Variace na invarianci 2018
Kleinův Erlangenský program (Lukáš Krump)

V tomto semináři rozvedeme následují tezi, kterou přinesl Felix Klein ve svém Erlangenském programu (1872):

V rovině existují různé geometrie. Každá geometrie je jednoznačně určena svou pohybovou grupou. Každá taková grupa se dá charakterizovat pomocí jistých invariantů.

Uvažujeme tedy různé geometrie v rovině. Ke každé takové geometrii přísluší pohybová grupa čili grupa jejích symetrií. Pro euklidovskou rovinu máme grupu všech shodností označenou E_2, která je generována všemi rotacemi (o úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$), translacemi (o vektor $v_0 = (x_0, y_0)$) a reflexí třeba podle osy x.

Domácí úkol 1 (1 bod): Dokažte přímým výpočtem, že každá shodnost zachovává skalární součin.

Navíc platí, že E_2 je právě ta největší grupa, která zachovává skalární součin, čili tento výsledek se „nedá vylepšit“. Grupa E_2 má dimenzi 3 (dvě dimenze přidává vektor, o nějž posouváme, jednu úhel, o nějž otáčíme, reflexe nepřidávají žádnou dimenzi). Říkáme, že skalární součin je číselným invariantem této grupy.

Uvažujme další možné geometrie v rovině. Z obvyklé euklidovské geometrie je dostaneme tak, že odebíráme některé pojmy a axiomy. Odebráním skalárního součinu (a tedy i měření délek a úhlů) získáme z euklidovské roviny afinní rovinu, v níž jsou body a vektory, umíme mezi nimi rozlišit a umíme určit střed úsečky. Také tu je definován dělící poměr tří bodů, z něhož lze rozpoznat jak „body v nekonečnu“ (tzv. nevlastní body čili vlastně směry), tak i středy úseček.

Na afinní přímce je definován dělící poměr tří bodů takto: $(ABC) = \lambda$, jestliže $C - A = \lambda(C - B)$.

Domácí úkol 2 (2 body):

a) Je-li $(ABC) = \lambda$, určete hodnotu dělícího poměru pro všech šest možných permutací tří bodů.

b) Určete všechny hodnoty čísla $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, pro něž se některé z těchto šesti hodnot rovnají.

U afinní geometrie máme grupu všech afinit Af_2, kde jsou translace stejně jako v euklidovské grupě, a místo rotací a reflexí může být jakékoli regulární zobrazení. Grupa Af_2 má dimenzi 6.

Domácí úkol 3 (1 bod): Dokažte přímým výpočtem, že každá afinita zachovává dělící poměr.

Projektivní rovinu získáme v principu tak, že odebereme dělící poměr a tedy i schopnost rozlišovat body vlastní od nevlastních, a rovněž středy úseček. Ve skutečnosti se projektivní přímka $\mathbb{R}P^1$ a projektivní rovina $\mathbb{R}P^2$ zkonstruují jako množina všech vektorových přímek ve vektorovém prostoru dimenze o 1 větší, a příslušná afinní přímka resp. rovina se do té projektivní vnoří. K popisu bodů v proj. přímce/rovině nám dobře slouží homogenní souřadnice: pro bod na projektivní přímce píšeme $A = \langle a \rangle = [a_0 : a_1]$, pro bod v projektivní rovině píšeme $A = \langle a \rangle = [a_0 : a_1 : a_2]$, v obou případech se jsou homogenní souřadnice určeny jednoznačně až na nenulový násobek. V projektivní přímce/rovině nerozlišujeme mezi vlastními a nevlastními body, to je jen vlastností zvoleného vnoření afinní přímky/roviny. Kanonicky bereme pro přímku ztotožnění $x \in \mathbb{R} \mapsto [1 : x] \in \mathbb{R}P^1$ – to jsou vlastní body, a nevlastní bod je $[0 : 1]$. Obdobně pro vlastní body v rovině máme $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mapsto [1 : x : y] \in \mathbb{R}P^2$ a nevlastní přímka je tvořena nevlastními body tvaru $[0 : x : y]$. Projektivní rovina splňuje velmi elegantní a jednoduché axiomy, a sice že každé dva body určují právě jednu přímku a každé dvě přímky se protínají právě v jednom bodě; a platí zde princip duality.

Jaká grupa přísluší projektivní rovině a co zachovává? Zavedeme nejprve pojem dvojpoměr čtyř vektorů v rovině takto: Nechť čtyři vektory a, b, c, d v rovině jsou po dvou lineárně nezávislé a splňují

$$\begin{aligned} c &= \alpha_1 a + \beta_1 b \\ d &= \alpha_2 a + \beta_2 b. \end{aligned}$$

Jejich dvojpoměr je pak definován jako

$$(abcd) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Domácí úkol 4 (1 bod): Při označení souřadnic $a = (a_0, a_1), \ldots$ dokažte, že

$$(abcd) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}.$$

Je snadno vidět, že hodnota dvojpoměru nezávisí na nenulovém násobku žádného z vektorů a proto lze zavést dvojpoměr čtyř bodů na projektivní přímce: je-li $A = \langle a \rangle = [a_0 : a_1], \ldots$, pak $(ABCD) = (abcd)$.

