1 Vektorové prostory

1.1 Definice vektorov0ho prostoru.

Poznámka: Symbolem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ budeme označovat těleso reálných čísel, resp. komplexních čísel.
Příklad:

1. Geometrie. Základní středoškolská představa o tom, co je vektor, je orientovaná úsečka. Přesněji, dvě takové úsečky jsou považované za stejné, pokud jednu dostanu z druhé rovnoběžným přenosem. Základní operace, které mohu s vektory dělat, je jejich sčítaní (definované geometricky pro dva vektory umístěné do stejného počátku pomocí příslušného rovnoběžníka). Vektor také můžeme vynásobit reálným číslem. Množina všech (geometrických) vektorů je základní příklad a inspirace pro níže uvedenou definici vektorového prostoru.

2. Aritmetika. Množina $\mathbb{R}^n$ je množina všech n-tic $x = (x_1, \ldots, x_n)$ reálných čísel. Sčítání dvou prvků této množiny je definováno pomocí sčítání jejich odpovídajících komponent, násobení takovéto n-tice číslem se také definuje po složkách.

3. Analýza. Označme symbolem V prostor všech polynomů jedné reálné proměnné, jejichž stupeň je menší nebo roven danému přirozenému číslu k. Budeme uvažovat polynomy s komplexními koeficienty. Pak opět můžeme definovat snadno součet dvou takovýchto polynomů a také součin libovolného komplexního čísla a daného polynomu. Toto je příklad, který motivuje definici vektorového prostoru nad tělesem $\mathbb{C}$ komplexních čísel.

Definice 1 Vektorový prostor
Vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ je množina V spolu s dvěma operacemi (zobrazeními)

(i) $+ : V \times V \to V$ (tzv. sčítání vektorů)

(ii) $\cdot : R \times V \to V$ (násobení vektoru číslem)

Prvky množiny V se nazývají vektory (budeme je typicky označovat malými písmeny latinské abecedy). Prvky tělesa $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ se nazývají čísla (budeme je typicky označovat malými písmeny řecké abecedy). O těchto dvou operacích se předpokládá, že budou mít následující vlastnosti (budou splňovat následující axiomy):

I.a) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro všechny $x, y, z \in V$ (asociativita)

I.b) existuje vektor $0 \in V$ (nulový vektor) s vlastností, že pro všechny $x \in V$ platí $x + 0 = 0 + x = x$.

I.c) pro všechny $x \in V$ existuje prvek $-x \in V$ s vlastností $x + (-x) = (-x) + x = 0$ (existence inversního prvku)

1.d) pro všechny $x, y \in V$ platí $x + y = y + x$ (komutativita]

II.a) pro všechny $x \in V$ platí $1 \cdot x = x$,

II.b) pro všechny $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in V$ platí $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$,

III.a) pro všechny $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in V$ platí $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

III.b) pro všechny $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in V$ platí $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.

Poznámka:

Množina V, ve které existuje jen jedna operace (označme ji také $+$) s vlastnostmi I.a) - I.d) se nazývá *grupa*. Tento pojem bude v budoucnosti velmi důležitý, budeme se mu věnovat víc, až budeme mít k dipozici více důležitých příkladů.

Vektorový prostor je tedy grupa, na které existuje ještě další operace násobení číslem s dalšími vlastnostmi.

Ověřte, že motivační příklady z geometrie, aritmetiky a analýzy jsou opravdu příklady vektorových prostorů.

1.2 Vektorové podprostory, faktorprostor

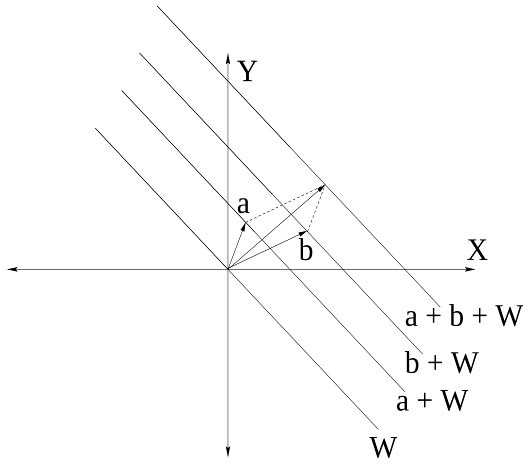
Definice 2 Vektorový podprostor
Nechť V je vektorový prostor na tělesem $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ Řekneme, že množina $W \subset V$ je vektorový podprostor V, pokud W je vektorový prostor při stejných operacích, které byly definovány ve V.

V této situaci budeme definovat faktorprostor V/W takto: Pro každé $a \in V$ definujeme množinu $a + W := \{b = a + w | w \in W\}$. Faktorprostor V/W je množina, jejíž prvky jsou množiny $a + W := \{b = a + w | w \in W\}$ pro libovolné $a \in V$. Sčítání a násobení je definováno ve V/W takto:

$$(a+W)+(b+W) := (a+b+W),\ a, b \in V;\ \alpha.(a+W) := (\alpha.a+W),\ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), a \in V.$$

Lemma 1 Vlastnosti podprostoru
Podmnožina $W \subset V$ je podprostor, pokud $W + W \subset W$, $\mathbb{R}.W \subset W(\mathbb{C}.W \subset W)$.

Důkaz: Výše uvedené podmínky jsou podmínky pro to, aby sčítání a násobení bylo dobře definováno, mělo hodnoty opět ve W. To, že pak toto sčítání a násobení číslem splňuje všechny požadované vlastnosti je už jen důsledkem



Obrázek 1: K definici faktorprostoru. Přímky představují jednotlivé prvky faktorprostoru.

toho, že vzniklo restrikcí ze sčítání a násobení ve V, kde tyto všechny vlastnosti platí. $\square$

Lemma 2 Korektnost definice faktorprostoru
Sčítání a násobení číslem ve V/W je dobře definováno a prostor V/W je vektorový prostor.

Důkaz: Všimněte si nejprve, že množiny $a + W$, $b + W$ v některých případech splynou (právě když $a - b \in W$!). Takže tutéž množinu lze zapsat různými způsoby. Je třeba se přesvědčit, že sčítání a násobení nezávisí na výběru popisu množin. To plyne z tohoto výpočtu: je-li

$$a \in V, a' \in V, a' = a + w, w \in W; b \in V, b' \in V, b' = b + u, u \in W; \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

pak

$$a' + b' = a + b + (u + w), \alpha.a' = \alpha.a + \alpha.w$$

a platí $u + w \in W, \alpha.w \in W$. $\square$

Příklad: Nechť vektorový prostor V je rovina, jak vypadají všechny podprostory v prostoru V? Nakreslete si je! Jsou to všechny přímky procházející počátkem a pak podprostor $\{0\}$, skládájící se z jednoho bodu, a to počátku.

Zvolte si za W jednu z přímek procházející počátkem. Rozmyslete si, jak vypadá faktorprostor V/W!

1.3 Lineární kombinace, generátory

Definice 3 *Nechť V je vektorový prostor. Jsou-li dány vektory $x_1, \ldots, x_n \in V$, pak každý vektor $w \in V$ tvaru $w = \alpha_1.x_1 + \ldots + \alpha_n.x_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ nazveme lineární kombinací vektorů $x_1, \ldots, x_n$. Řekneme, že lineární kombinace je triviální, pokud všechny koeficienty $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$ jsou rovny nule.*

Nechť M je libovolná podmnožina V. Lineární obal $L(M)$ množiny M je množina všech lineárních kombinací všech konečných podmnožin $x_1, \ldots, x_n$ množiny M.

Pokud pro množinu $M \subset V$ platí, že $L(M) = V$, pak řekneme, že množina M generuje V. Prvky množiny M se nazývají generátory V.

Řekneme, že vektorový prostor V je konečně generovaný, pokud existuje konečná množina $M \subset V$, která ho generuje.

Lemma 3 *Lineární obal $L(M)$ množiny $M \subset V$ je vektorový podprostor. Je to nejmenší vektorový podprostor V, který obsahuje M, tj. je to průnik všech lineárních podprostorů V, které obsahují množinu M.*

Důkaz: a) $L(M)$ je podprostor: Stačí ověřit, že $L(M)$ je uzavřeno na sčítání a násobení číslem (ihned z definice).

b) $L(M)$ je vektorový podprostor a obsahuje M. Je-li N jiný takový podprostor, pak všechny lineární kombinace prvků z M zřejmě patří do N a tedy $L(M) \subset N$. $\square$

Příklad: Rozmyslete si, jak vypadá lineární obal různých dvojic či trojic vektorů v trojrozměrném prostoru.

Rozmyslete si, jak může vypadat množina, která generuje daný dvojrozměrný podprostor v třírozměrném prostoru. Kolik může mít nejméně prvků? Rozmyslete si totéž pro jednorozměrný podprostor v třírozměrném prostoru.

1.4 Lineární nezávislost, base, dimense

Definice 4 *Řekneme, že skupina vektorů $x_1, \ldots, x_n$ ve V je lineárně nezávislá, pokud jediná lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna nulovému vektoru, je triviální lineární kombinace. Tedy musí platit: pokud existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ taková, že*

$$\alpha_1.x_1 + \ldots + \alpha_n.x_n = 0,$$

pak $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Řekneme, že libovolná množina $M \subset V$ *je lineárně nezávislá, pokud to platí pro každou její konečnou podmnožinu.*

Řekneme, že množina M *lineárně závislá, pokud není lineárně nezávislá.*

Řekneme, že množina M *je base vektorového prostoru* V, *pokud* M *je lineárně nezávislá a generuje* V.

Řekneme, že vektorový prostor V *má dimensi* n, *pokud existuje base* V, *která má* n *prvků. Řekneme, že vektorový prostor* V *má nekonečnou dimensi, pokud není konečně generovaný.*

Příklad: Nakreslete si lineárně nezávislé skupiny vektorů v rovině a v prostoru. Kolik jich nejvíce může být? Najděte příklady basí roviny a prostoru.

Ukažte, že prostor všech polynomů má nekonečnou dimensi.

Lemma 4
1. *Je-li množina* $M \subset V$ *lineárně nezávislá, pak totéž platí pro každou její podmnožinu.*
2. *Je-li množina* M *lineárně závislá, platí totéž pro každou množinu* $M' \subset V$, *která ji obsahuje.*

Poznámka: Nakreslete si v rovině nebo v prostoru příklady množin M a M' takových, že:

Množina M je lineárně nezávislá, množina M' je lineárně závislá, a $M \subset M'$.

Věta 1 (Steinitz)
Nechť $L(x_1, \ldots, x_m) = L(y_1, \ldots, y_n)$. *Nechť navíc je množina* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *nezávislá. Pak* $m \leq n$.

Důsledekem Steinitzovy věty je, že libovolné dvě base konečně generovaného vektorového prostoru mají stejný počet prvků. Dimense vektorového prostoru je tedy dobře definována.

Lemma 5
1. *Je-li množina* $M \subset V$ *lineárně nezávislá, pak totéž platí pro každou její podmnožinu.*
2. *množina* M *je lineárně závislá právě když existuje vektor* $x \in M$, *který lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, tj. takový, že* x *je roven lineární kombinaci nějaké konečné podmnožiny* $M' \subset M$ *vektorů.*

3. *Je-li množina M lineárně závislá, platí totéž pro každou množinu $M' \subset V$, která ji obsahuje.*

Důkaz: 1. Je-li množina vektorů $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ lineárně nezávislá, pak i každá její podmnožina M' je také lineárně nezávislá (tedy dvě po sobě následující definice linární nezávislosti jsou stejné!). Důvod proto je jednoduchý: pro pohodlí předpokládejme, že jsou vektory množiny M uspořádány tak, že podmnožina M' je právě množina $M' = \{x_1, \dots, x_n\}, n < m$. Pokud $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, pak můžeme definovat $\alpha_i = 0, i = n+1, \dots, m$ a zřejmě platí $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j = 0$, a tedy podle definice nezávislosti musí být $\alpha_i = 0$ také pro všechny $i = 1, \dots, n$. Z toho pak plyne, že také množina vektorů M' je nezávislá.

