

Zkouška 'Úvod do analýzy na varietách', ZS 2021/2022.

VZOR

Zkouška má dvě části - praktická část (60 minut) a teoretická část (90 minut). Mezi nimi je 30 minut přestávka.

Na jakoukoliv známku je třeba splnit minimální počet bodů pro každou část zkoušky. Na známku **velmi dobře** je třeba navíc získat aspoň 40 bodů, na známku **výborně** je třeba získat celkem aspoň 50 bodů.

1. Praktická část (*maximální počet bodů v této části je 20, minimálně je třeba získat alespoň 10 bodů*)

- (a) Nechť je R pevně dané kladné číslo. Množinu M definujeme předpisem

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}.$$

- (a) Ověřte, že je M varieta s krajem (sestrojte odpovídající atlas map) a zvolte její orientaci.

- (b) Vypočítejte levou a pravou stranu ve z něni Stokesovy věty pro varietu M a diferenciální formu $\omega = z dx \wedge dy$.

- (b) Ekvivalenci \sim na množině $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definujeme takto:

$(z'_0, z'_1) \sim (z_0, z_1)$ pokud existuje $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$, takové, že $(z'_0, z'_1) = (\alpha z_0, \alpha z_1)$.

Definujte strukturu hladké variety na množině M tříd ekvivalence.

2. Teoretická část (*maximální počet bodů v této části je 40, minimálně je třeba získat alespoň 20 bodů*)

- (a) (i) Napište definici variety s krajem. Napište definici kraje ∂M variety M a definici atlasu na ∂M .

- (ii) Je-li M orientovaná varieta, definujte indukovanou orientaci na ∂M a ověřte korektnost definice.

- (b) Je dáno hladké zobrazení $\Phi : M \rightarrow N$. Definujte přenášení Φ^* diferenciálních forem z N na M a formulujte jeho základní vlastnosti. Podrobněji:

- (i) Popište chování Φ^* vůči vnějším součinu. Tvrzení dokažte.

- (ii) Popište chování Φ^* vůči vnějšmu diferenciálu. Tvrzení dokažte.

- (iii) Popište chování při skládání zobrazení $(\Phi \circ \Psi)^*$.

- (c) (i) Nechť $M = S^1$ je kružnice v \mathbb{R}^2 . Sestrojte atlas, který určuje standardní strukturu variety na M a popište příslušné přechodové funkce mezi mapami atlasu.

- (ii) Nechť $TM = \cup_{m \in M} T_m M$ je disjunktní sjednocení tečných prostorů k $M = S^1$ ve všech bodech M . Definujte strukturu variety na TM pomocí vhodného atlasu.