastní číslo f' je zároveň i vlastním číslem f, zároveň víme, že pokud λ je vlastní číslo f různé od μ, pak $V_\lambda \in W$, je tedy i vlastním číslem f'. Jinými slovy, vlastní čísla f zúženého na W jsou právě všechna vlastní čísla f různá od μ. Pro každé takové vlastní číslo $\lambda \neq \mu$ je navíc dle závěru předchozího odstavce $V_\lambda \subset W$.

Z indukčního předpokladu tedy

$$W = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f')} V_\lambda$$

Protože $V = V_\mu \oplus W$ a $\sigma(f) = \sigma(f') \cup \{\mu\}$, plyne odtud tvrzení věty. □

Dokázali jsme tedy následující větu, která je alternativní formulací věty 49:

VĚTA 50 (Jordanův tvar endomorfizmu). *Nechť $f \in \operatorname{End}(V)$. Pak existuje báze V, vzhledem k níž má matice f blokově diagonální tvar s bloky tvaru Jordanových buněk příslušných vlastním číslům f. Tyto bloky jsou určeny až na pořadí jednoznačně.*

Několik důsledků:

DŮSLEDEK 8. *Algebraická násobnost vlastního čísla je rovna dimenzi zobecněného vlastního podprostoru a je vždy větší nebo rovna násobnosti geometrické.*

DŮSLEDEK 9. *Dvě matice jsou podobné, právě když mají stejný Jordanův tvar.*

DŮSLEDEK 10 (Jordanův rozklad). *Každou čtvercovou matici A lze jednoznačně zapsat jako součet $A_D + A_N$, kde A_D je diagonalizovatelná, A_N nilpotentní a A_D komutuje s A_N.*

Platí dokonce, že A_D i A_N lze zapsat jako polynomy v matici A.

PŘÍKLAD 40. Nechť $V = P^2(x,y,\mathbb{C}) = \langle 1, x, x^2, y, y^2, xy\rangle$ a $f = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Platí

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 & f(y) &= y \\ f(x) &= 1 & f(y^2) &= 2y^2 \\ f(x^2) &= 2x & f(xy) &= y + xy \end{aligned}$$

Matice f vzhledem k bázi $K = \{1, x, x^2, y, y^2, xy\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} =: A$$

je horní trojúhelníková, vlastní čísla jsou tedy rovna diagonálním elementům, $\sigma(f) = \{0, 0, 0, 1, 1, 2\}$ (s násobnostmi). Proto $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$, kde $\dim V_0 = 3$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$.

Zobecněný vlastní podprostor V_2 má dimenzi 1, je tedy přímo vlastním podprostorem, generovaným vektorem y^2. Prostor V_0 nalezneme jako $\operatorname{Ker}(f - 01_V)^k$ pro nejmenší k takové, že $\dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$. To nastává pro $k = 3$, pak totiž

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^3 \end{pmatrix},$$

kde C^3 je regulární matice. V souřadnicích je $\operatorname{Ker} A^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, tedy $V_0 = \operatorname{Ker} f^3 = \langle 1, x, x^2 \rangle$. Začátkem řetízku může být libovolný vektor z $V_0 \setminus \operatorname{Ker} f^2$, tedy například x^2, jeho obrazy jsou postupně $2x$ a 2. Tyto tři vektory tvoří bázi V_0, takže další řetízky už ve V_0 nejsou. To je vidět i z toho, že $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Zbývá najít řetízkovou bázi ve V_1. Vidíme, že $\operatorname{Ker}(f - 1.1_V) = \langle y \rangle$, takže máme jen jeden řetízek délky 2, který končí vektorem y. Vypočítáme

$$(A - 1E)^2 = \begin{pmatrix} (B-E)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde 3×3 blok $(B - E)^2$ je regulární, takže $\operatorname{Ker}(A - E)^2 = \langle e_4, e_6 \rangle$. Za začátek řetízku lze proto zvolit například $xy \in \operatorname{Ker}(f - 1_V)^2 \setminus \operatorname{Ker}(f - 1_V)$, jeho obrazem je $(f - 1_V)(xy) = y + xy - xy = y$.

Celkově tedy máme bázi $M = \{2, 2x, x^2, y, xy, y^2\}$, kde první tři vektory tvoří bázi V_0, další dva V_1 a poslední V_2. Vzhledem k M má matice f tvar

$$\begin{pmatrix} J_{0,3} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2,1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.1. Cvičení.

(1) Nechť A, B jsou dvě nilpotentní matice typu $n \times n$. Ukažte, že pro $n = 2, 3$ můžete rozhodnout o tom, zda jsou A a B podobné, pouze na základě jejich hodnosti, ale pro $n = 4$ už ne. Ukažte, že pro $n = 4$ vám stačí navíc znát hodnost jejich druhých mocnin.

(2) Dokažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

jsou podobné a najděte matici U takovou, že $UAU^{-1} = B$.

(3) Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

(4) Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(6) Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(7) Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(10) Určete Jordanovy tvary matic

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(11) Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

(12) Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

(13) Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ najděte Jordanovu bázi endomorfismu F, který polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $p'(x) - x^2p''(x)$.

(14) Na prostoru $\langle 1, x, y\rangle$ polynomů ve dvou proměnných stupně nejvýše jedna uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x, y)$ předpisem

$$F(p(x, y)) = y\frac{\partial}{\partial x}p(x, y) + (1 - y)\frac{\partial}{\partial y}p(x, y)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(15) Na prostoru $\langle 1, y, x, x^2, xy, y^2\rangle$ polynomů ve dvou proměnných stupně nejvýše dva uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x, y)$ předpisem

$$F(p(x, y)) = x\frac{\partial}{\partial y}p(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}p(x, y)$$

Ověřte, že tento endomorfizmus je nilpotentní, najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(16) Na prostoru $\langle 1, x, y, x^2, xy, y^2\rangle$ uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x, y)$ předpisem

$$F(p(x, y)) = p(x + 1, y)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(17) Na prostoru $\langle 1, x, y, x^2, xy, y^2\rangle$ uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x, y)$ předpisem

$$F(p(x, y)) = x\frac{\partial}{\partial y}p(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}p(x, y) - 2p(x, y + 1)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(18) Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici A platí, že A je podobná A^T.

4. Exponenciála matice

Označení 1. Standardně značíme maticové elementy matice A symbolem a_{ij}. V některých případech, například u inverzní matice A^{-1}, by označení elementů (např. a^{-1}_{ij}) bylo zavádějící. Proto budeme značit ij-tý element matice A v případě potřeby také $(A)_{ij}$. Naopak (a_{ij}) bude označovat matici, jejíž elementy jsou a_{ij}.

Pomocí Jordanova tvaru umíme spočítat libovolnou mocninu libovolné komplexní matice a tedy i dosadit matici do polynomu. Je možné matici dosadit i do mocninné řady?

Definice 60. Je-li $(B_q)_{q=0}^{\infty}$ posloupnost matic z $M_{mn}(\mathbb{C})$, pak matici $B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ nazveme limitou $\lim_{q\to\infty} B_q$ posloupnosti, pokud $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{q\to\infty}(B_q)_{ij} = (B)_{ij}$.

Součet nekonečné řady matic je pak definován jako limita jejích částečných součtů. Definici limity můžeme přeformulovat i pomocí zavedení **normy** na množině matic vztahem $\|B\| := \max_{i,j} |(B)_{ij}|$. Platí

LEMMA 35. *Nechť $(B_q)_{q=0}^{\infty}$ je posloupnost matic z $M_{mn}(\mathbb{C})$. Pak $B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ je její limita, právě když $\lim_{q\to\infty} \|B_q - B\| = 0$.*

DŮKAZ. Jednoduché cvičení. □

DEFINICE 61. Pro libovolnou čtvercovou matici A definujme její **exponenciálu**

$$\exp A = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} A^q$$

LEMMA 36. *Pro libovolnou čtvercovou matici je $\exp A$ absolutně konvergentní řada.*

DŮKAZ. Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$. Pro všechna $q \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $\|A^q\| \leq n^{q-1}\|A\|^q$, která se snadno dokáže indukcí. Pro $q = 1$ je tvrzení triviální. Předpoklá dejme, že platí pro nějaké $q \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} \|A^{q+1}\| = \|A^q A\| &= \max_{ij} |\sum_k (A^q)_{ik}(A)_{kj}| \\ &\leq \max_{ij} \sum_k |(A^q)_{ik}||(A)_{kj}| \\ &\leq n\|A\| \max_{ik} |(A^q)_{ik}| \\ &= n\|A\|\|A^q\| \leq n^q \|A\|^{q+1}, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku použili indukční předpoklad.

Pak ale pro libovolné $Q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{q=0}^{Q} \frac{1}{q!} |(A^q)_{ij}| \leq \sum_{q=0}^{Q} \frac{1}{q!} \|A^q\| \leq \sum_{q=0}^{Q} \frac{n^q}{q!} \|A\|^q = e^{n\|A\|}$$

□

VĚTA 51. *Nechť $A, B, Q \in M_{nn}(\mathbb{C})$, Q regulární. Pak*

(1) *Pokud $AB = BA$, pak $\exp(A+B) = \exp A \exp B$*
(2) *$\exp A$ je regulární a $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$*
(3) *$\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}\exp(A)Q$*
(4) *$\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$*

DŮKAZ. $\exp A$ a $\exp B$ jsou dvě absolutně konvergentní řady, jejich součin $\exp A \exp B$ je tedy roven řadě

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}(A)^q \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(B)^r = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!(p-q)!} A^q B^{p-q} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} A^q B^{p-q} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(A+B)^p,$$

v poslední rovnosti jsme využili lemma 29. Tím dostáváme první tvrzení. Druhé plyne z prvního, protože A a $-A$ komutují a $\exp 0 = E$ na základě přímého dosazení. Třetí je důsledkem vlastnosti $QA^qQ^{-1} = (QAQ^{-1})^q$ a věty o algebře limit.