2. Stačí si tvrzení rozmyslet pro konečnou množinu $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ (pro obecnou množinu M pak tvrzení plyne přímo z definice).

Pro důkaz ekvivalence je třeba dokázat dvě implikace:

a) Je-li M lineárně závislá, pak podle definice existuje lineární kombinace $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, která je rovna nulovému vektoru, ale ne všechny koeficienty α_i jsou nula. Předpokládejme, že j-tý koeficient je nenulový. Pak ale

$$x_j = (1/\alpha_j)[\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1} + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \dots + \alpha_n x_n].$$

b) Pokud jeden z vektorů, například j-tý vektor, vyjádřím pomocí ostatních, tj. pokud

$$x_j = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1} + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \dots + \alpha_n x_n,$$

pak zřejmě

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1} - x_j + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

tedy podle definice je M lineárně závislá.

3. Třetí část tvrzení je přímým důsledkem druhé části tvrzení. □

Příklad: Nakreslete si příklad, kde množina M se skládá ze dvou vektorů v prostoru a množina M' vznikne přidáním jednoho vektoru k množině M. Rozmyslte si, že je možné, aby množina M byla lineárně nezávislá a množina M' byla lineárně závislá.

Lemma 6 *Nechť M je konečná podmnožina vektorů ve V a $y \in V$. Pak $L(M) \subset L(M \cup \{y\})$ a rovnost v této inklusi nastane právě když $y \in L(M)$.*

Důkaz:

Pokud nastane v inklusi rovnost, pak zřejmě $y \in L(M)$. Naopak, pokud $y \in L(M)$, pak lze y napsat jako lineární kombinaci prvků z M a každou lineární kombinaci prvků z $M \cup y$ lze dosazením za y napsat jako lineární kombinaci prvků z M. $\square$

Lemma 7 *Nechť $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je konečná množina vektorů ve vektorovém prostoru V. Definujme podprostory $V_i = L(x_1, \ldots, x_i)$; $i = 1, \ldots, n$. Pak $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$ a platí, že množina M je lineárně nezávislá právě když všechny inkluse mezi podprostory jsou ostré.*

Důkaz: Dokážeme právě opačné tvrzení: Množina M je lineárně závislá právě když nastane aspoň v jedné inklusi rovnost.

a) Předpokládejme nejdříve, že nastane aspoň v jedné inklusi v tvrzení lemmatu rovnost, např. nechť $V_j = V_{j+1}$. Pak podle Lemmatu 5 lze x_{j+1} napsat jako lineární kombinaci prvků $x_1, \ldots, x_j$, tedy M je lineárně závislá.

b) Předpokládejme naopak, že M je linárně závislá. Pak tedy podle definice existují čísla $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$, (ne všechny rovny nule) tak, že $\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n = 0$. Najděme největší index j, pro který je $\alpha_j \neq 0$, t.j. předpokládejme, že $\alpha_j \neq 0, \alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_n = 0$. Pak ale x_j lze napsat jako lineární kombinaci prvků $x_1, \ldots, x_{j-1}$ a $V_{j-1} = V_j$. $\square$

Lemma 8 *Je-li M konečná množina vektorů ve V, obsahující alespoň jeden nenulový prvek, pak z ní lze vybrat lineárně nezávislou podmnožinu $M' \subset M$, pro kterou $L(M') = L(M)$.*

Důkaz: Nechť $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Stačí sestrojit posloupnost podprostorů $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = L(M)$ jako v L.6 a vynechat x_j pro ta j, pro které v příslušné inklusi $V_{j-1} \subset V_j$ nastává rovnost a použít Lemma 6 na zbylou množinu. $\square$

Lemma 9 (o výměně):
Nechť vektor x je lineární kombinací vektorů $y_1, \ldots, y_n$, tj. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. Pokud $\alpha_j \neq 0$, pak

$$L(y_1, \ldots, y_n,) = L(y_1, \ldots, y_{j-1}, x, y_{j+1}, \ldots, y_n).$$

Důkaz: Obě potřebné inkluse plynou z toho, že x je lineární kombinací $y_1, \ldots, y_n$, a naopak

$$y_j = (1/\alpha_j)[\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_{j-1} y_{j-1} + \alpha_{j+1} y_{j+1} + \ldots + \alpha_n y_n - x].$$

$\square$

Důkaz: (Steinitzovy věty) Idea důkazu je postupně vyměňovat vektory x_i za vektory y_j, aniž by se vektorový podprostor, který generují, změnil. Formálně by se měl důkaz provést matematickou indukcí (zkuste si jej jako cvičení zformulovat sami). My uděláme první dva kroky ve výměně a zbytek už bude vidět, že se dělá stejně.

a) Všechny vektory x_i jsou nenulové, jinak by jejich množina nemohla být lineárně nezávislá. Vektor x_1 lze napst jako (netriviální) lineární kombinace vektorů y_j podle předpokladů věty, můžeme tedy najít index i_1 tak, že $x_1 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ a $\alpha_{i_1} \neq 0$. Pak podle Lemmatu 8 platí

$$L(y_1, \ldots, y_n) = L(y_1, \ldots, y_{i_1-1}, x_1, y_{i_1+1}, \ldots, y_n).$$

b) Vektor x_2 je lineární kombinací vektorů $y_1, \ldots, y_{i_1-1}, x_1, y_{i_1+1}, \ldots, y_n$. Koeficient u nějakého vektoru y_j musí být nenulový (předpokládejme, že je to vektor y_{i_2}), protože v opačném případě by x_2 by bylo násobkem x_1, což je spor s nezávislostí vektorů $x_1, \ldots, x_m$. Lze tedy opět použít Lemma 8 a nahradit vektor y_{i_2} vektorem x_2.

Takto postupujeme tak dlouho, až se nám podaří nahradit m vektorů y_j vektory $x_1, \ldots, x_m$. Pak ale nutně $m \leq n$. $\square$

Lemma 10 *Je-li $W \subset V$ podprostor konečně generovaného vektorového prostoru V, pak každou basi $x_1, \ldots, x_m$ podprostoru W lze doplnit na basi V.*

Důkaz: Pokud $L(x_1, \ldots, x_m) = V$, není co dokazovat.

V opačném případě existuje vektor $x_{m+1} \in V$, který nepatří do $L(x_1, \ldots, x_m)$. Pak ale $L(x_1, \ldots, x_m)$ je striktně menší než $L(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})$ a vektory $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}$ jsou lineárně nezávislé podle Lemmatu 6. Pokud generují celé V, jsme hotovi. Pokud ne, pokračujeme dál stejným způsobem a po konečném počtu kroků najdeme basi V. $\square$

Věta 2

1. *Je-li W podprostor V, pak $\dim W \leq \dim V$. Pokud je W vlastní podprostor a V je konečně generovaný prostor, pak je nerovnost neostrá.*
2. *Platí $\dim W + \dim V/W = \dim V$.*

3. Jsou-li W_1 a W_2 dva podprostory V, pak

$$dim\ W_1\ +\ dim\ W_2 = dim\ W_1 \cap W_2\ +\ dim\ L(W_1 \cup W_2).$$

Důkaz:

1. Plyne ihned z Lemmatu 9.

2. Nechť $x_1, \ldots, x_m$ je base W, kterou doplníme na basi $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k$ V. Pak vektory $y_1 + W, \ldots, y_k + W$ tvoří basi V/W (rozmyslete si!) a tvrzení zřejmě platí.

3. Zvolme basi $x_1, \ldots, x_m$ podprostoru $W_1 \cap W_2$ a doplňme ji na basi $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k$ podprostoru W_1 a basi $x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_j$ podprostoru W_2. Stačí si pak už jen rozmyslet, že vektory $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_j$ tvoří basi podprostoru $L(W_1 \cup W_2)$.

□

Definice 5 *Řekneme, že dva vektorové prostory V a W jsou izomorfní, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\phi : V \to W$, pro které platí:*
(i) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), \forall x, y \in V$;
(ii) $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x), \forall\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in V$.

Definice 6 *Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je base ve vektorovém prostoru V. Je-li $x \in V$, pak existuje právě jedna n-tice reálných (resp. komplexních) čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takových, že*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se nazývají souřadnice vektoru x vůči basi $x_1, \ldots, x_n$.

Poznámka: Jednoznačnost souřadnic se dokáže ihned z definice base. Každá volba base tedy určuje isomorfismus prostoru V s prostorem $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$.

Věta 3 *Každé dva vektorové prostory, které mají stejnou dimensi, jsou isomorfní.*

Důkaz: Oba prostory jsou isomorfní s $\mathbb{R}^n$, resp. s $\mathbb{C}^n$. □

Definice 7 Matice, součin matic
Maticí A typu $m \times n$ nazýváme symbol $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, kde a_{ij} jsou čísla. Index i je řádkový, index j je sloupcový. Matice typu $n \times n$ se nazývá čtvercová matice. Matice s reálnými (resp. s komplexním) prvky se nazývá reálná (resp.

komplexní) matice. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$, pak symbolem A^t označíme tzv. transponovanou matici, která vznikne z A záměnou řídkového a sloupcového indexu. Je to matice typu $n \times m$, definovaná předpisem $A^t = (a_{ji})$.

Definice 8 Součin matic
Je-li A matice typu $p \times m$ a B matice typu $m \times n$, pak definujeme součin matic $C := A \cdot B$ předpisem

$$c_{rs} = \sum_{k=1}^{m} a_{rk} b_{ks};\ r = 1, \ldots, p;\ s = 1, \ldots, n.$$

Matice C je typu $p \times n$.

Prostor všech matic daného typu $m \times n$ je vektorový prostor dimense mn.

Lemma 11 *Pro násobení matic platí:*

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, (A + B) \cdot C = A \cdot B + B \cdot C$;
3. $A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$.
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t,\ (A^t)^t = A$.

Definice 9 Inverzní matice
Označme symbolem $\mathbb{I}$ matici typu $n \times n$, která má na diagonále jedničky a jinde nuly (tuto matici nazveme jednotkovou maticí). Řekneme, že čtvercová matice A má inversní matici (a označíme ji A^{-1},), pokud

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}$$

Řekneme, že čtvercová matice A je regulární, pokud má inversní matici. V opačném případě jí nazveme singulární maticí.

Definice 10 Matice přechodu
Jsou-li $e_1, \ldots, e_n$, resp. $e'_1, \ldots, e'_n$ dvě base vektorového prostoru V, pak matice přechodu od první base k druhé je matice E, definovaná vztahem $E = (E_{ij})$, kde

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} E_{ji} e_j.$$

Symbolicky lze, za předpokladu, že base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ se formálně zapíše jako sloupcový vektor, popsat vliv záměny base jako součin čtvercové matice A a 'sloupce' e tímto způsobem:

$$e' = e \cdot E.$$

Věta 4 O matici přechodu mezi bázemi
Jsou-li $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ souřadnice vektoru x vůči basi $e_1, \ldots, e_n$ a jsou-li $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \in \mathbb{R}^n$ souřadnice téhož vektoru x vůči basi $e'_1, \ldots, e'_n$, pak

$$\alpha = E \cdot \alpha'; \;\; \alpha' = (E)^{-1}\alpha.$$

Důkaz: Symbolicky můžeme popsat rozklad vektoru x do base e takto: $x = e \cdot (\alpha)^t$, podobně pro druhé souřadnici vůči druhé basi. Pak

$$x = e' \cdot (\alpha')^t = [e \cdot E] \cdot (\alpha')^t = e[\cdot E \cdot (\alpha')^t]$$

a současně $x = e \cdot (\alpha)^t$. Tedy $\alpha = E \cdot \alpha'$. Podle definice inversní matice je pak

$$\alpha' = E^{-1}\alpha.$$

□

2 Vektorový prostor se skalárním součinem

Ze střední školy je dobře známo, jak vypadá trojrozměrný Eukleidův prostor a základy geometrie v tomto prostoru (studium geometrických obrazců, délek, úhlů, ploch, apod.). Vektorový prostor dimenze 3 vypadá podobně jako Eukleidův prostor, ale v něm není zatím k dispozici nic, co by umožňovalo definovat délku vektorů a velikost jejich úhlů. V této kapitole si ukážeme, co je třeba přidat k definici vektorového prostoru, abychom tyto pojmy mohli definovat. Poznamenejme bez dalšího vysvětlení, že vektorový prostor se skalárním součinem je již pojem velmi blízký Eukleidovu prostoru, ale není s ním totožný. V Eukleidově prostoru (prostor kolem nás) totiž není žádný význačný počátek, který je nutně v každém vektorovém prostoru. Jak zapomenout na počátek vektorového prostoru se skalárním součinem a dostat tak Eukleidův prostor je možné najít v definici tzv. affiního prostoru (kterou si říkat nebudeme).

