

Matematický proseminář

Rekurence

- (1) Z Římany obležené jeskyně se ve skutečnosti nedostal jen Josephus, ale i jeden jeho spolubojovník. Na jaké místo v kruhu si musel stoupnout? Popište pozici předposledního přeživšího jako funkci $I(n)$ pro n přirozené.
- (2) Vyjádřete funkci $L(n)$, udávající největší možný počet souvislých oblastí, na něž může rovinu rozdělit n přímek, nejprve rekurentním vztahem a posléze explicitně.
- (3) Vypočtete $n \times n$ determinant

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 4 & 9 & 5 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

- (4) Vynásobením vhodným faktorem zjednodušte a vyřešte rekurenci

$$T_1 = 1, nT_n = (n-2)T_{n-1} + 2 \text{ pro } n \geq 2$$

- (5) Najděte uzavřený tvar sumy $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$ repertoárovou metodou.
- (6) Najděte uzavřený tvar sumy $\sum_{k=0}^n k^3$ metodou oddělení prvního a posledního členu (perturbací sumy).
- (7) Převed'te hledání determinantu v úloze 3 na soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic a vyřešte tuto soustavu.