Poslední tvrzení dokážeme pomocí věty o Jordanově tvaru. Pokud $A = QJ_AQ^{-1}$, kde J_A je Jordanův tvar A, pak platí $\det \exp A = \det \exp J_A$ ze třetího bodu a vlastností determinantu a $\exp \operatorname{Tr} A = \exp \operatorname{Tr} J_A$ z vlastností stopy. Z tvaru mocnin

Jordanových buněk vidíme, že $\exp J_A$ je horní trojúhelníková matice, která má na diagonále čísla e^{λ_i}, $i \in \{1, \dots, n\}$, kde λ_i jsou vlastní čísla A, každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost (viz též níže explicitní tvar exponenciály Jordanovy buňky). Pak ale

$$\det \exp J_A = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{\operatorname{Tr} J_A}$$

□

Jordanův tvar umožňuje explicitně spočítat exponenciálu libovolné matice. Pro jednoduchost se věnujme případu $A = QJQ^{-1}$, kde J je Jordanova buňka stupně n s vlastním číslem λ. Pak $J = \lambda E + N$ je rozklad na součet dvou komutujících matic, takže díky prvnímu bodu předchozí

$$\begin{aligned}
\exp A &= Q \exp(J) Q^{-1} = Q \exp(\lambda E + N) Q^{-1} \\
&= Q \exp(\lambda E) \exp N Q^{-1} = Q e^{\lambda} \exp N Q^{-1} \\
&= Q e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}
\end{aligned}$$

Pokud $t \in \mathbb{C}$, lehkým zobecněním tohoto postupu plyne

$$\exp(tA) = Q e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

což, jak za chvíli uvidíme, je výsledek klíčový pro řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic.

4.1. Cvičení.

(1) Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{67}$$

(2) Najděte nějakou 2×2 matici A, která splňuje

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(3) Určete pro libovolné celé n matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{n}$$

(4) Spočtěte

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ bez použití Jordanova tvaru, pouze z definice exponenciály.

(5) Určete
$$\exp\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
(6) Určete
$$\exp\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$
(7) Dokažte, že pro hermitovskou matici H je matice $\exp(iH)$ unitární. Použijte definici exponenciály.
(8) Nechť p je polynom a J Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem 0. Dokažte, že
$$p(J) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) & \frac{p''(0)}{2!} & \dots & \frac{p^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \\ 0 & p(0) & p'(0) & \dots & \frac{p^{(k-2)}(0)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & p(0) & \dots & \frac{p^{(k-3)}(0)}{(k-3)!} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p(0) \end{pmatrix}$$
(9) Nechť A je nilpotentní matice, označme číslem k maximální délku řetízku v Jordanově bázi. Pomocí předchozí úlohy dokažte, že dva libovolné polynomy p a q splňují $p(A) = q(A)$ právě tehdy, když $p^{(i)}(0) = q^{(i)}(0)$ pro všechna $i \in \{0, \dots, k-1\}$.
(10) Dalšími funkcemi, které je možné definovat řadou na maticích podobně jako exponenciálu, jsou goniometrické a hyperbolometrické funkce. Spočítejte matici
$$\sin\begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$
(11) Spočítejte $\ln\begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Diferenciální rovnice

PŘÍKLAD 41. Hledáme dvě funkce $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ splňující rovnice
$$\frac{dx_1}{dt}(t) = -x_1(t) - x_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt}(t) = -4x_1(t) - x_2(t)$$
s počáteční podmínkou $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$. Zadání můžeme kompaktně přepsat jako
$$\dot{x} = Ax, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, x(0) = (2, 1)^T$$
Taková úloha se nazývá homogenní soustavou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Ukážeme, že její obecné řešení má tvar $x = \exp(tA) \cdot c$.

DEFINICE 62. Derivací maticové funkce $Q : \mathbb{R} \to M_{mn}(\mathbb{F})$ v bodě $t \in \mathbb{R}$ rozumíme
$$\lim_{h \to 0} \frac{Q(t+h) - Q(t)}{h} =: \dot{Q}(t) \equiv \frac{dQ(t)}{dt}$$

Je zřejmé, že derivací maticové funkce $Q(t)$ je matice $(\dot{Q}(t))_{ij}$, jejíž elementy jsou derivacemi maticových elementů $(Q(t))_{ij}$.

LEMMA 37. *Nechť $P, Q : \mathbb{R} \to M_{mn}(\mathbb{F}), A \in M_{np}(\mathbb{F}), B \in M_{nm}(\mathbb{F}), R : \mathbb{R} \to M_{nn}(\mathbb{F})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ a funkce P, Q, R, f mají derivaci v bodě t. Pak*

(1) $\frac{d}{dt}(P(t) + Q(t)) = \frac{dP(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt}$
(2) $\frac{d}{dt}(Q(t)A) = \frac{dQ(t)}{dt}A$
(3) $\frac{d}{dt}(BQ(t)) = B\frac{dQ(t)}{dt}$
(4) $\frac{d}{dt}(Q(t)R(t)) = \frac{dQ(t)}{dt}R(t) + Q(t)\frac{dR(t)}{dt}$
(5) $\frac{d}{dt}(f(t)Q(t)) = \frac{df(t)}{dt}Q(t) + f(t)\frac{dQ(t)}{dt}$
(6) *Pokud $m = n$ a $Q(t)$ je regulární, pak*

$$\frac{d}{dt}(Q(t)^{-1}) = -Q(t)^{-1}\frac{dQ(t)}{dt}Q(t)^{-1}$$

(7) *Pro A čtvercovou platí*

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$$

DŮKAZ. Prvních pět tvrzení plyne okamžitě z vlastností derivace číselných funkcí a definic maticového sčítání a násobení. Pro šesté stačí zderivovat vztah $Q(t)Q(t)^{-1} = E$:

$$\frac{d}{dt}(Q(t))Q(t)^{-1} + Q(t)\frac{d}{dt}(Q(t)^{-1}) = 0$$

Odtud již úpravou plyne tvrzení.

Pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$|(\exp(tA))_{ij}| \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|(t+\varepsilon)^q||(A^q)_{ij}|}{q!} \leq e^{n(t+\varepsilon)\|A\|},$$

kde jsme využili stejnou nerovnost jako v závěru důkazu lemmatu 36. číselná řada $\exp(tA)_{ij}$ je tedy v okolí $t \in \mathbb{R}$ stejnoměrně omezená absolutně konvergentní řadou. Podle věty z matematické analýzy (viz třeba Rudin: Základy matematické analýzy, věta 7.10) lze pak řadu derivovat člen po členu:

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA))_{ij} = \frac{d}{dt}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{t^q(A^q)_{ij}}{q!} = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{t^{q-1}(A^q)_{ij}}{(q-1)!} = (A\exp(tA))_{ij},$$

čímž dostáváme poslední tvrzení. □

POZNÁMKA 8. Poslední tvrzení se dá také dokázat čistě algebraicky přechodem k Jordanovu tvaru $\exp(tA) = U\exp(tJ)U^{-1} = U\exp(tD)\exp(tN)U^{-1}$, kde matice $\exp(tD)$ a $\exp(tN)$ explicitně známe.

VĚTA 52. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $c \in \mathbb{C}^n$. Pak jediným řešením soustavy rovnic*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = c$$

je $x(t) = \exp(tA)c$

DŮKAZ. Platí, že $x(0) = \exp(0)c = Ec = c$ a

$$\dot{x}(t) = A\exp(tA)c = Ax(t)$$

Pokud by $y(t)$ bylo jiné řešení stejné úlohy, pak platí

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(-tA)y(t)) &= \exp(-tA)\dot{y}(t) + (-A)\exp(-tA)y(t)\\ &= \exp(-tA)\left[Ay(t) - Ay(t)\right] = 0,\end{aligned}$$

tedy $\exp(-tA)y(t) = d$ je konstatní vektor. Protože $y(0) = c$, platí $d = c$. Tedy $y(t) = \exp(tA)c \equiv x(t)$. □

PŘÍKLAD 42. Matice A z úvodu tohoto oddílu je diagonalizovatelná, platí

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy rovnic je pak

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^t + 5e^{-3t} \\ -6e^t + 10e^{-3t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Budeme-li interpretovat vektorovou funkci $(x_1(t), x_2(t))$ jako pohyb bodu v rovině, pak v souřadnicích vzhledem k Jordanově bázi má řešení tvar $x_1'(t) = c_1'e^t$, $x_2'(t) = c_2'e^{-3t}$. Bod $(s, 0)$ na vodorovné ose se tedy z počátečního stavu vzdaluje s rostoucím časem do nekonečna, bod $(0, s)$ na svislé ose konverguje k nule. Body mimo osy se pohybují po drahách trochu připomínajících hyperboly směrem k bodům $(\pm\infty, 0)$. Tyto dráhy jsou v každém bodě $x \in \mathbb{R}^2$ tečné k vektoru $V_A(x) := Ax$ a nazýváme je integrálními křivkami vektorového pole $V_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Každá 2×2 reálná matice se dvěma různými vlastními čísly je diagonalizovatelná a její vlastní čísla jsou buď obě reálná, nebo jsou komplexně sdružená. V druhém případě označme $\lambda = k + i\omega$ a vytkněme společný faktor e^{kt}:

$$\begin{aligned}\exp(tA) = Q\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-t\bar{\lambda}} \end{pmatrix}Q^{-1} = \\ = e^{tk}Q\begin{pmatrix} e^{it\omega} & 0 \\ 0 & e^{-it\omega} \end{pmatrix}Q^{-1}\end{aligned}$$

Unitární matici uprostřed je možné unitární transformací převést na matici rotace a obě matice přechodu sloučit do jedné:

$$\begin{aligned}e^{tk}Q\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \sin(t\omega) \\ -\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} = \\ = Pe^{tk}\begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \sin(t\omega) \\ -\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

Je vidět, že P musí být reálná matice. Integrální křivka v souřadnicích vzhledem k bázi ze sloupců P má parametrické vyjádření

$$\gamma_c(t) = e^{tk}\begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \sin(t\omega) \\ -\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Pro $k = 0$ je to kružnice, pro $k < 0$ spirála směřující k $(0, 0)$, pro $k > 0$ spirála směřující k nekonečnu.

