1 Determinant a stopa lineárního zobrazení.

Pro sjednocení znalostí z minulého semestru začneme definicí determinantu a stopy lineárního zobrazení.

Definice 1 *Stopa* $\mathrm{Tr}\, A$ *matice* A *typu* $n \times n$ *je definována pomocí vztahu*

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Nechť V *je vektorový prostor konečné dimenze. Stopa lineárního zobrazení* $F : V \mapsto V$ *je definována jako stopa matice* F *vůči libovolné bazi* V*.*

Determinant lineárního zobrazení $F : V \mapsto V$ *je definován jako determinant matice* F *vůči libovolné bazi* V*.*

Aby tato definice měla dobrý smysl, je třeba se přesvědčit, že stopa, resp. determinant zobrazení nezávisí na volbě baze v prostoru V. Pokud jsou $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$, resp. $M' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$, dvě baze V a A, resp. A' jsou příslušné matice F vůči těmto bazím, pak víme, že $A' = C^{-1} \cdot A \cdot C$, kde C je matice přechodu od M k M'. Pokud toto platí, říkáme, že jsou matice A a A' podobné. Relace podobnosti má vlastnosti ekvivalence.

Je zřejmé, že $\det A' = (\det C)^{-1} \det A \det C = \det A$, tedy determinant zobrazení F je dobře definován.

Pro stopu matice platí následující jednoduché lemma

Lemma 1 *Pro libovolné dvě čtvercové matice* A *a* B *platí*

$$\mathrm{Tr}\, A \cdot B = \mathrm{Tr}\, B \cdot A.$$

Obecněji, pro matice $A_1, \ldots, A_n$ *platí*

$$\mathrm{Tr}(A_1 \ldots A_n) = \mathrm{Tr}(A_2 \ldots A_n\, A_1).$$

První tvrzení je vidět ihned z toho, že podle definice je levá strana rovna

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji},$$

a pravá strana je rovna

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}.$$

Tyto dvě sumy jsou stejné (stačí přejmenovat indexy). Druhé tvrzení je důsledkem prvního ($A = A_1, B = A_2 \dots A_n$).

Tedy víme, že

$$\operatorname{Tr}(C^{-1}AC) = \operatorname{Tr}(ACC^{-1}) = \operatorname{Tr} A.$$

2 Spektrum lineárního zobrazení

2.1 Rozklad polynomu na kořenové činitele

Nejprve si zopakujeme základní vlastnosti polynomů a jejich kořenů. Klíčová informace o polynomech je tzv. Základní věta algebry. Její důkaz se dozvíte, např., později v komplexní analýze.

Věta 1 Základní věta algebry
Každý polynom, jehož stupeň je větší nebo roven 1, má v komplexním oboru alespoň jeden kořen.

Jednoduchou matematickou indukcí se z věty 1 odvodí následující důležitý důsledek.

Lemma 2 *Každý polynom $p(z)$ stupně n má právě n kořenů (počítaných včetně násobnosti), t.j. existují navzájem různá komplexní čísla $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, k$ (určená jednoznačně až na permutaci jejich pořadí) a přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$, tak že platí $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ a*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \lambda_j)^{n_j},$$

kde a_n je koeficient u nejvyšší (n-té) mocniny polynomu $p(z)$.

Pokud má polynom p reálné koeficienty, pak jsou buď kořeny λ_i reálné, nebo se vyskytují ve dvojicích komplexních čísel, které jsou navzájem komplexně sdružené.

Toto lemma je důsledkem základní věty algebry a patří do analýzy (kde jste ho už jistě používali při integraci racionálních funkcí). Jeho odůvodnění není těžké, takže ho jen stručně připomeneme.

Existuje alespoň jeden kořen polynomu p, označme ho např. λ_1. Jak je velmi dobře známo, existuje série identit začínající vztahy

$$z^2 - a^2 = (z-a)(z+a), z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + az + a^2), \ldots$$

Pokud tyto identity použijeme pro rozdíl $p(z) - p(a)$, je vidět, že existuje polynom $q(z)$ stupně $n-1$ takový, že $p(z) = p(z) - p(\lambda_1) = (z - \lambda_1)q(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Nyní stačí použít indukční předpoklad pro polynom q.

Tvrzení o polynomu s reálnými koeficienty plyne z předchozího tvrzení, pokud si všimneme, že pro takovéto polynomy platí $p(\overline{z}) = p(z)$.
Poznámka:

1. Často se píše rozklad polynomu p na kořenové činitele v trochu jiném tvaru
$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j),$$
kde se ovšem kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vypisují tolikrát za sebou, kolik je jejich násobnost.

2. Předpokládejme, že polynom p je monický, tj. že koeficient a_n u nejvyšší mocniny je roven jedné. Pak zřejmě ostatní koeficienty a_j polynomu p lze vypočítat pomocí kořenů λ_j. Například zřejmě platí
$$a_0 = (-1)^n \lambda_1 \ldots \lambda_n, a_{n-1} = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n).$$
Uměli byste napsat vzoreček, jak se vypočítají ostatní koeficienty?

3. Je možné si všimnout, že vzorec pro a_0 přesně odpovídá vzorci pro determinant diagonální matice a vzorec pro a_{n-1} přesně odpovídá vzorci pro stopu diagonální matice. Dá se tedy očekávat, že by mohly existovat další podobné pojmy jako determinant, či stopa (tj. zobrazení, které maticím přiřadí číslo), odvozené z vzorců pro koeficienty a_i pomocí kořenů, které by byly pro diagonální matice definovány pomocí vzorců pro výpočet koeficientů a_i pomocí kořenů, a které byly také stejné pro podobné matice (a definovaly by tedy příslušné pojmy pro obecné lineární zobrazení). To je opravdu pravda, ale nebudeme to v přednášce probírat.

2.2 Spektrum operátoru

Definice 2 *Předpokládejme, že f je lineární zobrazení lineárního vektorového prostoru V do sebe. Číslo λ se nazývá vlastní číslo zobrazení f, pokud existuje vektor $v \in V, v \neq 0$, takový, že*

$$f(v) = \lambda \cdot v.$$

Vektor v se pak nazývá vlastní vektor, odpovídající vlastnímu číslu λ. (Pro případ, že prostor V je prostor funkcí, často mluvíme o vlastní funkci místo o vlastním vektoru). Množina všech vlastních čísel zobrazení f se nazývá spektrum zobrazení f.

Příklad:

1. Nechť $V = \mathbb{R}^n$ a nechť A je $n \times n$ matice reálných čísel. Pak zobrazení f, které (sloupcovému) vektoru $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ přiřadí vektor $y = A \cdot x \in \mathbb{R}^n$ je základním příkladem lineárního zobrazení v reálných vektorových prostorech. Vlastní čísla, resp. vlastní vektory f se obvykle nazývají *vlastní čísla,* resp. *vlastní vektory matice A.* Totéž je pravda pro $n \times n$ matice s komplexními prvky, které zadávají typické lineární zobrazení z $\mathbb{C}^n$ do sebe.

2. Nechť V je prostor všech polynomů stupně nejvýše n a f je zobrazení, které každému polynomu přiřadí jeho derivaci (je jedno jestli uvažujeme reálnou nebo komplexní verzi). Jak vypadá spektrum tohoto zobrazení a jaké jsou příslušné vlastní vektory (tj. vlastní funkce)? Jak se vlastně dají najít vlastní čísla a spektrum lineárního zobrazení?

3. Nechť $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ je diagonální (reálná či komplexní) matice, která má na diagonále prvky $d_1, \ldots, d_n$. Pak každý element $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (s jedničkou na i-tém místě) kanonické baze je zřejmě vlastní vektor matice A a odpovídající vlastní číslo je d_i. Tedy spektrum matice A je množina $\{d_1, \ldots, d_n\}$.

4. Předpokládejme, že matice A je podobná matici B, tj. předpokládejme, že existuje regulární matice C taková, že $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$. Je-li nenulový vektor x vlastním vektorem matice A, odpovídající vlastnímu číslu λ, pak $v' := C \cdot v$ je vlastní vektor matice B, odpovídající témuž vlastnímu číslu λ, neboť

   $$B \cdot v' = B \cdot C \cdot v = C \cdot (C^{-1} \cdot B \cdot C) \cdot v = C \cdot A \cdot v = C \cdot (\lambda v) = \lambda (C \cdot v) = \lambda v'.$$

Spektrum matice A je tedy stejné jako spektrum matice B. Vlastní vektory stejné nejsou, ale převadějí se na sebe pomocí matice C.

Podobně, je-li $f : V \to V$ lineární zobrazení a je-li A matice zobrazení f vůči nějaké bazi prostoru V, pak spektrum zobrazení f je rovno spektru matice A. (Odůvodněte sami, úvaha je stejná jako nahoře, místo zobrazení daného maticí C uvažujte isomorphism $\iota : V \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, daný volbou baze V, nakreslete si příslušný komutativní diagram).

Tedy platí jednoduché, leč důležité tvrzení.

Lemma 3 *Podobné matice mají stejné spektrum. Je-li f lineární zobrazení, kterému odpovídá v nějaké bazi matice A, pak spektrum f je stejné jako spektrum matice A.*

Příklad:

5. Předpokládejme, že matice A je diagonalizovatelná, tj. že je podobná diagonální matici $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Pak spektrum matice A je množina $\{d_1, \ldots, d_n\}$. Pro takovéto matice se tedy jejich spektrum dá najít převedením na diagonální tvar (pokud to ovšem budeme umět). Je každá matice diagonalizovatelná nebo existují matice, které nejsou pdoobné diagonální matici? Existují jiné způsoby jak spektrum počítat?

Věta 2 (Charakteristický polynom zobrazení)
Označme symbolem Id *identické zobrazení na vektorovém prostoru V. Je-li $f : V \to V$ lineární zobrazení, pak definujeme jeho charakteristický polynom $p(\lambda)$ vzorcem*

$$p(\lambda) := \det(f - \lambda \operatorname{Id}),$$

kde det *je determinant příslušného lineárního zobrazení.*

Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo zobrazení f právě když λ je kořenem příslušného charakteristického polynomu.

Důkaz: Připomeňme si, že determinant lineárního zobrazení byl definován jako determinant libovolné matice, reprezentující toto zobrazení a že nezávisel na výběru této matice (determinanty podobných matic jsou stejné!). Vlastní vektor zobrazení f odpovídající vlastnímu číslu λ je totéž jako nenulový prvek v jádru zobrazení $f_\lambda := f - \lambda \operatorname{Id}$. Ale my už víme, že jádro lineárního zobrazení f_λ je triviální právě když matice, která ho reprezentuje (v libovolné bazi) je regulární, což je pravda právě když determinant zobrazení f_λ je nenulový. $\square$

Poznámka: Další způsob, jak najít spektrum lineárního zobrazení f je tedy následující. Stačí zvolit bazi V, najít matici A zobrazení f vůči této bazi, spočítat determinant matice $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ jako polynom v proměnné λ a najít jeho všechny kořeny (pokud toto vše budeme umět spočítat). Často je lineární zobrazení f už zadáno maticí, takže první část úlohy odpadá.

Věta 3 (Prosté spektrum)
Předpokládejme, že charakteristická rovnice lineárního zobrazení $f : V \to V$ má všechny kořeny $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ navzájem různé (tj. jednonásobné). Označíme-li pro v_i libovolný vlastní vektor s vlastním číslem $\lambda_i, , i = 1, \ldots, n$, pak $v_1, \ldots, v_n$ je baze V a matice zobrazení f vůči této bazi je diagonální matice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Důkaz: Stupeň charakteristického polynomu zobrazení f je roven dimenzi prostoru V. Podle předpokladů věty je tedy dimenze V rovna n. Chceme tedy ukázat, že množina vektorů $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. Dokážeme to sporem.

Předpokládejme, že M je lineárně závislá a nechť $W =< M >$ je její lineární obal. Dimenzi W označme k, tedy $k < n$. Z množiny M lze vybrat bazi W a můžeme předpokládat, že vektory v množině M jsou očíslovány tak, že $\{v_1, \ldots, v_k\}$ tvoří bazi W. Vektor v_{k+1} je tedy lineární kombinací vektorů $\{v_1, \ldots, v_k\}$, t.j. existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, taková, že

$$v_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j.$$

Tedy platí také $\lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k+1} \alpha_j v_j$. Na druhou stranu, použijeme-li na vektor v_{k+1} zobrazení f, pak dostaneme vztah

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = f(v_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_j v_j.$$

Tedy odečtením dostaneme $0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j [\lambda_{k+1} - \lambda_j] v_j$ a protože $v_1, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé, platí pro všechna $j = 1, \ldots, k$ rovnost $\alpha_j(\lambda_{k+1} - \lambda_j) = 0$. Protože podle předpokladu je spektrum zobrazení f prosté, je $\alpha_j = 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, k$ a $v_{k+1} = 0$, což je spor. $\square$

Matice může mít bazi z vlastních vektorů, i když nemá prosté spektrum. Diagonalizovatelná jsou i některá lineární zobrazení, jejichž některá vlastní čísla mají vyšší násobnost. V řeči matic jsou to např. všechny matice podobné libovolné diagonální matici (která může mít na diagonále cokoliv, například jen jedno opakující se číslo).

Je nutné si ale uvědomit, že obecně může být množina vlastních vektorů dané $n \times n$ malá a nemusí vždy tvořit bazi prostoru $\mathbb{R}^n$. Typický je následující příklad.

1. Uvažme například 2×2 matici
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Její charakteristický polynom je zřejmě roven $(1 - \lambda)^2$ a má číslo 1 jako dvojnásobný kořen. Vlastní vektory najdeme jako netriviální prvky jádra matice
$$J - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Snadným výpočtem zjistíme, že všechny vlastní vektory jsou násobky vektoru $v = (1, 0)^t$. Tedy tato matice nemá bazi složenou z vlastních vektorů.

   Totéž se ukáže stejným způsobem pro matici
$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
a $n \times n$ matice J_n, které jsou horní trojúhelníkové a mají na diagonále a na horní vedlejší diagonále jedničky a jinde nuly. Tyto matice se budou vyskytovat zanedlouho v tzv. Jordanově kanonickém tvaru matice, jsou to speciální případy tzv. Jordanových buněk.

2. V případě reálných vektorových prostorů nemusí dokonce existovat ani jeden vlastní vektor dané matice. Typickým příkladem je matice
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
která odpovídá rotaci o úhel θ v rovině. Pokud je úhel θ v intervalu $< 0, \pi >$, pak zřejmě nemůže existovat žádný vlastní vektor matice A.

Je-li $\theta = \pi/2$, pak
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
její charakteristický polynom je zřejmě $\lambda^2 + 1$ a ten má kořeny $\pm i$. Odpovídající vlastní vektory najdeme jen, pokud budeme uvažovat A jako zobrazení z $\mathbb{C}^2$ do $\mathbb{C}^2$. Obecně je pravda, že je-li V komplexní vektorový prostor, pak každé lineární zobrazení V do V má alespoň jeden vlastní vektor.

Lemma 4 *Je-li V komplexní vektorový prostor a F lineární zobrazení, pak má F alespoň jedno vlastní číslo a vlastní vektor.*

Důkaz: Charakteristický polynom má alespoň jeden kořen λ, tedy lineární zobrazení $F - \lambda\,\mathrm{Id}$ má nulový determinant a jeho jádro je tedy netriviální. Nenulový prvek tohoto jádra je pak vlastní vektor pro vlastní číslo λ. $\square$

Poznámka: Už bylo zdůrazněno, že rozklad polynomu na kořenové činitele je možný jen v tělese komplexních čísel (to je jedna z jeho naprosto základních vlastností a důvod pro neustálé a systematické používání komplexních čísel). I v případě, že A je komplexní čtvercová matice hledáme vlastní čísla a vlastní vektory v komplexním oboru. Charakteristický polynom reálné matice má reálné koeficienty a tak víme, že vlastní čísla s netriviální imaginární částí se vyskytují vždy ve dvojicích navzájem komplexně sdružených. Všimněte si, že totéž platí i pro příslušné vlastní vektory: platí-li $v \in \mathbb{C}^n$, $A \cdot v = \lambda\, v$, pak také platí $A \cdot \overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. To plyne ihned ze známé vlastnosti $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, která platí pro libovolná dvě komplexní čísla.

3 Jordanův kanonický tvar pro lineární zobrazení (matici).

Cílem celé této kapitoly bude popsat, jak pro dané lineární zobrazení $F : V \mapsto V$ zvolit bazi V tak, aby matice F pro tuto bazi byla co nejjednodušší. Pro zobrazení, jehož spektrum je prosté jsme si již ukázali, že příslušné vlastní vektory tvoří bazi a že v této bazi je matice příslušného zobrazení diagonální (na diagonále jsou vlastní čísla). Toto je nejjednodušší případ Jordanova kanonického tvaru zobrazení. Obecně je úloha popsat (a spočítat) Jordanův kanonický tvar mnohem obtížnější.

V celé této části berem (čtvercové) matice jako speciální případ lineárních zobrazení. Každá čtvercová matice A typu $n \times n$ určuje lineární zobrazení F_A z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Specielně tedy budeme mluvit o Jordanově kanonickém tvaru matice.

V následujícím paragrafu tuto úlohu vyřešíme pro nilpotentní zobrazení.

3.1 Nilpotentní zobrazení (matice)

Základní případ, který je třeba pochopit, je případ ostře horních trojúhelníkových matic a jejich kanonického tvaru. Tyto matice mají jednoduchou vlastnost, která je charakterizuje - pro každou horní trojúhelníkovou matici A existuje přirozené číslo k takové že $A^k = 0$.

Definice 3 Nilpotentní zobrazení
Řekneme, že lineární zobrazení $F : V \to V$ je nilpotentní, pokud existuje přirozené číslo k takové, že $F^k = 0$. Nejmenší číslo, pro které toto platí se nazývá stupeň zobrazení F.

