

Dispensa di Matematica per la classe 5. C

VETTORI E RETTE

CONICHE

LIMITI

SUCCESSIONI E SERIE

DERIVATE

FUNZIONI

Nome e Cognome:

INDICE

RIPASSO SUI POLINOMI	3
PUNTI E VETTORI IN DUE DIMENSIONI	4
RETTE IN DUE DIMENSIONI	5
CIRCONFERENZA	6
ELLISSE	9
IPERBOLE	9
PARABOLA	10
FUNZIONI $y = f(x)$	11
SUCCESSIONI NUMERICHE	11
PROGRESSIONE E SERIE ARITMETICHE	12
PROGRESSIONE E SERIE GEOMETRICHE	12
FUNZIONI FONDAMENTALI	13
LIMITI FONDAMENTALI	14
DERIVATE	15
COME TROVARE LA RETTA TANGENTE	16
COME TROVARE I MASSIMI E I MINIMI	16
DERIVATA DI ALCUNE FUNZIONI	16
FUNZIONI POLINOMIALI	17
FUNZIONI RAZIONALI FRATTE	18
ESERCIZI	19
SIMULAZIONE TEST RETTE E VETTORI	28
SIMULAZIONE TEST CONICHE	40
SIMULAZIONE TEST SUCCESSIONI E SERIE	48
SIMULAZIONE TEST LIMITI E FUNZIONI	58
SIMULAZIONE TEST FUNZIONI	65
ESERCIZI MATURITÀ	66
I SETTE MESSAGGERI	71

RIPASSO SUI POLINOMI

Frazioni: ricordare che $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ $\frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{1}{ab}$ $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ $\frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}$

Formule importanti: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

Scomposizione: se $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni x_1 e x_2 si può scrivere

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ad esempio $x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$

$-x^2 - x + 2 = -(x - 1)(x + 2)$

$3x^2 + 4x - 7 = 3(x - 1)\left(x + \frac{7}{3}\right)$

$2x^2 - 3x + 7$ non si può scomporre! ($\Delta < 0$)

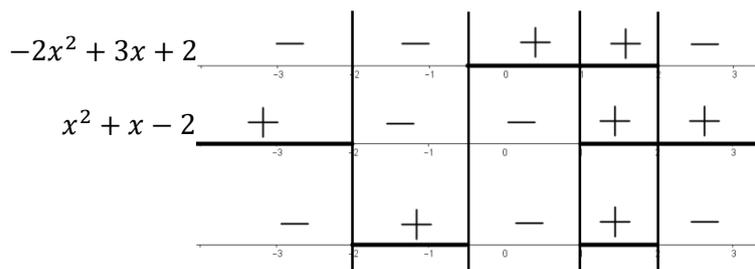
Divisione con x:

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 3x^2 + 0x - 3) \div (2x - 1) = x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-2x^3 + x^2} \\ // \quad 4x^2 + 0x - 3 \\ \underline{-4x^2 + 2x} \\ // \quad +2x - 3 \\ \underline{-2x + 1} \\ // \quad -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 \\ \underline{4x^2 - 2x} \\ 2x - 1 \end{array}$$

Quindi $\frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{2x - 1} = x^2 + 2x + 1 - \frac{2}{2x - 1}$

Disequazioni: Ad esempio $\frac{-2x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2} < 0$



Soluzione: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$

PUNTI E VETTORI IN DUE DIMENSIONI

Punti: parentesi quadre e punto e virgola in due modi diversi $P[x_0; y_0]$ oppure $P \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

x_0 si chiama anche **ASCISSA** y_0 si chiama anche **ORDINATA** O è **ORIGINE** [0;0]

Punto medio tra due punti $A[x_1; y_1]$ e $B[x_2; y_2]$: $M \left[\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2} \right]$

Distanza tra due punti $A[x_1; y_1]$ e $B[x_2; y_2]$: si usa il teorema di **Pitagora** $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Vettori: è una grandezza matematica formata da **lunghezza** **direzione** **verso**