Jak vypadají integrální křivky v ostatních případech?

VĚTA 53. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$. Pak všechna řešení soustavy rovnic*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$$

jsou $x(t) = \exp(tA)c(t)$, kde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ je funkce splňující $\dot{c}(t) = \exp(-tA)b(t)$.

DŮKAZ. Pokud $x(t), \tilde{x}(t)$ jsou dvě řešení nehomogenní soustavy $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$, pak jejich rozdíl $x(t) - \tilde{x}(t)$ je řešením homogenní soustavy $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Stačí tedy najít partikulární řešení nehomogenní soustavy. Pokud ho budeme hledat

ve tvaru $x_P(t) = \exp(tA)c(t)$, pak dosazením do rovnice dostáváme právě $\dot{c}(t) = \exp(-tA)b(t)$. Obecné řešení nehomogenní soustavy je

$$x(t) = \exp(tA)c(t) + \exp(tA)d = \exp(tA)(c(t) + d),$$

a protože $\frac{d}{dt}(c(t) + d) = \dot{c}(t)$, mají všechna řešení požadovaný tvar. □

Příklad 43. Zajímavá speciální situace nastává, když A má vlastní vektor v s vlastním číslem λ a pravá strana je ve tvaru $b(t) = e^{\mu t}v$. Pak

$$\dot{c}(t) = \exp(-tA)b(t) = e^{(\mu-\lambda)t}v,$$

čili

$$y(t) = \exp(tA)c(t) = \frac{1}{\mu-\lambda}e^{(\mu-\lambda)t}\exp(tA)v = \frac{1}{\mu-\lambda}e^{\mu t}v$$

Pokud λ i μ jsou ryze imaginární, popisuje výsledek periodický pohyb s úhlovou frekvencí μ a amplitudou úměrnou $\frac{1}{\mu-\lambda}$. Čím jsou si λ a μ blíže, tím více roste amplituda. Dostáváme tedy jednoduchý model rezonance při působení vnější síly s frekvencí blízkou frekvenci vlastních kmitů systému.

5.1. Cvičení.

(1) Řešte soustavu diferenciálních rovnic $\dot{y} = Ay + f$, kde A je definováno v předchozím příkladě a $f(t) = (e^{2t}, t\sin t, \cos t)^T$.

(2) Řešte soustavu diferenciálních rovnic $\dot{y} = Cy + f$, kde C je definováno v předpředchozím příkladě a $f(t) = (e^{2t}, t\sin t, \cos t)^T$.

(3) Obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

převeďte substitucí $z(t) := y'(t)$ na soustavu dvou rovnic prvního řádu. Rovnici vyřešte pro případ $a = 2$, $b = 1$. Zobecněte na případ jedné diferenciální rovnice n-tého řádu, napište matici vzniklé soustavy rovnic a její charakteristický polynom.

(4) Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2 \end{aligned}$$

s obecnou poč. podmínkou.

(5) Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_3 \\ x_2' &= x_1 - x_3 \\ x_3' &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = -1$.

(6) Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_3 \\ x_2' &= x_2 + x_3 \\ x_3' &= 2x_3 \end{aligned}$$

s obecnou poč. podmínkou.

(7) Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$. Řešení zapište bez užití komplexních čísel.

(8) Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$y_1' = 5y_1 - 3y_2 + e^t$$
$$y_2' = 3y_1 - y_2$$

s obecnou poč. podmínkou.

(9) Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$y_1' = -2y_1 + 4y_2 + 2$$
$$y_2' = -y_1 + 2y_2 + 1$$

s poč. podmínkou $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

(10) A je komplexní matice $n \times n$ a $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ je n vektorů v C^n závislých na $t \in R$, které řeší soustavu rovnic $x'(t) = Ax(t)$. Zjistěte, jakou diferenciální rovnici splňuje funkce $W(t) = \det(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ a dokažte pomocí toho, že vektory jsou lineárně nezávislé pro všechna t, právě když jsou lineárně nezávislé pro nějaké t.

(11) Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^n$ je posloupnost vektorů, definujme operátor první diference takto: $(\Delta f)_j(i) := f_j(i+1) - f_j(i)$ a násobení maticí A klasicky takto: $(Af)_j(i) = \sum a_{jk} f_k(i)$. Ukažte, že soustava diferenčních rovnic prvního řádu $\Delta f = Af$ má řešení $f(i) = (A+E)^i f(0)$. Ukažte, že rekurentní relaci tvaru $g(i+m) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k g(i+k) = 0$, kde $g : N \to C$ lze převést na soustavu m diferenčních rovnic prvního řádu.

KAPITOLA 13

Tenzory

1. Duální prostor

Uvažujme vektorový prostor V dimenze n a $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ jeho bázi. Vektor $v \in V$ má souřadnice $(v^1, \dots, v^n)$ vzhledem k této bázi a budeme ho zapisovat jako

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i =: v^i e_i$$

Zavádíme zde několik nových konvencí: indexy u souřadnic píšeme nahoře, indexy u bázových vektorů dole, vynecháváme znaménko sumy přes stejný index vyskytující se jednou nahoře a jednou dole. Pokud $M' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ je jiná báze a A je matice přechodu od M k M', pak

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} e_i (A)_{ij} =: A^i_j e_i$$

První vyjádření pochází z definice 25 matice přechodu, druhé opět rozšiřuje naši konvenci: řádkový index matice přechodu píšeme nahoře a sloupcový dole, sumu přes i vynecháváme. Třetí bod tvrzení 9, nejprve bez sumační konvence a poté s ní, nabývá tvaru

$$v^j = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ji} v'^i \equiv A^j_i v'^i$$

nebo též

$$v'^j = (A^{-1})^j_i v^i$$

Definice 63. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Vektorový prostor $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ všech lineárních forem na V se nazývá **duální prostor** k V.

Pokud $\dim V = n$, pak podle věty 18 $\dim V^* = n$, báze V a V^* mají proto stejný počet prvků. Je dokonce možné je zvolit v určitém smyslu synchronizovaně:

Definice 64. Báze

$$M = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$$
$$M^* = \{e^1, \dots, e^n\} \subset V^*$$

nazýváme vzájemně **duální**, pokud platí

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j \end{cases}$$

V definici jsme dále rozšířili indexovou konvenci na prvky báze v duálním prostoru: píšeme je s indexy nahoře. Platí totiž pro libovolný $v \in V$

$$e^i(v) = e^i\left(\sum_{j=1}^n v^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n v^j e^i(e_j)$$
$$= \sum_{j=1}^n v^j \delta^i_j = v^i,$$

čili i-tý prvek duální báze M^* přiřadí vektoru z V jeho i-tou souřadnici vzhledem k M. Pro lepší pochopení jsme ve výrazech zachovali sumy, se sumační konvencí by stejné odvození bylo zapsáno

$$e^i(v) = e^i(v^j e_j) = v^j e^i(e_j) = v^j \delta^i_j = v^i$$

Od nynějška už budeme vždy užívat sumační konvenci.

Prvky V^* jsou lineární formy, někdy se užívá také pojmů lineární funkcionály nebo **kovektory**. Pokud $\alpha \in V^*$ je kovektor, pak čísla

$$\alpha_i := \alpha(e_i) \text{ pro } i \in \{1, \dots, n\}$$

jsou jeho hodnoty na bázi a díky větě 16 jej jednoznačně zadávají. Pro libovolný vektor $v \in V$

$$\alpha(v) = \alpha(v^i e_i) = v^i \alpha(e_i) = v^i \alpha_i$$

LEMMA 38. *Nechť $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V, $\alpha \in V^*$. Pak čísla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv (\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n))$ jsou rovny souřadnicím kovektoru α vzhledem k M^*.*

DŮKAZ. Platí

$$\alpha(v) = \alpha_i v^i = \alpha_i e^i(v) = (\alpha_i e^i)(v)$$

pro libovolný vektor $v \in V$. Tedy zobrazení α a $\alpha_i e^i$ z $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ jsou si rovna. □

Pokud $V = \mathbb{F}^n$, označme K jeho kanonickou bázi a

$$K^* := \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$$

bázi k ní duální. Zobrazení ε^i tedy přiřazuje vektoru $x \in \mathbb{F}^n$ jeho i-tou složku.

PŘÍKLAD 44. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $M = \{(3,2),(4,3)\} \equiv \{e_1, e_2\}$. Prvky duální báze $M^* = \{e^1, e^2\}$ lze zapsat jako $e^1 = a\varepsilon^1 + b\varepsilon^2$, $e^2 = c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2$, kde a, b, c, d jsou nějaká čísla. Podmínky na duální bázi říkají, že

$$e^1(e_1) = a\varepsilon^1(e_1) + b\varepsilon^2(e_1) = 3a + 2b = 1$$
$$e^1(e_2) = a\varepsilon^1(e_2) + b\varepsilon^2(e_2) = 4a + 3b = 0$$
$$e^2(e_1) = c\varepsilon^1(e_1) + d\varepsilon^2(e_1) = 3c + 2d = 0$$
$$e^2(e_2) = c\varepsilon^1(e_2) + d\varepsilon^2(e_2) = 4c + 3d = 1$$

To je vlastně maticová rovnice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

čili úloha na inverzní matici. Jejím výpočtem dostáváme duální bázi $\{3\varepsilon^1 - 4\varepsilon^2, -2\varepsilon^1 + 3\varepsilon^2\}$.