Poznámka: Pro další úvahy bude podstatná tato posloupnost do sebe zařazených podprostorů V (platnost příslušných inklusí plyne ihned z definice příslušných podprostorů):

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} F^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} F^k \subset \operatorname{Ker} F^{k+1} \subset \ldots.$$

Pro případ, že F je nilpotentní řádu k, dostaneme

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} F^2 \subset \ldots \subset \ker F^k = V.$$

Zároveň s touto posloupností inklusí je užitečné uvažovat doplňkovou posloupnost (odpovídající inkluse plynou ihned z definice):

$$V \supset \operatorname{Im} F \supset \operatorname{Im} F^2 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} F^k = \{0\}.$$

Z minulého semestru víme, že pro každé $j = 1, \ldots, k$ platí $\dim \operatorname{Ker} F^j + \dim \operatorname{Im} F^j = \dim V$. Z toho například plyne, že inkluse na odpovídajících si místech těchto dvou posloupností jsou buď obě současně ostré, nebo obě současně neostré.

Věta 4 Ekvivalentní podmínka nilpotence
Lineární zobrazení F je nilpotentní právě když jediné vlastní číslo F je nula.

Důkaz: Je-li F nilpotentní a v jeho vlastní vektor pro vlastní číslo λ, pak $F^k(v) = \lambda^k v = 0$, tedy $\lambda^k = 0$ a $\lambda = 0$.

Předpokládejme naopak, že jsou všechna vlastní čísla F nulová. Dimense V je konečná, tedy v posloupnosti

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} F^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} F^k \subset \operatorname{Ker} F^{k+1} \subset \ldots.$$

nemohou být všechny inkluse ostré. Tedy existuje j přirozené, pro které platí $\operatorname{Ker} F^j = \operatorname{Ker} F^{j+1}$.

Pak také $\operatorname{Im} F^j = \operatorname{Im} F^{j+1}$ (vzpomeňte si na větu o součtu dimensí jádra a obrazu!). Zobrazení F tedy zobrazuje podprostor $\operatorname{Im} F^j$ *na sebe.* Zúžení F na $\operatorname{Im} F^j$ je tedy prosté. Pokud by $\operatorname{Im} F^j$ byl netriviální podprostor, pak v něm existuje vlastní vektor a odpovídající vlastní číslo F je nenulové (F je na $\operatorname{Im} F^j$ prosté!).

Tedy $\operatorname{Im} F^j = \{0\}$ a $\operatorname{Ker} F^j = V$. □

3.2 Přímé součty vektorových prostorů.

V této části si stručně zopakujeme fakta o přímých součtech vektorových prostorů a zavedeme s nimi spojený pojem blokového zápisu lineárního zobrazení (matice).

Definice 4 Přímý součet vektorových podprostorů
Jsou-li V_1, V_2 dva podprostory V, pak lineární obal $L(V_1 \cup V_2)$ nazveme součtem podprostorů V_1 a V_2 a označíme $V_1 + V_2$. Tento součet lze také vyjádřit takto (rozmyslete si!):

$$V_1 + V_2 = \{v \in V | \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v = v_1 + v_2\}.$$

Pokud navíc ještě platí, že $V_1 \cap V_2 = \{o\}$, pak řekneme, že podprostor $W = V_1 + V_2$ je přímý (direktní) součet podprostorů V_1 a V_2 a označíme to symbolem

$$W = V_1 \oplus V_2.$$

V tomto případě platí, že každý element $v \in V$ se dá napsat právě jedním způsobem jako součet $v = v_1 + v_2$; $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ (proč?).

To umožňuje definovat příslušné projekce p_1, p_2 na oba podprostory takto: $p_i : V_1 \oplus V_2 \to V_i$, $i = 1, 2$ jsou lineární zobrazení definované předpisem $p_i(v) = v_i$, pokud $v = v_1 + v_2$.

Analogicky (indukcí) se definuje součet $V_1 + \ldots + V_k$ a přímý součet $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ a odpovídající projekce. Podmínka pro přímý součet je, že $V_i \cap (\oplus_{j;j\neq i} V_j) = \{o\}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Příklad:

1. Nejjednodušší příklad direktního rozkladu prostoru na dva sčítance je rozklad $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l, k + l = n$ definovaný vztahem
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow$$
$$x = x' + x'',\; x' = (x_1, \ldots, x_k),\; x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n).$$
Totéž lze napsat pro složitější součet $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{k_l};\ \sum_{j=1}^{l} k_j = n$.

2. Rozmyslete si a nakreslete, že $\mathbb{R}^3$ nelze napsat jako přímý součet dvou dvoudimenzionálních podprostorů (rovin). Nakreslete si případ, kdy $\mathbb{R}^3$ je přímým součtem jednodimenzionálního a dvoudimenzionálního podprostoru.

Definice 5 Blokový zápis zobrazení.
Předpokládejme, že $V = V_1 \oplus V_2, W = W_1 \oplus W_2$, a $F : V \to W$ je lineární zobrazení. Pak každé $v_1 \in V_1$ lze obraz $F(v_1)$ jednoznačně napsat ve tvaru $F(v_1) = w_1 + w_2;\ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. Můžeme tedy definovat zobrazení $F_{11} : V_1 \to W_1$ a $F_{21} : V_1 \to W_2$ předpisem $F_{11}(v_1) = w_1, F_{21}(v_1) = w_2$. Stejně se definují zobrazení $F_{12} : V_2 \to W_1$ a $F_{22} : V_2 \to W_2$.

Je-li $v = v_1 + v_2 \in V$, pak

$$F(v) = F(v_1) + F(v_2) = (F_{11}(v_1) + F_{21}(v_1)) + (F_{12}(v_2) + F_{22}(v_2)).$$

Symbolicky toto budeme zapisovat ve maticovém tvaru

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}; \quad F(v) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(v_1) + F_{12}(v_2) \\ F_{21}(v_1) + F_{22}(v_2) \end{pmatrix}.$$

Odpovídající 2×2 matici budeme nazývat blokový zápis zobrazení F.

Analogicky (indukcí) lze definovat blokový zápis zobrazení pro případ složitějších rozkladů $V = V_1 \oplus \ldots V_n, W = W_1 \oplus \ldots W_m$. V tomto případě je zobrazení F representováno maticí zobrazení

$$F = (F_{ji})_{i=1,j=1}^{n,m}, F_{ji} : V_i \to W_j.$$

Příklad: Nejjednodušší je pochopení blokového zápisu lineárních zobrazení v řeči matic. Předpokládejme, že $m \times n$ matice A representuje příslušné lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a že máme dané rozklady

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k_1} \oplus \ldots \oplus R^{k_l};\ \sum_{j=1}^{l} k_j = n, \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{s_1} \oplus \ldots \oplus R^{s_t};\ \sum_{j=1}^{t} s_j = m.$$

Pak příslušný rozklad zobrazení, odpovídajícího matici A, je dán prostým rozdělením matice na bloky příslušných podmatic.

Pro jednoduchý případ 2×2 blokové matice vypadá situace takto:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 \\ A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}.$$

Formule pro blokové násobení je tedy stejná, jako by příslušné elementy byly čísla. Nesmí se ale zapomenout, že každý jednotlivý součin je v tomto případě násobení příslušných podmatic!

Definice 6 Podprostor invariantní vzhledem k zobrazení, nerozložitelný podprostor
Předpokládejme, že $F : V \to V$ je lineární zobrazení. Řekneme, že podprostor $W \subset V$ je invariantní podprostor vůči zobrazení F, pokud F zobrazuje W do sebe, tj. $\operatorname{Im} F \subset W$. *Potom má smysl mluvit o zúžení zobrazení na podprostor W. Toto zúžení budeme značit symbolem $F|_W : W \to W$.*

Řekneme, že invariantní podprostor W je nerozložitelný (či ireducibilní) vůči F, pokud ho nelze napsat jako přímý součet jeho dvou invariantních podprostorů.

Příklad: Předpokládejme, že F je dáno maticí A. Rozdělme $\mathbb{R}^n$ na přímý součet $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l, k + l = n$ a napišme matici A v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Rozmyslete si, že $\mathbb{R}^k$ je invariantní podprostor pro zobrazení A právě když $A_{21} = 0$.

Obdobně platí, že oba podprostory $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^l$ jsou invariantní vůči A právě když A je „blokově diagonální“, tj. $A_{12} = A_{21} = 0$.

Totéž platí pro lineární zobrazení místo matic (zformulujte si sami!).

3.3 Jordanova buňka

Následující jednoduché tvrzení ukazuje, jak vypadá baze, která odpovídá tak zvané Jordanově buňce.

Lemma 5 *Předpokládejme, že F je zobrazení z prostoru V do sebe a předpokládejme, že existují vektory $v_1, \ldots, v_k$ prostoru V s vlastností*

$$F(v_k) = v_{k-1}, F(v_{k-1}) = v_{k-2}, \ldots, F(v_2) = v_1, F(v_1) = 0.$$

Označme symbolem W podprostor generovaný vektory $v_1, \ldots, v_k$.

Pak W je invariantní podprostor V pro zobrazení F, vektory $v_1, \ldots, v_k$ tvoří jeho bazi, a matice zobrazení $F|_W$ vůči této bazi má tvar

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je to ostře horní trojúhelníková matice, která má na vedlejší diagonále jedničky a všude jinde nuly. Matice J_k se nazývá Jordanova buňka dimenze k.

Je možné si rozmyslet, že podprostory $L_j := L(v_j, \ldots, v_1)$ jsou invariantní podprostory V (ve skutečnosti už žádné další invariantní podprostory neexistují) a že V se nedá rozložit na přímý součet dvou invariantních podprostorů.

Důkaz: Invariance podprostoru W plyne ihned z vlastností F na množině generátorů W. Lineární nezávislost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ si za chvíli dokážeme v obecnější situaci. Tvar matice F vůči bazi $v_1, \ldots, v_k$ plyne okamžitě z definice matice zobrazení vůči bazi. □

Tyto úvahy vedou k následující definici.

Definice 7 Řetězce vektorů
Nechť $F : V \to V$ je lineární zobrazení, pak řetězec vektorů pro zobrazení F je posloupnost nenulových vektorů $v_1, \ldots, v_k$, pro kterou platí $F(v_k) = v_{k-1}, F(v_{k-1}) = v_{k-2}, \ldots, F(v_2) = v_1, F(v_1) = 0$. Řetězec vektorů budeme stručně symbolicky značit $v_k \to v_{k-1} \to \ldots \to v_1 \to 0$. Číslo k nazveme délka řetězce.

Řekneme, že řetězec je maximální řetězec, pokud není částí žádného delšího řetězce. To je ekvivalentní s tím, že $v_k \notin \operatorname{Im} F$.

Obecně budeme potřebovat následující pomocné tvrzení.

Lemma 6 *Předpokládejme, že je dán systém řetězců vůči zobrazení F v prostoru V. Pak množina všech vektorů daného systému řetězců je lineárně nezávislá právě když je nezávislá ta skupina z nich, která leží v* $\operatorname{Ker} F$ *(t.j. množina koncových vektorů jednotlivých řetezců).*

Důkaz: Jedna implikace je triviální (protože každá podmnožina lineárně nezávislé skupiny vektorů je lineárně nezávislá).

Předpokládejme naopak, že je lineárně nezávislá ta skupina nenulových vektorů všech řetězců, která leží v $\operatorname{Ker} F$. Pokud by množina všech vektorů všech řetězců byla lineárně závislá, existuje jejich netriválni lineární kombinace, rovná nulovému vektoru.

Zapišme si vektory v jednotlivých řetězcích do sloupců nad sebe tak, že všechny vektory v $KerF$ (koncové vektory jednotlivých řetězců) jsou napsány vedle sebe na nejnižším řádku a jsou označeny $v_1^1, \dots, v_{s_1}^1$, množina jejich vzorů je nad nimi na druhém řádku a jsou označeny $v_1^2, \dots, v_{s_1}^2$, a tak dále, až konečně nejvyšší řádek obsahuje počáteční vektory nejdelších řetězců (délky k) $v_1^k, \dots, v_{s_k}^k$. Předpokládáme, že tedy $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq 0$ a že F zobrazuje vždy vektor v_i^{j+1} na vektor v_i^j pod ním.

Nechť tedy existují čísla α_i^j tak, že $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j = o$. Předpokládejme dále, že všechny koeficienty α_i^j jsou nulové pro řádky s indexem $j = l+1, \dots, k$ a že v l-tém řádku existuje alespoň jeden nenulový koeficient, který označíme $\alpha_{j_0,l}$. Pak $\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j = o$ a tedy i $F^{l-1}(\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j) = o$. Ale pak

$$F^{l-1}(\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_i^j v_i^j) = \sum_{i=1}^{s_l} \alpha_i^l v_i^1 = o.$$

Z lineární nezávislosti prvního netriviálního řádku diagramu ale plyne, že všechny koeficienty $\alpha_1^l \dots, \alpha_{s_l}^l$ jsou nulové, což je spor. $\square$

3.4 Jordanův kanonický tvar pro nilpotentní zobrazení.

Věta 5 O struktuře nilpotentního zobrazení
Předpokládejme, že $F : V \to V$ *je nilpotentní zobrazení stupně* k *a* $\dim V = n$. *Pak existují nezáporná celá čísla* $n_1, \dots, n_k$ *s vlastností* $\sum_{j=1}^{k} j\, n_j = n$ *a maximální řetězce vektorů*

$$\begin{gathered}
v_{k,1}^{k} \to v_{k,1}^{k-1} \to \dots \to v_{k,1}^{1} \to 0, \\
\vdots \\
v_{k,n_k}^{k} \to v_{k,n_k}^{k-1} \to \dots \to v_{k,n_k}^{1} \to 0, \\
v_{k-1,1}^{k-1} \to v_{k-1,1}^{k-2} \to \dots \to v_{k-1,1}^{1} \to 0, \\
\vdots \\
v_{k-1,n_{k-1}}^{k-1} \to v_{k-1,n_{k-1}}^{k-1} \to \dots \to v_{k-1,n_{k-1}}^{1} \to 0, \\
\vdots \\
v_{2,1}^{2} \to v_{2,1}^{1} \to 0, \\
\vdots \\
v_{2,n_2}^{2} \to v_{2,n_2}^{1} \to 0, \\
v_{1,1}^{1} \to 0, \\
\vdots \\
v_{1,n_1}^{1} \to 0,
\end{gathered}$$

takové, že množina všech nenulových vektorů všech těchto řetězců tvoří bazi prostoru V.

Matice zobrazení F *vůči této bazi je blokově diagonální a na diagonále má postupně* n_k *Jordanových buněk* J_k, n_{k-1} *Jordanových buněk* J_{k-1}, *a tak dále, až* n_2 *Jordanových buněk* J_2 *a* n_1 *Jordanových buněk* J_1. *Tento Jordanův tvar* F *je jednoznačný až na pořadí Jordanových bloků na diagonále (pořadí závisí na pořadí, ve kterém bereme jednotlivé řetězce v celkové bazi). Obvykle se píše Jordanův tvar tak, že na diagonále jsou bloky seřazeny sestupně podle jejich dimenze (tento tvar je jednoznačný a je určen jen čísly* n_1 *až* n_k*).*

Poznámka: Abychom dostali výše uvedený kanonický Jordanův tvar zobrazení F, musíme vektory v řetězcích seřadit tak jako v Lemmatu 5, tj. nejdřív koncový vektor z $\operatorname{Ker} F$, pak jeho vzor, pak vzor jeho vzoru, atd., a pak napsat postupně řetězce v jakémkoliv pořadí za sebe. Libovůle je právě ve výběru zápisu pořadí jednotlivých řetězců v bazi V, a tato libovůle se projeví v libovůli umístění Jordanových buněk na diagonále. Čísla $n_1, \dots, n_k$ určující počet řetězců jednotlivých délek jsou ale určena jednoznačně.

Je užitečné si nakreslit pro zkoumané nilpotentní zobrazení F diagram, ve kterém si nakreslíme řetězce do sloupců, postupně podle jejich délky (zkuste si nakreslit obrázek pro případ, kdy

$$\dim V = 13, n_3 = 2, n_2 = 3, n_1 = 1.$$

Ověřte, že první (zespodu) netriviální řádka tohoto diagramu je base podprostoru $\operatorname{Ker} F$, první dvě řádky tvoří basi $\operatorname{Ker} F^2$, atd. Zkuste si na obrázku uvědomit, jak vypadají base prostorů $\operatorname{Im} F, \operatorname{Im} F^2, \dots$ a prostorů $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F, \operatorname{Im} F^2 \cap \operatorname{Ker} F, \dots$

Důkaz: Požadovanou sadu (maximálních) řetězců sestrojíme postupně následujícím způsobem (striktně vzato bychom měli používat indukci). Nejdříve si vezmeme libovolnou bazi podprostoru $\operatorname{Im} F^{k-1} \subset \operatorname{Ker} F$, a označíme ji $v^1_{k,1}, \dots, v^1_{k,n_k}$. To budou nejnižší vektory, které doplníme pomocí příslušných vzorů (tyto vzory existují, protože vektory patří do $\operatorname{Im} F^{k-1}$) do n_k řetězců délky k.

Další krok v konstrukci bude tento. Protože $\operatorname{Im} F^{k-1} \subset \operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F$, můžeme doplnit dříve zvolenou bazi prostoru $\operatorname{Im} F^{k-1}$ pomocí vektorů $v^1_{k-1,1}$, $\dots, v^1_{k-1,n_{k-1}}$ do bazi celého prostoru $\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F$. Opět můžeme tyto nejnižší vektory doplnit na řetězce délky $k-1$.

Stejně postupujeme dále, bazi prostoru $\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F$, kterou jsme již sestrojili, doplníme na bazi prostoru $\operatorname{Im} F^{k-3} \cap \operatorname{Ker} F$ a nově přidané vektory doplníme na řetězce délky $k-2$, atd., až nakonec získanou bazi prostoru $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F$ doplníme na bazi prostoru $\operatorname{Ker} F$, posledně doplněné vektory už budou samy řetězce délky 1.

Chtěli bychom nyní ukázat, že množina všech takto sestrojených řetězců tvoří bazi prostoru V.