Domácí úkol 5 (1 bod): Je-li $(ABCD) = \lambda$, určete hodnotu dvojpoměru pro všech 24 možných permutací čtyř bodů.

Domácí úkol 6 (1 bod): Dokažte, že jsou-li body A, B, C, D vlastní, pak $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$; a dále, jsou-li A, B, C vlastní a D nevlastní, pak $(ABCD) = (ABC)$.

Nyní zavedeme grupu projektivit na $\mathbb{R}P^n$ jako

$$PGL_{n+1}\mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}; |A| \neq 0\}/\{\alpha \neq 0\},$$

čili se jedná o grupu všech regulárních matic (rozměru o jedna většího, než je dimenze našeho projektivního prostoru) braných až na násobek nenulovým číslem. Pro projektivní přímku tedy máme matice 2×2, což jsou čtyři dimenze, minus jedna dimenze kvůli zanedbání násobku, čili dimenze $PGL_2\mathbb{R}$ je 3. Pro rovinu jsou to matice 3×3 a dimenze $PGL_3\mathbb{R}$ je $3^2 - 1 = 8$. Snadno se ukáže, že každá grupa $PGL_n\mathbb{R}$ zachovává dvojpoměr.

Jsou-li geometrie uspořádané od nejvíce speciální (euklidovské) k nejobecnější (projektivní), jejich pohybové grupy se v tomto směru zvětšují: $E_2 \leq Af_2 \leq PGL_3$. Vztah mezi prvními dvěma je zřejmý (euklidovská rotace a reflexe jsou speciálními případy regulárních zobrazení), zatímco vztah mezi Af_2 a $PGL_3\mathbb{R}$ už je méně zřejmý – uvidíme příště.

U každé grupy nazveme číselným invariantem onu „funkci“, která je grupou zachovávána (s tím, že dotyčná grupa je největší, která tak činí), u zmíněných geometrií jde tedy postupně o skalární součin, dělící poměr a dvojpoměr.

Všechny doposud zjištěné věci můžeme doplnit do tabulky:

Geometrie	**Grupa (dimenze)**	**Číselný invariant**	**Množinový invariant**
euklidovská	E_2 (3)	skalární součin	něco(?) na nevlastní přímce
afinní	Af_2 (6)	dělící poměr	nevlastní přímka
projektivní	$PGL_3\mathbb{R}$ (8)	dvojpoměr	celá rovina

Všimněme si, že když postupujeme v tabulce shora dolů, u geometrií pokaždé na cosi „zapomeneme“, tj. dostáváme obecnější geometrie. Naopak směrem nahoru dostáváme geometrie speciálnější. Vidíme, že čím je geometrie speciálnější, tím menší má pohybovou grupu, tím více se zachovává číselně (dvojpoměr lze vypočítat z dělícího poměru, dělící poměr ze skal. součinu, ale bez doplnění dodatečných informací to opačně nejde).

Domácí úkol 7 (2 body): Ukažte, že $Af_2 \leq PGL_3$, neboli že afinní transformace se dají realizovat jako projektivní transformace (vyjděte z toho, že afinní převádějí směry na směry).

Kromě již známých pojmů jsme zavedli pojem množinový invariant – jedná se o množinu, která je zachovávána při akci příslušné grupy. Při postupu tabulkou zdola nahoru, tj. směrem ke speciálnějším geometriím, se množinový invariant zmenšuje a zároveň zpřesňuje. V projektivní geometrii se zachovává pouze celá projektivní rovina jako taková, ale jinak se může jakýkoli bod zobrazit na jakýkoli jiný. V afinní geometrii se už zachovává aspoň něco – konkrétně nevlastní přímka, tj. při každém afinním zobrazení se nevlastní body zobrazují na nevlastní a vlastní na vlastní. Čekáme tedy, že i v euklidovské geometrii se zachovává (oproti afinní) cosi dalšího, přesnějšího, jakási podmnožina nevlastní přímky, zatím označená otazníkem.

Po několika dalších úvahách na přednášce nám jako vhodní kandidáti přijde tzv. dvojice izotropických bodů $[0 : 1 : i], [0 : 1 : -i]$. Jsou to tedy nevlastní body, které jsou navíc imaginární. Jsou zachovávány všemi translacemi (protože jsou to směry), rotacemi (díky tomu jsme je našli jako společné vlastní vektory všech rotací) a také reflexí podle osy x, která je navzájem vyměňuje.

Domácí úkol 8 (1 bod): Dokažte, že dvojice izotropických bodů leží na každé kružnici v rovině.

