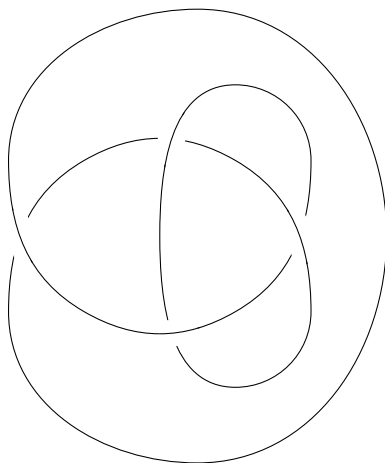
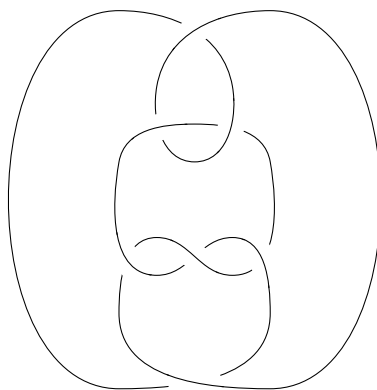


Variace na invarianci (2015/16)
Zápočtové úlohy k sérii
Invarianty uzlů

0.1 Příklad (1 bod). Najděte posloupnost Reidemeisterových tahů (a rovinných isotopií) dokazující, že následující uzel je ekvivalentní trefoilu.



0.2 Příklad (2 body). Ukažte, že následující uzel lze rozmotat (nemusíte popisovat jednotlivé Reidemeisterovy tahy, ale snažte se o srozumitelnost; nejlépe nakreslete posloupnost obrázků).



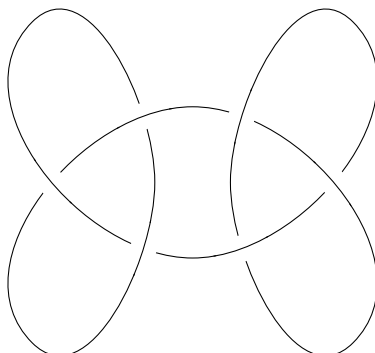
0.3 Příklad (1 bod). Uvažme tah $RM3'$, který je analogický $RM3$, jen každé horní křížení nahradíme dolním a naopak. Najděte posloupnost Reidemeisterových tahů (a rovinných isotopií) dokazující, že $RM1-3$ implikuje $RM3'$.

0.4 Příklad (1 bod). Spočítejte Kauffmanovu závorku trefoilu.

0.5 Příklad (1 bod). Ukažte, že Kauffmanova závorka je invariantní při $RM3$.

0.6 Příklad (1 bod). Někde v literatuře si najděte, co je to suma $K_1 \# K_2$ orientovaných uzlů K_1 a K_2 (connected sum of knots). Poté dokažte, že Jonesův polynom $V(K_1 \# K_2)$ sumy $K_1 \# K_2$ je roven $V(K_1) \cdot V(K_2)$.

0.7 Příklad (2 body). Ukažte, že trefoil a “granny knot” (obr. níže) nejsou ekvivalentní jako orientované uzly:



0.8 Příklad (1 bod). Dokažte, že inverzí homotopické třídy $[f]$ smyčky $f : [0, 1] \rightarrow X$ bodem $x_0 \in X$ v $\pi_1(X, x_0)$ je $[f^{-1}]$, kde $f^{-1}(s) := f(1 - s)$. (Spojistost zkonstruované homotopie nemusíte dokazovat.)

V dalšího úkolu je potřeba upravovat prezentaci grupy. Jako ilustrativní příklad uvažme Wirtingerovu prezentaci fundamentální grupy trefoilu:

$$\langle a, b, c \mid aba^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}a^{-1}, ca^{-1}c^{-1}b \rangle.$$

První relace vlastně říká, že

$$aba^{-1}c^{-1} = 1 \quad \text{neboli} \quad c = aba^{-1}.$$

Poslední rovnice vyjadřuje generátor c pomocí ostatních, čili ho může ze seznamu generátorů vynechat a v seznamu relací ho nahradit výrazem aba^{-1} . Pověsim si, že z první relace se stane 1 neboli triviální $1 = 1$, kterou vynecháme. Dostáváme tak novou prezentaci stejné grupy:

$$\langle a, b \mid b(aba^{-1})b^{-1}a^{-1}, (aba^{-1})a^{-1}(aba^{-1})^{-1}b \rangle.$$

Druhou relaci ještě můžeme upravit na tvar

$$1 = aba^{-1}a^{-1}(ab^{-1}a^{-1})b = aba^{-1}b^{-1}a^{-1}b.$$

Teď je vidět, že pokud první relaci vynásobíme zleva b^{-1} a zprava b , dostáváme druhou relaci. Jelikož jsou obě taková násobení v grupě vratné transformace (díky existenci inverzí), plyne odsud, že jednu z těchto dvou relací můžeme vynechat a dostaneme prezentaci

$$\langle a, b \mid baba^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle.$$

Alternativní zápis výchozí prezentace je

$$\langle a, b, c \mid aba^{-1} = c, bcb^{-1} = a, ca^{-1}c^{-1} = b^{-1} \rangle,$$

výsledné pak

$$\langle a, b \mid bab = aba \rangle.$$

0.9 Příklad (1 bod). Spočítejte Wirtingerovu prezentaci fundamentální grupy granny knotu K (viz cvičení 0.7), tj. $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$. Pak ji upravte tak, aby měla 3 generátory a 2 relace.

0.10 Příklad (1 bod). Ukažte, že fundamentální grupa trefoilu a unknotu nejsou isomorfní. To dává důkaz neekvivalentnosti těchto uzlů (ale to už víme díky 3-obarvitelnosti).
Návod: Stačí ukázat, že fundamentální grupa trefoilu není komutativní.

Další čtení:

1. M. Elhamdadi, S. Nelson : *Quandles - An Introduction to the Algebra of Knots*, Student Mathematical Library 74 (2015), American Mathematical Society.