Pro důkaz lineární nezávislosti stačí použít Lemma 6, protože konce řetězců tvoří podle konstrukce bazi prostoru $\operatorname{Ker} F$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

Abychom věděli, že je to baze V, stačí spočítat, že počet těchto vektorů je právě $n = \dim V$.

Označme

$$\alpha_j = \dim \operatorname{Ker} F^j - \dim \operatorname{Ker} F^{j-1}, j = 2, \ldots, k; \alpha_1 = \dim \operatorname{Ker} F.$$

Prohlídkou diagramu řetězců se snadno přesvědčíme, že $\dim \operatorname{Ker} F^j$ je počet vektorů ve spodních j řádcích a že tedy α_j je počet prvků v j-tém řádku. Zároveň se z diagramu snadno vidí, že postupně

$$n_k = \alpha_k = \dim \operatorname{Im} F^{k-1},$$

$$n_{k-1} = \alpha_{k-1} - \alpha_k = \dim(\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F) - \dim(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F)$$

$$\vdots$$

$$n_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \dim(\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F) - \dim(\operatorname{Im} F^2 \cap \operatorname{Ker} F)$$

$$n_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \dim \operatorname{Ker} F - \dim(\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F).$$

Celkový počet vektorů v sestrojených řetězcích je tedy

$$\alpha_k\, k + (\alpha_{k-1} - \alpha_k)(k-1) + \ldots + (\alpha_2 - \alpha_3)2 + (\alpha_1 - \alpha_2) =$$

$$\alpha_k + \alpha_{k-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1 = \dim \operatorname{Ker} F^k = \dim V.$$

$\square$

Poznámka: Je-li $\dim V = 4$, pak existuje 5 typů nilpotentních zobrazení, jejichž Jordanovy buňky mají postupně dimense $\{4\}, \{3,1\}, \{2,2\}, \{2,1,1\}$, $\{1,1,1,1\}$. To odpovídá rozkladům $4 = 4, 4 = 3{+}1, 4 = 2{+}2, 4 = 2{+}1{+}1, 4 = 1+1+1+1$. Poslední případ (jediný) odpovídá diagonalizovatelné matici (a to matici obzvlášť jednoduché, totiž triviální matici).

Nakreslete si určitě odpovídající diagram maximálních řetězců v každém z těchto pěti případů. Udělejte si sami podobný rozbor v dimensi 2 a 3.

Čísla α_j jsou v těchto jednotlivých případech rovna postupně

$$\alpha_4 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 1;\ \alpha_3 = \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 2;$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 = 2;\ \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 3;\ \alpha_1 = 4.$$

Dimense $\dim \operatorname{Ker} F^j$ jsou v těchto případech dány postupně posloupnostmi

$$(4,3,2,1);\ (4,3,2);\ (4,2);\ (4,3);\ (4).$$

Všimněte si, že stupeň k nilpotentnosti F v těchto pěti typech není stejný, rovná se postupně $4, 3, 2, 2, 1$.

Tyto dimense jader mocnin F jsou čísla, která lze spočítat nejdřív. Stačí si napsat matici A zobrazení F v libovolné bazi, spočítat si její mocniny A^j a jejich hodnosti a využít vztahu $\dim \operatorname{Ker} F^j = n - h(A^j)$. Z nich lze snadno zpětně odvodit čísla α_j a násobnosti n_j Jordanových buněk. Tento výpočet je potřeba udělat nejdřív, ještě než se začne hledat podle Věty 5 baze, ve které má F blokově diagonální tvar s Jordanovými buňkami na diagonále.

Věta 5 naznačuje, jak se příslušná baze dá hledat. Zaručený postup je ten, že se nejdříve najde typ rozkladu na invariantní podprostory (čísla α_j, n_j, viz výše) spočítá se prostor $\operatorname{Ker} F$, v něm najde posloupnost podprostorů

$$(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F) \subset (\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F) \subset \ldots (\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F) \subset \operatorname{Ker} F.$$

Postupně se najde baze $(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F)$, doplní se na bazi $(\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F)$, atd. a postupně až na bazi celého $\operatorname{Ker} F$. Tato skupina vektorů jsou koncové vektory příslušných maximálních řetězců, ke kterým je třeba najít příslušné vzory (v prostoru $(\operatorname{Im} F^{k-1} \cap \operatorname{Ker} F)$ jich musí být $k-1$, pro další doplněné vektory v $(\operatorname{Im} F^{k-2} \cap \operatorname{Ker} F)$ je jich $k-2$, atd.).

Tento postup je sice jistý, ale hledání vzorů vektorů vyžaduje řešit příslušné soustavy rovnic, což je dost práce. Jednodušší, ale ne zcela zaručený postup je konstruovat příslušné řetězce odshora. Jejich strukturu je třeba v každém případě od začátku znát a mít spočítanou. Pak vezmu α_k vektorů v $\operatorname{Ker} F^k = V$ náhodně (často je dobré zkusit nejdříve prvky kanonické base) a budu doufat, že jejich obrazy při zobrazení F^{k-1}, které se lehce spočítají, vyjdou lineárně nezávislé v $\operatorname{Ker} F$; pokud ne, je třeba volbu korigovat).

Podobně pak sestrojuji řetězce délky kratší. Řetězce délky jedna je třeba nakonec sestrojit doplněním koncových vektorů už sestrojených řetězců do base $\operatorname{Ker} F$.

Pro příklady, které jsme schopni sami spočítat, se jedná zpravidla o nejvýše 4×4 matice a tam tento návod již zpravidla stačí.

Příklad: Najděte strukturu Jordanova kanonického tvaru matice

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 10 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ihned zjistíme, že $A^2 = 0$, a že tedy je matice A nilpotentní matice stupně 2. Snadným výpočtem zjistíme, že hodnost matice A je 2. Tedy $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ a $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 4$, $\alpha_2 = 4-2 = 2$, $\alpha_1 = 2$, a $n_2 = 2$, $n_1 = 2-2 = 0$. Matice má tedy strukturu odpovídající rozkladu $4 = 2 + 2$, má dva maximální řetězce délky 2 a žádné další.

Stačí tedy najít tyto dva řetězce. Nejjednodušší je zkusit uhodnout počáteční vektory dvou řetězců. Stačí např. zvolit dva vektory kanonické baze a spočítat jejich obrazy při zobrazení F. Volba e_2, e_3 funguje (obrazy jsou lineárně nezávislé), ale např. volba e_3, e_4 by nebyla přípustná, protože jejich obrazy jsou lineárně závislé.

Tedy v bazi $F(e_2), e_2, F(e_3), e_3$ odpovídá matici A bloková matice tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro kontrolu můžete zkusit, že pro matici

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 10 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

jejíž sloupce tvoří souřadnice vektorů vybrané baze platí $J = C^{-1} A\, C$, neboli $A = C\, J\, C^{-1}$. Pokud se vám nechce vypočítávat inversní matici k C, ověřte místo toho ekvivalentní vztah $A\, C = C\, J$.

3.5 Jordanův kanonický tvar obecné matice.

Definice 8 Zobecněné vlastní podprostory
Předpokládejme, že $F : V \to V$ je lineární zobrazení a λ je jeho vlastní číslo. Označme $F_\lambda = F - \lambda\,\mathrm{Id}$.

Zobecněný vlastní podprostor V_λ zobrazení F, příslušný vlastnímu číslu λ je definován takto:

$$V_\lambda := \{v \in V | \exists \;\; j \in \mathbb{N}, F_\lambda^j(v) = 0\}.$$

Definice 9 Řetězce vektorů příslušné vlastnímu číslu, Jordanova buňka
Prostor $Ker F_\lambda \setminus \{o\}$ je prostor vlastních vektorů pro vlastní číslo λ. Řekneme, že posloupnost $v_k \to v_{k-1} \to \ldots \to v_1$ je řetězec pro vlastní číslo λ, pokud v_1 je vlastní vektor pro vlastní číslo λ a platí

$$F(v_k) = \lambda v_k + v_{k-1},\; F(v_{k-1}) = \lambda v_{k-1} + v_{k-2},\; \ldots, F(v_2) = \lambda v_2 + v_1.$$

Čtvercovou matici J_m^λ typu $m \times m$

$$J_m^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

nazveme Jordanovou buňkou řádu m pro vlastní číslo λ.

Poznámka: Všimněte si, že zobrazení F_λ zachovává zobecněný vlastní podprostor V_λ a zúžení F_λ na V_λ je nilpotentní zobrazení (protože má všechny vlastní čísla nulová, viz důkaz následující věty). Jeho strukturu můžeme zjistit postupem popsaným v minulém paragrafu. Všimněte si také, že řetězec pro vlastní číslo λ pro zobrazení F je totéž jako řetězec pro zobrazení F_λ na V_λ.

Lemma 7 O vlastních podprostorech zobrazení
Předpokládejme, že $F : V \to V$ je lineární zobrazení a $\lambda \in Spec(F)$ je jeho vlastní číslo. Označme symbolem F_λ lineární zobrazení $F_\lambda := F - \lambda \,\mathrm{Id}$.

Pak existuje přirozené číslo k takové, že

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} F_\lambda \subset \operatorname{Ker} F_\lambda^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} F_\lambda^k = \operatorname{Ker} F_\lambda^{k+1} = \ldots,$$

$$V \supset \operatorname{Im} F_\lambda \supset \operatorname{Im} F_\lambda^2 \subset \ldots \supset \operatorname{Im} F_\lambda^k = \operatorname{Im} F_\lambda^{k+1} = \ldots$$

a všechny inkluse jsou ostré. Navíc jsou podprostory $\operatorname{Ker} F_\lambda^k$ a $\operatorname{Im} F_\lambda^k$ invariantní vůči F i F_λ a platí pro ně

$$\operatorname{Ker} F_\lambda^k \oplus \operatorname{Im} F_\lambda^k = V.$$

Podprostor $\operatorname{Ker} F_\lambda^k$ je totožný se zobecněným vlastní podprostorem V_λ.

Důkaz: První ostrá inkluse v první posloupnosti lemmatu platí, protože λ je vlastní číslo zobrazení F a tedy jádro $\operatorname{Ker} F_\lambda$ je netriviální. Protože V má konečnou dimensi, existuje přirozené číslo k takové, že $\operatorname{Ker} F_\lambda^k = \operatorname{Ker} F_\lambda^{k+1}$, můžeme vzít za k nejmenší číslo s touto vlastností. Pak je lehké vidět, že rovnosti jsou na všech dalších místech inklusí. Vskutku, rovnost $\operatorname{Ker} F_\lambda^k = \operatorname{Ker} F_\lambda^{k+1}$ je ekvivalentní s implikací $v \in V, F_\lambda^{k+1}(v) = 0 \Longrightarrow F_\lambda^k(v) = 0$. Je-li tedy $v \in V, F_\lambda^{k+2}(v) = F_\lambda^{k+1}(F_\lambda(v)) = 0$, pak $F_\lambda^k(F_\lambda(v)) = F_\lambda^{k+1} = 0$. Tedy $\operatorname{Ker} F_\lambda^{k+1} = \operatorname{Ker} F_\lambda^{k+2}$ a podobně se postupuje dál indukcí.

Protože $\dim \operatorname{Ker} F_\lambda^j + \dim \operatorname{Im} F_\lambda^j = \dim V$, platí také pro druhou řadu inklusí pro $\operatorname{Im} F_\lambda^j$ neostré nerovnosti pro mocniny menší než k a počínaje mocninou k platí rovnosti.

Invariance podprostorů $\operatorname{Ker} F_\lambda^k$ a $\operatorname{Im} F_\lambda^k$ vůči F se ukáže pomocí jednoduché rovnosti

$$F(v) = F_\lambda(v) + \lambda v.$$

Tedy je-li $v \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k$, pak

$$F_\lambda^k(F(v)) = F_\lambda^{k+1}(v) + \lambda F_\lambda^k(v) = 0,$$

Podobně, je-li $v \in \operatorname{Im} F_\lambda^k$, pak zřejmě

$$F(v) = F_\lambda(v) + \lambda v \in \operatorname{Im} F_\lambda^{k+1} = \operatorname{Im} F_\lambda^k.$$

Invariance $\operatorname{Ker} F_\lambda^k$ a $\operatorname{Im} F_\lambda^k$ vůči F_λ je pak snadný důsledek.

Dále dokážeme tvrzení o přímém součtu jádra a obrazu zobrazení F_λ^k. Z minulého semestru víme, že $\dim \operatorname{Ker} F_\lambda^k + \dim \operatorname{Im} F_\lambda^k = \dim V$. Stačí tedy ukázat, že $\operatorname{Ker} F_\lambda^k \cap \operatorname{Im} F_\lambda^k = \{0\}$. Pokud $v \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k \cap \operatorname{Im} F_\lambda^k$, pak existuje $u \in V$ takové, že $v = F_\lambda^k(u)$ a $v \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k$. Pak $F_\lambda^{2k}(u) = 0$, tedy $u \in \operatorname{Ker} F_\lambda^k$ a tedy $v = 0$.

Poslední tvrzení plyne z toho, že podle definice V_λ je sjednocení všech podprostorů $\operatorname{Ker} F_\lambda^j$, $j = 1, 2, \ldots$. □

Věta 6 Jordanův kanonický tvar
Předpokládejme, že $F : V \to V$ je lineární zobrazení a $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ je jeho spektrum. Pak zobecněné kořenové podprostory $V_{\lambda_j}, j = 1, \ldots, k$ jsou invariantní vůči zobrazení F a platí

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Tedy zobrazení F je blokově diagonální vzhledem k tomu rozkladu. Jsou-li $n_1, \ldots, n_k$, ($n_1 + \ldots + n_k = \dim V$) násobnosti vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, pak $\dim V_{\lambda_j} = n_j$.

Pro každé vlastní číslo λ je zobrazení $F_\lambda = F - \lambda \operatorname{Id}$ zúžené na V_λ nilpotentní a jeho baze řetězců a Jordanův kanonický tvar se dá určit postupem vysvětleným v minulém paragrafu.

Existuje tedy pro každé λ baze prostoru V_λ z řetězců pro zobrazení F_λ. V této bazi odpovídá zobrazení F (zúžené na V_λ) blokově diagonální matici, *která má na diagonále Jordanovy buňky J_λ^j různých řádů. Sjednocení těchto bazí pro všechny vlastní čísla ze spektra F je pak baze V.*

Matice A zobrazení F vzhledem k popsané bazi je určena jednoznačně až na pořadí jednotlivých Jordanových buněk na diagonále. Matice A se nazývá se Jordanův kanonický tvar zobrazení F.

Důkaz: Nechť λ_1 je jedno z vlastních čísel zobrazení F. Víme již, že existuje přirozené číslo k takové, že vlastní podprostor V_{λ_1} pro vlastní číslo λ_1 je roven $\operatorname{Ker} F_{\lambda_1}^k$ a že $V_{\lambda_1} \oplus \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k = V$.

Zúžení F^1 zobrazení F na $W_1 := \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$ má pak opět alespoň jeden vlastní vektor, označme ho λ_2. Stejně jako předtím napíšeme $W_1 = \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$ jako přímý součet zobecněného vlastního podprostoru $(W_1)_{\lambda_2} \subset W_1$ pro zobrazení $F|_{W_1}$ a obrazu $(F|_{W_1})^{k_2}$ pro vhodné k_2. Chceme si nyní rozmyslet, že $(W_1)_{\lambda_2}$ se rovná zobecněnému vlastnímu podprostoru V_{λ_2}. Je jasné, že první prostor je částí druhého. Stačí tedy dokázat inkluzi

$$V_{\lambda_2} \subset (W_1)_{\lambda_2}.$$

Nechť k_2 je přirozené číslo, pro které $\operatorname{Ker} F_{\lambda_2}^{k_2} = V_{\lambda_2}$.

Předpokládejme tedy, že existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $F_{\lambda_2}^j(v) = o$, t.j. předpokládáme, že

$$v = v_j \mapsto v_{j-1} \mapsto \ldots \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto o$$

je řetězec pro F_{λ_2}.

Pro zobrazení F_{λ_1} zřejmě platí

$$F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\,\mathrm{Id},$$

kde $\alpha := \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. Z binomické věty dostaneme pro $v \in \operatorname{Ker} F_{\lambda_1}^k$

$$F_{\lambda_1}^k(v) = \alpha^k v + \binom{k}{1}\alpha^{k-1}F_{\lambda_2}(v) + \binom{k}{2}\alpha^{k-2}F_{\lambda_2}^2(v) + \ldots + k\alpha F_{\lambda_2}^{k-1}(v) + F_{\lambda_1}^k(v). \quad (1)$$

Nyní dokážeme (indukcí), že $v_i \in W_1 = \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$, $\forall i = 1, \ldots, j$.

Pro v_1 platí $F_{\lambda_2}(v_1) = 0$, tedy rovnice (1) se redukuje na vztah $F_{\lambda_1}^k(v_1) = \alpha^k v_1$. Protože je $\alpha \neq 0$, platí $v_1 \in \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$.

Pro v_2 platí $F_{\lambda_2}^2(v_2) = 0$, tedy rovnice (1) se redukuje na vztah

$$F_{\lambda_1}^k(v_2) = \alpha^k v_2 + \binom{k}{1}\alpha^{k-1}v_1.$$

Protože je $v_1 \in \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$, platí taky $v_2 \in \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$.

Takto postupně indukcí dokážeme, že i $v = v_j$ patří do $\operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$. Víme tedy, že $V_{\lambda_1} \oplus \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k = V$, $V_{\lambda_2} \subset W_1 = \operatorname{Im} F_{\lambda_1}^k$, a $V_{\lambda_2} \oplus \operatorname{Im} F_{\lambda_2}^{k_2} = W_1$.

Stejně postupujeme dál pro vlastní číslo λ_3 a indukcí dokážeme tvrzení věty o přímém součtu vlastních podprostorů.