Definice 11 *Řekneme, že na vektorovém prostoru V je dán skalární součin, pokud je zadáno zobrazení $b : V \times V \to \mathbb{R}(resp.\mathbb{C})$, s následujícími vlastnostmi:*

1. $b(x + y, z) = b(x, z) + b(y, z)$,
2. $b(\alpha x, y) = \alpha\, b(x, y)$,
3. $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$,
4. $\forall x \neq 0, b(x, x) > 0, b(0, 0) = 0$.

Poznámka: Pro reálné vektorové prostory je komplexní sdružení identické zobrazení, takže první vlastnost říká, že zobrazení b je symetrické (nemění svou hodnotu při záměně argumentů).

Vždy platí $b(x, y+z) = b(x, y)+b(x, z)$. Pro komplexní vektorové prostory platí $b(x, \alpha y) = \overline{\alpha} b(x, y)$.

Příklad:

1. Je-li $V = \mathbb{R}^n$, definujeme pro $x, y \in V$ skalární součin předpisem

   $$b(x, y) = \sum_i x_i y_i = x^t \cdot y.$$

   Obecněji, je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $n \times n$, pak definujeme pro $x, y \in V$ skalární součin $b = b_A$ předpisem

   $$b(x, y) = \sum_i a_{ij} x_i y_i = x^t \cdot A \cdot y.$$

   Aby zobrazení $b = b_A$ mělo všechny vlastnosti skalárního součinu, je třeba předpokládat, že matice A je symetrická ($A = A^t$) a pro všechny $x \in V, x \neq 0$ platí $b(x, x) = \sum_i a_{ij} x_i x_i = x^t \cdot A \cdot x > 0$. Matice, které mají tuto poslední vlastnost se nazývají positivně definitní.

2. Je-li $V = \mathbb{C}^n$, pak definujeme

   $$b(x, y) = \sum x_i \overline{y_i} = x^t \cdot \overline{y}.$$

   Obecněji, je-li $A = (a_{ij})$ komplexní matice typu $n \times n$, pak definujeme pro $x, y \in V$ skalární součin $b = b_A$ předpisem

   $$b(x, y) = \sum_i a_{ij} x_i \overline{y_i} = x^t \cdot A \cdot \overline{y}.$$

Aby zobrazení $b = b_A$ mělo všechny vlastnosti skalárního součinu, je třeba předpokládat, že pro matici A platí $A = \overline{A}^t$) (takové matice se nazývají Hermiteovské) a pro všechny $x \in V, x \neq 0$ platí $b(x,x) = \sum_i a_{ij} x_i x_i = x^t \cdot A \cdot x > 0$ (takové matice se nazývají positivně definitní).

3. Je-li V prostor všech polynomů (reálných nebo komplexních0 $a, b \in \mathbb{R}$, pak lze definovat pro $f, g \in V$

$$b(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Všechny vlastnosti požadované pro skalární součin platí.

V této definici lze použít při integraci i tzv. váhu, např. lze definovat

$$b(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx.$$

Při restrikci na reálný vektorový prostor reálných polynomů lze pruh v definici vynechat.

Definice 12 *Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V je dán skalární součin b. Pak normu $||x||$ vektoru $x \in V$ definujeme pomocí vztahu*

$$||x| := \sqrt{b(x,x)}$$

a úhel $\varphi \in< 0, \pi >$ dvou vektorů je definován vzorcem

$$\cos\varphi = \frac{b(x,y)}{||x||\,||y||}.$$

Lemma 12 Cauchy
Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem b. Pak pro libovolné dva vektory $x, y \in V$ platí

$$|b(x,y)| \leq ||x||\,||y||.$$

Důkaz:

1. Uvažujme nejdříve případ reálného vektorového prostoru. Definujme si polynom $p(t)$ jedné proměnné předpisem

$$p(t) = b(x - ty, x - ty) = b(x,x) - t[b(y,x) + b(x,y)] + t^2 b(y,y).$$

Pro všechny vektory $x, y \in V$ platí $p(t) \geq 0$ a zřejmě $p(0) > 0$. Z toho plyne, že diskriminant D tohoto kvadratického polynomu je nekladný. Tedy

$$D = [2b(x,y)]^2 - 4b(y,y)b(x,x)] \leq 0,$$

a odmocněním dostaneme požadovanou nerovnost.

2. Pro případ komplexního vektorového prostoru je třeba výše uvedený postup modifikovat. Pro dané vektory $x, y \in V$ dostaneme stejným postupem nerovnost

$$D = [b(y,x) + b(x,y)]^2 - 4b(y,y)b(x,x)] \leq 0,$$

kde $b(y,x) + b(x,y) = 2\Re b(x,y)$.

Určitě existuje komplexní číslo $\omega =\in \mathbb{C}, |\omega| = 1$, s vlastností $\omega b(x,y) \geq 0$.

Uvažujme vektor $x' = \omega x$. Pro dvojici x', y také platí výše uvedená nerovnost

$$D = [2\Re b(x',y)]^2 - 4b(y,y)b(x',x')] \leq 0,$$

t.j.

$$|\Re b(x',y) \leq ||x'||\,||y||; \ |\omega b(x,y)| = |\Re(\omega b(x,y)) \leq |\omega|\,||x||\,||y.||$$

Z toho již okamžitě plyne tvrzení věty.

Lemma 13 Minkowski
Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem b. Pak pro libovolné dva vektory $x, y \in V$ platí

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Důkaz: V důkazu Cauchyovy nerovnosti jsme ukázali, že pro libovolné vektory $x, y \in V$ platí nerovnost

$$|b(y,x) + b(x,y)| \leq ||x||\,||y||$$

Pak stačí si uvědomit, že

$$(||x+y||)^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + (b(y,x) + b(x,y)) \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\,||y|| = (||x|| + ||y||)^2.$$

□

Věta 5 G-S ortogonalizace

Nechť $e_1, \dots, e_n$ *je base vektorového prostoru se skalárním součinem* (V, b). *Pak existuje ortogonální base* $f_1, \dots, f_n$ *prostoru* V, *pro kterou platí*

$$L(e_1, \dots, e_i) = L(f_1, \dots, f_i);\ i = 1, \dots, n.$$

Důkaz:

Existuje explicitní vzorec (indukcí)

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} b(e_{k+1}, f_i) f_i.$$

□

Poznámka:

Je lehké změnit ortogonální basi $f_1, \dots, f_n$ na ortonormální basi $f'_1, \dots, f'_n$ vydělením:

$$f'_i := f_i/||f_i||.$$

Definice 13 *Je-li* P *podmnožina* V, *pak ortogonální doplněk k* P *ve* V *nazýváme množinu* $P^{\perp}$ *všech vektorů* $v \in V$, *pro které platí* $b(p, v) = 0$ *pro všechny* $p = inP$.

Řekneme, že dva podprostory U, V *vektorového prostoru* W *jsou ortogonální, pokud pro každé dva vektory* $u \in U$, $v \in V$, *platí* $b(u, v) = 0$. *Řekneme, že podprostory* $V_i \subset V, i = 1, \dots, k$ *jsou navzájem ortogonální, pokud každé dva různé podprostory z tohoto systému jsou ortogonální.*

Věta 6 *Jsou-li* W, w' *dva ortogonální podprostory vektorového prostoru* V *konečné dimenze,*

pro které platí $dimW + dimW' = dimV$, *pak*

(a) *Pro každý vektor* $v \in V$ *existují jednoznačně určené vektory* $w \in W, w' \in W'$ *takové, že* $v = w + w'$.

(b) $W' = W^{\perp}$,

(c) $||v||^2 = ||w||^2 + ||w'||^2$. *(Pythagorova věta).*

Důkaz:

(a) Nejdříve si ukážeme existenci příslušného rozkladu. Stačí najít ortogonální basi $e_1 \dots, e_j$ prostoru W a doplnit ji na basi $e_1 \dots, e_k$ prostoru V. Pak zřejmě $e_{j+1}, \dots, e_k$ je ortogonální base W'. Pro libovolný vektor $v \in V$ pak lze najít jeho rozklad $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ a definovat $w = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i e_i$ a $w' = \sum_{i=j+1}^{k} \alpha_i e_i$.

Jednoznačnost rozkladu se ukáže následujícím způsobem. Pokud by existovali dva rozklady $v = w + w' = u + u'$, $u, w \in W$, $u', w' \in W'$, pak $0 = (u - w) + (u' - w')$ a tedy $u - w = w' - u' \in W \cap W'$. Ale $W \cap W' = \{0\}$, protože každý vektor v tomto průniku je na sebe kolmý a tedy nulový.

(b) Podle definice zřejmě $W' \subset W^{\perp}$. Opačná inkluze se dá odůvodnit takto: Je=li $u \in W^{\perp}$, pak lze napsat u jako součet $u = w + w', w \in W, w' \in W'$. Pak ale $0 = (u, w) = (w, w) + (w', w)$. Proto6e $(w'w) = 0$, dostaneme $(w, w) = 0$ a tedy $u = w' \in W'$.

(c) Pokud $u = w + w'$ a $(w, w') = 0$, pak

$$||u||^2 = (w + w', w + w') = ||w||^2 + ||w'||^2.$$

Poznámka: Tuto větu lze snadno zobecnit na konečný součet navzájem ortogonálních prostorů (zkuste!).

Definice 14 *Řekneme, že dva vektorové prostory se skalárním součinem (V, b) a (V', b') jsou izomorfní, pokud existuje isomorfismus $\phi : V \to W$ vektorových prostorů, pro který platí*

$$b'(\phi(x), \phi(y)) = b(x, y);\ x, y \in V.$$

Věta 7 *Každé dva vektorové prostory se skalárním součinem, které mají stejnou (konečnou) dimensi, jsou isomorfní.*

Důkaz: Je-li V vektorový prostor dimense n, pak volba libovolné ortonormální base indukuje isomorfismus V s $\mathbb{R}^n$. To plyne přímo z obecné Pythagorovy věty. Totéž je pravda v komplexním případě.

Oba prostory jsou isomorfní tedy s $\mathbb{R}^n$, resp. s $\mathbb{C}^n$. $\square$

3 Lineární zobrazení

Definice 15 *Řekneme, že zobrazení f z V do W je lineární, pokud platí:*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V$;

(ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in V$.

Množinu $N(\varphi) := \{v \in V | \varphi(v) = 0\}$ *nazveme jádrem zobrazení* f. *Obor hodnot zobrazení* f *označíme* $R(\varphi)$. *Tedy* $R(\varphi) = \{y \in W | \text{existuje } x \in V, f(\varphi) = y\}$.