LEMMA 39. *Nechť $M^* = \{e^1, \dots, e^n\}$, $M'^* = \{e'^1, \dots, e'^n\}$, jsou báze V^* duální k bázím M a M', A je matice přechodu od M k M', $\alpha \in V^*$. Pak*

$$e'^i = (A^{-1})^i_j e^j$$
$$\alpha'_i = A^j_i \alpha_j$$

DŮKAZ. Pokud $v \in V$, pak $v'^i = (A^{-1})^i_j v^j$. Protože $v^j = e^j(v)$, $v'^i = e'^i(v)$, plyne odtud

$$e'^i(v) = \left((A^{-1})^i_j e^j\right)(v)$$

neboli rovnost zobrazení $e'^i = (A^{-1})^i_j e^j$. Podobně

$$\alpha'_i = \alpha(e'_i) = A^j_i \alpha(e_j) = A^j_i \alpha_j$$

□

Doposud odvozené transformační vztahy můžeme shrnout do tabulky:

Transformace	**maticově**	**tenzorově**
prvky báze V	$e'_r = \sum_b e_b (A)_{br}$	$e'_r = A^b_r e_b$
prvky báze V^*	$e'^r = \sum_b (A^{-1})_{rb} e^b$	$e'^r = (A^{-1})^r_b e^b.$
souř. vektoru	$(v)^T_{M'} = (v)^T_M (A^{-1})^T$	$v'^r = (A^{-1})^r_b v^b$
souř. kovektoru	$(\alpha)^T_{M'} = (\alpha)^T_M A$	$\alpha'_r = A^b_r \alpha_b$

Vidíme z ní, že typ transformace objektu je určen polohou indexu. Objekty s indexem dole se transformují pomocí matice A, tzv. **kovariantně**. Objekty s indexem nahoře se transformují pomocí A^{-1}, tzv. **kontravariantně**.

DEFINICE 65. Nechť V, W jsou dva vektorové prostory, $\phi : V \to W$ je homomorfismus. Pak zobrazení $\phi^* : W^* \to V^*$ definované vztahem

$$\phi^*(\alpha) = \alpha \circ \phi$$

nazýváme **duální homomorfismus** k homomorfismu ϕ.

LEMMA 40. *Nechť $\phi : V \to W$ je homomorfizmus, $M \subset V$, $N \subset W$ jsou báze, $B = (\phi)_{NM}$ je matice homomorfizmu. Pak $(\phi^*)_{M^*N^*} = B^T$. Homomorfizmy ϕ a ϕ^* mají tedy stejnou hodnost.*

DŮKAZ. Označme $M = \{e_i\}$ a $N = \{f_a\}$. Matice B je definována předpisem

$$\phi(e_i) = \sum_{a=1}^{n} (B)_{ai} f_a \equiv B^a_i f_a$$

Jak vidno, indexová konvence pro matice homomorfizmu je stejná jako pro matice přechodu. Z definice duálního homomorfizmu plyne

$$[\phi^*(f^j)](e_i) = f^j(\phi(e_i)) = B^a_i f^j(f_a) = B^a_i \delta^j_a = B^j_i,$$

Na druhou stranu

$$(B^j_k e^k)(e_i) = B^j_k \delta^k_i = B^j_i,$$

tedy kovektory $\phi^*(f^j)$ a $B^j_k e^k$ mají stejné hodnoty na bázi M a tudíž jsou si rovny. Po přepisu do tradiční formy

$$\phi^*(f^j) = B^j_k e^k \equiv \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{kj} e^k$$

je vidět, že skutečně $(\phi^*)_{M^*N^*} = B^T$. □

1.1. Cvičení.

(1) Nechť $M = \{(1,1),(1,-1)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, najděte souřadnice $\alpha := \varepsilon^1 + 2\varepsilon^2$ vzhledem k M.
(2) Najděte bázi $M \subset \mathbb{R}^2$, k níž je báze $\{3\varepsilon^1 - \varepsilon^2, -8\varepsilon^1 + 3\varepsilon^2\}$ duální.
(3) V prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem uvažujme vektory $u_1 = (4,1)$, $u_2 = (3,1)$ a definujme kovektory $e^i(v) := (u_i, v)$ pro $i = 1,2$. Najděte bázi duální k $\{e^1, e^2\}$.
(4) Kovektory α, β, γ mají vzhledem k bázím M a M' vyjádření

$$\begin{aligned}\alpha &= e^1 + e^2 + e^3 = e'^1 + e'^2\\ \beta &= e^1 - e^3 = e'^2 + e'^3\\ \gamma &= e^1 = e'^1 + e'^3\end{aligned}$$

Určete matici přechodu od M k M'.
(5) Nechť $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je homomorfismus zadaný svou maticí vzhledem ke kanonickým bázím:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte matici ϕ^* vzhledem k duálním bázím k $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ a $\{(1,2),(1,3)\}$.
(6) Nechť $M = \{(1,1),(2,3)\}$, $N = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je homomorfizmus, jehož matice vzhledem k bázím M a N je

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete matici ϕ^* vzhledem ke kanonickým bázím.
(7) Nechť $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je endomorfismus definovaný vztahy $\phi((3,2)) = (1,1)$, $\phi((4,3)) = (1,-1)$. Určete matici duálního endomorfizmu vzhledem ke kanonické bázi a bázi $\{2\varepsilon^1 - \varepsilon^2, 3\varepsilon^1 - \varepsilon^2\}$.
(8) Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ uvažujme lineární formy $e^i : p(x) \mapsto p^{(i)}(0)$, $i \in \{0,1,2\}$. Dokažte, že $\{e^0, e^1, e^2\}$ je báze a najděte bázi k ní duální.
(9) Na prostoru $(P^n(x,\mathbb{R}))^*$ najděte matici přechodu od báze $\{p(0), p'(0), \dots, p^{(n)}(0)\}$ k bázi $\{p(1), p'(1), \dots, p^{(n)}(1)\}$.
(10) Nechť V je vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n, a uvažujme navzájem různá čísla $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Ověřte, že množina zobrazení $M = \{F_0, \dots, F_n\}$, kde $F_i : V \to \mathbb{R}$ je definováno $F_i(p) = p(c_i)$, tvoří bázi V^*. Ověřte, že množina $\{p_0, \dots p_n\}$ tzv. Lagrangeových polynomů

$$p_i(x) := \Pi_{j \neq i} \frac{(x - c_j)}{(c_i - c_j)}$$

tvoří duální bázi k M.
(11) Nechť V, W jsou vektorové prostory konečné dimenze. Dokažte, že zobrazení $F : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$, které homomorfizmu ϕ přiřazuje jeho duální homomorfizmus $F(\phi) := \phi^*$, je izomorfizmus vektorových prostorů $\mathrm{Hom}(V,W)$ a $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$.
(12) Dokažte, že pokud mají dvě lineární formy na prostoru konečné dimenze stejné jádro, pak jsou jedna násobkem druhé.

2. Tenzorový součin

DEFINICE 66. Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to \mathbb{F}$, $g : Y \to \mathbb{F}$ dvě funkce na těchto množinách. Jejich **tenzorovým součinem** rozumíme funkci

$$\begin{aligned} f \otimes g : X \times Y &\to \mathbb{F} \\ : (x, y) &\mapsto f(x)g(y) \end{aligned}$$

Tenzorový součin není komutativní ($f(x)g(y) \neq f(y)g(x)$, dokonce to ani nemusí být definováno, pokud $X \neq Y$), ale je asociativní:

$$((f \otimes g) \otimes h)(x, y, z) = f(x)g(y)h(z) = (f \otimes (g \otimes h))(x, y, z)$$

Má tedy smysl psát prostě $f \otimes g \otimes h$. Platí také

$$\begin{aligned} ((r_1 f_1 + r_2 f_2) \otimes g)(x, y) = r_1 f_1(x)g(y) + r_2 f_2(x)g(y) = \\ = r_1(f_1 \otimes g)(x, y) + r_2(f_2 \otimes g)(x, y) \end{aligned}$$

a podobně v druhé složce, je tedy bilineární, nebo při rozšíření na více než dva činitele multilineární.

Tenzorový součin dvou lineárních forem $\phi : V \to \mathbb{F}$ a $\psi : V \to \mathbb{F}$ je bilineární forma $\phi \otimes \psi$, která splňuje

$$(\phi \otimes \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w)$$

Jsou-li $\phi = e^i$, $\psi = e^j$ prvky báze M^*, pak

$$(e^i \otimes e^j)(v, w) = v^i w^j$$

Je-li $A \in M_n(\mathbb{F})$ matice, pak

$$(a_{ij} e^i \otimes e^j)(v, w) = a_{ij} v^i w^j$$

je bilineární forma, jejíž matice vzhledem k bázi M je A. Poprvé vidíme výraz, kde jsou dvě dvojice indexů, přes které se sčítá. Narozdíl od matice přechodu, u níž nás konvence „donutila“ psát řádkový index jako horní a sloupcový jako dolní, u matice bilineární formy musíme psát oba indexy dole.