Pro libovolné vlastní číslo λ má F_λ, zúžené na V_λ, jediné vlastní číslo, a to nulu. Vskutku, pokud by existoval vektor $v \in V_\lambda$, pro který by platilo $F_la(v) = \lambda' v, \lambda' \neq 0$, pak $0 = F_\lambda^k(v) = (\lambda')^k v$, tedy $v = 0$. Je tedy podle věty 4 nilpotentní. Najdeme pro V_λ bazi z řetězců pro F_λ, v ní má matice $F|_{V_\lambda}$ blokově diagonální tvar; na diagonále jsou Jordanovy buňky J_λ^i. Sjednocení bazí pro všechny vlastní čísla je baze V, ve které má matice F blokově diagonální tvar, na diagonále jsou Jordanovy buňky pro vlastní čísla F. Charakteristický polynom F je tedy možné spočítat z Jordanova kanonického tvaru, násobnost vlastního čísla λ je zřejmě rovna $\dim V_\lambda$. $\square$

Věta 7 (Hamilton-Cayley)
Označme $p(\lambda)$ charakteristický polynom matice A, pak $p(A) = 0$.

Důkaz: Jsou-li $n_i, i = 1, \ldots, j$, $n = \sum_i n_i$, násobnosti kořenů λ_i, polynomu $p(\lambda)$, pak

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_j)^{n_j}.$$

Je zřejmé, že matice $A - \lambda_i \operatorname{Id}, i = 1, \ldots, j$ spolu navzájem komutují a že na jejich pořadí ve výrazu

$$p(A) = (-1)^n (A - \lambda_1 \operatorname{Id})^{n_1} \ldots (A - \lambda_j \operatorname{Id})^{n_j}$$

nezáleží.

Z definice zobecněných kořenových podprostorů V_i plyne, že $\dim V_i = n_i$, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ a $(A - \lambda_i \operatorname{Id}) v_i = 0$ pro všechny vektory $v_i \in V_i$. Tedy i $p(A)(v_i) = 0$ pro vektory $v_i \in V_i$. Ale každý vektor $v \in V$ se dá napsat jako součet $v = v_1 + \ldots + v_j$, tedy také $p(A)(v) = 0$. $\square$

3.6 Exponenciela matice

Definice 10 Limita posloupnosti matic
Je-li B_n posloupnost matic typu $k \times m$, řekneme, že $\lim B_n = B$, pokud

pro každé $i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m$ *platí* $\lim_{n\to\infty}(B_n)_{ij} = B_{ij}$. *Podobně se definuje pro matice součet řady předpisem*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} B_k \,,$$

pokud limita existuje.

Definice 11 Exponenciála matice
Pro libovolnou čtvercovou matici A *definujeme exponencielu* $\exp A$ *takto:*

$$\exp = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/(n!) \,.$$

Lemma 8 *Pro libovolnou čtvercovou matici* A *exponenciela* $\exp A$ *existuje.*

Důkaz: Odůvodnění patří do analýzy, a tak ho jen naznačíme. Nechť je matice A typu $k \times k$. Z analýzy víte, že z absolutní konvergence řady plyne její konvergence obyčejná a že řada $\sum_n x^n/(n!)$ konverguje pro každé reálné číslo x absolutně.

Norma $||A||$ matice A se dá definovat takto: $||A|| = max_{ij}\{|A_{ij}|\}$, platí tedy pro každé i, j že $A_{ij} \leq ||A||$. Indukcí se snadno ukáže, že

$$|(A^n)_{ij}| \leq ||A^n|| \leq k^{n-1}||A||^n.$$

Z toho ihned plyne, že pro každé i, j je řada

$$\sum_n (A^n)_{ij}/(n!)$$

konvergentní, tedy $\exp A$ existuje. $\square$

Věta 8 Vlastnosti exponenciály matice

1. *Pokud* $AB = BA$, *pak* $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.
2. $\exp A \exp(-A) = \mathrm{Id}$.
3. *Pro diagonální matici* $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ *platí* $\exp A = \mathrm{diag}\,(e^{A_1}, \ldots, e^{A_k}))$.

4. Pokud $A = C^{-1}BC$, pak $\exp A = c^{-1}\exp BC$.

Důkaz:

1.
$$\exp(A+B) = \sum_{p=0}^{\infty}(A+B)^p/(p!) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p} p!/(n!(p-n)!)A^nB^{p-n} =$$
$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p} A^n/(n!)\cdot B^{p-n}/(p-n)! = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A^n/(n!)\cdot B^m/m! =$$
$$\sum_{p=0}^{\infty} A^n/(n!)\sum_{m=0}^{\infty}\cdot B^m/m! = \exp A\exp B.$$

2. Je to důsledek (1), protože A a $-A$ komutují.

3. Zřejmě $A^n = \operatorname{diag}(A_1^n, \ldots, A_k^n)$, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/n! =$ $\operatorname{diag}(\exp(A_1), \ldots, \exp(A_k)$.

4. Stačí si uvědomit, že
$$(C^{-1}BC)^n = C^{-1}B^nC.$$

□

Příklad: Pokud J_k značí Jordanovu $k \times k$ buňku, pak
$$\exp(t(\lambda\operatorname{Id} + J_k)) = e^{t\lambda}\exp(tJ_k)\,.$$

Přitom $\exp(tJ_k)$ vypadá následovně: na hlavní má diagonále samé jedničky a na další horních vedlejších diagonálách má postupně $t, \ldots, t; t^2/2!, \ldots, t^2/2!; \ldots; t^k/k!$.

Ověřte, že pro libolnou horní trojúhelníkovou matici A, která má na diagonále čísla $a_1, \ldots, a_k$ je matice $\exp(A)$ opět horní trojúhelníková a má na diagonále čísla
$$e^{a_1}, \ldots, e^{a_k}.$$

Poznámka: Před časem jsme si pro diagonalizovatelné matice dokázali pozoruhodný vztah
$$\det\exp A = \exp(\operatorname{Tr} A).$$

S tím, co teď víme je jednoduché ověřit platnost tohoto vztahu pro libovolnou matici!

Vskutku, již dlouho víme, že $\mathrm{Tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{Tr}(A)$. Všimněte si, že bod (4) ukazuje, že $\det \exp(C^{-1}AC) = \det \exp(A)$. Výše uvedený vztah stačí tedy ověřit pro matice v Jordanově kanonickém tvaru. To jsou ale horní trojúhelníkové matice, které mají na diagonále vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ s násobnostmi $n_1, \ldots, n_j$. Z toho ihned plyne, že pravá i levá strana vztahu se rovnají $\exp(n_1\lambda_1 + \ldots + n_j\lambda_j)$.

3.6.1 Řešení soustav obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

Zkoumejme řešení soustavy rovnic zapsané jako $\dot{y} = Ay$, kde A je matice a y a $\dot{y}$ představují n-tice funkcí zapsané jako sloupcové matice.

Lemma 9 *Označíme-li $Y(t) = e^{At}$, potom platí $\dot{Y}(t) = Ae^{At}$ a sloupce $Y(t)$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy rovnic, tj. jsou nezávislé, což lze snadno ověřit pro $t = 0$.*

Řešení soustavy $Y(t) = e^{At}$, s počátečními podmínkami $y(0) = y_0$ je dáno vztahem

$$Y(t) = e^{At}y_0.$$

Důkaz: Platí

$$[\mathrm{Id} + tA + t^2A^2/2! + \ldots]' = A + tA^2 + (t^2/2!)A^3 + \ldots = A\exp(tA).$$

□

Poznámka: Výše uvedený jednoduchý vzorec pro řešení soustavy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic ještě není definitivní odpověď. Problém je v tom, že exponenciela matice je dána nekonečným součtem (alespoň podle definice) a tak není řešení napsáno v explicitním tvaru. Je tedy třeba umět exponencielu matice v popisu řešení napsat pomocí elementárních funkcí explicitně. Je více možností, jak to udělat.

První z nich používá Jordanova kanonického tvaru matice (v tom je jeho význam a užitečnost). Vskutku, známe-li Jordanův kanonický tvar J matice A, $A = C^{-1}JC$, pak $\exp(tA) = C^{-1}\exp(tJ)C$. Matice J je blokově diagonální a její bloky mají tvar $\lambda\,\mathrm{Id} + J_k$. Matice $\exp(tJ)$ je tedy také blokově diagonální a její jednotlivé bloky mají tvar $e^{\lambda t}\exp(tJ_k)$ popsaný explicitně výše.

Druhý možný postup je následující. Označíme si λ_i vlastní čísla matice A, tj. kořeny rovnice $\det(A - \lambda) = 0$; dále označme ν_i jejich násobnosti a m jejich počet. Víme již, že zobecněné kořenové podprostory $V_i = \{v \in$

$R^n, (A-\lambda_i)^{\nu_i} = 0\}$ vytváří celý prostor $V = \mathbb{R}^n$, tj. $R^n = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$, a jejich jediným společným prvkem je nulový prvek, tj. $\forall j \neq k : V_j \bigcap V_k = 0$. Je-li $v_i \in V_i$, potom $e^{At}v_i = e^{(\lambda_i + A - \lambda_i)t}v_i = e^{\lambda_i t}\sum_{j=0}^{\infty}(A-\lambda_i)^j/(j!)v_i$, kde pro $j \geq \nu_i$ je výraz $(A-\lambda_i)^j/(j!)$ v sumě nulová matice, tj. součet je tvořen pouze konečně mnoha nenulovými členy a je tedy zcela explicitní.

Každý vektor $v \in R^n$ lze jednoznačně rozložit na $v = \sum_{j=1}^{m} v_j$, kde $v_j \in V_j$. K určení e^{At} stačí nyní najít pouze projektory (tj. zobrazení), které vektoru $v \in R^n$ přiřadí odpovídající $v_i \in V_i$. Charakteristický polynom matice A je $p(\lambda) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_i)^{\nu_i}(-1)^n$. Nechť platí:

$$1/p(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)^{\nu_i})$$

kde $P_i(\lambda)$ jsou polynomy stupně nejvýše $\nu_i - 1$ (rozklad na parciální zlomky). Pak

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)^{\nu_i})p(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda)\prod_{i\neq j}(\lambda-\lambda_j)^{\nu_j}]$$

Jednotlivé sčítance pak určují (dosazením A místo λ) hledané projektory, které označíme $\prod_i$:

$$\prod_i = P_i(A)\prod_{i\neq j}(A-\lambda_j\,\mathrm{Id})^{\nu_j},$$

neboť každý z nich je lineární zobrazení, jehož jádro (nulový prostor) tvoří lineární obal všech V_j pro $j \neq i$, a jejich součet je identické zobrazení. Potom platí:

$$e^{At}v = e^{At}(\prod_1(v) + \ldots + \prod_m(v)) = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t}\sum_{j=0}^{\nu_i - 1}(A-\lambda_i)^j/(j!)\Pi_i v$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Tedy:

$$\dot{y} = Ay, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděme nejprve vlastní čísla A:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$$

$$1/(\lambda^2 + 1) = i/2(\lambda + i) - i/2(\lambda - i)$$

$$\Pi_1(A) = 1/(2i)(\lambda + i) = 1/(2i)(A + i) = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2(A) = -1/(2i)(\lambda - i) = -1/(2i)(A - i) = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_1(A) + e^{-it} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_2(A)$$

$$e^{At} = e^{it} 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + e^{-it} 1/2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} (e^{it} + e^{-it})/2 & (e^{it} - e^{-it})/(2i) \\ (e^{it} - e^{-it})/(-2i) & (e^{it} + e^{-it})/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Povšimněme si, že $e^{At} = 1$ pro $t = 0$.
Poznámka: Povšimněme si, že $A^2 = -1$:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i t^i/(i!) = 1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}/((2k)!) +$$

$$+ A \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k+1}/((2k+1)!) = 1 \cos t + A \sin t\,.$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Tedy:

$$\dot{y} = Ay, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Povšimněme si, že $A^2 = 1$. Výpočet exponenciály bude tedy možno provést přímo:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i t^i/(i!) = 1 \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}/((2k)!) + A \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k+1}/((2k+1)!) =$$

$$= 1\cosh t + A\sinh t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Poznámka: Pro počáteční podmínky udané sloupcovým vektorem $y(0)$ je řešením soustavy $y(t) = e^{At}y(0)$. V prvním příkladu je tedy obecné řešení s počátečními podmínkami $y(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$) udáno jako:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \cos t + y_2 \sin t \\ -y_1 \sin t + y_2 \cos t \end{pmatrix}$$

Povšimněme si, že platí: $y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = y_1^2 + y_2^2$, tedy trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ tvoří kružnice se středem v počátku, viz obrázek **??** vlevo.

Ve druhém případě:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \cosh t + y_2 \sinh t \\ y_1 \sinh t + y_2 \cosh t \end{pmatrix}$$

Povšimněme si, že platí $y_1(t)^2 - y_2(t)^2 = y_1^2 - y_2^2$, a tedy trajektorie bodů $(y_1(t), y_2(t))$ vypadají jako na obrázku **??** vpravo.

Bod $[0, 0]$, ke kterému se řešení blíží a poté se zase vzdalují (v čase, tj. jako funkce t) se nazývá sedlový bod.

4 Duální prostory, duální zobrazení

4.1 Duální prostor

Poznámka: V této kapitole budeme všechna tvrzení formulovat jen pro případ reálných vektorových prostorů a reálných zobrazení mezi nimi. Všechna tvrzení lze ovšem naprosto stejně říct pro případ, kdy bychom uvažovali komplexní vektorové prostory a komplexní lineární zobrazení mezi nimi; příslušnou jednoduchou modifikaci si čtenář (či posluchač) snadno doplní. Všechny prostory ale budou konečné dimenze, leckterá tvrzení nejsou pro lineární vektorové prostory nekonečné dimenze pravdivá!

Důležitá dohoda $\equiv$ označení.

Doposud jsme používali indexy jako dolní indexy ve všech případech, pro vektory base, souřadnice vektorů, koeficienty matic, apod. Je už ale vhodný čas, začít systematicky používat typicky fyzikální označení, kdy se indexy umísťují dolu i nahoru a přitom má příslušná konvence přesný smysl. Zároveň toto označení přispěje k jisté automatické kontrole správnosti vzorců a umožní účinně používat Einsteinovu sumační konvenci.

Dohodněme se tedy, že:

1. Je-li $e_1, \ldots, e_n$ baze vektorového prostoru V, budeme její indexy psát vždy dole.

2. Jsou-li $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ souřadnice vektoru $v \in V$ vůči nějaké bazi, budeme příslušné indexy psát vždy nahoře.

3. Je-li A^i_j matice lineárního zobrazení f, pak budeme její první, řádkový index psát nahoře a druhý, sloupcový index psát dole. V tomto případě pak není třeba striktně hlídat umístění indexů, oba mohou být nad sebou.

Postupně při probírání dalších pojmů budeme tyto konvence doplňovat. Jde o označení typické v tensorovém počtu, který budeme probírat zanedlouho.

Definice 12 Duální prostor
Je-li V lineární vektorový prostor, pak prostor všech lineárních zobrazení V do $\mathbb{R}$ nazveme duálním prostorem *k prostoru V a označíme ho symbolem V^*. Prostor V^* je opět lineární vektorový prostor (v minulé kapitole jsme se již dozvěděli, že prostor $L(V, W)$ všech lineárních zobrazení jednoho vektorového prostoru V do druhého vektorového prostoru W je lineární vektorový prostor, případ V^* je speciální případ této situace).*

Prvkům prostoru V^* se často říká lineární funkcionály. *Ve fyzice se také často používá pro prvky z prostoru V^* název kovektory (na rozdíl od prvků z V, které se tradičně nazývají vektory).*

Poznámka: Chtěli bychom nyní zjistit, jak souvisí dimenze vektorového prostoru V a dimenze jeho duálu V^* a zavést pojem duálních bazí obou prostorů. Řekněme si nejdříve ještě obecnější fakt, tj. jakým způsobem se dá jednoduše zjistit dimenze vektorového prostoru $L(V, W)$ všech lineárních zobrazení jednoho vektorového prostoru V do druhého vektorového prostoru W. (Připomeňme si, že $L(V, W) := \{f : V \to W | f \text{ je lineární}\}$.)

Slovy se to dá popsat takto: Lineární zobrazení je jednoznačně určeno svými hodnotami na pevně zvolené bazi a tyto hodnoty lze zvolit libovolně.

Lemma 10 *Zvolme pevně bazi $e_1, \ldots, e_n$ lineárního vektorového prostoru V a předpokládejme, že W je vektorový prostor. Pak pro každou n-tici vektorů $w_1, \ldots, w_n \in W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f \in L(V, W)$, splňující podmínky*

$$f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n.$$

Tatko definované přiřazení (zobrazení) je isomorfismus lineárního prostoru n-tic $W \times \ldots \times W$ (n-krát) a prostoru $L(V, W)$.

Důkaz: Předpokládajme, že je tedy dána n-tice vektorů $w_1, \ldots, w_n$. Definujme zobrazení $f : V \to W$ následujícím způsobem.

Je-li $v \in V$ a je-li $V = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i$ jeho rozklad do baze $e_1, \ldots, e_n$, pak definujeme hodnotu $f(v)$ předpisem

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i w_i.$$

Je lehké ověřit, že takto definované zobrazení je lineární a je zřejmé, že je jednoznačně určeno vybranými vektory $w_1, \ldots, w_n$.

Takto definované přiřazení (zobrazení) z prostoru $W \times \ldots \times W$ (n-krát) do $L(V, W)$ je zřejmě na (je-li $f \in L(V, W)$, pak stačí zvolit $w_i = f(e_i)$ a použít linearitu f).

Zároveň je toto zobrazení prosté, protože rovnají-li se dvě lineární zobrazení na vektorech e_i, které tvoří bazi, rovnají se díky linearitě všude. $\square$

Definice 13 Duální báze
Předpokládejme, že $e_1, \ldots, e_n$ je baze vektorového prostoru V. Pak definujeme prvky $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ předpisem $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$, kde δ^i_j je Kroneckerovou delta.

Tato n-tice prvků $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ se nazývá duální baze (nebo přesněji baze duální k bazi $e_1, \ldots, e_n$).