Dále uvedeme Kleinovu ideu, že z projektivní geometrie je možné získat nové geometrie (v nichž jsme schopni měřit vzdálenosti a úhly) tím, že zvolníme jako množinový invariant nějakou kvadriku (v rovině tento pojem splývá s pojmem kuželosečka). A odsud plyne také klasifikace geometrií:

Kuželosečka	**Geometrie**
Reálná regulární	Hyperbolická
Reálná singulární	Parabolická
Imaginární	Eliptická

Dvojice izotropických bodů je příkladem imaginární kuželosečky v dimenzi 1, což souvisí s tím, že měření úhlů v euklidovské geometrii je eliptické (měření vzdáleností je ovšem parabolické, ale to se sem už nevejde).

Na způsob měření délek resp. úhlů (obecně říkejme míry) při zadané volbě kvadriky nás navádí tzv. Laguerrův vzorec. Uvažujme (euklidovský) svazek přímek v rovině. Naším cílem je vyjádřit obvyklý (euklidovský) úhel dvou přímek ve svazku pomocí dvojpoměru. Zavedeme nejprve souřadnice tak, že jedna libovolně zvolená přímka p_0 bude sloužit jako počátek souřadnic, a pro libovolnou přímku p ve svazku označíme $\varphi = \varphi(p)$ orientovaný úhel mezi p_0 a p, přičemž $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$. Pak je přímka p určena homogenními souřadnicemi $[\cos\varphi : \sin\varphi]$.

Euklidovský pohyb ve svazku, tedy otáčení okolo středu, má invarianty – jak již víme – izotropické přímky, které lze v homogenních souřadnicích zapsat jako $z = [1 : i], t = [1 : -i]$. Uvažujme nyní libovolné dvě reálné přímky svazku $x = [x_0 : x_1], y = [y_0 : y_1]$ a počítejme dvojpoměr s izotropními přímkami:

$$(xyzt) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & i \end{vmatrix}} = \frac{(ix_0 - x_1)(-iy_0 - y_1)}{(-ix_0 - x_1)(iy_0 - y_1)} = \frac{x_0y_0 + x_1y_1 - i(x_0y_1 - x_1y_0)}{x_0y_0 + x_1y_1 + i(x_0y_1 - x_1y_0)}$$

Nyní využijeme toho, že $x = [x_0 : x_1] = [\cos\varphi(x) : \sin\varphi(x)]$ a obodobně pro y, a označíme $\omega = \varphi(y) - \varphi(x)$. Pak zřejmě

$$\cos\omega = \cos\varphi(y)\cos\varphi(x) + \sin\varphi(y)\sin\varphi(x) = \sigma(x_0y_0 + x_1y_1)$$

$$\sin\omega = \sin\varphi(y)\cos\varphi(x) - \cos\varphi(y)\sin\varphi(x) = \sigma(x_0y_1 - x_1y_0)$$

kde σ je společný násobek vzniklý převodem mezi homogenními souřadnicemi x i y (rozmyslete).

Dosazením dostáváme

$$(xyzt) = \frac{\cos\omega - i\sin\omega}{\cos\omega + i\sin\omega} = \frac{e^{-i\omega}}{e^{i\omega}} = e^{-2i\omega}$$

Aplikací funkce Log (hlavní větev logaritmu) jakožto inverzní funkce k exponenciále v komplexním oboru dostáváme

$$\mathrm{Log}(xyzt) = -2i\omega$$

a tedy

$$\omega = \frac{i}{2}\,\mathrm{Log}(xyzt),$$

což je tzv. Laguerrův vzorec.

Tento vzorec může být poněkud překvapující, neboť úhel mezi dvěma přímkami ve svazku je zde vyjádřen pomocí dvojpoměru, kde zbylé dvě přímky z, t jsou imaginární, Log je komplexní funkce komplexní proměnné a její hodnota se nakonec násobí komplexním číslem i, přesto, uvažujeme-li reálné přímky x, y (tj. s reálnými souřadnicemi), je úhel ω mezi nimi nutně reálné číslo.

Pro obecnou volbu kvadriky budeme zavádět míru jako

$$\mu = \frac{c}{2}\,\mathrm{Log}(xy\xi\xi'),$$

kde ξ, ξ' jsou body kvadriky, tzv. absolutní body. Ty se pak ukážou být body v nekonečné vzdálenosti a pro případ hyperbolické přímky dojde k tomu, že nám tyto dva reálné(!) body rozdělí přímku na dvě části, v každé z nichž jsou vzdálenosti reálné a mezi nimiž navzájem jsou vzdálenosti imaginární.

Tímto způsobem dostaneme tzv. Beltramiho–Kleinův model hyperbolické roviny, kde celá rovina je znázorněna jako kruh a přímky se jeví jako přímky. Často se setkáváme s jinými modely, např. s Poincarého kruhovým modelem, který byl zmíněn na přednášce, a který je vidět na některých obrazech M.C.Eschera – viz poslední stranu.

Nebo s Poincarého polorovinným modelem,v němž se pohyby jeví jako Möbiovy transformace. O neeuklidovské geometrii by se dalo mluvit ještě dlouho, a také bychom mohli ukázat, jak vypadají příslušné pohybové grupy v různých modelech, ale to zase při nějakém dalším setkání.

Lukáš Krump, March 8, 2018