Tenzorový součin k lineárních forem je k-lineární forma (viz začátek kapitoly 9). Množinu všech k-lineárních forem na vektorovém prostoru V označme symbolem $T_k(V)$. Pak tenzorový součin definuje také zobrazení

$$\otimes : T_p(V) \times T_q(V) \to T_{p+q}(V)$$

LEMMA 41. *Nechť $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze V. Označme*

$$e^{a\ldots b} := \underbrace{e^a \otimes \ldots \otimes e^b}_{q} \in T_q(V)$$

Množina

$$(M^*)^q := \{e^{a\ldots b} | a, \ldots, b \in \{1, \ldots, n\}\}$$

tvoří bázi prostoru $T_q(V)$ a $\forall T \in T_q(V)$ platí

$$T = T_{a\ldots b} e^{a\ldots b},$$

kde

$$T_{a\ldots b} = T(e_a, \ldots, e_b)$$

jsou souřadnice T vzhledem k $(M^*)^q$. Pokud $M' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ a A je matice přechodu od M k M', pak

$$\begin{aligned} e'^{a\ldots b} &= (A^{-1})^a_r \ldots (A^{-1})^b_s e^{r\ldots s} \\ T'_{a\ldots b} &= A^r_a \ldots A^s_b T_{r\ldots s} \end{aligned}$$

DŮKAZ. Podle definice tenzorového součinu

$$e^{a\dots b}(v,\dots,w) = v^a \dots w^b$$

Pak ale

$$T(v,\dots,w) = T(v^a e_a,\dots,w^b e_b) = \\ = T_{a\dots b} v^a \dots w^b = (T_{a\dots b} e^{a\dots b})(v,\dots,w)$$

Vztah platí pro libovolnou q-tici vektorů $v,\dots,w$, takže $T = T_{a\dots b}e^{a\dots b}$. Odtud zároveň plyne, že $(M^*)^q$ generuje $T_q(V)$. Pokud by existovala čísla $S_{a\dots b}$, pro něž $S_{a\dots b}e^{a\dots b} = 0$, pak po dosazení vektorů $e_r,\dots,e_s$ do levé strany plyne

$$(S_{a\dots b}e^{a\dots b})(e_r,\dots,e_s) = S_{a\dots b}\delta^a_r \dots \delta^b_s = S_{r\dots s} = 0,$$

čili všechny koeficienty musí být nulové a $(M^*)^q$ je také lineárně nezávislá.

Multilinearita tenzorového součinu dává

$$e'^{a\dots b} \equiv e'^a \otimes \dots \otimes e'^b = \\ = (A^{-1})^a_r e^r \otimes \dots \otimes (A^{-1})^b_s e^s = (A^{-1})^a_r \dots (A^{-1})^b_s e^{r\dots s}$$

a poslední tvrzení plyne z

$$T'_{a\dots b} = T(e'_a,\dots,e'_b) = \\ = T(A^r_a e_r,\dots,A^s_b e_s) = A^r_a \dots A^s_b T_{r\dots s}$$

□

Tvrzení mimojiné říká, že souřadnice q-lineární formy vzhledem k bázi $(M^*)^q$ jsou totožné se souřadnicemi multilineární formy vzhledem k bázi M zavedenými na začátku kapitoly 9. Protože volba M určuje M^*, potažmo $(M^*)^q$, má tato zjednodušená terminologie smysl.

Pokud $T_{ab\dots k}$ a $S_{li\dots t}$ jsou souřadnice $T \in T_p(V)$ a $S \in T_q(V)$ vůči M, pak

$$(T \otimes S)_{ab\dots t} = T_{ab\dots k}S_{li\dots t}$$

jsou souřadnice $T \otimes S \in T_{p+q}(V)$ vůči stejné bázi, jak je lehce vidět z lemmatu.

PŘÍKLAD 45. Pokud α je kovektor, pak se jeho souřadnice transformují podle vztahu

$$\alpha'_a = A^r_a \alpha_r.$$

V maticovém zápise to můžeme přepsat na

$$(\alpha)^T_{M'} = (\alpha)^T_M A,$$

kde $(\alpha)^T_M$ je *řádkový* vektor souřadnic α vůči M. Srovnejme tento vztah s transformací souřadnic vektorů

$$(v)_M = A(v)_{M'} \text{ nebo též } (v)^T_{M'} = (v)^T_M (A^{-1})^T$$

Matici $(A^{-1})^T$ se říká **matice kontragredientní** k A.

Pokud g je bilineární forma, pak se její souřadnice transformují podle vztahu

$$g'_{ab} = A^r_a A^s_b g_{rs}.$$

V maticovém zápise to můžeme přepsat jako

$$G' = A^T G A,$$

kde interpretujeme souřadnice $G = (g_{ab})$ jako matici bilineární formy vzhledem k M.

Pro trilineární formu T můžeme interpretovat souřadnice T_{abc} buď jako $n\times n\times n$ krychličku čísel, nebo jako řádkový vektor matic

$$(T_{1bc}, T_{2bc},\dots,T_{nbc}) =: (((T_1)_{bc}),((T_2)_{bc}),\dots,((T_n)_{bc}))$$

Transformační vztah

$$T'_{abc} = A^r_a A^s_b A^t_c T_{rst}$$

se pak dá přepsat jako

$$(T'_1, \dots, T'_n) = \\ = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} A^T T_i A, \sum_{i=1}^n a_{i2} A^T T_i A, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} A^T T_i A \right)$$

Samozřejmě nás nic nenutí vzít jako „maticové“ indexy zrovna ty dva poslední a jako „vektorový“ ten první. Zavedení matic T_i je jenom početní a notační pomůcka, což je zdůrazněno i tím, že jsme v posledním vztahu nepoužili sumační konvenci a zapsali elementy a_{ij} matice A tak, jak jsme zvyklí z dřívějška.

2.1. Cvičení.

(1) Je zobrazení

$$\otimes : T_p(V) \times T_q(V) \to T_{p+q}(V)$$

prosté? Je na?

(2) Najděte souřadnice trilineární formy $(\varepsilon^1 \otimes \varepsilon^2 \otimes \varepsilon^1)$ vzhledem k bázi $\{(1,1),(1,2)\}$.

(3) Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$(((T_1)_{jk}),((T_2)_{jk})) := \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

jsou souřadnice trilineární formy vzhledem k M. Najděte její souřadnice vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$ ve stejném formátu.

3. Kovariantní a kontravariantní tenzory

Věta 54 (Duál duálu). *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{F}$. Pak existuje izomorfismus V a $(V^*)^*$, který nezávisí na volbě báze ve V.*

Důkaz. Nechť $v \in V$. Definujme homomorfismus $f_v : V^* \to \mathbb{R}$, jehož hodnota $f_v(\alpha)$ pro libovolnou lineární formu je rovna číslu $\alpha(v)$. Platí, že f_v je lineární forma na V^*, protože $\forall \alpha, \beta \in V^*$, $\forall r, s \in \mathbb{F}$ platí

$$f_v(r\alpha + s\beta) = (r\alpha + s\beta)(v) = r\alpha(v) + s\beta(v) = r f_v(\alpha) + s f_v(\beta).$$

Máme tedy zobrazení

$$\Phi : V \to (V^*)^* \\ : v \mapsto f_v$$

Toto zobrazení je homomorfismus, protože $\forall v, w \in V$, $\forall r, s \in \mathbb{F}$, $\forall \alpha \in V^*$ platí

$$\begin{aligned} [\Phi(rv + sw)](\alpha) &= f_{rv+sw}(\alpha) = \alpha(rv + sw) \\ &= r\alpha(v) + s\alpha(w) = r f_v(\alpha) + s f_w(\alpha) \\ &= r[\Phi(v)](\alpha) + s[\Phi(w)](\alpha) \end{aligned}$$

Zobrazení $\Phi(rv + sw)$ a $r\Phi(v) + s\Phi(w)$ se rovnají pro všechna $\alpha \in V^*$, jsou tedy totožná.

Dále ověříme, že Φ je prosté. Podle definic

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \Phi &= \{v \in V | \Phi(v) = 0\} = \{v \in V | \forall \alpha \in V^*, f_v(\alpha) = 0\} \\ &= \{v \in V | \forall \alpha \in V^*, \alpha(v) = 0\} \end{aligned}$$

Pro každý nenulový vektor v ale existuje lineární forma α, pro kterou $\alpha(v) \neq 0$. Stačí například zvolit doplněk W prostoru $\langle v \rangle$ ve V a definovat $\alpha(u + rv) = r$ pro libovolné $u \in W$ a $r \in \mathbb{F}$ (ověřte sami, že takto definované α je lineární forma). Tedy $\operatorname{Ker} \Phi$ musí být nulový podprostor.

Protože $\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^*$, musí být (díky větě o dimenzi jádra a obrazu Φ) izomorfismus. Byl definován bez výběru báze, čímž je tvrzení dokázáno. □

Zobrazení Φ se nazývá **kanonickým izomorfismem** V a $(V^*)^*$. Umožňuje ztotožnit prvky V (vektory) a $(V^*)^*$ („ko-kovektory“), v jistém smyslu vyhlásit rovnoprávnost vektorů a kovektorů: kovektor je zobrazení na vektorech, vektor je zobrazení na kovektorech. Tuto rovnoprávnost můžeme zdůraznit i zavedením zobrazení

$$\begin{aligned}\langle , \rangle : V \times V^* &\to \mathbb{F} \\ (v, \alpha) &\mapsto \langle v, \alpha \rangle := \alpha(v) = [\Phi(v)](\alpha) \equiv v(\alpha),\end{aligned}$$

kterému se obvykle říká **párování** vektorů a kovektorů. Přirozená báze $(M^*)^*$ ve $(V^*)^*$ je ztotožněná přímo s bází $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a definici duální báze můžeme pak zapsat pomocí párování jako

$$\langle e_j, e^i \rangle = \delta^i_j.$$

V souřadnicích se pak párování vektoru v a kovektoru α vyjádří vztahem

$$\langle v, \alpha \rangle = \langle v^i e_i, \alpha_j e^j \rangle = v^i \alpha_j \langle e_i, e^j \rangle = v^i \alpha_j \delta^j_i = v^i \alpha_i$$

Nepleťte si párování (zobrazení $V \times V^* \to \mathbb{F}$) se skalárním součinem (zobrazení $V \times V \to \mathbb{F}$)!