Lemma 11

1. *Pro libovolné $v \in V, \varphi \in V^*$ platí*

$$v = \sum_i \varepsilon^i(v) e_i, \; \varphi = \sum_i \varphi(e_i) \varepsilon^i.$$

2. *Výše definované prvky $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ tvoří bazi prostoru V^*. Tedy* $\dim V^* = n$.

3. Je-li $\varphi = \sum b_i \varepsilon^i \in V^*$ a $v = \sum_j \alpha^i e_i$, pak

$$\varphi(v) = \sum_i b_i \alpha^i.$$

Důkaz:

1. Každý vektor $\in V$ se dá rozložit do baze $v = \sum_i \alpha^i e_i$, použitím funkcionálu ε^j na obě strany rovnice dostaneme

$$\varepsilon^j(v) = \sum_i \alpha^i \varepsilon^j(e_i) = \sum_i \alpha^i \delta_i^j = \alpha^j.$$

Podobně, je-li $\varphi \in V^*$ a označíme-li $\tilde{\varphi} := \sum_j \varphi(e_j)\varepsilon^j$, pak pro každé $v \in V$ platí

$$\tilde{\varphi}(v) = \sum_j \varphi(e_j)\varepsilon^j(v) = \varphi(\sum_j \varepsilon^j(v) e_j) = \varphi(v).$$

2. Je třeba ověřit, že prvky $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ generují celé V^* a že jsou lineárně nezávislé. První tvrzení je dokázano v předchozím bodě. Pokud platí pro čísla $a_1, \ldots, a_n$ rovnost $\sum_i a_i \varepsilon^i = 0$, pak pro každé j dostaneme

$$0 = \sum_i a_i \varepsilon^i(e_j) = \sum_i a_i \delta_j^i = a_j.$$

3. Platí

$$\varphi(v) = \sum b_i \varepsilon^i (\sum_j \alpha^j e_j) = \sum_i \sum_j b_i \alpha^j \varepsilon^i(e_j) = \sum_i \sum_j b_i \alpha^j \delta_j^i = \sum_i b_i \alpha^i.$$

□

Věta 9 Transformace duální báze
Nechť $e_1, \ldots, e_n$, resp. $e'_1, \ldots, e'_n$ jsou baze V a $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$, resp. $(\varepsilon')^1, \ldots, (\varepsilon')^n$ jsou k nim duální baze V^*. Označme symbolem E matici přechodu od baze $e_1, \ldots, e_n$ k bazi $e'_1, \ldots, e'_n$, tj.

$$e'_i = \sum_j e_j E_i^j.$$

Pak platí:

1. $(\varepsilon')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \varepsilon^j$,

2. *Pro souřadnice* α^i, *resp.* $(\alpha')^i$ *vektoru* $v \in V$ *a pro souřadnice* a_i, *resp.* a'_i *lineárního funkcionálu* $\varphi \in V^*$ *platí*

$$(\alpha')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \alpha^j,\ a'_i = \sum_j a_j E^j_i.$$

Důkaz:

1. Bazi $(\varepsilon')^1, \dots, (\varepsilon')^n$ lze vyjádřit pomocí nečárkované baze, koeficienty v rozkladu do baze $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ budou tvořit matici, kterou označíme F :

   $$(\varepsilon')^i = \sum_j F^i_j \varepsilon^j, .$$

   Pak dostaneme

   $$\delta^i_j = (\varepsilon')^i(e'_j) = \sum_k F^i_k \varepsilon^k (\sum_m e_m E^m_j) =$$

   $$= \sum_k \sum_m F^i_k E^m_j \varepsilon^k(e_m) = \sum_k \sum_m F^i_k E^m_j \delta^k_m = \sum_k F^i_k E^k_j.$$

   Tedy součin matic $F \cdot E$ se rovná jednotkové matice a tedy $F = E^{-1}$.

2. Víme již, že souřadnice α^i, resp. $(\alpha')^i$ vektoru $v \in V$ jsou dány vztahy $\alpha^i = \sum_i \varepsilon^i(v)$, resp. $(\alpha')^i = \sum_i (\varepsilon')^i(v)$. Požadovaný vztah je pak důsledkem bodu 1.

   Přesně stejně platí, že souřadnice a_i kovektoru se při změně baze transformují stejně jako prvky e_i baze V, neboť $a_i = \varphi(e_i)$.

$\square$

Poznámka: Pokud si napíšeme všechny čtyři vzorečky pod sebe, vidíme, že
$e'_i = \sum_j e_j E^j_i$
$(\varepsilon')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \varepsilon^j$,
$(\alpha')^i = \sum_j (E^{-1})^i_j \alpha^j$,
$a'_i = \sum_j a_j E^j_i$.
Je zřejmé, že veličiny, které mají index nahoře se transformují pomocí matice E^{-1}, zatímco veličiny s indexy dole se transformují pomocí matice přechodu E. To se pak dobře pamatuje a je to první ukázka transformačních vlastností tenzorů.

4.2 Duální zobrazení

Definice 14 Duální zobrazení
Předpokládejme, že $F : V \to W$ je lineární zobrazení.

Pak definujeme duální zobrazení $F^* : W^* \to V^*$ předpisem

$$[F^*(\varphi)](v) := \varphi(F(v));\ \varphi \in W^*,\ v \in V.$$

Poznámka.

Všimněte si, že duální zobrazení působí v opačném směru, zobrazuje W^* do V^*! Je to zcela přirozené, pokud se vezme v úvahu následující interpretace duálního zobrazení F^* : lineární funkcionál $\varphi \in W^*$ je podle definice lineární zobrazení z W do $\mathbb{R}$. Přirozeně definované složené zobrazení $\varphi \circ F$ je pak zřejmě lineární funkcionál na V a tedy je to prvek z V^*. Duální zobrazení F^* je pak prostě přiřazení $F^* : \varphi \to \varphi \circ F$!

Někdy bývá ve fyzice zvykem označovat hodnotu lineární formy na vektoru symbolem podobným symbolu pro skalární součin. Hodně časté je označení, které do fyziky zavedl P.A.M. Dirac - hodnota lineárního funkcionálu $w \in V^*$ na vektoru $v \in V$ značil symbolem $\langle w|v\rangle$. Definující vlastnost duálního zobrazení F^* ke zobrazení F v tomto zápise říká, že

$$\langle w|F(v)\rangle = \langle F^*(w)|v\rangle, \tag{4}$$

pro všechna $v \in V$ a $w \in W^*$.

Dirac používal ještě své vlastní speciální označení pro lineární operátory, hodnotu lineárního zobrazení F na vektoru $|v\rangle \in V$ značil $|F|v\rangle$. Podobně hodnotu duálního zobrazení F^* na kovektoru $\langle w| \in W^*$ značil symbolem $\langle w|F|$ Vztah (4) v jeho značení vypadá takto:

$$\langle w|F|v\rangle = \langle w|F|v\rangle!$$

V souřadnicích je to vlastně také tak. Jeli $F = F_A$ lineární zobrazení z $V = \mathbb{R}^n$ do $W = \mathbb{R}^m$, určené maticí A :

$$F_A(v) = A \cdot v = \sum a^i_j v^j, v \in \mathbb{R}^n,$$

kde vektor $v = \{v^j\}$ je ztotožněn se sloupcem (maticí $n\times1$), pak pro libovolný kovektor $w = \{w_k\} \in W^*$ mají obě strany rovnice (4) tvar

$$\sum_i \sum_j w_i a^i_j v^j.$$

Takže matice F a F^* vzhledem k odpovídajícím duálním bazím jsou totožné. Pokud bychom nepsali kovektory jako řádky (matice typu $1 \times n$), ale jako sloupce (matice typu $n \times 1$), pak matice zobrazení F^* je transponovaná matice k matici zobrazení F.

4.3 Druhý duál

Věta 10 Souvislost mezi prostory V a $(V^*)^*$
Existuje kanonický (tj. na nezávislý na jakékoliv volbě báze) isomorfismus Φ mezi V a $(V^*)^*$. Tento isomorfismus je určen vztahem

$$\Phi(v)(v^*) = v^*(v),\ v \in V,\ v^* \in V^*.$$

Důkaz: Je zřejmé, že Φ je lineární zobrazení mezi prostory stejné dimenze. Stačí tedy ukázat, že je prosté.

Pokud by pro nějaké $v \in V$ platilo $\Phi(v) = 0$, pak podle definice pro každé $v^* \in V^*$ platí $v^*(v) = 0$. Z toho ale ihned plyne, že $v = 0$, neboť pro každé $v \in V, v \neq 0$ existuje $v^* \in V^*$ takové, že $v^*(v) = 0$ (rozmyslete se sami, např. lze v vzít jako první element baze a za v^* si vzít první element baze duální). □

5 Bilineární a kvadratické formy

5.1 Bilineární formy

Definice 15 Bilineární forma
Jsou-li V_1, V_2 vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, pak zobrazení

$$B : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R},$$

se nazývá bilineární forma*, pokud pro každý vektor $v_1 \in V_1$ je zobrazení*

$$v_2 \in V_2 \to B(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$$

lineární funkcionál na V_2 a pokud pro každý vektor $v_2 \in V_2$ je zobrazení

$$v_1 \in V_1 \to B(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$$

lineární funkcionál na V_1.

Množinu všech bilineárních forem z $V \times W$ do $\mathbb{R}$ označíme symbolem $B(V, W; \mathbb{R})$.

Jsou-li $e_1, \ldots, e_n$ resp. $f_1, \ldots, f_m$ baze V_1, resp. V_2, pak nazveme matici

$$A_{ij} = B(e_i, f_m)$$

maticí bilineární formy B vůči zvoleným bazím.

Definice 16 Základní pojmy týkající se bilineárních forem
Předpokládejme v definici 15 dále, že $V_1 = V_2 = V$. Řekneme, že je bilineární forma na $V \times V$

1. symetrická, *pokud platí $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in V$,*

2. antisymetrická, *pokud platí $B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in V$.*

Množinu všech symetrických bilineárních forem z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ označíme symbolem $\mathbb{S}(V)$ a množinu všech antisymmetrických bilineárních forem z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ označíme symbolem $\mathbb{A}(V)$.

Řekneme, že bilineární forma B na $V \times V$ je nedegenerovaná, *pokud její matice A vůči některé bazi (a tedy vůči všem bazím) V je regulární.*

Věta 11 *Prostory $\mathbb{S}(V)$, resp. $\mathbb{A}(V)$, jsou podprostory $B(V, V; \mathbb{R})$ a platí*

$$\mathbb{S}(V) \oplus \mathbb{A}(V) = B(V, V; \mathbb{R}).$$

Dimenze $\mathbb{S}(V)$ je rovna $\frac{(n+1)n}{2}$ a dimenze $\mathbb{A}(V)$ je rovna $\frac{n(n-1)}{2}$.

Důkaz: Každou bilineární formu $B \in B(V, V; \mathbb{R})$ lze snadno napsat jako součet prvků z $\mathbb{S}(V)$ a $\mathbb{A}(V)$:

$$B(v, w) = B_s(v, w) + B_a(v, w),$$

kde

$$B_s(v, w) = \frac{1}{2}(B(v, w) + B(w, v)),\ B_a(v, w) = \frac{1}{2}(B(v, w) - B(w, v)),\ v, w \in V.$$

Je zřejmé, že $B_s \in \mathbb{S}(V)$ a $B_a \in \mathbb{A}(V)$.

Pokud forma B patří do průniku $\mathbb{S}(V)$ a $\mathbb{A}(V)$, pak pro všechny $v \in V$ platí $B(w, v) = -B(w, v)$, tedy B je triviální.

Zvolíme-li libovolně bazi V, pak matice $B \in \mathbb{S}(V)$ jsou symetrické a matice $B \in \mathbb{A}(V)$ jsou antisymetrické. Dimenze prostoru symetrických, resp. antisymetrických, matic se snadno spočítají, stačí si rozmyslet kolik prvků dané matice mohu zvolit libovolně. $\square$

Poznámka: Symetrické bilineární formy tvoří obecný rámec pro různé druhy skalárních součinů, které se neustále používají na vektorových prostorech. Tento druh bilineárních zobrazení je tedy možno potkat nejčastěji. Na druhou stranu, také antisymetrické bilineární zobrazení hrají zcela podstatnou a zásadní roli v matematikcé formulaci klasické mechaniky a potkáte je tam pod názvem *symplektická struktura* na vektorovém prostoru.

Příklad: Typicky se setkáváme s následujícími bilineárními formami.

1. Jsou-li $\varphi, \psi \in V^*$ dva lineární funkcionály, pak jejich součin
$$v, w \in V \to \varphi(v)\psi(w)$$
je zřejmě bilineární forma na V.

2. Je-li A_{ij} matice typu $n \times n$, pak
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \to \sum_{ij} A_{ij}\alpha^i\beta^j$$
je bilineární forma na $V = \mathbb{R}^n$.

3. Je-li V prostor polynomů (funkcí) v jedné proměnné a je-li $A(x, y)$ funkce dvou proměnných, pak
$$f, g \in V \to \int_a^b \int_c^d A(x, y)f(x)g(y)\, dx\, dy$$
je bilineární forma na V.

Lemma 12 Zápis bilineární formy pomocí matice
Budiž B bilineární forma působící na $V \times W$.

1. *Je-li $e_1, \ldots, e_n$, baze V, $f_1, \ldots, f_m$ baze W, a je-li $A_{ij} = B(e_i, e_j)$ matice B, pak pro vektory $v = \sum_i \alpha^i e_i$ a $w = \sum_j \beta^j f_j$ platí*
$$B(v_1, v_2) = \sum_{ij} A_{ij}\alpha^i\beta^j\,.$$

2. *Pokud je E matice přechodu od baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ k bazi $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ prostoru V, F matice přechodu od baze $\{f_1, \ldots, f_m\}$ k bazi $\{f'_1, \ldots, f'_m\}$ prostoru W, pak matice A' bilineárního zobrazení B vůči čárkovaným bazím má tvar*
$$A'_{ij} = \sum_{kl} A_{kl} E^k_i F^l_j,$$
neboli
$$A' = E^t \cdot A \cdot F.$$

Důkaz:

1.
$$B(v, w) = B(\sum_i \alpha^i e_i, \sum_j \beta^j f_j) = \sum_i \sum_j \alpha^i \beta^j B(e_i, f_j) = \sum_{ij} a_{ij} \alpha^i \beta^j$$

2. Stačí dosadit vyjádření $e'_i = \sum_k e_k E^k_i$ které definuje matici přechodu E, a podobný výraz pro matici F a použít bilinearitu zobrazení B.

$\square$

5.2 Kvadratické formy

Definice 17 Kvadratická forma
Řekneme, že zobrazení B z reálného vektorového prostoru V do $\mathbb{R}$ je kvadratické*, pokud existuje bilineární zobrazení $B : V \times V \to \mathbb{R}$ takové, že*

$$Q(v) = B(v, v), \forall v \in V.$$

Matici $A_{ij} = B(e_i, e_j)$ nazveme maticí kvadratické formy vůči bazi $e_1, \ldots, e_n$ prostoru V. Řekneme, že je kvadratická forma nedegenerovaná, pokud je její matice regulární.

Poznámka: Pokud je bilineární zobrazení B antisymetrické, pak je jemu odpovídající kvadratická forma triviální. Je tedy vidět, že dvěma různým bilineárním zobrazením může odpovídat tatáž kvadratická forma. Vztah mezi bilineárními zobrazeními a kvadratickými formami je ale jednoznačný, pokud se omezíme jen na symetrická bilineární zobrazení.

Lemma 13 O souvislosti mezi bilineárními formami a symetrickými kvadratickými formami
Zobrazení, které symetrickému bilineárnímu zobrazení B přiřadí odpovídající kvadratickou formu Q, je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny symetrických lineárních zobrazení a kvadratických forem.

Důkaz: Existuje jednoduchý vztah (*polarizační identita*), který umožňuje zrekonstruovat symetrické bilineární zobrazení B ze znalosti příslušné kvadratické formy Q:

$$B(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2)\}\,. \tag{5}$$

Pro důkaz stačí rozepsat $Q(v_1 + v_2) = B(v_1 + v_2, v_1 + v_2)$ pomocí relací linearity:

$$B(v_1+v_2, v_1+v_2) = B(v_1+v_2, v_1)+B(v_1+v_2, v_2) = B(v_1, v_1)+2B(v_1, v_2)+B(v_2, v_2)\,.$$

Využili jsme předpokládanou symetrii B. □

5.3 Diagonalizace kvadratické formy

Kvadratická forma má v různých bazích různou matici. Standardní úloha je najít bazi tak, aby tato matice byla co nejjednodušší. Základní fakt je, že je možné najít bazi tak, aby tato matice byla diagonální.

Definice 18 *Předpokládejme, že A je čtvercová matice typu $n \times n$. Následující dvě úpravy matice A nazveme elementární symetrické úpravy:*

1. *Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$. Vynásobíme i-tý řádek nenulovým číslem b a pak vynásobíme tímtéž číslem b i-tý sloupec.*
2. *Nechť $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a b je libovolné reálné číslo. K i-tému řádku matice A a přičteme b-násobek j-tého řádku a pak k i-tému sloupci a přičteme b-násobek j-tého sloupce.*

Věta 12
1. *Každou symetrickou matici lze elementárními symetrickými úpravami převést na diagonální tvar.*
2. *Pro každou symetrickou matici A existuje regulární matice B taková, že $B^t A\, B$ je diagonální matice.*

Důkaz: Jako cvičení si sestrojte regulární matice B, které realizují elementární symetrické úpravy dané matice jako transformaci $A \mapsto B^t\,A\,B$.

