

Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 4 - Vektorové prostory

1. Je množina všech reálných matic typu $m \times n$ vektorovým prostorem vůči sčítání matic a násobení matice reálným číslem? Zdůvodněte.
2. Nechť V je vektorový prostor nad T , $\mathbf{v} \in V, c \in T$. Dokažte z axiomů, že pokud $c \cdot \mathbf{v} = 0$, pak buď $c = 0$, nebo $\mathbf{v} = 0$.
3. Rozhodněte, zda jsou následující množiny vektorovými podprostory v prostoru V všech funkcí z $\langle a, b \rangle$ do \mathbb{R} :
 - (a) $\{f \in V \mid f(a) = 1\}$
 - (b) $\{f \in V \mid f(b) = 0\}$
 - (c) $\{f \in V \mid f(a) - 2f(b) = 0\}$
4. Dokažte, že množina všech polynomů s reálnými koeficienty vzhledem ke sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem je vektorový prostor. Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory tohoto prostoru:
 - (a) množina všech polynomů stupně n
 - (b) množina všech polynomů stupně nejvýše n
 - (c) množina všech polynomů majících kořen 0
 - (d) množina všech polynomů majících nějaký racionální kořen
5. Rozhodněte, zda množina všech reálných periodických funkcí na \mathbb{R} je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} .
6. Nechť M je množina. Rozhodněte, zda je množina všech konstantních funkcí z M do \mathbb{R} vektorovým prostorem nad \mathbb{R} .
7. Dokažte, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby podmnožina U vektorového prostoru V nad T byla podprostorem, je $\forall a, b \in T, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \ a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in U$.
8. Určete, kolik vzájemně různých podprostorů má vektorový prostor $(\mathbb{Z}_7)^2$.
9. Nechť $M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ je množina vektorů nějakého vektorového prostoru V nad tělesem T . Je množina všech m -tic (r_1, r_2, \dots, r_m) ,

$r_i \in T$ takových, že lineární kombinace $\sum_1^m r_i v_i$ je nulový vektor, podprostorem T^m ? Zdůvodněte.

10. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 rozhodněte, jestli je vektor $(1, 1, 1)$ prvkem $\langle (1, 2, 1), (1, 0, -1), (2, 2, 0) \rangle$.
11. Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 3x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad \mathbb{R})
12. Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 2x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{\cos x, \sin x, \sin 2x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad \mathbb{R})