Vettore **libero**: non conosciamo il punto di inizio Vettore **applicato**: conosciamo il punto di inizio

Si scrive in parentesi tonde e SEMPRE con freccia sopra: $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Vettore **tra due punti** $A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $B \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$: $\vec{AB} = B - A = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

Lunghezza vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Angolo θ vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $se\ b > 0 \quad \theta = \arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ $se\ b < 0 \quad \theta = -\arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Se conosciamo lunghezza $|\vec{v}|$ e angolo θ : $\vec{v} = \begin{pmatrix} |\vec{v}| \cdot \cos \theta \\ |\vec{v}| \cdot \sin \theta \end{pmatrix}$

Somma di vettori: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ Esempio: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Prodotto tra vettore e numero $n \cdot \vec{v}$: $n \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na \\ nb \end{pmatrix}$ Esempio: $4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix}$

Prodotto scalare tra vettori $\vec{v} \cdot \vec{u}$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$ oppure $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$

Angolo tra vettori \vec{v} e \vec{u} : $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$\cos \varphi = 0$ vettori **perpendicolari**

$\cos \varphi = \pm 1$ vettori **paralleli**

RETTE IN DUE DIMENSIONI

Equazione **esplicita** della retta: $y = kx + q$ $y = \frac{v_y}{v_x}x + q$ oppure **$P[x; kx + q]$**

Equazione **generale** della retta: $ax + by + c = 0$ $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} = 0$

Equazione **vettoriale** retta: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = x_0 + t v_x \\ y = y_0 + t v_y \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ punto iniziale $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ vettore spostamento

Una retta passa per il punto P significa che scrivo i valori x_0, y_0 al posto di x e y

Se le $k_1 = k_2$ due rette sono **parallele**

se $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ due rette sono **perpendicolari**

Retta per due punti $A[x_1; y_1]$ e $B[x_2; y_2]$: SISTEMA $\begin{cases} y_1 = kx_1 + q \\ y_2 = kx_2 + q \end{cases}$ oppure **$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$**

Distanza tra la **retta** $r: ax + by + c = 0$ e il **punto** $P[x_0; y_0]$: **$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$**

Fascio di rette che passano da $P[x_0; y_0]$: $y - y_0 = m(x - x_0)$ (m parametro)

Retta **orizzontale**: $y = a$ Retta **verticale**: $x = a$

PUNTI, VETTORI, RETTE E PIANI IN TRE DIMENSIONI

Distanza tra due punti $A[x_1; y_1; z_1]$ e $B[x_2; y_2; z_2]$: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Lunghezza di un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Prodotto scalare tra vettori $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$ oppure $\vec{u} \cdot \vec{v} = |u| \cdot |v| \cdot \cos \varphi$

Angolo tra i vettori \vec{v} e \vec{u} $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u| \cdot |v|}$

Equazione di una **retta** che passa per A e B: $X = A + k \cdot \overline{AB}$
Equazione generale di un **piano** α : **$ax + by + cz + d = 0$**

Distanza tra il **piano** $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e il **punto** $P[x_0; y_0; z_0]$: **$|\alpha P| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$**

CIRCONFERENZA

Il **RAGGIO** è la distanza tra il **CENTRO** e ogni punto della circonferenza.

Il **COMPASSO** è lo strumento con cui disegniamo la circonferenza.

Se una retta tocca la circonferenza 2 volte si chiama **SECANTE**, 1 volta **TANGENTE**, 0 volte **ESTERNA**.

