Matematický proseminář

Komplexní čísla, ZS 2016/17

(1) Ke komplexnímu číslu z spočítejte $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, z^{-1}, $|z|$:
- (a) $z = (1-i^3)(2-3(-i)^7)$
- (b) $z = \frac{1+3i}{i-2}$
- (c) $z = (1-i)^4 + (1+i)^8$

(2) Zapište v goniometrickém tvaru komplexní čísla
- (a) $\sqrt{6} - i\sqrt{6}$, $31 + 27i$
- (b) $z = 1+i$, $w = i + \sqrt{3}$, $\bar{z}$, w^2, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, $\bar{z}w^2$, $|zw|$, $z+w$.
- (c) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})^{-1}$
- (d) $\exp(-1 + i\frac{\pi}{2})$

(3) Ukažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $(1+i)^{4n} - (1-i)^{4n} = 0$

(4) Najděte vyjádření $\cos 5\alpha$ a $\sin 5\alpha$ pomocí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$

(5) Řešte v oboru komplexních čísel rovnice
- (a) $z^4 = 64$
- (b) $z^3 = i$
- (c) $z^2 = 2 - 2i$
- (d) $z^2 + 8 + 6i = 0$
- (e) $z^8 = -1$
- (f) $z^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$

(6) Řešte v oboru komplexních čísel rovnice
- (a) $z^2 + 5z + 5 = 0$
- (b) $z^2 - (3+i)z + (2+i) = 0$
- (c) $z^3 + z^2 + (5-7i)z - (10+2i) = 0$ za předpokladu, že jeden z kořenů je $1+i$.

(7) Popište v komplexní rovině množiny popsané (ne)rovnostmi
- (a) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq 5$
- (b) $|z + 3 - i| < 2$
- (c) $1 \leq |z-1| \leq 3$
- (d) $\frac{|z-1|}{|z+1|} = 2$
- (e) $|z+1| - |z-1| < 2$
- (f) $|z^2 - 1| = 1$

(8) Určete
- (a) $\arg \frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$
- (b) (*) $\operatorname{Log}(ie^2)$
- (c) (*) $\log(-3)$
- (d) (*) i^i

(9) Dokažte, že je-li $w \neq 1$ kořen rovnice $z^3 = 1$, pak platí $1 + w + w^2 = 0$. Jaký podobný vztah platí pro $x = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$? Vynásobte levou stranu výrazem k ní komplexně sdruženým a vypočtěte odtud $\cos\frac{2\pi}{5}$. Uměli byste vypočíst totéž pomocí Moivreovy věty?

(10) Určete, kolik různých uspořádaných dvojic reálných čísel (a, b) vyhovuje rovnici

$$(a+ib)^{2015} = a - ib$$

(11) Nechť α, β, γ jsou tři vzájemné různá komplexní čísla.
- (a) Dokažte, že leží v jedné přímce, právě když

$$\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha}) = 0$$

- (b) Dokažte, že pokud $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$, pak

$$\arg\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}$$