Poznámky:

(1) Prostory V a V^* jsou samozřejmě také izomorfní, protože mají stejnou dimenzi. Jedním z možných izomorfismů může být zvolit ve V bázi M a vektoru $v \in V$ přiřadit kovektor $\alpha \in V^*$, jehož souřadnice $(\alpha)_M$ jsou rovny $(v)_M$. Pro různé báze $M \subset V$ dostaneme ale různé izomorfismy a vzhledem k tomu, že obecně není žádná báze lepší než jiná, žádný kanonický izomorfismus mezi V a V^* neexistuje.

(2) V nekonečné dimenzi není obecně zobrazení Φ na, máme tedy jen **kanonické vnoření** V do $(V^*)^*$.

Chápeme-li vektory jako lineární formy na kovektorech, můžeme definovat prostor $T^q(V)$ všech q-lineárních forem na kovektorech, tzv. **multivektorů**. Zcela analogicky jako v lemmatu 41 dostáváme

LEMMA 42. *Nechť $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze V. Označme*

$$e_{a\ldots b} := \underbrace{e_a \otimes \ldots \otimes e_b}_{q} \in T^q(V)$$

Množina

$$M^q := \{e_{a\ldots b} | a, \ldots, b \in \{1, \ldots, n\}\}$$

tvoří bázi prostoru $T^q(V)$ a $\forall T \in T^q(V)$ platí

$$T = T^{a\ldots b} e_{a\ldots b},$$

kde

$$T^{a\ldots b} = T(e^a, \ldots, e^b)$$

jsou souřadnice T vzhledem k M^q. Pokud $M' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ a A je matice přechodu od M k M', pak

$$\begin{aligned}e'_{a\ldots b} &= A^r_a \ldots A^s_b e_{r\ldots s} \\ T'^{a\ldots b} &= ((A)^{-1})^a_r \ldots ((A)^{-1})^b_s T^{r\ldots s}\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 46. Souřadnice bivektoru $g = g^{ab}e_a \otimes e_b \in V \otimes V$ se transformují podle předpisu

$$g'^{ij} = (A^{-1})^i_a (A^{-1})^j_b g^{ab}$$

Definujeme-li matici bivektoru jako $(G)_{ij} := g^{ij}$, pak se dá transformační vztah zapsat jako

$$G' = A^{-1} G (A^{-1})^T$$

Souřadnice trivektoru $T = T^{abc}e_a \otimes e_b \otimes e_c$lze chápat jako $n \times n \times n$ krychličku, nebo jako řádek matic $(T_1, \ldots, T_n)$, kde $(T_i)_{jk} := T^{ijk}$. Pak je $(T'_1, \ldots, T'_n)$ rovno $\left(\sum_{i=1}^n (A^{-1})_{1i} A^{-1} T_i (A^{-1})^T, \ldots, \sum_{i=1}^n (A^{-1})_{ni} A^{-1} T_i (A^{-1})^T\right)$

Multilineární formy označujeme také jako **kovariantní tenzory** a multivektory jako **kontravariatní tenzory**. Nejobecnější typ tenzoru je kombinací těchto dvou typů:

DEFINICE 67. Nechť V je vektorový prostor. Symbolem $T^p_q(V)$ označíme množinu všech zobrazení

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \mapsto \mathbb{R},$$

která jsou lineární v každém argumentu. Mluvíme o množině ***p*-krát kontravariantních a *q*-krát kovariantních tenzorů** na V nebo též o **tenzorech typu (p, q)**. Číslo $p + q$ se označuje jako **stupeň tenzoru**. Souřadnicemi tenzoru $T \in T^p_q(V)$ vzhledem k bázi $M \subset V$ rozumíme

$$T^{a\ldots b}_{r\ldots s} := T(e^a, \ldots, e^b, e_r, \ldots, e_s)$$

O dolních indexech hovoříme jako o **indexech kovariantních** a horní se nazývají **indexy kontravariantními**.

Na smíšených tenzorech máme definován tenzorový součin

$$\otimes : T^p_q(V) \times T^k_l(V) \mapsto T^{p+k}_{q+l}(V)$$

a souřadnice vzhledem k M jsou ve skutečnosti souřadnicemi vzhledem k bázi $M^p \times (M^*)^q$ v $T^p_q(V)$:

$$T = T^{a\ldots b}_{r\ldots s} e_a \otimes \ldots \otimes e_b \otimes e^r \otimes \ldots \otimes e^s \equiv T^{a\ldots b}_{r\ldots s} e^{r\ldots s}_{a\ldots b}$$
$$T^p_q(V) \equiv \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q},$$

které vyjadřuje, že libovolný tenzor typu (p, q) lze zkonstruovat jako lineární kombinaci tenzorového součinu p vektorů a q kovektorů.

PŘÍKLAD 47. Prostor $T^1_1(V) \equiv V \otimes V^*$ je přirozeně ztotožněn s prostorem $\mathrm{End}(V)$ všech endomorfismů na V. Prvek $v \otimes \alpha$, kde $v \in V$ a $\alpha \in V^*$, definuje lineární zobrazení $f_{v\otimes\alpha} : V \to V$ předpisem

$$f_{v\otimes\alpha}(u) = \langle u, \alpha \rangle v \equiv \alpha(u) v.$$

Odpovídá to vlastně částečnému dosazení do druhého argumentu zobrazení

$$v \otimes \alpha : V \times V^* \to \mathbb{F}$$

Bázi $\{e_i \otimes e^j | i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ v $T^1_1(V)$ v tomto ztotožnění odpovídá standardní báze na $\mathrm{End}(V)$ z textu za větou 18, neboť

$$(e_i \otimes e^j)(e_k) = e_i \delta^j_k,$$

tedy matice endomorfismu $e_i \otimes e^j$ vzhledem k bázi $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ má na pozici ij jedničku a všude jinde nuly. Endomorfismus $T := T^i_j e_i \otimes e^j$ má na bázi hodnoty

$$T(e_k) = (T^i_j e_i \otimes e^j)(e_k) = T^i_j e_i \delta^j_k = T^i_k e_i,$$

jeho matice vzhledem k M je proto T^i_k, kde horní index chápeme jako řádkový a dolní index sloupcový. Všimněte si, že to je stejná konvence jako pro matice přechodu. To není překvapivé, vzhledem k tomu, že matice přechodu se dá definovat jako speciální případ matice endomorfismu. Odtud je také jasně vidět, že přiřazení $T^1_1(V)$ a $\mathrm{End}(V)$ je opravdu izomorfismus. Kroneckerovo delta δ^i_k je pak matice identického endomorfismu, která je vůči kterékoli bázi stejná, rovná jednotkové matici:

$$(1_V)(e_k) = \delta^i_k e_i = e_k$$

VĚTA 55. *Nechť V je vektorový prostor, $M = \{e_1, \dots, e_n\}, M' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dvě báze v něm, $T \in T^p_q(V)$. Pak*

$$T'^{i\dots j}_{k\dots l} = (A^{-1})^i_a \dots (A^{-1})^j_b A^c_k \dots A^d_l T^{a\dots b}_{c\dots d}$$

Důkaz spočívá jen v dosazení vztahů $e'_r = A^b_r e_b$ a $e'^r = (A^{-1})^r_b e^b$ do definice souřadnic.

PŘÍKLAD 48. Smíšený tenzor f typu $(1,1)$ se transformuje předpisem $f'^i_j = (A^{-1})^i_a A^b_j f^a_b$. Pro matici F s elementy $(F)_{ab} := f^a_b$ z toho dostáváme

$$F' = A^{-1} F A$$

tedy vlastně standardní vztah pro změnu matice endomorfismu při změně báze.

Souřadnice smíšeného tenzoru $T = T^{ij}_k e_i \otimes e_j \otimes e^k$ typu $(2,1)$ můžeme zapsat například jako n-tici matic s elementy $(T_i)_{jk} := T^{ij}_k$. Pak

$$T'_a = \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})_{ai} (A^{-1} T_i A)$$

Pro tenzor typu $(1,2)$ se souřadnicemi zapsanými maticemi $(T_i)_{jk} := T^j_{ik}$ máme

$$T'_a = \sum_{i=1}^{n} (A^T)_{ai} (A^{-1} T_i A)$$

3.1. Cvičení.

(1) Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$, $v = (1,-1)$, $T : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované

$$T(\phi, \psi) = \phi(u)\psi(v) - 2\phi(v)\psi(u)$$

Ověřte, že se jedná o tenzor, najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $\{(-2,1),(1,1)\}$ a ověřte rovnost pomocí transformačního vztahu.

(2) Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$(((T_1)_{jk}), ((T_1)_{jk})) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

souřadnice tenzoru $T \in T^2_1(\mathbb{R}^2)$ vzhledem k M, definované předpisem $(T_i)_{jk} := T^{ij}_k$. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.

(3) Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$(((T_1)_{jk}), ((T_1)_{jk})) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

souřadnice tenzoru $T \in T^1_2(\mathbb{R}^2)$ vzhledem k M, definované předpisem $(T_i)_{jk} := T^i_{jk}$. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.

