Lineární algebra a geometrie pro matematiky - ZS 08/09

Příklady 9 - Lineární zobrazení

1. Nechť V je vektorový prostor všech funkcí z intervalu I do $\mathbb{R}$. Dokažte, že zobrazení $F : V \to V$, definované pro $f \in V$ vztahem $\forall x \in I$, $[F(f)](x) = xf(x)$, je lineární zobrazení.
2. Nechť $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jsou lineární:
   (a) $(x, y, z, u) \to (xy, y - x, z, u)$
   (b) $(x, y, z, u) \to (ry, y - x, z, u)$
   (c) $(x, y, z, u) \to (0, z, y, x + y + z + u)$
   (d) $(x, y, z, u) \to (1, z + y, z + x, z + u)$

   Zdůvodněte.
3. Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $f : V \to W$ jsou lineární:
   (a) $V = W = \mathbb{C}$ a f je komplexní sdružení $f(v) = \bar{v}$
   (b) V je prostor všech reálných čtvercových matic stupně n, $W = \mathbb{R}$, $f(A) = \det A$.
   (c) $V = W$ je prostor všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$ a f je zobrazení přiřazující funkci její absolutní hodnotu $f(g) = |g|$.
   (d) V je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše n, $W = \mathbb{C}^n$ a f je zobrazení přiřazující polynomu p vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jeho kořenů (včetně násobností).
   (e) $V = W$ je prostor všech komplexních polynomů stupně nejvýše n a f je zobrazení přiřazující polynomu p jeho derivaci $f(p) = p'$.
4. Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadaného vztahem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 4x_1 + x_3)$.
5. Najděte bázi jádra a obrazu zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadaného vztahem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4, x_2 - 2x_3, x_1 + 4x_3 + x_4)$.
6. Nechť V je vektorový prostor všech reálných čtvercových matic řádu n. Popište jádro a obraz zobrazení F které matici $A = (a_{ij})$ přiřazuje

matici, jejíž ij-tý prvek je $a_{ij} + a_{ji}$.

7. Popište jádro a obraz endomorfizmu F množiny M všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$, který je definován vztahem $\forall f \in M, \forall x \in \mathbb{R}, (F(f))(x) = f(x) - f(-x)$.
8. Najděte endomorfizmus, který je monomorfizmem, ale není epimorfizmem.
9. Najděte endomorfizmus, které je epimorfizmem, ale není automorfizmem.
10. Dokažte, že $f : V \to V'$ je monomorfizmus, právě když existuje homomorfizmus $g : V' \to V$ takové, že $gf = 1_V$.
11. Dokažte, že $f : V \to V'$ je epimorfizmus, právě když existuje homomorfizmus $g : V' \to V$ takové, že $fg = 1_{V'}$.
12. Nechť V je vektorový prostor a $\mathrm{Hom}(V, V)$ množina všech endomorfizmů na něm. Rozhodněte, zda je $\mathrm{Hom}(V, V)$ pro každé V (komutativním) tělesem vzhledem k operacím sčítání a skládání endomorfizmů. A co pro $V = \mathbb{R}$?
13. Dokažte, že pro libovolné dva homomorfizmy $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ pro jádra platí $\mathrm{Ker}\, f \leq \mathrm{Ker}(g \circ f)$ a formulujte a dokažte obdobné tvrzení pro obrazy.