

## Lineární algebra pro fyziky - LS 09/10

### Příklady 4 - Funkce matic a diferenciální rovnice

1. Určete

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{42}$$

2. Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{67}$$

3. Najděte odmocninu matice, tedy nějakou  $2 \times 2$  matici  $A$ , která splňuje

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Dokažte

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

bez užití Jordanova tvaru, pouze pomocí definice exponenciály.

5. Nechť  $J_{\lambda,k}$  je Jordanova buňka stupně  $k$  s vlastním číslem  $\lambda$ . Určete  $\exp(tJ_{\lambda,k})$ .

6. Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2 \end{aligned}$$

s obecnou počáteční podmínkou.

7. Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_3 \\ y_2' &= y_1 - y_3 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = 0$ ,  $y_3(0) = 0$ .

8. Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = -1$ . Řešení nakonec zapište bez užití komplexních čísel.

9. Řešte soustavu rovnic s pravou stranou

$$\begin{aligned}y_1' &= 5y_1 - 3y_2 + e^x \\ y_2' &= 3y_1 - y_2\end{aligned}$$

a obecnými počátečními podmínkami.

10. Řešte soustavu rovnic s pravou stranou

$$\begin{aligned}y_1' &= -2y_1 + 4y_2 + 2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 + 1\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = 1$ .

11. Obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

je možné převést na soustavu dvou rovnic prvního řádu zavedením nové funkce  $z(x) := y'(x)$ . Vyřešte tímto způsobem rovnici pro  $a = 2$ ,  $b = 1$ .