Příklad:

(a) Je-li $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ a A matice typu $m \times n$, pak můžeme definovat zobrazení φ_A y V do W předpisem

$$\varphi_A(x) := A \cdot x,$$

kde $\cdot$ znamená maticové násobení a $x \in V = \mathbb{R}^n$ a $y \in W = \mathbb{R}^m$ chápeme jako sloupcové vektory. Použitím definice maticového násobení se lze snadno přesvědčit, že zobrazení φ_A je lineární.

(b) Předpokládejme, že W, W' jsou dva ortogonální podprostory vektorového prostoru V konečné dimenze,

pro které platí $dimW + dimW' = dimV$, pak

lze definovat ortogonální projekci $\pi : V \to W$ takto: Pro každý vektor $v \in V$ existuje jednoznačný rozklad $v = w + w'$, $w \in W$, $w' \in W'$. pak definujeme $\pi(v) := w$. Ukažte, že ortogonální projekce π je lineární zobrazení.

Věta 8 *Nechť* f *je lineární zobrazení vektorového prostoru* V *do vektorového prostoru* w. *Pak:*

(1) $N(\varphi)$ *a* $R(\varphi)$ *jsou vektorové podprostory* V, *resp.* W.

(2) *dim* $N(\varphi)$ *+dim* $R(\varphi)$*= dim* V.

Důkaz:

(1) Jsou-li $v, v' \in N(\varphi)$, pak $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$ a tedy i $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$.

Podobně, je-li $\varphi(x) = 0, \alpha \in \mathbb{R}$, pak $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = 0$.

Obdobně se ukáže, že i obraz $R(\varphi)$ je vektorový prostor.

(2) Zvolme si bazi $v_1, \dots, v_k$ libovolně. Tedy $\dim N(f) = k$. Tuto bazi je možno doplnit na bazi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m$ prostoru V, tedy $\dim V = m$. Stačí nyní dokázat, že množina $f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)$ je bazí prostoru $R(\varphi)$. Chceme si tedy rozmyslet, že tato množina generuje celý prostor $\varphi(V)$ a že je tyto vektory jsou lineárně nezávislé.

(i) Vezměme si libovolný vektor $y \in R(\varphi)$. Tedy existuje vektor $x \in V$ takový, že $x = \sum_i \xi_i v_i$. Pak ale

$$y = \varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{m} \xi_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi(v_i) = \sum_{i=k+1}^{m} \xi_i \varphi(v_i),$$

protože $\varphi(v_1) = \ldots = \varphi(v_k) = 0$.

(ii) Ověřme nyní, že množina vektorů $f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)$ je lineárně nezávislá. Předpokládejme, že existují čísla $\beta_{k+1}, \dots, \beta_m$ taková, že

$$\sum_{i=k+1}^{m} \beta_i f(v_i) = f(\sum_{i=k+1}^{m} \beta_i f(v_i) = 0.$$

Pak ale $\sum_{i=k+1}^{m} \beta_i v_i \in N(\varphi)$ a existují tedy čísla $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ taková, že

$$\sum_{i=k+1}^{m} \beta_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i = 0.$$

Protože vektory $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně nezávislé, jsou všechny koeficienty v této lineární kombinaci rovny nule.

Lemma 14 *i. f je prosté právě když $N(f) = \{0\}$;*

ii. f zobrazuje lineárně závislé vektory na lineárně závislé vektory; je-li navíc f prosté, pak také zobrazuje lineárně nezávislé vektory na lineárně nezávislé vektory.

iii. je-li $\dim V = \dim W$, pak jsou ekvivalentní tvrzení:

(i) f je isomorfizmus V na W;

(ii) f *je prosté;*

(iii) f *je zobrazení* V *na* W.

Důkaz: Toto jsou již jen jednoduché důsledky předchozí věty.

(1) Je-li φ pak vzor každého bodu, tedy i vektoru 0, je jednobodový a je to tedy nutně vektor $\{0\}$.
Naopak, je-li $N(\varphi) = \{0\}$ a jsou-li $v, v' \in V$ dva vektory, pro které $\varphi(v) = \varphi(v')$, pak $\varphi(v - v') = 0$, a tedy i $v - v' = 0$. Zobrazení φ je tedy prosté.

(2) Pokud je $v_1, \ldots, v_k$ skupina lineárně závislých vektorů, pak existuje netriviální lineární kombinace $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$, která se rovná nule. Pak ale také $\sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(v_i) = 0$. Skupina vektorů $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ je tedy také lineárně závislá.
Je-li φ navíc prosté, pak inversní zobrazení φ^{-1} zobrazuje $R(\varphi)$ na V a tak tedy podle právě dokázaného vzor lineárně závislé skupiny vektorů v $R(\varphi)$ je opět lineárně závislá. Tedy obraz lineárně nezávislé skupiny při zobrazení φ je lineárně nezávislá skupina vektorů.

(3) Zobrazení φ je izomorfismus právě když $\dim N(\varphi) = 0$ a $\dim R(\varphi) = \dim W$. Díky rovnosti (2) ve Větě 7 stačí zřejmě jen jedna z těchto dvou rovností.

Věta 9 *Nechť* $f : V \to W$ *je lineární zobrazení. Pak:*

i. Množina všech řešení homogenní lineární rovnice $\varphi(v) = 0$ *je lineární podprostor* V*; je-li* $v_1, \ldots, v_k$ *jeho base, pak množina všech řešení homogenní rovnice je právě množina všech vektorů tvaru* $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i; \alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

ii. Je-li v_0 *pevné řešení nehomogenní rovnice* $\varphi(v) = w$ *(tzv. partikulární řešení rovnice s pravou stranou), pak množina všech řešení rovnice s pravou stranou má tvar*

$$\{v \in V | v = v_1 + v_0, \varphi(v_1) = 0\}.$$

Důkaz: První část tvrzení je okamžitým důsledkem Věty 7. Druhá část plyne z toho, že pro každé další řešení v rovnice $\varphi(v) = w$ platí $\varphi(v - v_0) = 0$.

Poznámka: Věta 9 je opravdu velmi jednoduchá, ale má zásadní význam. Setkáme se s ní ihned v paragrafu o řešení soustav lineárních rovnic, později v analýze (nebo už teď ve fyzice) pro řešení lineárních diferenciálních rovnic a v mnoha dalších variantách v budoucnosti.

3.1 Hodnost matice, Gaussův algoritmus.

Definice 16 *Je-li A matice typu $m \times n$, pak její hodnost $h(A)$ definujeme jako dimenzi lineárního obalu jejich řádků.*
Elementární úprava matice A je jedna z následujících úprav:

(i) k danému řádku přičteme násobek jiného řádku;

(ii) vyměníme dva řádky matice;

(iii) vynásobíme řádek nenulovým číslem.

Lemma 15 *(1) Je-li A typu $m \times n$, pak $h(A) \leq \min(m, n)$.*

(2) Elementární úpravy matice nemění hodnost matice.

(3) Pokud má matice A typu $m \times n$ následující vlastnost (*) (nakreslete si!):
existuje rostoucí posloupnost indexů $i_1, \ldots, i_k$ taková, že:
$a_{1i_1} \neq 0$ a $a_{lj} = 0$ pro všechny $l = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, i_1 - 1$;
$a_{2i_2} \neq 0$ a $a_{lj} = 0$ pro všechny $l = 2, \ldots, m; j = i_1, \ldots, i_2 - 1$;
atd.
$a_{ki_k} \neq 0$ a $a_{lj} = 0$ pro všechny $l = k, \ldots, m; j = i_{k-1}, \ldots, i_k - 1$;
$a_{lj} = 0$ pro všechny $l = k+1, \ldots, m; j = i_k, \ldots, n$;
pak matice A má hodnost rovnou k.

(4) Každou matici A lze převést elementárními úpravami na matici, která má vlastnost (*). Existuje explicitní algoritmus jak to udělat, tzv. Gaussova eliminační metoda (viz důkaz).

Důkaz:

(1) Řádky matice A patří do $\mathbb{R}^n$, tedy jejich lineární obal je podprostor $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi menší nebo rovnu než n. Na druhou stranu je počet řádků roven m, tedy prostor, který generují musí mít dimenzi nejvýše m.

(2) Je pravda dokonce něco víc: elementární úpravy nemění lineární obal $L(r_1, \ldots, r_m)$ (a tím spíš ani dimensi tohoto lineárního obalu). Je triviální, že elementární úpravy (ii) a (iii)

příslušný lineární obal nemění. Úprava (i) stojí za odůvodnění. Nechť např. (pro ukázku, stejně se postupuje v ostatních případech) k prvnímu řádku přičteme násobek druhého. Dostaneme tedy nové řádky $r'_1, \ldots, r'_m$, pro které

$$r'_1 = r_1 + \alpha r_2, r'_2 = r_2, \ldots, r'_m = r_m.$$

Tedy $L(r'_1, \ldots, r'_m) \subset L(r_1, \ldots, r_m)$. Naopak lze snadno vypočítat r_i pomocí r'_j :

$$r_1 = r'_1 - \alpha r'_2, r_2 = r'_2, \ldots, r_m = r'_m,$$

a tedy $L(r_1, \ldots, r_m) \subset L(r'_1, \ldots, r'_m)$. Oba lineární obaly jsou tedy stejné.

(3) Máme ukázat, že matice $A = (a_{ij})$ s vlastností (*) má hodnost rovnou k. Pro to stačí ověřit, že řádky $r_1, \ldots, r_k$ matice A jsou lineárně nezávislé. Předpokádejme tedy, že nějaká lineární kombinace $\sum_i \alpha_i r_i$ je rovna nulovému vektoru. Tedy specielně pro složky příslušných řádků s indexem i_1 platí $\sum_{i=1}^k \alpha_i a_{ii_1} = 0$. Z vlastnosti (*) plyne, že všechny sčítance v této sumě jsou nula kromě prvního. Protože $a_{1i_1} \neq 0$, je tedy $\alpha_1 = 0$. Stejně postupujeme pro složky s indexem i_2, Součet zde je možné brát jen od 2 do k, protože už víme, že $\alpha_1 = 0$. Stejnou úvahou jako předtím zjistíme, že $\alpha_2 = 0$. Indukcí takto ukážeme, že všechny koeficienty $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$ jsou nulové. Tedy řádky $r_1, \ldots, r_k$ jsou lineárně nezávislé.

(4) Popišme nyní tzv. Gaussovu eliminační metodu, která umožňuje převést pomocí elementárních úprav libovolnou matici A na matici $\tilde{A}$, která má vlastnost (*).
Mějme dánu matici A typu $m \times n$. Postupně s maticí A provádím níže popsané elementární úpravy, upravenou matici budu pro pohodlí znovu značit po každém kroku symbolem A.

Krok 1. Procházím sloupce matice A postupně od prvního dál a najdu první nenulový sloupec, jeho index označím i_1.

Krok 2. Pokud je $a_{1i_1} \neq 0$, neudělám nic, v opačném případě vyměním první řádek matice za jiný řádek matice A, který má i_1 komponentu nenulovou (takový řádek musí existovat, protože celý i_1-ní sloupec není nulový). V upravené matici už platí $a_{1i_1} \neq 0$.

Krok 3. První řádek matice vydělím číslem a_{1i_1}.

Krok 4. Postupně odečítám vhodné násobky prvního řádku od druhého, třetího, až k-tého řádku tak, aby v upravené matici platilo $a_{2i_1} = \ldots = a_{ki_1} = 0$.

Tím je dokončena první sada úprav, v dalších úpravách již nepoužívám první řádek a uvažuji jenom upravenou matici A bez prvního řádku. To je matice A' typu $(m-1) \times n$. Pro tuto matici A' provedu znovu kroky 1 - 4 s tím, že index prvního nenulového sloupce označím i_2. Zřejmě platí $i_2 > i_1$.

Po dokončení této druhé sady úprav přestanu uvažovat první dva řádky upravené matice a pro zbylou matici A'' typu $(m-2) \times n$ pokračuji opět analogickou třetí sadou úprav.