4. Zdvihání a spouštění indexu

Pokud do k-tého kovektorového argumentu tenzoru

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \mapsto \mathbb{R},$$

z $T^p_q(V)$ dosadíme pevný kovektor α, vzniklé zobrazení

$$\tilde{T} := T(\cdot, \ldots, \cdot, \alpha, \cdot, \ldots, \cdot)$$

je lineární ve všech zbylých argumentech označených tečkami, je to tedy tenzor typu $(p-1, q)$. Speciálně částečným dosazením vektoru $v \in V$ do bilineární formy g dostáváme lineární formu

$$\begin{aligned} g(\cdot, v) : V &\to \mathbb{F} \\ u &\mapsto g(u, v) \end{aligned}$$

Tvrzení 15. *Nechť g je regulární bilineární forma na V. Pak zobrazení*

$$\begin{aligned} \flat_g : V &\to V^* \\ v &\mapsto g(\cdot, v) \end{aligned}$$

je izomorfizmus prostorů V a V^*.

Důkaz. Vzhledem tomu, že V a V^* mají stejnou dimenzi, stačí ukázat, že $\flat_g$ je prosté. Nechť $g(\cdot, v)$ je nulový kovektor, pak pro všechna $u \in V$ je $g(u, v) = 0$. Vyjádříme g vzhledem k bázi $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a dosadíme za $u = e_i$, pak

$$g(u, v) = g(e_i, v^j e_j) = v^j g_{ij} = 0$$

Protože (g_{ij}) je regulární matice, musí všechna v^j nulová a tedy i $v = 0$. □

Nejčastěji se s tímto izomorfizmem setkáváme, když V je reálný vektorový prostor a $g \equiv g_{ab} e^a \otimes e^b$ skalární součin na něm, používá se také termín **metrický tenzor**. V souřadnicích máme

$$\flat_g v \equiv (\flat_g v)_i e^i = (g_{ij} e^i \otimes e^j)(\cdot, v) = g_{ij} v^j e^i,$$

tedy kovektor $\flat_g v$ má souřadnice $(\flat_g v)_i = g_{ij} v^j$. Proto se zobrazení $\flat_g$ nazývá **spuštění indexu** a označuje odpovídajícím hudebním symbolem.

Definujme bivektor $g^{-1} := g^{ab} e_a \otimes e_b$, jehož souřadnice splňují $g^{ac} g_{cb} = \delta^a_b$, čili matice skalárního součinu g a bivektoru g^{-1} jsou navzájem inverzní. Dosazením transformačních vztahů pro bilineární formy a bivektory snadno odvodíme, že tato definice nezávisí na volbě báze. Vůči ortonormální bázi $\{e_a\}$ je i g^{ab} jednotková matice a tedy g^{-1} je pozitivně definitní symetrická bilineární forma na V^*, tzv. **duální metrický tenzor**. Zobrazení

$$\begin{aligned} \sharp_g : V^* &\to V \\ \alpha &\mapsto g^{-1}(\cdot, \alpha), \end{aligned}$$

které v souřadnicích nabývá tvaru

$$\sharp_g \alpha \equiv (\sharp_g \alpha)^i e_i = (g^{ij} e_i \otimes e_j)(\cdot, \alpha) = g^{ij} \alpha_j e_i,$$

tj. $(\sharp_g \alpha)^i = g^{ij} \alpha_j$, nazýváme **zdvižení indexu**. Protože

$$(\sharp_g \flat_g v)^i = g^{ij} g_{jk} v^k = \delta^i_k v^k = v^i,$$

je $\sharp_g$ inverzní izomorfizmus k $\flat_g$.

Můžete se divit, proč se vůbec zaobíráme situací, kdy (g_{ab}) není jednotková matice, když ortonormální bázi lze zavést pro každý skalární součin. Existují tři oblasti, kvůli nimž je důležité naučit se počítat s obecným metrickým tenzorem. Jsou to křivočaré systémy souřadnic, kde se metrický tenzor mění v prostoru (je to vlastně

tenzorové pole), speciální teorie relativity, kde není pozitivně definitní (mluvíme o **pseudometrickém tenzoru**), a analytická mechanika, která se popisuje pomocí pojmů symplektické geometrie, v níž je „skalární součin“ antisymetrický. Naše formulace se dá snadno adaptovat i na tyto tři odlišné situace.

Obvykle se místo $(\flat_g v)_i$ píše pouze v_i a místo $(\sharp_g \alpha)^i$ pouze α^i, odtud název spouštění a zdvihání indexu. Je důležité mít na paměti, že obecně se například číslo v_3 *nerovná* číslu v^3, ale číslu $g_{3i}v^i$. Rovnost nastane pouze tehdy, když je (g_{ab}) jednotková matice, tedy v^i jsou souřadnice vůči ortonormální bázi.

Zdvihat a spouštět indexy je možné i u tenzorů vyššího stupně. Nechť $T \in T_0^3(V)$. Pak tenzor $T(\flat_g \cdot, \cdot, \cdot) \in T_1^2(V)$ má souřadnice

$$T_a{}^{bc} = T(\flat_g e_a, e^b, e^c) = T(g_{ai}e^i, e^b, e^c) = g_{ai}T^{ibc}$$

Píšeme $T_a{}^{bc}$ místo T_a^{bc}, protože existují ještě další dva tenzory

$$T(\cdot, \flat_g \cdot, \cdot), T(\cdot, \cdot, \flat_g \cdot) \in T_1^2(V)$$

se souřadnicemi

$$T^b{}_a{}^c, T^{bc}{}_a,$$

které od sebe potřebujeme umět odlišit.

V definici 49 jsme zavedli adjungovaný operátor neboli adjungovaný homomorfizmus. V mírně modifikovaném značení, kde rozlišujeme skalární součiny na obou prostorech písmeny g a h, platí, že ke každému homomorfismu

$$\phi : (V, g) \to (W, h)$$

existuje homomorfismus

$$\phi^t : (W, h) \to (V, g)$$

definovaný $\forall v \in V, w \in W$ předpisem

$$g(v, \phi^t(w)) = h(\phi(v), w)$$

Adjungovaný homomorfizmus má úzký vztah k homomorfizmu duálnímu z definice 65:

Věta 56. *Nechť $\phi : (V, g) \to (W, h)$ je homomorfismus prostorů se skalárním součinem. Pak*

$$\phi^t = \sharp_g \circ \phi^* \circ \flat_h$$

Důkaz. Podle definic $\forall v \in V$, $\forall w \in W$ platí

$$g(v, \sharp_g[\phi^*(\flat_h w)]) = \langle v, \phi^*(\flat_h w)\rangle = \langle \phi(v), \flat_h w\rangle = h(\phi(v), w)$$

Podle definice ϕ^t je tedy

$$g(v, \sharp_g[\phi^*(\flat_h w)]) = g(v, \phi^t(w))$$

pro každý vektor v, musí tedy platit $\phi^t(w) = \sharp_g \circ \phi^* \circ \flat_h(w)$ pro každý vektor w. □

Pokud pracujeme se souřadnicemi vzhledem k ortonormální bázi, jsou matice zobrazení $\flat_g$ a $\sharp_g$ jednotkové a matice homomorfismů ϕ^t a ϕ^* jsou obě rovny transponované matici k matici homomorfismu ϕ. Tvrzení lemmatu 40 a poslední tvrzení lemmatu 26 jsou tedy vzájemně konzistentní. Jinými slovy, duální a adjungované zobrazení je totéž, pokud identifikujeme prostor V a jeho duál V^* pomocí zdvihání/spouštění indexu skalárním součinem.

4.1. Cvičení.

(1) Dokažte, že zdvihání a spouštění indexu jsou izometrie prostorů (V, g) a (V^*, g^{-1}).

5. Symetrie tenzoru a kontrakce

DEFINICE 68. Nechť $T \in T^0_q$. Pak definujeme **úplnou symetrizaci**, resp. **úplnou antisymetrizaci** tenzoru T předpisem $\forall v_1, \dots, v_q \in V$

$$[\pi_S(T)](v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} T(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(q)}), \text{ resp.}$$

$$[\pi_A(T)](v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} \operatorname{sgn}(\rho) T(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(q)})$$

Snadno se ověří, že

$$\begin{aligned} \pi_A \circ \pi_A &= \pi_A \\ \pi_S \circ \pi_S &= \pi_S \\ \pi_A \circ \pi_S &= \pi_S \circ \pi_A = 0 \end{aligned}$$

Obě zobrazení jsou tedy projekce na dva podprostory, podprostor $S_q(V) \equiv S^q(V^*)$ úplně symetrických kovariantních tenzorů a podprostor $\Lambda_q(V) \equiv \Lambda^q(V^*)$ úplně antisymetrických tenzorů, v jejichž průniku je pouze nulový tenzor.

Pro $q = 2$ definice říká, že

$$\begin{aligned} [\pi_S(T)]_{ab} &= \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) =: T_{(ab)} \\ [\pi_A(T)]_{ab} &= \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}) =: T_{[ab]} \end{aligned}$$

Zde jsme zavedli tradiční závorkovou notaci pro symetrizaci a antisymetrizaci indexů. Zjevně platí $T_{(ab)} = T_{(ba)}$ a $T_{[ab]} = -T_{[ba]}$, tedy matice $(T_{(ab)})$ je symetrická a matice $(T_{[ab]})$ antisymetrická. Vlastnost $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$ znamená, že každý tenzor typu $(0, 2)$ je možné (jednoznačně) rozložit na jeho symetrickou a antisymetrickou část

$$\begin{aligned} T &= T_{ab} e^a \otimes e^b = T_{(ab)} e^a \otimes e^b + T_{[ab]} e^a \otimes e^b \\ &= T_{(ab)} \frac{1}{2}(e^a \otimes e^b + e^b \otimes e^a) + T_{[ab]} \frac{1}{2}(e^a \otimes e^b - e^b \otimes e^a) \\ &= T_{(ab)} e^{(ab)} + T_{[ab]} e^{[ab]} \end{aligned}$$

Lineárně nezávislých tenzorů $e^{[ab]}$ je právě tolik, kolik je dvouprvkových množin čísel z $\{1, \dots, n\}$, tedy $\binom{n}{2}$. Počet tenzorů $e^{(ab)}$ se zase rovná počtu dvouprvkových kombinací s opakováním z $\{1, \dots, n\}$, tedy $\binom{n+1}{2}$. Součet obou čísel je n^2, což je rovno dimenzi $T^0_2(V)$, jak jsme mohli předpokládat na základě věty o dimenzi spojení a průniku.