Důkaz tvrzení věty je vidět z následujícího algoritmu pro převod matice na diagonální tvar:

1. pokud $a_{11} \neq 0$, pak použitím elementárních symetrických úprav lze dosáhnout toho, že v prvním sloupci je jediný nenulový prvek, a to a_{11} (také v prvním řádku vyjde jen jediný nenulový člen, a to a_{11}, protože výsledná matice je symetrická);

2. pokud je $a_{11} = 0$, ale existuje i tak, že $a_{ii} \neq 0$, pak vyměníme postupně první a i-tý řádek první a i-tý sloupec matice (přesvedčete se, že tato operace je složením čtyř elementárních symetrických úprav); výsledná matice bude mít nenulový prvek v levém horním rohu; dále pak pokračujeme jako v předchozím bodu;

3. předpokládejme, že matice A má na diagonále samé nuly; pokud je v prvním sloupci na i-tém místě nenulový prvek (a ze symetrie matice totéž platí o prvku v prvním řádku na i-tém míste), pak pričteme $i$tý řádek k prvnímu řádku a i-tý sloupec k prvnímu sloupci; touto elementární symetrickou úpravou dosáhneme toho, že výsledná matice má v levém horním rohu nenulový prvek; pak pokračujeme jako v prvním bodě;

4. Jestliže má matice celý první sloupec (a tedy i celý první řádek) nulový, neprovádíme žádné úpravy.

Výše uvedeným postupem jsme dospěli k matici, která má na druhém až n-tém míste prvního sloupce a prvního řádku samé nuly. Pak stejným zpusobem upravujeme postupně druhý až n-tý řádek a druhý až n-tý sloupec matice. Po konečném počtu kroku tedy dospějeme k diagonální matici.

Vzhledem k tomu, že každá elementární symetrická úprava matice A se realizuje jako transformace $A \mapsto B^t\,A\,B$, je možné definovat výslednou matici B jakou součin jednotlivých dílčích matic odpovídajících jednotlivým krokům ve výše popsaném algoritmu a výsledná diagonální matice D má tvar $D = B^t\,A\,B$. □

Pokud chci vypočítat výslednou matici B ve výše uvedeném algoritmu, pak vyjdu od blokové matice $(A, \mathbb{I})$ (kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice), elementárními symetrickými úpravami přejdeme od A k diagonální matici D a současne příslušnými řádkovými úpravami převedeme matici $\mathbb{I}$ na matici B^t. Matici $(A, \mathbb{I})$ tak převedeme na matici (D, B^t).

Věta 13 O diagonalizaci kvadratických forem
Nechť V je reálný vektorový prostor. Předpokládájme, že B je symetrická bilineární forma na V.

Pak existuje baze V, pro kterou je matice formy B diagonální. Příslušná kvadratická forma má v této bazi $e_1, \ldots, e_n$ tvar

$$Q(v) = \sum_i \lambda_i |\alpha^i|^2,\ v = \sum \alpha^i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R},$$

a je tedy možné ji normalizací baze převést na případ, kdy $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$.

Všimněte si, že pokud děláte první elementární symetrickou úpravu (násobení číslem b) na i-tém místě diagonální matice, vynásobí se příslušný prvek číslem b^2. Tedy není možné měnit znaménko prvku, jen jeho velikost.
Poznámka: Právě jsme si rozmysleli, že pro každou kvadratickou formu Q existuje baze, pro kterou je matice A formy Q diagonální a na diagonále má čísla $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$. Tzv. zákon setrvačnosti kvadratických forem říká, že v různých bazích se může pořadí těchto čísel na diágonále měnit, ale že počet čísel $\{-1, 0, 1\}$ je nezávislý na volbě baze.

Věta 14 O setrvačnosti kvadratických forem
Pro každou reálnou kvadratickou formu Q existuje baze, ve které má matice A formy Q tvar $A = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1 \ldots, -1, 0 \ldots, 0)$.

Označme n_+, resp. n_-, resp. n_0 počet čísel 1, *resp.* -1, *resp.* 0 *na diagonále. Pak trojice (n_+, n_-, n_0) nezávisí na výběru baze.*

Tuto větu dokazovat nebudeme.

Definice 19 Signatura formy, definitní a indefinitní formy
Nechť Q je reálná kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V. Trojice čísel (n_+, n_-, n_0) z věty o setrvačnosti kvadratických forem se nazývá signaturou formy Q.

Řekneme, že Q je:

1. positivně (semi-)definitní*, pokud* $\forall v \in V, v \neq 0$*, platí* $Q(v) > 0 (\geq 0)$,

2. negativně (semi-)definitní*, pokud* $\forall v \in V, v \neq 0$*, platí* $Q(v) < 0 (\leq 0)$,

3. indefinitní, *pokud existují vektory* $v, w \in V$, *takové, že platí* $Q(v) < 0, Q(w) > 0$.

Poznámka: Zřejmě platí, že forma je positivně definitní právě když má signaturu $(n, 0, 0)$ a positivně semidefinitní právě když má signaturu $(n, 0, k)$. Podobně pro (semi-)negativní formu.

Forma je zřejmě indefinitní právě když obě čísla n_+ a n_- jsou nenulová.

Je také zřejmé, že skalární součin je totéž jako positivně definitní forma. Existuje užitečné kritérium, jak poznat, kdy je reálná kvadratická forma positivně definitní.

Věta 15 Sylvestrova
Je-li A matice reálné kvadratické formy na V, pak je tato forma positivně definitní právě když

$$\det(\{A_{ij}\}_{i,j=1}^{k}) > 0,\ k = 1, \dots, n,\ n = \dim V.$$

Tuto větu nebudeme dokazovat.

5.4 Hermiteovské kvadratické formy

Poznámka: Pro kvantovou mechaniku je podstatné rozumět dobře vlastnostem komplexních lineárních prostorů se skalárním součinem. Takovýto skalární součin je modelem pro obecné seskvilineární zobrazení, které si nyní budeme definovat.

Definice 20 (Bilineární formy na $\mathbb{C}$: seskvilineární, hermiteovské)
Je-li V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, pak zobrazení $F : V \mapsto V$ nazveme antilineární, *pokud pro všechny $v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ platí*

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2),\ F(\lambda v_1) = \overline{\lambda} F(v_1).$$

Nechť V a W jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{C}$. Řekneme, že

$$B : V \times W \to \mathbb{C},$$

je seskvilineární, *pokud je lineární v první proměnné a antilineární v druhé proměnné.*

Řekneme, že seskvilineární zobrazení B na $V \times V$ je hermiteovské, *pokud platí*

$$B(v_2, v_1) = \overline{B(v_1, v_2)};\ v_1, v_2 \in V.$$

Definice 21 Hermiteovská kvadratická forma
Je-li B seskvilineární forma na V a je-li $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baze V, pak nazveme matici

$$A_{ij} = B(e_i, e_j)$$

maticí seskvilineárního zobrazení B vůči zvolené bazi.

Řekneme, že zobrazení $Q : V \to \mathbb{R}$ je hermiteovská kvadratická forma *na V, pokud existuje hermiteovská seskvilineární forma B, pro kterou platí*

$$Q(v) = B(v, v),\ v \in V\,.$$

Poznámka: Uvědomte si, že hermitovská kvadratická forma musí mít na celém V reálné hodnoty. Platí totiž $Q(v) = B(v, v) = \overline{B(v, v)}$; ve druhém kroku jsme prohodili argumenty a použili hermitovskost seskvilineární formy.

Lemma 14 *Zobrazení, které hermiteovské kvadratické formě Q přiřadí odpovídající hermiteovskou seskvilineární formu B je vzájemně jednoznačné.*

Důkaz: Toto tvrzení je analogií lemmatu 13 pro komplexní prostory. Pokud použijeme přímo vztah (5), dostaneme s využitím hermiteovskosti B

$$Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2) = 2\,ReB(v_1, v_2)\,.$$

Abychom pomocí Q zrekonstruovali i imaginární část B, budeme místo $Q(v_1 + v_2)$ zkoumat $Q(v_1 + iv_2)$. Dostaneme vztah

$$B(v_1 + iv_2, v_1 + iv_2) = B(v_1, v_1) + B(v_2, v_2) + iB(v_2, v_1) - iB(v_1, v_2) =$$

a

$$Q(v_1 + iv_2) - Q(v_1) - Q(v_2) = 2\,ImB(v_1, v_2)\,.$$

Když složíme reálnou a imaginární část dostaneme celkem

$$B(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\left\{Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2) - i[Q(v_1 + iv_2) - Q(v_1) - Q(v_2)]\right\}\,.$$

Poznámka: Vidíme tedy, že v komplexních prostorech přebírají úlohu symetrických a bilineárních forem formy hermiteovské a seskvilineární.

Definice 22 Hermiteovská matice, unitární matice
Nechť A je $n \times n$ matice komplexních čísel.

Řekneme, že matice A je hermiteovská (resp. anti–hermiteovská), pokud platí

$$\overline{A^t} = A, \quad \text{tj. } \overline{A_{ji}} = A_{ij}.$$

resp.

$$\overline{A^t} = -A, \quad \text{tj. } \overline{A_{ji}} = -A_{ij}.$$

Řekneme, že matice A je unitární, pokud platí

$$\overline{\overline{A^t}} = A^{-1}.$$

Poznámka: Hermiteovské a unitární matice (resp. operátory) hrají podstatnou roli v lineární algebře na komplexních vektorových prostorech. Všimněte si, že zřejmě platí, že exponenciela $\exp A$ anti–hemiteovské matice A je unitární, neboť zřejmě platí

$$\overline{(\exp A)^t)} = \exp(\overline{A^t}) = \exp(-A) = (\exp A)^{-1}.$$

Poznámka: Podle definice hermiteovské seskvilineární formy je zřejmě její matice v libovolné bazi hermiteovská.
Příklad: Podobně jako u symetrických forem na reálných prostorech jsou dva nejjednodušší příklady tyto:

1. Je-li A_{ij} hermiteovská matice typu $n \times n$, pak

   $$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \to \sum_{ij} A_{ij} \alpha^i \overline{\beta^j}$$

   je hermiteovská forma na $V = \mathbb{R}^n$.

2. Je-li V prostor polynomů (funkcí) v jedné proměnné s komplexními hodnotami a je-li $A(x, y)$ komplexní funkce dvou (reálných) proměnných, pro kterou platí $A(y, x) = \overline{A(x, y)}$, pak

   $$f, g \in V \to \int_a^b \int_c^d A(x, y) f(x) \overline{g(y)}\, dx\, dy$$

   je hermiteovská forma na V.

5.5 Ortogonálně diagonalizovatelné zobrazení.

Předpokládejme, že V je vektorový prostor se zadaným skalárním součinem. Nejjednodušší (a nejdůležitější) lineární zobrazení f z vektorového prostoru V do sebe jsou zobrazení, jejichž matice D v nějaké ortonormální bazi je diagonální. Takovým zobrazením budeme říkat ortogonálně diagonalizovatelné. Vektory příslušné ortonormální baze jsou tedy (normalizované) vlastní vektory f a odpovídající vlastní čisla jsou právě čísl a na diagonále matice D.

Teď si popíšeme, jak taková zobrazení vypadají. Připomeňme si, že zobrazení $f^* : V \mapsto V$ duální (adjungované) k zobrazení $f : V \mapsto V$ je charakterizováno vztahem $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f*(w)\rangle$ pro všechna $v, w \in V$. Zobrazení f je samoadjungované, pokud $f = f^*$. Pokud si napíšeme matici A zobrazení f a matici B adjungovaného zobrazení f^* vzhledem k ortonormální bazi, pak $B = (\bar{A})^t$. V reálném případě je tedy matice A samoadjungovaného zobrazení f vůči libovolné ortonormální bázi symetrická, v komplexním případě je to matice Hermitovská.

Definice 23 *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem (nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$). Řekneme, že zobrazení $f : V \mapsto V$ je normální, pokud $f\,f^* = f^*\,f$.*

Je ihned vidět, že mezi normální zobrazení patří v reálném případě zobrazení symetrické a antisymetrické a ortogonální, v komplexním případě Hermitovské, anti-Hermitovské a unitární, které splňují podmínku $f^* = f$, resp. $f^* = -f$, resp. $f^* = f^{-1}$.

Věta 16 *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem (nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$). Zobrazení $f : V \mapsto V$ je ortogonálně diagonalizovatelné právě když je normální.*

Důkaz:
1. Nejdříve si rozmyslíme, že každé ortogonálně diagonalizovatelné zobrazení je normální. V reálném případě je to jednoduché. Každá diagonální matice je symetrická, tedy samoadjungovaná, a tedy normální.

V komplexním případě je možné postupovat takto. Každé zobrazení $f : V \mapsto V$ lze napsat právě jedním způsobem jako součet $f = f^+\,i\,f^-$, kde f^+a f^- jsou samoadjungované (tedy if^- je anitsamodajungované). Stačí vzít $f^+ = \frac{1}{2}(f + f^*)$ a $f^- = \frac{1}{2i}(f - f^*)$. Jednoznačnost rozkladu je zřejmá z toho, že zobrazení, které je současně samoadjungované a antisamoadjungované je nutně triviální.

Matice D zobrazení f ve vhodné ortonormální bazi je tedy diagonální. Můžeme ji napsat ve tvaru $D = D_1 + i\,D_2$, kde D_1, D_2 jsou reálné diagonální matice. Matice D_1 D_2 jsou Hermitovské. Díky jednoznačnosti rozkladu tedy D_1 musí být matice f^+ a D_2 musí být matice f^-. Matice $f^* = f^+ - if^-$ je $D_1 - iD_2$, tedy f a f^* spolu komutují.
2. Předpokládejme naopak, že f je normální zobrazení. Je-li $v \in V$, pak

$$\langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f * f(v)\rangle = \langle v, ff * (v)\rangle = \langle f * (v), f * (v)\rangle,$$

tedy $|f(v)| = |f * (v)|$.

Protože $(f - \lambda\,\mathrm{Id})^* = f * -\bar{\lambda}\,\mathrm{Id}$, je také zobrazení $(f - \lambda\,\mathrm{Id})$ normální. Tedy $|f(v) - \lambda\,v| = |f^*(v) - \bar{\lambda}v|$. Je-li tedy v vlastní vektor f s vlastním číslem λ, je v vlastní vektor $f*$ s vlastním číslem $\bar{\lambda}$.

Teď už dokážeme diagonalizovatelnost f indukcí. Přepokládejme nejdříve, že vektorový prostor V je komplexní vektorový prostor. Existuje alespoň jeden vlastní vektor v s vlastním číslem λ. Označme $W = \{w \in V|\langle w, v\rangle = 0$. Zobrazení f zachovává prostor W, protože pro libovolné $w \in W$ platí

$$\langle f(w), v\rangle = \langle w, f * (v)\rangle = \langle w, \bar{\lambda}v\rangle = 0.$$

Zúžení zobrazení f na W je opět normální, tedy indukcí sestrojíme ortogonální bazi z vlastních vektorů pro f. Normalizací pak dostaneme ortonormální bazi s vlastností, že matice f v této bazi je diagonální.

V reálném případě budu uvažovat reálnou matici A zobrazení f v nějaké ortonormální bazi. Matice A zadává také zobrazení z $\mathbb{C}^n$ do sebe (kde $n = \dim V$), které je normální. Pro něj najdu příslušnou ortonormální bazi vlastních vektorů a přesvědčím se, že tyto vlastní vektory leží v $\mathbb{R}^n$. □

6 Tenzory

6.1 Definice

Poznámka. Tenzory patří mezi běžný matematický aparát ve fyzice. Základním příkladem tenzorů jsou vektory, ale nejjednodušší příklad tenzoru jsou čísla, nebo jak se říká ve fyzice, skaláry. Mezi složitější příklady tenzorů patří lineární funkcionály, lineární zobrazení (nebo např. tzv. Kroneckerovo delta) a kvadratické formy. Všechny tyto matematické veličiny jsou jen speciálními (a to velmi jednoduchými) případy tenzorů. Ve fyzice potkáte také např. tenzor křivosti R_{ijkl}(v obecné teorii relativity),metrický tenzor $g_{\mu\nu}$, tensor $T_{\mu\nu}$ hustoty energie a hybnosti, tenzor setrvačnosti I_{ij}, tenzor napětí a deformace (v klasické mechanice) a mnoho jiných. Dalším matematickým příkladem tenzoru je determinant, který jsme probírali v minulém semestru. Nejprve si vždy řekneme obecnou (bezsouřadnicovou) definici příslušných pojmů a pak si ukážeme, jak příslušnou veličinu popsat v souřadnicích, tj. ve zvolené bazi.

Pro pořádek je vhodné dopředu upozornit, že budeme probírat jen algebraickou část příslušných definic. To je podobné tomu, že jsme od začátku probírali v algebře pojem vektoru, ale nemluvili jsme o vektorových polích, které jste už určitě také potkali. V budoucnu budete podobně potkávat nejen tenzory, ale také tenzorová pole. Právě tak, jako je vektorové pole zobrazení, které každému bodu prostoru (na kterém vše uvažujete) přiřadí vektor v tomto vybraném bodě, je také tenzorové pole zobrazení, které závisí na bodě prostoru, které každému bodu prostoru přiřadí tenzor v daném bodě. Samozřejmou podmínkou je, že musím umět (jako tomu bylo pro vektory) každému bodu prostoru přiřadit příslušný prostor tenzorů. To je nejlépe si představit tak, že každý bod našeho uvažovaného prostoru (či dokonce prostoročasu) má svůj zvláštní tečný prostor, což je vektorový prostor (představte si pro názornost např. dvourozměrnou plochu v prostoru a a její tečný prostor v každém bodě). Tento vektorový prostor je pak základní prostor, ze kterého pak vytvoříme tensorový prostor v tomto daném bodě. Hodnota tenzorového pole v tomto daném bodě pak musí být v tomto tenzorovém prostoru.

Matematická motivace pro zavedení tenzorů je jiná, ale právě tak fundamentální. Už jste si asi dobře zvykli, že prvky vektorového prostoru umím sčítat a násobit číslem. Ale právě tak jsme mnohokrát říkali, že vektory neumím násobit mezi sebou. Umím ovšem např. násobit funkce mezi sebou.