La circonferenza passa per il punto $P[x_0; y_0]$ significa che $x_0^2 + y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$

Centro e raggio $C[x_c; y_c]$ r

Equazione canonica $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

Equazione generica $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Area e perimetro: $A = \pi r^2$ $p = 2\pi r$

1) DISEGNA LA CIRCONFERENZA DALL'EQUAZIONE GENERICA

Ad esempio disegna la circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 5y - 2 = 0$

- A destra il numero: $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 2$
- Cambiare ordine: $x^2 - 4x + y^2 + 5y = 2$
- Bisogna avere dei quadrati perfetti: $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 5y + \frac{25}{4}) = 2 + 4 + \frac{25}{4}$
- Riscrivere: $(x - 2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{49}{4}$
- Centro $C[2; -\frac{5}{2}]$ raggio $= \frac{7}{2}$

2) DALLA RETTA TANGENTE E DAL CENTRO TROVA L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Ad esempio la circonferenza con retta tangente $y = \frac{12}{5}x - 6$ e con centro $C[3; 4]$

- La distanza tra la retta e il centro è il raggio della circonferenza
- $y = \frac{12}{5}x - 6$ si riscrivere $12x - 5y - 30 = 0$
- Il raggio è $\frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot 4 - 30|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{14}{13}$
- L'equazione della circonferenza è $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \frac{196}{169}$

3) TROVA I VALORI DI c IN MODO CHE L'EQUAZIONE RAPPRESENTI UNA CIRCONFERENZA

Ad esempio trova tutti i valori di c in modo che $x^2 + y^2 - 6x + 10y + c = 0$ sia una circonferenza.

- $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = 9 + 25 - c$
- A destra il numero deve essere positivo $9 + 25 - c > 0$
- Tutti i valori $c < 34$ $c \in (-\infty; 34)$

4) TROVA L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA CON CENTRO E PUNTO DATI

Ad esempio trova l'equazione della circonferenza con centro $C[-3; 7]$ e che passa per $P[5; -2]$

a) Il raggio è la lunghezza del vettore $\overrightarrow{CP} = P - C = \begin{pmatrix} 5 + 3 \\ -2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$

b) Il raggio è $\sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145}$

c) L'equazione della circonferenza è: $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 145$

5) TROVA I PUNTI DI INCONTRO TRA RETTA E CIRCONFERENZA

Ad esempio tra la retta $4x - 5y + 32 = 0$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 11$

a) Si fa un sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 4y = 11 \\ 4x - 5y + 32 = 0 \end{cases}$ che diventa $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 4y = 11 \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{32}{5} \end{cases}$

b) Si risolve per sostituzione: $x^2 + \left(\frac{4}{5}x + \frac{32}{5}\right)^2 - 10x + 4\left(\frac{4}{5}x + \frac{32}{5}\right) = 11$

c) $x^2 + \frac{16}{25}x^2 + \frac{256}{25}x + \frac{1024}{25} - 10x + \frac{16}{5}x + \frac{128}{5} - 11 = 0$

d) $\frac{41}{25}x^2 + \frac{86}{25}x + \frac{1389}{25} = 0$

e) $41x^2 + 86x + 1389 = 0$

f) $x = \frac{-86 \pm \sqrt{86^2 - 4 \cdot 41 \cdot 1389}}{82} = \nexists$ Retta e circonferenza non si incontrano, **la retta è esterna**

6) TROVA L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA CHE PASSA PER UN PUNTO DELLA CIRCONFERENZA

Ad esempio l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$ nel punto $P[-4; 8]$, che fa parte della circonferenza.

a) Il centro della circonferenza è $C[-2; 4]$

b) Il punto qualsiasi $A[x; y]$ della retta tangente forma un triangolo APC con angolo in P di 90°

c) Quindi \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PC} sono perpendicolari, il loro prodotto scalare $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$

d) $\overrightarrow{PA} = A - P = \begin{pmatrix} x + 4 \\ y - 8 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x + 4 \\ y - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

e) $-2 \cdot (x + 4) + 4 \cdot (y - 8) = 0$ $-2x + 4y - 40 = 0$

f) La retta tangente in P alla circonferenza è $y = \frac{1}{2}x + 10$

7) STABILISCI SE UN PUNTO È FUORI O DENTRO UNA CIRCONFERENZA

Ad esempio se il punto $P[24; 20]$ è dentro o fuori la circonferenza $x^2 + y^2 - 72x - 52y + 1812 = 0$

a) Si trovano centro e raggio della circonferenza $C[36; 26]$ $r = \sqrt{160}$

b) Si trova la lunghezza di $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$: $|CP| = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180}$

c) Il punto P è più lontano del raggio P è esterno alla circonferenza

8) TROVA L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA CHE PASSA PER IL PUNTO [0; 0] ESTERNO ALLA CIRCONFERENZA