Je zřejmé, že po konečném počtu takovýchto úprav bude nakonec výsledkem matice, která má vlastnost (*).

□

Příklad: Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Chceme najít její hodnost výše popsanou Gaussovou eliminační metodou. První nenulový sloupec je druhý (tedy zde $i_1 = 2$). Protože $a_{12} = 1$, je tento prvek nenulový a není třeba přehazovat řádky. Odečtením prvního řádku od druhého a dvojnásobku prvního řádku od třetího řádku dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Tím je dokončena první sada úprav a pro další kroky budeme uvažovat již jen matici typu 3×6, která vznikne vynecháním prvního řádku. Tato matice má první tři sloupce nulové a čtvrtý nenulový, tedy $i_2 = 4$. Ale protože v prvém řádku této nové matice (t.j. v druhém sloupci matice původní) je na čtvrtém místě nula, musím prohodit řádky. Například vyměníme první a třetí řádek nové 3×6 matice a dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Odečtením druhého řádku od třetího dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Tím je dokončena druhá sada úprav a stačí uvažovat jen matici, skládající se z posledních dvou řádek matice A. První čtyři sloupce jsou triviální, tedy, $i_3 = 5$.

Odečtením dvojnásobku třetího řádku od čtvrtého (drobné zjednodušení popsané procedury, třetí řádek není nutné dělit dvěma) dostaneme konečný tvar matice, splňující podmínku (*):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice A je tedy rovna 3.

Poznámka: Velmi specielní a důležitý případ použití Gaussovy eliminační matice je případ čtvercové matice A typu $n \times n$, která má hodnost n. To zřejmě může nastat pouze tehdy, když indexy nenulových sloupců v proceduře jsou postupně $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$. Výsledná matice s vlastností (*) je tedy horní trojúhelníková matice, která má na diagonále samé nenulové prvky (a pod diagonálou samé nuly). Elementárními úpravami (dělením řádků příslušnými čísly) lze dosáhnout toho, aby na diagonále byly samé jedničky.

3.2 Soustavy lineárních rovnic

Soustavou lineárních rovnic myslíme soustavu rovnic tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Koeficienty soustavy jsou dány maticí $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ a vektorem (sloupcem) pravých stran $b = (b_1, \ldots, b_m)^t$. Matici A budeme nazývat maticí soustavy, matici $A' = (A, b)$, která vznikne přidáním sloupce pravých stran k matici A budeme nazývat rozšířenou maticí soustavy. Koeficinty i pravé strany jsou zpravidla reálná čísla, ale vše dále uvedené platí i pro případ, že koeficienty soustavy a pravé strany jsou čísla komplexní.

Řešením soustavy se nazývá libovolná n-tice čísel $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pro kterou jsou všechny rovnice soustavy splněny. V případě reálných koeficientů a reálných pravých stran hledáme řešení zpravidla mezi reálnými čísly, v případě komplexních koeficientů, resp. komplexních pravých stran se řešení hledají jako n-tice komplexních čísel.

Dvě soustavy rovnic dané rozšířenou maticí (A, b), resp. (C, d) nazveme ekvivalentními, pokud mají stejnou množinu všech řešení. Cílem řešení soustavy lineárních rovnic je najít množinu všech řešení dané soustavy. Soustava daná rozšířenou maticí (A, b) se nazývá nehomogenní soustava, jí odpovídající homogenní soustava je dána rozšířenou maticí $(A, 0)$, ve které je sloupec pravých stran nahrazen nulovým vektorem.

Zobrazení, které každé n-tici $x \in \mathbb{R}^n$ přiřadí m-tici $y = A \cdot x \in \mathbb{R}^m$ (zde tečka znamená násobení matic) je zřejmě lineární zobrazení a tak všechny fakta již dříve rozebraná pro obecné lineární rovnice (Věta 7, Věta 8) platí.

Množina všech řešení dané soustavy lineárních rovnic může mít následující tvary:

1. Soustava nemá řešení (množina řešení je prázdná množina).

2. Soustava má právě jedno řešení.

3. Soustava má nekonečně mnoho řešení, každé lze napsat jako součet jednoho pevného partikulárního řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení příslušné homogenní rovnice. Prostor všech řešení homogenní rovnice je (viz Věta 7) vektorový podprostor v $\mathbb{R}^n$. Pro popis všech řešení homogenní rovnice tedy stačí najít bazi tohoto podprostoru, obecné řešení homogenní rovnice je pak (libovolnou) lineární kombinací této baze. Je-li k dimenze tohoto podprostoru, pak obecné řešení původní soustavy závisí na k libovolných parametrech (na koeficientech v rozkladu obecného řešení homogenní rovnice do vybrané baze řešení).

Existuje algoritmus (postup), jak najít množinu všech řešení dané soustavy lineárních rovnic, založený na Gaussově eliminační metodě. Při tom se zároveň zjistí, který ze tří výše uvedených případů nastane. Nutnou a postačující podmínku pro první případ (t.j. soustava nemá žádné řešení) dává následující věta.

Věta 10 (Frobeniova)
Soustava lineárních rovnic daná rozšířenou maticí (A, b) má řešení právě když platí

$$\mathrm{hodn} A = \mathrm{hodn}(A, b).$$

Před důkazem Frobeniovy věty si rozmyslíme následující drobnější tvrzení.

Lemma 16 *Pokud rozšířenou matici soustavy (C, d) lze získat z rozšířené matice soustavy (A, b) elementárními úpravami, pak jsou příslušné soustavy ekvivalentní (tj. mají stejné množiny řešení).*

Důkaz: Je zřejmé, že násobení jedné rovnice soustavy nenulovým číslem je úprava soustavy, která nemění množinu řešení; totéž je pravda, zaměníme-li navzájem dvě rovnice soustavy. Takže stačí si rozmyslet, co se stane, přičteme-li např. α-násobek druhé rovnice (2) k rovnici první. Tím jsme první rovnici (označme ji (1)) zaměnili jinou rovnicí (označme ji (1')), ostatní rovnice se nemění. Je-li vektor x řešení původní soustavy, pak splňuje obě první rovnice (1) a (2) a tedy i novou rovnici (1'). Naopak, je-li x řešení nové soustavy, řeší rovnici (1') i rovnici (2')=(2). Rovnici (1) lze zřejmě dostat odečtením α-násobku rovnice (2) od rovnice (1'). Tedy každé řešení nové soustavy je zároveň řešením soustavy původní. □

Důkaz: (Frobeniovy věty) Předpokládejme, že matice soustavy A je typu $m\times n$ a rozšířená matice (A,b) je typu $(m+1)\times n$. Gaussův algoritmus umožňuje převést rozšířenou matici soustavy (A,b) elementárními úpravami na matici (B,d), která splňuje podmínku (*). Odpovídající soustava rovnic je ekvivalentní, má stejnou množinu řešení. Je zřejmé, že zároveň tytéž úpravy převedou matici A na matici B a že matice B také splňuje podmínku (*).

Označme hodnost matice (B,d) (a tedy i hodnost matice (A,b)) číslem k. Pro matici (B,d) mohou nastat dva případy:

1. Poslední nenulový (k-tý) řádek má příslušný první nenulový prvek v posledním sloupci, tj. $b_{kj}=0, j=1,\ldots,m; d_k\neq 0$. Pak tento k-tý řádek odpovídá rovnici

$$0\cdot x_1+\ldots+0\cdot x_n=d_k\neq 0$$

a tato rovnice zřejmě nemá žádné řešení. Tedy ani původní soustava rovnic nemá žádné řešení.

V tomto případě pak zřejmě platí hodn A=hodn $B=k-1$, hodn (A,b)= hodn $(B,d)=k$.

2. Poslední nenulový (k-tý) řádek má příslušný první nenulový prvek dříve než v posledním sloupci. Tj. existuje číslo $i_k, 1\leq i_k\leq n$ tak, že $b_{kj}=0, j=1,\ldots,i_k-1$ a $b_{ki_k}\neq 0$. V tomto případě zřejmě

hodn A=hodn B=hodn (A,b)= hodn $(B,d)=k$.

Nyní je snadné ukázat, že soustava určená rozšířenou maticí (B,d) je řešitelná a najít všechna její řešení. Tato ekvivalentní soustava má právě k rovnic (řádky obsahující samé nuly je možné ze soustavy beze změny množiny řešení vynechat). Postupně je možné řešit odspodu tuto soustavu k rovnic vypočtením vhodné proměnné a dosazením do rovnic předchozích. Poslední, k-tá, rovnice umožňuje zvolit libovolně proměnné $x_{i_k+1},\ldots,x_n$ a vypočítat proměnnou x_{i_k} :

$$x_{i_k}=1/b_{ki_k}[d_k-b_{k,i_k+1}x_{i_k+1}-\ldots-b_{kn}x_n].$$

Stejným způsobem vypočítáme z $k-1$-ní rovnice proměnnou $x_{i_{k-1}}$ pomocí proměnných po ní následujících a tak postupujeme až k první rovnici, ze které vypočítáme x_{i_1} pomocí následujících proměnných. Proměnné $x_1, \dots, x_{i_1-1}$ lze zřejmě zvolit libovolně. Celkem tedy dostaneme řešení, které záleží na volbě $n-k$ libovolných parametrů (všechny proměnné kromě $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$).

Pokud $n = k$, má soustava právě jedno řešení (a nastává tedy případ 2). Pokud $k < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení, závisejících na $n-k$ parametrech a nastává tedy případ 3. V tomto případě je tedy zřejmě dimenze podprostoru řešení příslušné homogenní rovnice rovna $n-k$. □

Příklad: Ukažme si nyní, jak je možné používat Gaussův algoritmus na řešení rovnic na jednoduchém příkladu.

Nechť je rozšířená matice (A, b) dána maticí

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Pak jsme v předchozím případě spočítali, že elementárními úpravami lze tuto matici převést na matici, splňující podmínku (*):

$$(C,d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední rovnice je triviální a je možné ji vynechat. Z třetí rovnice $2x_5 = 1$ vypočítáme $x_5 = 1/2$. Z druhé rovnice dostaneme $x_4 = 7 - 2x_5 = 7 - 1 = 6$. Z první rovnice pak vypočítáme

$$x_2 = 5 - 2x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 = 11 - 2x_3.$$

Celkem tedy má obecné řešení soustavy tvar $(x_1, 11 - 2x_3, x_3, 6, 1/2)$ a závisí na dvou libovolných parametrech x_1 a x_3, jak jsme očekávali $(n = 5, k = 3)$.

Obecné řešení lze také napsat jako součet jednoho partikulárního řešení rovnice s pravou stranou a obecného řešené příslušné homogenní rovnice. Nejjednodušší volba partikulárního řešení odpovídá volbě obou parametrů rovných nule:

$$x = (0, 11, 0, 6, 1/2) + x_1(1, 0, 0, 0, 0) + x_3(0, -2, 1, 0, 0).$$

Jedna z bazí podprostoru řešení příslušné homogenní rovnice je tedy dvojice vektorů $(1, 0, 0, 0, 0)$ a $(0, -2, 1, 0, 0)$. Parametry x_1, x_3 jsou koeficienty v rozkladu řešení homogenní rovnice do této baze.

3.3 Hodnost matice znovu

Poznámka: Jak jsme již viděli v paragrafu o lineárních rovnicích, každé matici A typu $m \times n$ je možno přiřadit lineární zobrazení - označme ho φ_A - z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ předpisem

$$y = \varphi_A(x) = A \cdot x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,$$

kde tečka znamená maticové násobení a vektory x, y se berou jako sloupcové vektory.

Napišme matici A ve tvaru $(s_1, \ldots, s_n)$, kde symboly $s_i, i = 1, \ldots, n$ označují sloupce matice A. Obor hodnot lineárního zobrazení φ_A, který jsme značili symbolem $R(\varphi_A)$, je zřejmě podprostor $\mathbb{R}^m$, generovaný vektory $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^m$.