Následující příklad je naprosto typický pro motivaci tzv. tenzorového součinu. Jsou-li $\alpha \in V^*$ a $\beta \in W^*$ dva lineární funkcionály, pak jejich 'součin' mohu zcela přirozený definovat jako bilineární zobrazení ϕ : z prostoru $V \times W$ do $\mathbb{R}$, dané předpisem $\phi(v, w) = \alpha(v)\beta(w)$, kde $v \in V, w \in W$. Součinem dvou lineárních funkcionálů není tedy opět lineární funkcionál, ale bilineární funkcionál. To vede okamžitě k následující definici.

Definice. Nechť V^* a W^* jsou duály ke dvěma vektorovým prostorům. Pak tenzorový součin $V^* \otimes W^*$ je definován jako prostor $L(V, W)$ všech bilineárních zobrazení kartézského součinu $V \times W$ do reálných čísel.

Jsou-li $\alpha \in V^*$ a $\beta \in W^*$ dva dané lineární funkcionály, pak jejich tenzorový součin $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes W^*$ je definován jako bilineární zobrazení, které každé dvojici vektorů $(v, w) \in V \times W$ přiřadí číslo $[\alpha \otimes \beta](v, w) := \alpha(v)\beta(w)$.

Jako obvykle je na množině $V^* \otimes W^*$ definován přirozeným způsobem součet dvou prvků a násobek prvku reálným číslem. (Prvky tenzorového součinu jsou definovány jako jakési zvláštní, speciální, tj. bilineární, zobrazení na kartézském součinu $V \times W$, a jejich součin se definuje tak, jak se vždy definuje součin funkcí, napište si sami definici jako cvičení!).

Lemma 4.1

(1) Prostor $V^* \otimes W^*$ je vektorový prostor.

(2) Jsou-li $\{\varepsilon^i\}$, $i = 1, \dots, n$, resp. $\{\varphi^j\}$, $j = 1, \dots, m$ baze prostoru V^*, resp. W^*, pak $\varepsilon^i \otimes \varphi^j$, $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ je baze prostoru $V^* \otimes W^*$;

(3) Libovolný prvek $T \in V^* \otimes W$ se dá (jednoznačný) napsat ve tvaru

$$T = \sum_{ij} T_{ij} \varepsilon^i \otimes \varphi^j, T_{ij} = T(e_i, f_j),$$

kde $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$ resp. $\{f_j\}$, $j = 1, \dots, m$ jsou duální baze prostoru V, resp. W. Čísla T_{ij} se nazývají souřadnice tenzoru T vzhledem ke zvoleným bazím.

(4) $\dim V^* \otimes W^* = \dim V^* \cdot \dim W^*$.

Důkaz.

(1) Už jsme toto dokázali v kapitole o bilineárních zobrazeních.

(2) Musíme si, jako obvykle, uvědomit, že navrhovaná baze je skupina lineárný nezávislých vektorů a že generují celý prostor.

(i) Lineární nezávislost: Předpokládejme, že existují reálná čísla a_{ij}, pro která platí $\sum_{ij} a_{ij} \varepsilon^i \otimes \varphi^j = 0$. Zvolme i, j pevný. Do tohoto (triviálního) bilineárního zobrazení můžeme dosadit dvojici vektorů e_i, f_j a dostaneme

$$0 = \sum_{kl} a_{kl} [\varepsilon^k \otimes \varphi^l](e_i, f_j) = \sum_{kl} a_{kl} \delta_i^k \delta_j^l = a_{ij}.$$

(ii) Generují celý prostor: Je-li T libovolný prvek $V^* \otimes W^*$, pak stačí ověřit tvrzení (3) v lemmatu. Pro to stačí ukázat, že bilineární zobrazení na obou stranách rovnosti mají stejné hodnoty na všech dvojicích vektorů $(v, w) \in V \times W$. Zvolme takovouto dvojici (v, w). Pak víme, že $v = \sum_i \varepsilon^i(v) e_i$, $w = \sum_j \varphi^j(w) f_j$. Pak ale

$$T(v, w) = T(\sum_i \varepsilon^i(v) e_i, \sum_j \varphi^j(w) f_j) = \sum_{ij} \varepsilon^i(v) \varphi^j(w) T(e_i, f_j) = \sum_{ij} T_{ij} [\varepsilon^i \otimes \varphi^j](v, w)$$

(4) Zřejmé.

Lemma 4.2 Předpokládejme, že $\{e_i\}, \{e'_i\}$, resp. $\{f_j\}, \{f'_j\}$, jsou dvojice bazí prostorů V, resp. W, a E^i_k, resp. F^j_l jsou příslušné matice přechodu mezi týmito bazemi, tj. $e'_i = \sum_k E^k_i e_k,\ f'_j = \sum_l F^k_j e_l$.

Pak pro souřadnice T'_{ij}, T_{ij} platí

$$T'_{ij} = \sum_i \sum_j T_{kl} E^k_i F^l_j.$$

Důkaz. Pro ouřadnice T'_{ij} platí

$$T'_{ij} = T(e'_i, e'_j) = T(\sum_k E^k_i e_k, \sum_l E^l_j e_l) = \sum_i \sum_j T_{kl} E^k_i F^l_j.$$

Poznámka.

(1) Právě jsem se naučili, co znamená tenzorový součin $V^* \otimes W^*$ dvou duálních vektorových prostorů. Je možné definovat také součin $V \otimes W$ pro libovolné vektorové prostory, nebo to bylo možné jen pro duály? Otázka je jednoduchá a odpověď už známe. Každý vektorový prostor je zároveň také duálem, a to duálem svého duálu, neboť $V \simeq (V^*)^*$, tyto prostory se dají kanonicky ztotožnit. Tady je možné definovat $V \otimes W$ jako prostor všech bilineárních zobrazení kartézského součinu $V^* \times W^*$ do $\mathbb{R} : V \otimes W := (V^*)^* \otimes (W^*)^* \simeq L(V^*, W^*)$

(2) Obdobný jako tenzorový součin dvou prostorů lze definovat tenzorový součin konečný mnoha vektorových prostorů. Prostor $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ je definován jako prostor $L(V_1^*, \ldots, V_k^*)$ všech multilineárních zobrazení kartézského součinu $V_1^* \times \ldots \times V_k^*$ do reálných čísel. (Napište si jako cvičení definici multilineárního zobrazení, definujte operace sčítání a násobení reálným číslem a a dokažte, že je to vektorový prostor!)

Přesný stejný jako pro dva činitele lze dokázat, že:

(i) Jsou-li

$$\{e^1_{i_1}\},\ i_1 = 1, \ldots, n_1;\ \ldots; \{e^k_{i_k}\},\ i_k = 1, \ldots, n_k;$$

postupně baze prostorů $V_1, \ldots, V_k$, pak

$$e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^k_{i_k};\ i_1 = 1, \ldots, n_1; \ldots; i_k = 1, \ldots, n_k$$

je baze součinu $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ a dimenze součinu je součin dimenzí jednotlivých prostorů.

(ii) Obecný prvek $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ lze jednoznačně napsat ve tvaru

$$T = \sum_{i_1 \ldots i_k} T^{i_1 \ldots i_k} e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^k_{i_k}.$$

Koeficienty $T^{i_1 \ldots i_k}$ se nazývají souřadnice prvku T vzhledem ke zvoleným bazím.

(iii) Pro zjednodušení a přehlednost zápisu budeme používat nadále populární a užitečnou Einsteinovu sumační konvenci, která říká, že kdykoliv se v nějaké formuli vyskytnou dva stejné indexy (standardně jeden nahoře a jeden dole), pak se přes ně automaticky sčítá, aniž by se vypisoval znak $\sum$ pro součet. Předchozí formule se např. zapíše takto:

$$T = T^{i_1 \ldots i_k} e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^k_{i_k}.$$

(iv) Jsou-li $E_j, j = 1, \ldots, k$ matice přechodu od bazí $e^j_{i_j}$ k bazím $e'^j_{i_j}$, tj. pokud

$$e'^j_{i_j} = E^{n_j}_{i_j} e^j_{i_j},\ j = 1, \ldots, k$$

pak

$$T'^{i_1 \ldots i_k} == T^{n_1 \ldots n_k} (E^{-1})^{i_1}_{n_1} \ldots (E^{-1})^{i_k}_{n_k},$$

kde již používáme Einsteinovu sumační konvenci.

(v) Pro pořádek a připomenutí si zopakujme, že je-li E matice přechodu od baze e_i k bazi e'_i, tj. pokud $e'_i = E^m_i e_m$, pak $F = E^{-1}$ je matice přechodu od duální baze ε^i k duální bazi ε'^j, tj. $\varepsilon'^j = F^j_n \varepsilon^n$ a $\delta^j_i = E^j_k F^k_i$.

6.2 Tenzorová algebra.

Definice Nechť V je pevný zvolený vektorový prostor a V^* jeho duál, nechť k, l jsou dvě daná nezáporná celá čísla. Prostor $T^0_0(V)$ definujeme jako prostor $\mathbb{R}$ reálných čísel.

Pro ostatní případy definujeme prostor $T^k_l \equiv T^k_l(V)$ předpisem

$$T^k_l(V) := V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*,$$

kde v součinu je l činitelů V a k činitelů V^* (je-li k nebo l rovno nule, příslušné činitele v součinu chybí). Řekneme, že prvky $T \in T^k_l(V)$ jsou tenzory typu (k, l), nebo že jsou to tenzory k-krát kovariantní a l-krát kontravariantní.

Podle definice jsou tedy tenzory $T \in T_l^k(V)$ multilineární zobrazení z kartézského součinu $V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots \times V$, ($l$-krát činitel V^* a k-krát činitel V). Pro každou $k+l$-tici

$$(v_1^*, \ldots, v_l^*, v_1, \ldots, v_k) \in V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots \times V$$

je tedy $T(v_1^*, \ldots, v_l^*, v_1, \ldots, v_k)$ číslo a toto zobrazení je lineární v každé ze svých složek.

Lemma.

(1) Je-li $e_i, i = 1, \ldots, n$ baze prostoru V a $\varepsilon^i, i = 1, \ldots, n$ duální baze prostoru V^*, pak

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_l} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_k};\ i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots j_k = +, \ldots, n$$

je baze prostoru $T_l^k(V)$.

(2) Každý prvek $T \in T_l^k(V)$ se tedy (jednoznačně) napíše ve tvaru

$$T = T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_l} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_k}.$$

Sady čísel $T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k}$ se nazývají souřadnice tenzoru T.

(3) Pokud E je matice přechodu od baze e_i k bazi e'_i, pak

$$T'^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} = T^{m_1 \ldots m_l}_{n_1 \ldots n_k} (E^{-1})^{i_1}_{m_1} \ldots (E^{-1})^{i_l}_{m_l} E^{n_1}_{j_1} \ldots E^{n_k}_{j_k}.$$

Příklady.

(1) Tenzory typu (0,0) jsou čísla (skaláry).

(2) Předpokládejme, že V je vektorový prostor a $\{e_i\}$, resp. $\{\varepsilon^i\}$, jsou duální baze ve V, resp. V^*.

Vektory jsou tenzory typu (0,1). Souřadnice vektoru v vůči bazi $\{e_i\}$ jsou čísla $\lambda^i = \varepsilon^i(v)$. Je-li E matice přechodu k čárované bazi, tj., $e'_i = E_i^j e_j$,, a je-li $F = E^{-1}$, pak $\varepsilon^i = F^i_j \varepsilon^j$ a $\alpha'^i = F^i_j \alpha^j$.

Kovektory jsou prvky duálu V^*, a jsou to tedy tenzory typu (1,0). Je-li ϕ prvek V^*, pak jeho souřadnice jsou $\beta_i = \phi(e_i)$ a transformují se podle vzorce $\beta'_i = E_i^j \beta_j$.

(3) Dvakrát kovariantní tenzor je totéž jako bilineární forma (jak jsme právě nedávno viděli). Dvakrát kontravariantní tenzor neodpovídá žádnému z námi dosud probíraných objektů.

(4) Jednou kovariantní a jednou kontravariantní tenzor je totéž jako lineární zobrazení z prostoru V do sebe. To je vidět z toho, že v souřadnicích

jsou to oboje sady čísel s dvěma indexy a stačí se tedy přesvědčit, že se souřadnice tohoto typu tenzorů transformují stejně jako matice lineárního zobrazení vůči zvoleným bazím (doporučuji překontrolovat!). Všimněte si, že souřadnice všech těchto tří typů tenzorů vypadají stejně, a to jako matice. Ale jejich transformační vlastnosti se liší.

Pokud byste chtěli toto ztotožnění (tj. ztotožnění mezi tenzory typu $(1,1)$ a lineárními zobrazeními z V do V) odůvodnit v moderním bezsouřadnicovém jazyce, je to snadné. Dokonce jde si rozmyslet o něco víc - jsou-li V a W dva vektorové prostory, pak tenzorový součin $W \otimes V^*$ je možné kanonicky ztotožnit s vektorovým prostorem všech lineárních zobrazení z V do W. Ztotožnění je zcela přirozené. Prvek $T \in W \otimes V^*$ je podle definice bilineární zobrazení z $W^* \times V$ do reálných čísel. Odpovídající lineární zobrazení F z V do W definujeme takto: pro $v \in V$ je obraz $F(v) \in W$ charakterizován vztahem $w^*(F(v)) = T(w^*, v)$ pro všechny $w^* \in W^*$. Pokud specielně $T = w \otimes v^*$, $v^* \in V^*, w \in W$, pak definujeme odpovídající lineární zobrazení F ještě jednodušeji vztahem $F(v) = v^*(v) \cdot w \in W$.

Zvláštní příklad tenzoru typu (1,1) je tzv. Kroneckerovo delta. Je to tenzor význačný tím, že se jeho souřadnice nemění, jsou stejné pro jakýkoliv výběr baze V a její duální baze ve V^*. Souřadnice jsou vždy $\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a nule pro $i \neq j$. Ve výše popsaném ztotožnění s lineárními zobrazeními z V do V odpovídá identitě.

(5) Jako příklad tenzoru s větším počtem indexů je možné uvést determinant. Každou matici můžeme chápat jako množinu vektorů, např. řádek příslušné matice. Determinant $n \times n$ matice je zobrazení, které n-tici vektorů $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ (řádků matice A) přiřadí číslo $\det A$. Z vlastností determinantu víme, že toto zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ (n kopií) je multilineární (lineární v každé složce). Je to tedy tenzor T typu (n,0). Tento tenzor má speciální vlastnost, že je antisymetrický, tj. že pro každou permutaci π platí

$$T(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn} \pi T(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

(6) Definice tenzoru jako multilineárního zobrazení je dobře vidět v souřadnicovém zápisu. Nechť T je tenzor typu (k,l). Zvolíme-li bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ve V a duální bazi $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ ve V^*, pak T můžeme popsat jeho souřadnicemi $T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k}$. Hodnotu multilineárního zobrazení T pro prvek

$$(v^{*1}, \ldots, v^{*l}, v_1, \ldots, v_k) \in V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots \times V$$

pak popíšeme takto. Postupně najdu souřadnice α_{i_1} vektoru v^{*1}, α_{i_2} vektoru

v^{*2},, atd. až α_{i_l} vektoru v^{*l}, a souřadnice a^{j_1} vektoru v_1, a^{j_2} vektoru v_2, atd., až a^{j_k} vektoru v_k.

Číslo $T(v^{*1}, \ldots, v^{*l}, v_1, \ldots, v_k)$ se pak rovná číslu

$$T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_l} a^{j_1} a^{j_2} \ldots a^{j_k}.$$

(Nezapomeňte na Einsteinovu sumační konvenci, ve vzorci je ve skutečnosti součet přes indexy $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k$, vždy od jedné do n.)

Důkaz. (1) a (2) jsou speciální případy toho, co jsme se již naučili v předešlém paragrafu o tenzorových součinech několika různých prostorů.

(3) Plyne z předchozího paragrafu a poslední poznámky, bod (v).

Označení. Pokud budeme označovat tenzory jako dosud jen velkými písmeny, není v označení nijak zachycen typ tenzorů, tj. kolikrát je kontravariantní a kolikrát je kovariantní a je třeba to říct. Pokud je tenzor zapsán pomocí souřadnic, pak je tato informace ihned vidět z toho, kolik má tenzor indexů nahoře a kolik dole.

Definice 24 *Nechť $V_j, j = 0, \ldots, \infty$, je posloupnost vektorových prostorů. Jejich direktní součet $\oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ je vektorový prostor všech posloupností*

$$(v_0, v_1, \ldots, v_j, \ldots); v_j \in V_j,$$

které mají jen konečně mnoho nenulových prvků. Sčítání a násobení reálným číslem je definováno po komponentách. Jednotlivé prostory V_j jsou standardně ztotožňovány s odpovídajícími podprostory

$$\{v = \{v_i\} \in \oplus_{i=0}^{\infty} V_i; v_i = 0, i \neq j\}$$

a $\oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ je pak opravdu direktní součet V_j, tj. každý prvek $v \in \oplus_{j=0}^{\infty} V_j$ lze napsat jednoznačně ve tvaru

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j; \quad v_j \in V_j.$$

Tenzorová algebra $T(V)$ je definována jako direktní součet

$$T(V) := \oplus_m^{\infty} \oplus_{k+l=m} T_l^k(V).$$

Operace tenzorového násobení na $T(V)$ budeme definovat nejdříve pro dva homogenní elementy, t.j. pro $T \in T_l^k(V)$ a $T' \in T_{l'}^{k'}$. Výsledek součinu $T \otimes T'$ patří do $T_{l+l'}^{k+k'}$ a je definován předpisem

$$T \otimes T'(v^{*1}, \ldots, v^{*l}, v^{*l+1}, \ldots, v^{*l+l'}, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+k'}) =$$
$$= T(v^{*1}, \ldots, v^{*l}, v_1, \ldots, v_k) T'(v^{*l+1}, \ldots, v^{*l+l'}, v_{k+1}, \ldots, v_{k+k'}).$$

Dva libovolné tenzory T a T' v $T(V)$ jsou každý konečný součet homogenních částí (rozklad je jednoznačný) a jejich součin je definován pomocí distributivního zákona a předchozí definice pro homogenní prvky.