(Anti)symetrizaci indexů můžeme zavést i pro tenzory vyšších stupňů:

$$\begin{aligned} T_{(a \dots b)} &:= \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} T(\rho(e_a, \dots, e_b)) \\ T_{[a \dots b]} &:= \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} \operatorname{sgn}(\rho) T(\rho(e_a, \dots, e_b)), \end{aligned}$$

kde $\rho(e_a, \dots, e_b)$ znamená přeuspořádání posloupnosti vektorů $e_a, \dots, e_b$ permutací ρ. (Anti)symetrizací prvků báze $\{e^{a \dots b}\}$ v $T^0_q(V)$ dostáváme prvky $e^{(a \dots b)}$ a $e^{[a \dots b]}$,

které tvoří bázi v $S^q(V^*)$ a $\Lambda^q(V^*)$. Je vidět, že

$$\dim S^q(V^*) = \binom{n+q-1}{q},$$
$$\dim \Lambda^q(V^*) = \binom{n}{q}.$$

Pro $q > n$ tedy už žádné netriviální úplně antisymetrické tenzory nejsou, zatímco prostor úplně symetrických tenzorů je nenulový pro všechna q. Pro $q > 2$ stále platí, že $S^q(V^*) \cap \Lambda^q(V^*) = 0$, ale narozdíl od případu $q = 2$ je

$$\dim S^q(V^*) + \dim \Lambda^q(V^*) < \dim T^0_q(V),$$

tedy existují tenzory, z nichž po odečtení úplně symetrické a úplně antisymetrické části ještě něco zbyde.

(Anti)symetrizaci můžeme úplně stejně zavést i pro kontravariantní tenzory, případně pro tenzory smíšené. U smíšených má ale smysl provádět ji přes indexy stejného typu.

DEFINICE 69. Nechť V je vektorový prostor, $\{e_a\}$ je báze V, $p > 0$, $q > 0$, $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{1, \dots, q\}$. Zobrazení

$$\begin{aligned} C_{ij} : T^p_q(V) &\to T^{p-1}_{q-1}(V) \\ T &\mapsto T(\dots, \underset{i}{e^a}, \dots, \underset{j}{e_a}, \dots) \end{aligned}$$

se nazývá **kontrakce** (nebo též **zúžení**) přes i-tý kovariantní a j-tý kontravariantní index.

Definice samozřejmě předpokládá, že přes index a se sčítá. Na volbě báze $\{e_a\}$ nezáleží, protože

$$T(e'_a, e'^a, \dots) = T(A^b_a e_b, (A^{-1})^a_c e^c, \dots) = \\ = \delta^b_c T(e_b, e^c, \dots) = T(e_b, e^b, \dots)$$

Souřadnice tenzoru $C_{ij}(T)$ jsou zjevně $T^{\dots a \dots}_{\dots a \dots}$.

Párování kovektoru w a vektoru v lze zapsat pomocí tenzorového součinu a kontrakce:

$$\begin{aligned} C_{11}(w \otimes v) &= (w \otimes v)(e_a, e^a) = w_i e^i(e_a) v^j e_j(e^a) \\ &= w_i v^j \delta^i_a \delta^a_j = w_i v^j \delta^i_j = w_i e^i(v^j e_j) = \langle w, v \rangle \end{aligned}$$

Analogicky lze vyčíslení libovolného tenzoru T typu (p, q) na libovolných argumentech psát jako

$$T(v, \dots, w) = \underbrace{(C \circ \dots \circ C)}_{p+q}(T \otimes v \otimes \dots \otimes w),$$

kde C jsou kontrakce podle odpovídajících dvojic indexů.

Pomocí zdvihu a spuštění indexu je pak možné definovat kontrakci přes libovolné dva indexy: tenzor

$$C_{12}T := C_{11}T(\flat_g \cdot, \cdot, \cdot)$$

má souřadnice

$$T_a{}^{ac} = g_{ai} T^{iac} = g_{ia} T^{aic} = T^a{}_a{}^c.$$

Pokud je T úplně symetrický, pak se všechny jeho kontrakce rovnají,

$$T_a{}^{ac} = g_{ai} T^{iac} = g_{ai} T^{cia} = T^c{}_a{}^a, \text{ apod.}$$

Je-li T úplně antisymetrický, jsou všechny jeho kontrakce nulové, neboť díky symetrii g_{ab} máme

$$T_a{}^{ac} = g_{ai} T^{iac} = g_{ai}(-T^{aic}) = -g_{ia} T^{aic} = -T_i{}^{ic}$$

5.1. Cvičení.

(1) Nechť $\phi = \varepsilon^1 + 2\varepsilon^2 \in (\mathbb{R}^2)^*$. Definujme tenzor typu $(2,1)$

$$T(u,v,\psi) = (\phi \otimes \psi)(v,u)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi.

(2) Nechť $a = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$ Definujme tenzor typu $(1,2)$

$$T(u,\phi,\psi) = \phi(u)\psi(a) - 2\phi(a)\psi(u)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Najděte souřadnice $C_{11}T$ vzhledem ke kanonické bázi.

(3) Nechť $a = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem. Definujme tenzor typu $(2,1)$

$$T(u,v,\psi) = (a,u)\psi(v)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Pomocí zdvihu/spuštění indexu převeďte T na kovariantní tenzor a spočtěte souřadnice jeho úplné antisymetrizace vzhledem ke kanonické bázi.

(4) Nechť T je tenzor typu $(2,2)$ definovaný předpisem

$$T(u,v,\phi,\psi) = \phi(u)\psi(v)$$

Určete souřadnice tenzoru $T(\cdot,\cdot,\varepsilon^1,\cdot)$ vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $\{(1,1),(1,0)\}$.

(5) Uvažujme $V = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, $w = (3,1)$, $T : V^* \times V \times V \to \mathbb{R}$ je tenzor definovaný

$$T(\phi,u,v) = \phi(w)(u,v)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem k bázi $\{(1,0),(1,1)\}$ a vyjádřete je jako dvojici matic.

(6) **(3)** Nechť $a = (a^1,a^2) \in \mathbb{R}^2$ a T je tenzor typu $(1,2)$ na $\mathbb{R}^2$ definovaný pro $\phi,\psi \in (\mathbb{R}^2)^*, u \in \mathbb{R}^2$ vztahem

$$T(\phi,\psi,u) = \phi(a)\psi(u) - \psi(a)\phi(u)$$

(a) Ukažte, že T je antisymetrický v prvních dvou argumentech.
(b) Najděte souřadnice T vůči kanonické bázi a zapište je jako dvojici matic.
(c) Napište transformační vztah pro změnu souřadnic tenzoru T při přechodu do nějaké báze M'.
(d) Pomocí tohoto transformačního vztahu najděte souřadnice tenzoru T vůči bázi $\{(2,1),(3,1)\}$.

(7) Nechť V je vektorový prostor dimenze n. Úplně antisymetrický tenzor z $\Lambda^p(V^*)$ se nazývá **p-forma**. **Vnějším součinem** rozumíme zobrazení, které p-formě α a q-formě β přiřazuje $p+q$-formu

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(p+q)!}{p!} q! \pi^A(\alpha \otimes \beta)$$

Dokažte, že se jedná o bilineární, asociativní zobrazení, pro které platí **gradovaná komutativita**

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{p+q} \beta \wedge \alpha$$

Ukažte dále, že platí

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a\ldots b} e^a \wedge \ldots \wedge e^b$$

Vektorový prostor $\Lambda(V^*) := \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(V^*)$ spolu s operací vnějšího součinu se nazývá **vnější algebra**. Je to základní algebraický objekt pro teorii vícerozměrné integrace.

(8) Nechť $v \in V$, $\alpha \in \Lambda^p V^*$. **Vnitřním součinem** v a α rozumíme $(p-1)$-formu charakterizovanou předpisem

$$i_v(\alpha)(u, \ldots, v) := \alpha(v, u, \ldots, w)$$

Dokažte, že se jedná o bilineární zobrazení, které splňuje

(a) $i_v i_w + i_w i_v = 0$
(b) $(i_v \alpha)_{a\ldots b} = v^i \alpha_{ia\ldots b}$
(c) $i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_v(\beta)$
(d) Pokud $\omega \in V^*$, $\varepsilon_\omega \alpha := \omega \wedge \alpha \in \Lambda^{p+1} V^*$, pak

$$\varepsilon_\nu \varepsilon_\omega + \varepsilon_\omega \varepsilon_\nu = 0$$
$$i_v \varepsilon_\omega + \varepsilon_\omega i_v = \langle v, \omega \rangle 1_{\Lambda(V^*)}$$

(9) Nechť V je vektorový prostor dimenze n a $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, tzv. **top-forma**. Dokažte, že v bázi $\{e_i\}$ se dá ω zapsat jako

$$\omega = \lambda e^1 \wedge \ldots \wedge e^n,$$

kde λ je nějaké číslo, a že veličina λ, která zastupuje všechny souřadnice ω, se při změně báze transformuje podle předpisu

$$\lambda' = \det(A)\lambda,$$

kde A je matice přechodu.