Zcela analogicky je možno postupovat pro matici A^t, která je typu $n \times m$. V tomto případě je obraz lineárního odpovídajícího zobrazení φ_{A^t} podprostor v $\mathbb{R}^n$, generovaný sloupci matice A^t, tj. řádky matice A. Dospěli jsme tedy k jisté interpretaci hodnosti matice A jako dimensi obrazu lineárního zobrazení, které odpovídá transponované matici A^t. Z této geometrické interpretace hodnosti je možné snadno odvodit následující užitečné tvrzení:

Důsledek.

Jsou-li A a B dvě matice, které je možno vynásobit, pak $h(AB) \leq h(B)$.

Odůvodnění je prosté. Víme, že $h(AB) = \dim R(\varphi_{(AB)^t})$ a $h(B) = \dim R(\varphi_{B^t})$.

Ale $(AB)^t \cdot x = B^t \cdot A^t \cdot x$, a tedy $\varphi_{(AB)^t}$ je složení dvou zobrazení: nejdříve φ_{A^t} a pak φ_{B^t}. Z toho ihned plyne, že obraz zobrazení $\varphi_{(AB)^t}$ musí být částí obrazu zobrazení φ_{B^t}. Z toho ihned plyne tvrzení důsledku.

Ve skutečnosti je možná ještě jiná geometrická interpretace hodnosti matice. Hodnost matice A je zároveň rovna dimensi obrazu lineárního zobrazení φ_A z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Podle toho, co jsme řekli výše, je to totéž jako říct, že hodnost matice A je dimense lineárního obalu jejich sloupců. Toto tvrzení je důsledkem základního a na první pohled překvapujícího tvrzení, které je obsahem následující důležité věty.

Věta 11 $h(A) = h(A^t)$.

Na první pohled není jasné, proč by taková věc měla platit. Počet řádků v obecné matici je jiný než počet sloupců, patří do jiných prostorů a není zřejmý důvod, proč by dimenze jejich lineárních obalů měla být stejná. Odůvodnit proč to přece jen platí není triviální a vysvětlení rozdělíme do několika menších kroků.

Lemma 17 *Nechť A je matice typu $m \times n$ a h(A)=k. Pak existuje k lineárně nezávislých řádků matice A a ostatní řádky jsou jejich lineární kombinací.*

Důkaz: Označme jako obvykle symboly $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}^n$ řádky matice A. Podle definice hodnost $h(A)$ je rovna dimenzi podprostoru $L(r_1, \ldots, r_m)$, kterou jsme označili k. Pokud $k = m$, není co dokazovat. Je-li $k < m$, pak řádky nejsou lineárně nezávislé a jeden z nich je tedy lineární kombinací ostatních. Jeho vynecháním se lineární obal nezmění. Pokud $k = m - 1$, jsme hotovi, zbylých $m - 1$ řádků je lineárně nezávislých. Pokud ne, je opět jeden lineární kombinací ostatní a můžeme jej vynechat. Tak postupujeme, dokud nezbyde k lineárně nezávislých řádků, které generují tentýž prostor jako všechny řádky. Z toho pak plyne, že všechny vynechané řádky jsou lineární kombinací zbylých k lineárně nezávislých řádků. □

Lemma 18 *Má-li matice A lineárně nezávislé sloupce a lineárně nezávislé řádky, pak je čtvercová.*

Důkaz: Nechť má matice A typ $k \times l$. Lineární nezávislost jejich řádků říká, že její hodnost je k a protože $h(A) \leq min(k, l)$, je nutně $k \leq l$.

Přesně stejná úvaha pro matici transponovanou A^t vede k nerovnosti $h(A^t) = l \leq k$. Tím je důkaz hotov.

$\square$

Lemma 19 *Předpokládejme, že matice A je typu $k \times n$ a má lineárně nezávislé řádky (tedy její hodnost je rovna k). Vynecháme-li z matice A některý sloupec, který je lineární kombinací ostatních sloupců, pak výsledná matice A' typu $k \times (n-1)$ má tutéž hodnost jako matice A.*

Důkaz: Pro pohodlí označení můžeme předpokládat, že poslední sloupec je lineární kombinací sloupců předchozích, tj. že $s_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j s_j, \alpha_j \in \mathbb{R}, s_j \in \mathbb{R}^k$. To je totéž jako tvrzení, že pro všechna $i = 1, \ldots, k$ platí $a_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_{ij}$.

Abychom dokázali, že hodnost matice A' je rovna hodnosti A, je třeba ukázat, že také řádky matice A' jsou lineárně nezávislé. Rozdělme řádky r_i na prvních $n-1$ složek (označme je symbolem $r'_i = (a_{i1}, \ldots, a_{i,n-1})$) a poslední složku a_{in}. Tedy $r_i = (r'_i, a_{in}), r'_i \in \mathbb{R}^{n-1}, a_{in} \in \mathbb{R}$.

Matice A' má vektory $r'_i, i = 1, \ldots, k$ jako řádky. Předpokládejme, že by existovali čísla $\beta_i, i = 1, \ldots, k$ tak, že $\sum_{i=1}^k \beta_i r'_i = 0$. To je totéž jako tvrzení, že pro všechna $j = 1, \ldots, n-1$ platí $\sum_{i=1}^k \beta_i a_{ij} = 0$. Ale protože

$$\sum_{i=1}^k \beta_i a_{in} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n-1} \beta_i \alpha_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (\sum_{i=1}^k \beta_i a_{ij}) = 0,$$

platí ve skutečnosti rovnost $\sum_{i=1}^k \beta_i r_i = 0$. Ale protože jsou řádky $r_1, \ldots, r_k$ lineárně nezávislé, jsou všechny koeficienty β_j nulové. To ale znamená, že vektory $r'_1, \ldots, r'_k$ jsou také lineárně nezávislé. $\square$

Důkaz: (věty 8)

Máme dánu matici A typu $m \times n$. Označme $r_1, \ldots, r_m$ její řádky a $s_1, \ldots, s_n$ její sloupce. Označme dále $\dim L(r_1, \ldots, r_m) = k$, a $\dim L(s_1, \ldots, s_n) = l$. Chceme ukázat, že $k = l$.

Podle lemmatu 16 lze vybrat řádky $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$ tak, aby byly lineárně nezávislé a ostatní byly jejich kombinací. Označme A_1 $k \times n$ matici s těmito vybranými řádky, její hodnost je také k.

Analogicky lze vybrat l sloupců $s_{j_1}, \ldots, s_{j_l}$, které jsou lineárně nezávislé a ostatní sloupce jsou jejich lineární kombinací. Tyto vybrané sloupce vytvoří $m \times l$ matici A_2.

Konečně označme A_3 $k \times l$ matici, která vznikne buď z A_1 vynecháním $n - l$ nevybraných sloupců, nebo z A_2 vynecháním nevybraných $m - k$ řádků. Protože matice A_1 měla lineárně nezávislé řádky a matice A_3 vznikla z A_1 vynecháním sloupců, které byly lineární kombinací ostatních, má A_3 podle Lemmatu 18 také lineárně nezávislé řádky. Stejná úvaha pro sloupce ukazuje, že A_3 má také lineárně nezávislé sloupce. Je tedy podle Lemmatu 17 $k = l$. □

Označení.

Je-li A matice, pak každou matici A', která vznikne z A vynecháním určitého počtu řádků a sloupců, nazveme podmaticí matice A.

Důsledek věty 8:

(1) Je-li A' podmatice matice A, pak $h(A') \leq h(A)$;

(2) $h(A) = k$ právě když existuje $k \times k$ podmatice A' v A, která má hodnost k a neexistuje čtvercová podmatice v A, která by měla hodnost větší;

(3) $h(AB) \leq min(h(A), h(B))$;

(4) Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, pak jsou ekvivalentní výroky:

(i) A je regulární, t.j. existuje inversní matice A^{-1};

(ii) $h(A) = n$;

(iii) A má lineárně nezávislé řádky;

(iv) A má lineárně nezávislé sloupce.

Důkaz: (1) Při vynechání několika řádků je odpovídající lineární obal podmnožinou původního a tak jeho dimense není větší. Hodnost matice vzniklé vynecháním řádků se tedy nezvětší. Totéž pak podle Věty 10 je pravda při vynechání příslušných sloupců.

(2) Existence podmatice A' typu $k \times k$ s hodností k plyne z důkazu Věty 8. Podmatice s větší hodností než k v A již nemůže existovat podle bodu (1).

(3) Stačí použít Důsledek na začátku paragrafu spolu s Větou 8.

(4) Tvrzení (ii), (iii), (iv) jsou zřejmě ekvivalentní podle Věty 8. Ukažme tedy ekvivalenci prvních dvou tvrzení.

Označme symbolem $1_{n\times n}$ jednotkovou matici typu $n\times n$. Pokud existuje inversní matice A^{-1}, tj. pokud $A \cdot A^{-1} = 1_{n\times n}$ nebo $A^{-1} \cdot A = 1_{n\times n}$, pak podle (3) platí $n = h(1_{n\times n}) \le h(A)$. Tedy $h(A) = n$.

Naopak, pokud $h(A) = n$, pak lze rovnost $A \cdot A^{-1} = 1_n$ považovat za sadu n rovnic tím, že postupně budeme brát za pravé strany sloupce jednotkové matice a jako řešení nám vyjdou sloupce hledané inversní matice. Ale protože $h(A) = n$, víme, že toto řešení existuje a je jednoznačně určeno. To dokazuje existenci a jednoznačnost (pravé) inversní matice. Levá inversní matice je rovna pravé inversní matici k matici transponované, takže stejně lze dokázat existenci a jednoznačnost levé inversní matice. □

3.4 Matice lineárního zobrazení, závislost na volbě baze

Úvodní poznámka.

V kapitole o vektorových prostorech jsme se naučili, že každý (obecný) vektorový prostor V lze pomocí libovolné baze ztotožnit s $\mathbb{R}^n$. Souřadnice vektoru $v \in V$ vzhledem k bazi $e = (e_1, \ldots, e_n)$, $e_i \in \mathbb{R}^n$, jsou keoficienty $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^t$ v rozkladu v jako $v = \sum_i \xi_i e_i$. Symbolicky toto může byt zapsáno jako "součin" $v = e \cdot \xi$. Formálně to připomíná (reálný) skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^n$ napsaný jako součin dvou matic typu $1 \times n$, resp. $n \times 1$. Je třeba ovšem zdůraznit, že se o skalární součin nejedná, "vektor" e označující bazi $(e_1, \ldots, e_n)$ není vektor, nemá za svoje složky čísla. Také výsledek součinu není číslo, ale opět vektor. Pokud by V bylo rovno $\mathbb{R}^n$, pak lze "vektor" e interpretovat jako matici typu $n \times n$, jejíž sloupce tvoří složky jednotlivých vektorů baze a výsledkem násobení příslušných matic je opět matice-sloupec, t.j. vektor v $\mathbb{R}^n$.

Výše popsaná symbolika pro maticový zápis algebraického součinu $v = \sum_i \xi_i e_i$ je užitečná. Dalším příkladem podobného zápisu je matice přechodu od jedné baze k druhé. Jako úvod poznamenejme, že velmi podobné algebraické výrazy $\sum_j a_{ij} b_j$ a $\sum_j a_{ji} b_j$ (kde a_{ij}, b_i jsou čísla) mají v maticovém zápisu podobný tvar, lišící se ovšem (a to je podstatné) pořadím. Jsou-li A, resp. b matice odpovídajících prvků, pak pro maticovou interpretaci prvého součtu je třeba považovat b za sloupec a výsledek napsat jako $A \cdot b$, zatímco pro druhý součet je třeba vzít b jako řádek a napsat výraz jako maticový součin $b \cdot A$. Podobně lze postupovat (formálně, tj. symbolicky) i v případě, že prvky a_{ij}, nebo b_j jsou vektory.