Tenzorová algebra $T(V)$ je tedy opravdu algebra, libovolné prvku mohu vynásobit.

Poznámka.

(1) Tenzorový součin tenzorů je naprosto přirozený v souřadnicích. Mámli tenzor T se souřadnicemi $T^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_k}$ a tenzor T' se souřadnicemi $T'^{i_1 \dots i'_l}_{j_1 \dots j'_k}$, pak jejich součin $T \otimes T'$ má souřadnice

$$T^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_k} T'^{i_1 \dots i'_l}_{j_1 \dots j'_k}.$$

(2) Původní fyzikální (a geometrická) definice tenzoru vypadala takto:

Tenzor T je přiřazení, které každým souřadnicím na vektorovém prostoru V přiřadí sadu čísel $T^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_k}$ a tyto sady se musí při změně souřadnic transformovat podle výše uvedeného lemmatu, bod (3). Tato definice je poměrně složitá a těžkopádná, po provedení každé operaci s tenzory se muselo vždy ověřovat, že výsledek operace nezávisí na volbě souřadnic. V moderní geometrii se vyvinul v tomto století moderní, bezsouřadnicový jazyk, který umožňuje počítat s tenzory bez těchto těžkopádných souřadnicových popisů. Tento jazyk je také použit ve výše uvedených definicích. V každém případě je pak vidět, jaký objekt příslušnému tenzoru odpovídá ve zvolené bazi (jeho "souřadnice") a zároveň je snadné odvodit, že se tyto souřadnice transformují požadovaným způsobem při změně baze (a tedy změně souřadnic).

6.3 Úžení tenzorů.

Definice 25 *Zvolme libovolně baze $\{e_i\}$ v prostoru V a k ní duální bazi $\{\varepsilon^j\}$ v prostoru V^*.*

Uvažujme nejprve typický případ tenzorů typu $(1,1)$ (tj. lineárních zobrazení, viz poznámka výše). Je-li T tenzor typu $(1,1)$, pak definujeme nový tenzor typu $(0,0)$ předpisem $T' = \sum_i T(\varepsilon^i, e_i)$.

Podobně, pro obecný tenzor $T^k_l(V)$, $k, l \geq 1$ si musím nejprve zvolit jeden z k činitelů V^* a jeden z l činitelů V, ve kterých budu provádět úžení. Dejme tomu že vyberu číslo $r \in \{1, \dots, k\}$ a $s \in \{1, \dots, l\}$. Pak zúžení T' tenzoru T na vybraných místech r, resp. s, je tenzor typu $(k-1, l-1)$ definovaný předpisem

$$T'(v^{*1}, \dots, v^{*l-1}, v_1, \dots, v_{k-1}) =$$

$$= \sum_i T(v^{*1}, \ldots, v^{*r-1}, \varepsilon^i, v^{*r}, \ldots, v^{*l-1}, v_1, \ldots v_{s-1}, e_i, v_s, \ldots, v_{k-1}).$$

Lemma 15 *Zúžení tenzoru nezávisí na volbě baze a její duální baze.*

Důkaz: Dokážeme to pro jednoduchost zápisu pro tenzor typu $(1,1)$.

Pokud $\{e_i\}$, resp. $\{\varepsilon^j\}$ jsou navzájem duální baze V a V^* a pokud čárokovaná baze $\{e'_k\}$ pro V souvisí s původní baze pomocí matice přechodu E vztahem $e'_j = E^k_j e_k$, pak víme, že pro příslušné duální baze platí $\varepsilon'^l = F^l_m \varepsilon^m$, kde F je matice inverzní k E.

Pak ale

$$\sum_i T(\varepsilon'^i, e'_i) = \sum_i E^i_j F^k_i T(\varepsilon^j, e_k) = \delta^k_j T(\varepsilon^j, e_k) = \sum_j T(\varepsilon^j, e_j).$$

□

Například, je-li T tenzor typu $(3,2)$, pak zúžení na druhém kovariantním a na posledním kontravariantním místě je tenzor T' typu $(2,1)$, který je definován takto:

$$T'(v, w, v^*) = \sum_j T(v, e_j, w, \varepsilon^j, v^*).$$

V souřadnicovém zápisu je zúžení tenzoru $T \in T^3_2$ na uvažovaných místech dáno vztahem

$$T^{ik}_l = \sum_j T^{ijk}_{lj},$$

který se nápadně podobá definici stopy zobrazení.

6.4 Ztotožnění V a V^* pomocí bilineární formy

Existuje tradiční procedura tzv. zvedání a spouštění indexů, která se ve fyzice neustále používá. Význam této procedury si teď vysvětlíme.

Věta 17 O spouštění a zvedání indexů pomocí bilineární, resp. seskvilineární formy

Předpokládejme, že B je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru V. Tato forma pak indukuje lineární zobrazení $G : V \to V^*$ předpisem

$$G(v)(w) = B(w, v).$$

Pokud je B nedegenerovaná, je $G : V \to V^*$ isomorfismus.

Totéž je pravda i pro hermiteovskou bilineární formu na komplexním vektorovém prostoru, ale zde je zobrazení G antilineární.

Jsou-li $e_1, \ldots, e_n$ a $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ duální baze V, resp. V^* a je-li $B = (b_{ij})$ matice formy B vůči zvoleným bazím, pak platí pro $v = \sum \alpha^i \in V$ a $\varphi = \sum a_j \varepsilon^j \in V^*$

$$a_j = \sum b_{ij}\alpha^j;\ \alpha^i = \sum (B^{-1})^{ij} a_j,$$

Viděli jsme, že pokud fixujeme bilineární formu s maticí $B = b_{ij}$, je možné přiřadit vektoru se souřadnicemi v^i kovektor w se souřadnicemi $w_j = \sum_i v^i b_{ij}$.

Podobně můžeme postupovat i u objektu (tenzoru) s vice indexy. Mezi takove objekty patří lineární zobrazení. Pokud má lineární zobrazení $F : V \mapsto W$ vůči nějakým bazím matici $A = (a^j_k$, pak je možné horní index snížít a dostat tak matici $C = (c_{ij})$ bilineární formy na $V \times W$:

$$c_{ik} = \sum_j b_{ij} a^j_k.$$

Tuto operaci je možné popsat také bez souřadníc. Hodnota bilineární formy C na vektorech $v \in V, w \in W$ je určena vztahem

$$C(v, w) = B(F(v), w). \tag{6}$$

Naopak zvednutím indexu (pomocí inverzní matice B^{-1} lze změnit bilineární zobrazení C na $V \times W$ na lineární zobrazení F z V do W. V souřadnicích se to provede pomocí inverzní matice B^{-1} :

$$a^i_k = \sum_j (b^{-1})^{ij} c_{jk}.$$

Bez souřadnicová definice je dána stejným vztahem (6), bilineární formy B a c jsou dané a lineární zobrazení F je vztahem (6) jednoznačně určeno.

6.5 Symetrické a antisymetrické tensory - definice.

Definice 26 *Uvažujme nyní tenzory typu $(k, 0)$. Takovýto tenzor T je tedy multilineární zobrazení, které dané k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in V$ přiřadí číslo $T(v_1, \ldots, v_k)$. Pokud se hodnota zobrazení nezmění pro libovolnou permutaci vektorů $v_1, \ldots, v_k \in V$, pak řekneme, že tenzor T je symetrický. Tenzor T je tedy symetrický, pokud platí vztah*

$$T(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = T(v_1, \ldots, v_k),$$

pro každou k-tici vektorů $(v_1, \ldots, v_k)$ *a pro každou permutaci* π *množiny čísel* $\{1, \ldots, k\}$.

Množinu všech symetrických tenzorů typu $(k, 0)$ *označíme symbolem* $\mathrm{Sym}^k(V)$ *a součet*

$$\mathrm{Sym}(V) := \oplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^k(V)$$

nazveme symetrickou algebrou V.

Je-li T *tenzor typu* $(k, 0)$, *pak z něj lze vytvořit symetrický tenzor symetrizací. Zobrazení* $\mathrm{Sym} : T_0^k \to \mathrm{Sym}^k(V)$ *je definováno takto.*

$$\mathrm{Sym}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \Pi_k} T(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}),$$

kde Π_k *je grupa všech permutací množiny* $\{1, \ldots, k\}$. *Je zřejmé, že obrazem* T *je symetrický tenzor. Zobrazení* Sym *je projekce* T_0^k *na* $\mathrm{Sym}^k(V)$. *Aby vektorový prostor* $\mathrm{Sym}(V)$ *byl algebrou, je třeba definovat součin. Tento součin označíme symbolem* $\odot$ *a definujeme je takto. Jsou-li*

$$S_1 \in \mathrm{Sym}^{k_1}(V), \ldots, S_m \in \mathrm{Sym}^{k_m}(V)$$

symetrické tenzory, pak jejich symetrický součin definujeme takto:

$$S_1 \odot \ldots \odot S_m = \mathrm{Sym}(S_1 \otimes \ldots \otimes S_m).$$

Podobně se definují antisymetrické tenzory.

Definice 27 *Uvažujme opět tenzory typu* $(k, 0)$. *Řekneme, že tenzor* T *je antisymetrický. pokud platí vztah*

$$T(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \mathrm{sgn}(\pi) T(v_1, \ldots, v_k),$$

pro každou k-tici vektorů $(v_1, \ldots, v_k)$ *a pro každou permutaci* π *množiny čísel* $\{1, \ldots, k\}$.

Množinu všech antisymetrických tenzorů typu $(k, 0)$ *označíme symbolem* $\Lambda^k(V)$ *a součet*

$$\Lambda(V) := \oplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

nazveme vnější (Grassmannovou) algebrou V. *Prvky z* $\Lambda^k(V)$ *se často také nazývají k-vektory.*

Je-li T tenzor typu $(k,0)$, pak z něj lze vytvořit antisymetrický tenzor antisymetrizací. Zobrazení $\mathrm{Alt} : T_0^k \to \Lambda^k(V)$ *je definováno takto:*

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \Pi_k} \mathrm{sgn}(\pi) T(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}).$$

Je zřejmé, že obrazem T je antisymetrický tenzor. Zobrazení Alt *je projekce T_0^k na $\Lambda^k(V)$*

Aby vektorový prostor $\Lambda(V)$ byl algebrou, je třeba definovat součin. Tento součin označíme symbolem $\wedge$ a nazýváme ho vnější součin. Jsou-li $T_1 \in \Lambda^{k_1}(V), \ldots, T_m \in \Lambda^{k_m}(V)$ antisymetrické tenzory, pak jejich antisymetrický součin definujeme takto:

$$T_1 \wedge \ldots \wedge T_m = \Lambda(T_1 \otimes \ldots \otimes T_m).$$

6.6 Vlastnosti symetrických tenzorů.

Lemma 16 *Nechť $\varepsilon^j, j = 1, \ldots, n$ je baze prostoru V^*. Pak base prostoru* $\mathrm{Sym}^k(V)$ *je tvořena prvky*

$$\varepsilon^J = \varepsilon^{j_1} \odot \ldots \odot \varepsilon^{j_k};\ J = (j_1, \ldots, j_k); 1 \le j_1 \le \ldots \le j_k \le n.$$

Dá se ukázat, že

$$\dim \mathrm{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Důkaz: Baze $T_0^k(V)$ je tvořena prvky

$$\varepsilon^J = \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_k};\ J = (j_1, \ldots, j_k);\ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}, n = \dim V.$$

Jejich symetrizací dostaneme všechny prvky tvaru

$$\varepsilon^J = \varepsilon^{j_1} \odot \ldots \odot \varepsilon^{j_k};\ J = (j_1, \ldots, j_k); 1 \le j_1 \le \ldots \le j_k \le n.$$

Je tedy zřejmé, že tato množina generuje celý prostor $\mathrm{Sym}^k(V)$.

Standardním způsobem se ukáže, že tyto prvky jsou nezávislé. Předpokládejme, že $\sum_J \alpha_J \varepsilon^J = 0$. Nechť $e_j, j = 1, \ldots, n$ je duální baze V, označme e_J k-tici vektorů $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$.

Pak celý důkaz plyne z toho, že $\varepsilon^J(e_K) = \frac{1}{k!}\delta_J^K$, neboť pro každé J platí

$$0 = \sum_J \alpha_J \varepsilon^J(e_K) = \frac{1}{k!}\sum_J \alpha_J \delta_J^K = \frac{1}{k!}\alpha_J.$$

Vzorec pro dimenzi je standardní kombinatorický výraz.

□

Jako příklad si rozmyslete, že algebra polynomů na $V = \mathbb{R}^2$ je isomorfní s algebrou $\mathrm{Sym}(V^*)$.

6.7 Vlastnosti antisymetrických tensorů.

Lemma 17 *Nechť $\varepsilon^j, j = 1, \ldots, n$ je baze prostoru V^*. Pak base prostoru $\Lambda^k(V)$ je tvořena prvky*

$$\varepsilon^J = \varepsilon^{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{j_k};\ J = (j_1, \ldots, j_k); 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n.$$

V tomto případě platí

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}, k \le n$$

$$\Lambda^k(V) = \{0\};\ k > n.$$

Důkaz: Baze $T_0^k(V)$ je tvořena prvky

$$\varepsilon^J = \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_k};\ J = (j_1, \ldots, j_k);\ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}, n = \dim V.$$

Jejich antisymetrizací dostaneme všechny prvky tvaru

$$\varepsilon^J = \varepsilon^{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{j_k};\ J = (j_1, \ldots, j_k); 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n.$$

Je tedy zřejmé, že tato množina generuje celý prostor $\Lambda^k(V)$.

Standardním způsobem se ukáže, že tyto prvky jsou nezávislé. Předpokládejme, že $\sum_J \alpha_J \varepsilon^J = 0$. Nechť $e_j, j = 1, \ldots, n$ je duální baze V, označme e_J k-tici vektorů $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$.

Pak celý důkaz plyne z toho, že $ep^J(e_K) = \frac{1}{k!}\delta_J^K$, neboť pro každé J platí

$$0 = \sum_J \alpha_J \varepsilon^J(e_K) = \frac{1}{k!}\sum_J \alpha_J \delta_J^K = \frac{1}{k!}\alpha_J.$$

Vzorec pro dimenzi je standardní kombinatorický výraz pro výběr k různých prvků z množiny, která má n prvků.

□

Příklady.

(1) Nejčastěji používaným příkladem symetrického tenzoru je symetrická bilineární forma B. Pro případ, že tato foma je nedegenrovaná, zadává totiž na příslušné m vektorovém prostoru 'skalární součin', který ovšem nemusí výt nutně positivně definitní. Velmi často se tato volba nazývá volbou metriky na příslušném vektorovém prostoru a pro souřadnicové vyjádření se obvykle používá symbol $g_{\mu\nu}$. Také často můžete najít zadání metriky ve tvaru $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Metrika v tomto případě je obvykle tenzorové pole $g_{\mu\nu}(x)$ a diferenciály dx^ν jsou symboly označující bazi duálu k tečnému prostoru v uvažovaném bodu prostoru.

(2) V souřadnicích vypadá operace symetrizace a antisymetrizace jednoduše, např. pro tenzory se dvěma indexy platí zřejmě

$$S(T_{ij}) = 1/2(T_{ij} + T_{ji}), A(T_{ij}) = 1/2(T_{ij} - T_{ji}).$$

(3) Je-li zadána metrika, pak se často neuvažují všechny možné baze tečného prostoru (tj. vektorového prostoru V, který je základní prostor pro definici tenzorů), ale jen baze ortonormální. Matice přechodu je pak nutně orthogonální matice a ne obecná matice.

Zvedání a spouštění indexů je pak zcela běžné. Například tenzor křivosti R_{ijkl} v obecné teorii relativity často najdete v různých formách s různou polohou indexů.

(4) Je-li $V = \mathbb{R}^n$, pak existuje velmi užitečný konkrétní model pro prostor $\odot^k(V^*)$, jehož prvky tvoří symetrické tenzory typu $(k, 0)$. Stačí uvažovat prostor všech polynomů na $\mathbb{R}^n$, které jsou homogenní stupně k. Vskutku, pokud budete považovat koeficienty takového polynomu za souřadnice příslušného tenzoru, je zřejmé, že jde o tenzor symetrický a je lehké se přesvědčit, že při změně baze $\mathbb{R}^n$ se koeficienty transformují předepsaným způsobem (rozmyslete si a spočiteje si to pro polynomy stupně 2!).

Prostor všech polynomů je pak nekonečně dimenzionální vektorový prostor, který je zároveň algebrou, tj. libovolné dva prvky mohu vynásobit (to je zřejmé) a výsledek je opět prvkem tohoto prostoru. Je to algebra izomorfní symetrické tenzorové algebře $\odot(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \odot^n(V)$ prostoru $V = (\mathbb{R}^n)^*$. Ve fyzice se tato algebra vyskytuje v částicové fyzice jako tzv. Fockův prostor popisující vícečásticové stavy bozonů (částic s celým spinem). Základním vektorovým prostorem V je zde Hilbertův prostor (nekonečné dimenze), který popisuje jednočásticové stavy příslušné elementární částice.

(5) Typickým a důvěrně známým příkladem antisymetrického tenzoru je determinant (uvažovaný jako multilineární, antisymetrické zobrazení, které např. sloupcům dané matice, tj. n-tici vektorů, přiřadí determinant této $n \times n$ matice).

(6) Vnější, nebo Grassmannova, algebra $\Lambda(V) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$ prostoru $V = (\mathbb{R}^n)^*$ je opět algebra, tj. pro libovolné dva prvky je definován jejich součin, který patří do stejného prostoru. V matematice se tato algebra vyskytuje při popisu křivkových a plošných integrálů a Stokesovy věty. Ve fyzice tuto algebru určitě potkáte v souvislosti s tzv. supersymetriemi a, ještě dříve a podstatněji, ve složitější nekonečně dimenzionální verzi v kvantové teorii pole jako matematický aparát potřebný pro popis fermionů (částic s poločíselným spinem).