Pro definici matice přechodu od jedné baze k druhé jsou dvě přirozené možnosti. Předpokládejme, že $= (e_1, \ldots, e_n)$ a $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ jsou dvě baze ve V. Buď lze definovat matici přechodu E od staré baze e k nové bazi e' pomocí vztahu

$$e'_i = \sum_j E_{ji} e_j,$$

nebo pomocí vztahu

$$e'_i = \sum_j \tilde{E}_{ij} e_j,$$

Zřejmě platí $\tilde{E} = E^t$. Rozdíl tedy spočívá ve výběru matice přechodu nebo její matice transponované. Standardní konvence, kterou budeme také používat, je výše uvedená první možnost. Dá se shrnout do tvrzení, že koeficienty v rozkladu vektorů nové baze do staré baze tvoří sloupce matice přechodu.

V symbolickém zápisu pomocí součinu matic jsou tyto dvě možnosti reprezentovány pomocí zápisu $e' = e \cdot E$, resp. $e' = \tilde{E} \cdot e$. V prvním případě $e = (e_1, \ldots, e_n)$, podobně pro e'. V druhém případě $e = (e_1, \ldots, e_n)^t$, podobně pro e'.

V tomto zápisu pak odůvodnění lemmatu o transformaci souřadnic při změně baze má velmi jednoduchý tvar: víme, že podle definice platí $v = e \cdot \xi = e' \cdot \xi'$ a $e' = e \cdot E$. Po dosazení dostaneme $v = e \cdot E \cdot \xi'$, tedy z jednoznačnosti rozkladu vektoru do baze platí $\xi = E \cdot \xi'$ (a tedy $\xi' = E^{-1} \xi$).

Vektory v obecném vektorovém prostoru lze volbou baze popsat pomocí odpovídajících souřadnic. V následujícím paragrafu si chceme popsat podobnou proceduru pro lineární zobrazení $\varphi : V \to W$. V tomto případě volbou bazí ve V a W lze lineárnímu zobrazení φ přiřadit matici.

Definice 17 *Je-li $\varphi : V \to W$ lineární zobrazení mezi vektorovými prostory a jsou-li $e = (e_1, \ldots, e_n)$, resp. $f = (f_1, \ldots, f_n)$, baze ve V, resp. W, pak matici $A = A_\varphi$ zobrazení φ vůči bazím e, resp. f, definujeme takto:*

$$\varphi(e_i) = \sum_j a_{ji} f_j.$$

Lemma 20 *Je-li $A = A_\varphi$ matice lineárního zobrazení φ vůči bazím e, resp. f, a jsou-li ξ, resp. η, souřadnice vektorů x, resp. y, pro které platí $y = \varphi(x)$.*

Pak $\eta = A \cdot \xi$.

Důkaz: Je-li (v symbolickém zápisu) $x = e \cdot \xi, y = f \cdot \eta$, a $y = \varphi(x)$, pak využitím linearity zobrazení a definice A dostaneme

$$y = \varphi(x) = \varphi(e) \cdot \xi = f \cdot A \cdot \xi.$$

Tedy $\eta = A \cdot \xi$.

Pokud by se někomu zdál tento symbolický zápis nesrozumitelný, stačí jej přepsat do příslušných algebraických výrazů: $x = \sum_i e_i \xi_i, y = \sum_j f_j \eta_j$, a $y = \varphi(x)$ a

$$y = \varphi(x) = \varphi(\sum_i e_i \xi_i) = \sum_i \varphi(e_i)\xi_i = \sum_i (\sum_j a_{ji} f_j)\xi_i = \sum_j (\sum_i a_{ji}\xi_i) f_j.$$

$\square$

Poznámka: My už víme z dřívějšího výkladu, že pro každou matici A typu $m \times n$ je definováno lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ předpisem $x \in \mathbb{R}^n \to y = A \cdot x \in \mathbb{R}^m$. Z předchozího lemmatu je vidět, že konvence byly voleny tak, aby se po ztotožnění $V = \mathbb{R}^m$ a $W = \mathbb{R}^n$ pomocí volby bazí převedlo lineární zobrazení φ na lineární zobrazení dané maticí A.

Věta 12 *Je-li A matice lineárního zobrazení φ vůči bazím e, resp. f, je-li A' matice lineárního zobrazení φ vůči bazím e', resp. f', a jsou-li E resp. E' matice přechodu mezi příslušnými starými a novými bazemi, pak*

$$A' = F^{-1} \cdot A \cdot E.$$

Důkaz:

Stačí ověřit vztah $F \cdot A' = A \cdot E$ (a pak jej vynásobit maticí F^{-1} zleva).

V symbolickém zápisu máme dvě rovnosti:

$\varphi(e') = f' \cdot A' = f \cdot F \cdot A'$ a $\varphi(e') = \varphi(e \cdot E) = \varphi(e) \cdot E = f \cdot A \cdot E$.

Jejich porovnáním dostaneme potřebnou rovnost.

□

Věta 13 *Pokud jsou $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to W$ dvě lineární zobrazení, je složení $\psi \circ \varphi$ těchto dvou zobrazení opět lineární zobrazení.*

Jsou-li A, resp. B matice lineárních zobrazení φ, resp. ψ, vůči příslušným bazím v prostorech U, V, W, pak matice zobrazení $\psi \circ \varphi$ vůči těmto bazím je rovna součinu matic $B \cdot A$.

Důkaz: Označme pořadě e, f, g baze prostorů U, V, W. Pak

$$\psi(\varphi(e_i) = \psi(\sum_j A_{ji} f_j) = \sum_j A_{ji} \varphi(f_j) = \sum_j A_{ji} (\sum_k B_{kj} g_k) = \sum_k (\sum_j B_{kj} A_{ji}) g_k.$$

Tedy podle definice je matice složeného zobrazení rovna součinu $B \cdot A$.

□

Definice 18 *Řekneme, že dvě čtvercové matice A, A' typu $n \times n$ jsou podobné, pokud existuje čtvercová matice C téhož typu, taková, že*

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

Stopa $\operatorname{tr} A$ *čtvercové matice A je číslo definované vztahem*

$$\operatorname{tr} A = \sum_i A_{ii}.$$

(je to součet prvků na diagonále).

Věta 14 *Jsou-li A, A' dvě podobné matice, pak mají stejnou stopu.*

Je možné tedy definovat stopu lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ jako stopu matice tohoto lineárního zobrazení vůči libovolně zvolené bazi.

Důkaz:

Stačí si rozmyslet, že platí pro libovolné dvě čtvercové matice $A = (a_{ij}), B = (b_{kl})$ vztah $\operatorname{tr} A \cdot B = \operatorname{tr} B \cdot A$.

Ale to stačí si napsat, že $\operatorname{tr} A \cdot B = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji}$, resp. $\operatorname{tr} B \cdot A = \sum_i \sum_j b_{ij} a_{ji}$. □

4 Determinanty

Úvodní poznámka.

Jsou dvě jednoduché motivace pro zavedení nového pojmu determinantu matice, které je obsahem této kapitoly. První je pozorování z konce minulé kapitoly, kde jsme si ukázali, že stopa matice je číslo, které je stejné pro všechny matice, které jsou si navzájem podobné a to umožnilo definovat pojem stopa lineárního zobrazení z prostoru V do sebe. Stopa je tedy invariantem pro relaci podobnosti na množině všech matic. Takovéto invarianty jsou velmi užitečné pro popis příslušných tříd ekvivalence a je otázka, jestli nejsou k dispozici ještě nějaké další. Odpověď je ano, a další z nich, který se naučíme používat je determinanat matice. To ještě není invariant poslední, o dalších se budeme učit později.

Druhá motivace je svou podstatou geometrická. Již od mládí se každý z nás postupně učil počítat plochy a objemy těles. Determinant matice dává formuli, jak spočítat v Eukleidově prostoru (libovolné dimenze) objem rovnoběžnostěnů.

Zkusme si toto odvodit v nejjednoduším netriviálním případě, v rovině. Uvažujme dva lineárně nezávislé vektory $v_1 = (a_{11}, a_{12})$ a $v_2 = (a_{21}, a_{22})$. (Pokud by vektory byly lineárně závislé, rovnoběžník by byl degenerovaný a měl nulovou plochu.) Úkolem je spočítat plochu příslušného rovnoběžníka. Označme ji $A(v_1, v_2)$.

První jednoduché pozorování je, že plocha se vypočte jako základna krát výška. Je-li vektor v_2 základna, pak výška v rovnoběžníku se spočítá pomocí průmětu v_1 na kolmici k v_2. Z obrázku (nakreslete si!) ihned plyne, výška pro součet dvou vektorů je součet příslušných výšek a že tedy $A(v_1 + v_1', v_2) = A(v_1, v_2) + A(v_1', v_2)$. Tedy zobrazení A, které dvojici vektorů přiřadí číslo A je lineární v každé složce. Důsledkem tohoto faktu ale např. je, že zřejmě $A(0, v_2) = 0$ a tedy i $A(v_1, v_2) = -A(v_1, v_2)$. To je ale zřejmě ve sporu s tím, že plocha rovnoběžníka je vždy kladná. Tento spor nejlépe vyřešit tím, že budeme hledat zobrazení A lineární v každé složce a plochu pak spočítáme prostě jako absolutní hodnotu z A. Všimněte si také, že $A(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = A(v_1, v_1) = A(v_2, v_2) = 0$. Tedy $A(v_1, v_2) + A(v_2, v_1) = 0$. Navíc zřejmě $A(\alpha v_1, v_2) = \alpha A(v_1, v_2)$ a $A(v_1, v_2 + \alpha v_1) = A(v_1, v_2)$. Tedy zobrazení A je multilineární ve svých složkách, změní znaménko při přehození argumentů a nezmění hodnotu, pokud k jednomu argumentu přičteme násobek druhého.

To už umožní zobrazení A vypočítat:

Označme e_1, e_2 kanonickou bazi v $\mathbb{R}^2$. Protože

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2,$$

dostaneme ihned, že

$$A(v_1, v_2) = A(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{1i}a_{2j}A(e_i, e_j) =$$

$$= a_{11}a_{22}A(e_1, e_2) + a_{12}a_{21}A(e_2, e_1).$$

Protože zřejmě plocha čtverce daného dvojicí kanonických vektorů e_1, e_2 je 1, dostáváme, že $A(e_1, e_2) = 1$, a tedy $A(e_2, e_1) = -1$.

Tedy máme závěrečnou formulku

$$A(v_1, v_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

To je definice determinantu čtvercové matice typu 2×2. A plocha rovnoběžníka je absolutní hodnota determinantu příslušné matice.

Pro obecnou definici determinantu ve vyšších dimenzích bude třeba si připravit některé informace o grupě permutací.

Definice 19 *Řekneme, že zobrazení π n-prvkové množiny $\{1, \ldots, n\}$ do sebe je permutace, pokud π je prosté (a tudíž na). Permutace je možné skládat (jako zobrazení). Identické zobrazení odpovídá jednotkovému elementu, inverzní element je zřejmě inverzní zobrazení. Tedy množina všech permutací tvoří grupu, kterou označíme P_n.*

Permutace, která přehodí dva zvolené prvky množiny $\{1, \ldots, n\}$ a ostatní nechá na místě se nazývá transpozice. Je zřejmé, že každá permutace se dá napsat jako složení transpozic.

Je-li $\pi \in P_n$ permutace, pak její znaménko $\mathrm{sign}(\pi)$ *je definováno pomocí vztahu*

$$\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^j,$$

kde j je počet transpozic v zápisu permutace π jako složení transpozic.

Lemma 21 *Znaménko permutace je dobře definované a nezávisí na způsobu vyjádření permutace jako složení transpozic. Zároveň se toto znaménko rovná číslu $(-1)^{j'}$, kde j' je počet dvojic $(i, j); 1 \leq i < j \leq n$ s vlastností $\pi(i) > \pi(j)$. Takovýmto dvojicím se říká inverze dané permutace π.*

Pro dvě permutace π, π' platí

$$\mathrm{sign}(\pi' \circ \pi) = \mathrm{sign}(\pi')\mathrm{sign}(\pi).$$

Důkaz: Číslo j' je definováno jednoznačně a nezávisí na žádném výběru jako původní definice. Pokud tedy ukážeme rovnost obou definic, jako důsledek dostaneme nezávislost původní definice na výběru zápisu permutace jako složení transpozic.

Stačí si rozmyslet, že pokud složíme permutaci π s transpozicí τ_{ij}, která přehazuje prvky na i-tém a j-tém místě, pak se počet inverzí pro $\pi \circ \tau_{ij}$ změní o liché číslo.

Při složení s τ_{ij} se totiž buď přidá nebo naopak ubere jedna inverze pro dvojici i, j (to je požadovaná lichá změna!); pro dvojici i, a nebo a, j se buď nic nezmění, nebo obě inverze vzniknou, nebo obě zmizí, nebo jedna vznikne a jedna zmizí; pro dvojici a, b, (kde žádný z indexů není roven i nebo j) se počet inverzí nemění.

Závěrečné tvrzení o znaménku složení je zřejmé přímo z definice. □

Definice 20 *Předpokládejme, že A je čtvercová matice typu $n \times n$. Pak její determinant* $\det A$ *definujeme takto:*

$$\det A = \sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \ldots a_{n,\pi(n)}.$$

Pokud budeme matici chápat jako soubor n sloupců $s_1, \dots, s_n$, pak det A můžeme chápat jako zobrazení, které n-tici vektorů $s_1, \dots, s_n$ přiřadí číslo $det(s_1, \dots, s_n)$.

Analogicky lze postupovat, pokud budeme matici A považovat za soubor n řádků.

Lemma 22 $\det A = \det A^t$, *tedy*

$$\det A = \sum_{\pi \in P_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}.$$

Důkaz: Stačí si uvědomit, že $\operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(\pi^{-1})$ a že pokud permutace π probíhají celou grupu permutací P_n, pak je totéž pravda pro permutace π^{-1}. Pak totiž

$$\det A = \sum_{\pi \in P_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} = \sum_{\pi \in P_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1,\pi^{-1}(1)} \dots a_{n,\pi(n)} =$$

$$= \sum_{\pi \in P_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n}.$$

□

Poznámka: Není vždy snadné determinant matice vypočítat. Pro matice malé to jde (v dimenzi 2 to umíme, v dimenzi 3 je možné použít tzv. Sarusovo pravidlo). Ve vyšších dimenzích je to zpravidla velmi obtížné. Jedním vyjímečným případem, kdy to jde lehce je determinant trojúhelníkové matice.

Předpokládejme, že $a_{ij} = 0$ pro všechny $i > j$. Použijeme-li ekvivalentní definici

$$\det A = \sum_{\pi \in P_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n},$$

pak je vidět, že jediný netriviální sčítanec bude odpovídat identické permutaci a bude se rovnat součin prvků na diagonále:

$$\det A = a_{11} \dots a_{nn}.$$

Věta 15 (Základní vlastnosti determinantu)
(1) Determinant je multilineární funkce každého sloupce, tedy platí např.

$$\det(s_1 + s_1', s_2, \dots, s_n) = \det(s_1, s_2, \dots, s_n) + \det(s_1', s_2, \dots, s_n).$$

$$\det(\alpha s_1, s_2, \dots, s_n) = \alpha\det(s_1, \dots, s_n).$$

Analogicky pro ostatní sloupce.

(2)

$$\det(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(n)}) = \mathrm{sign}(\pi)\det(s_1, \dots, s_n).$$

Tedy např. při záměnně dvou sloupců změní determinant znaménko. Determinant matice se dvěma stejnými sloupci je tudíž nula.

(3) Determinant se nezmění, pokud k některému jeho sloupci přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních sloupců.

(4) $\det(1_n) = 1$, *navíc platí* $\det A \neq 0$ *právě když* A *je regulární.*

Tytéž vlastnosti platí pro řádky místo sloupců.

Důkaz: (1) Předpokládejme, že první sloupec s_1 matice A je součtem $s_1 = s_1' + s_1''$ a uvažujme matice A', resp. A'', ve kterých je první sloupec nahrazen sloupcem s_1', resp. s_1''. Pak

$$\det A = \sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi)(a'_{1,\pi(1)} + a''_{1,\pi(1)}) \dots a_{n,\pi(n)} =$$

$$\sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi) a'_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} + \sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi) a''_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} = \det A' + \det A''.$$

Linearita pro ostatní sloupce se dokáže zcela analogicky.

Podobně, pokud A' vznikne z matice A tím, že její první sloupec vynásobíme číslem α, pak

$$\sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi) \alpha a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} = \alpha[\sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)}] = \alpha \det A.$$

Analogicky pro sloupce ostatní.

(2) Označme symbolem A' matici s přehozeným i-tým a j-tým sloupcem. Ihned z definice a z dokázaných vlastností znaménka permutací plyne, že

$$\det A = \sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)} = \sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi \circ \tau_{ij}) a_{1,\pi\circ\tau_{ij}(1)} \dots a_{n,\pi\circ\tau_{ij}(n)} =$$

$$= \mathrm{sign}(\tau_{ij}) \det A'.$$

(všimněte si, že množina všech permutací tvaru $\pi\circ\tau_{ij}, \pi \in P_n$ je totožná s množinou P_n). Ale $\mathrm{sign}(\tau_{ij}) = -1$.

Okamžitým důsledkem je tvrzení, že determinant matice, která má dva stejné řádky je nulový.

(3) Stačí si rozmyslet, co se stane, když např. k prvnímu sloupci přičtu násobek druhého sloupce. Pak z linearity plyne

$$\det(s_1 + \alpha s_2, s_2, \ldots, s_n) = \det(s_1, s_2, \ldots, s_n) + \alpha \det(s_2, s_2, \ldots, s_n) =$$

$$= \det(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Indukcí ihned dokážeme tvrzení pro případ, že se k prvnímu sloupci přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních. Stejně se důkaz dělá, nahradíme-li první sloupec libovolným jiným.

(4) První tvrzení je vidět přímo podle definice. Pokud není A regulární, je $h(A) < n$ a jeden sloupec je lineární kombinací ostatních. Po dosazení a s použitím linearity v romto sloupci vyjde ihned, že determinant je nula.

V opačném případě má A hodnost rovnu n a lze ji tedy elementárními úpravami převést na trojúhelníkovou matici s nenulovými prvky na diagonále. Ta má zřejmě determinant nenulový. Ale pokud matice A' vznikne z matice A elementárními úpravami, $\det A'$ se bude lišit od $\det A$ pouze nenulovým násobkem. □

Lemma 23 (Rozvoj determinantu podle sloupce)
Nechť j je pevně vybrané číslo sloupce, pak

$$\det A = \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij},$$

kde A_{ij} je podmatice A vzniklá vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Totéž tvrzení analogicky platí i pro rozvoj determinantu podle zvoleného řádku.

Důkaz: Předpokládejme nejdříve, že $j = 1$. Vyjádřeme nyní determinant matice A, která má vlastnost, že jediný nenulový prvek v prvním sloupci je prvek a_{1i}, kde i je daný index. Pokud navíc $i = 1$, pak přímo z definice plyne $\det A = a_{11} \det A_{11}$. Pro $i \neq 1$ stačí posunout i-tý řádek na první místo a pořadí ostatních ponechat. Determinant se při takovéto operaci vynásobí znaménkem příslušné permutace, které je (indukcí) rovno $(-1)^{i+1}$. Věta tedy platí pro takovéto matice.

První sloupec si mohu napsat jako lineární kombinace kanonické baze, tj. $s_1 = a_{11}e_1 + \ldots a_{1n}e_n$. Pak už stačí jen použít linearitu determinantu vůči prvnímu sloupci a výše dokázaná tvrzení.

$\square$

Věta 16

$$\det A \cdot B = \det A . \det B.$$

Důkaz: Označme $C = A \cdot B$. Jsou-li c_i, resp. a_i sloupce matice C, resp. A, pak zřejmě pro každé k platí $c_{ki} = \sum_j a_{kj} b_{ji}$, tedy $c_i = \sum_j a_j b_{ji}$. Víme tedy, že

$$\det C = \det(c_1, \ldots, c_n) = \det(\sum_j a_j b_{j1}, c_2, \ldots, c_n) = \sum_j b_{j1} \det(a_j, c_2, \ldots, c_n).$$

Postupným dosazovaním za $c_2, \ldots, c_n$ a využitím linearity v jednotlivých sloupcích dostaneme

$$\det C = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} b_{j_1 1} \ldots b_{j_n n} \det(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

Ale $\det(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ je nula, pokud zobrazení $\pi : i \to j_i$ není prosté (opakují se sloupce matice). Tedy se vlastně sčítá přes všechny permutace $\pi \in P_n$. Navíc

$$\det(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) = \mathrm{sign}(\pi) \det(a_1, \ldots, a_n).$$

Tedy výsledek má tvar

$$\det C = [\sum_{\pi \in P_n} \mathrm{sign}(\pi) b_{\pi(1)1} \ldots b_{\pi(n)n}] \det(a_1, \ldots, a_n)] = \det B . \det A.$$

$\square$

Poznámka:

(1) Dá se dokázat (můžete si zkusit rozmyslet, návod je ve skriptech [M-Z]), že pro blokovou matici tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

platí $\det A = \det A_{11}. \det A_{22}$.

Podobné tvrzení platí i pro "blokovou matici trojúhelníkového tvaru" (zkuste si zformulovat příslušné tvrzení). Speciálním případem je pak již dříve kosntatované tvrzení o determinantu trojúhelníkové matice.

(2) Věta o determinantu součinu má jako okamžitý důsledek dvě tvrzení:

(i) $\det A^{-1} \det A = 1$.

(ii) $\det C^{-1}AC = \det A$.

Tedy podobné matice mají stejný determinant a je tedy pravda, že determinant je (po stopě) další invariant pro relaci podobnosti matic.

Lemma 24 (Výpočet inverzní matice)
Označme A_{ij} matici, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Pak inverzní matice $B = A^{-1}$ má tvar

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}(\det A)^{-1} \det A_{ji}$$

(všimněte si přehození pořadí indexů!).

Důkaz: Jednotková matice $1_{n\times n}$ má prvky δ_{ik}, kde δ je tzv. Kroneckerovo delta. Je definováno tak, že $\delta_{ik} = 1$ pro $i = k$ a $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$. Označme symbolem e_j jednotkový vektor (sloupec) s 1 na j-tém místě. Definujme si matici C předpisem

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Pak stačí ověřit rovnost $C \cdot A = \det A.1_{n\times n}$.

Ale

$$(C \cdot A)_{ik} = \sum_j c_{ij}a_{jk} = \sum_j \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)a_{jk} =$$

$$= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Nyní stačí si uvědomit, poslední determinant se rovná číslu $\det A$ pro $i = k$ a nule pro $i \neq k$ (v příslušné matici se opakují sloupce). $\square$

Věta 17 (Cramer)
Předpokládejme, že matice A je regulární, označme a_i její sloupce. Pak soustava lineárních rovnic $A \cdot x = f$ s pravou stranou f má právě jedno řešení dané vzorcem

$$x_j = (\det A)^{-1} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, f, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Důkaz: Víme už, že řešení existuje jediné a je dáno vztahem $x = A^{-1} \cdot f$. Stačí tedy použít předchozí vzorec pro inverzní matici a dostaneme (s použitím označení předchozího lemmatu)

$$x_j = \sum_k b_{jk} f_k = \sum_k (\det A)^{-1} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \dots, a_n) f_k =$$

$$= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, f, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

$\square$