Ad esempio la retta che passa per [0; 0] e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$

- a) Si trovano centro e raggio della circonferenza $C[-2; 4]$ $r = \sqrt{10}$
 b) La retta che passa per [0; 0] è in forma generale $ax - y = 0$
 c) La distanza tra la retta e il centro è uguale al raggio: $\frac{|a \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{a^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$
 d) L'equazione diventa $|-2a - 4| = \sqrt{10a^2 + 10}$
 e) Si fa tutto al quadrato $|-2a - 4|^2 = (\sqrt{10a^2 + 10})^2$
 f) $4a^2 + 16a + 16 = 10a^2 + 10$
 g) L'equazione diventa $6a^2 - 16a - 6 = 0$
 h) Le soluzioni sono $a_1 = 3$ $a_2 = -\frac{1}{3}$
 i) Le rette tangenti sono: $y = 3x$ $y = -\frac{1}{3}x$

9) * TROVA L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA CHE PASSA PER UN PUNTO QUALUNQUE ESTERNO ALLA CIRCONFERENZA

Ad esempio la retta che passa per $P[2; 1]$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$

- a) Si trovano centro e raggio della circonferenza $C[5; 5]$ $r = \sqrt{5}$
 b) La retta che passa per $P[2; 1]$ è la retta $y - 1 = k(x - 2)$ forma generale $kx - y - 2k + 1 = 0$
 c) Si fa come nell'esercizio precedente: $\frac{|k \cdot 5 - 5 - 2k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1^2}} = 5$ $4k^2 - 24k + 11 = 0$
 d) Le due soluzioni sono $k = \frac{1}{2}$ $k = \frac{11}{2}$
 e) Le due rette tangenti sono $y = \frac{1}{2}x$ $y = \frac{11}{2}x - 10$

10) * TROVA L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA CHE PASSA PER 3 PUNTI

Ad esempio l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A[5; 2]$ $B[4; 5]$ $C[2; 1]$

- a) Spesso dal disegno si capisce dove è il centro e quanto è il raggio
 b) Se i punti formano un triangolo rettangolo, il centro è nel mezzo dell'ipotenusa
 c) Si può fare un sistema di tre incognite $\begin{cases} (5 - x_c)^2 + (2 - y_c)^2 = r^2 \\ (4 - x_c)^2 + (5 - y_c)^2 = r^2 \\ (2 - x_c)^2 + (1 - y_c)^2 = r^2 \end{cases}$
 d) Si può disegnare l'asse di AB e l'asse di BC, il punto di intersezione è il centro della circonferenza
 a. Si trova il punto medio D di AB $D\left[\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right]$
 b. Si trova la retta perpendicolare ad AB che passa per D $y = \frac{1}{3}x + 2$
 c. Si trova il punto medio E di BC $E[3; 3]$
 d. Si trova la retta perpendicolare a BC che passa per E $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
 e. L'intersezione tra le due rette è il centro $[3; 3]$

**ELLISSE** F_1 ed F_2 sono i **FUOCHI**.Ellisse: tutti i punti P in modo che $|F_1P| + |F_2P|$ è costante.

Equazione generica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

 $[0; 0]$ è il **CENTRO** dell'ellisseSe $a > b$:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$F_1[-c; 0]$$

$$F_2[c; 0]$$

Se $a < b$:

$$c^2 = b^2 - a^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{b}$$

$$F_1[0; -c]$$

$$F_2[0; c]$$

Area dell'ellisse:

$$A = \pi ab$$

L'ASSE ORIZZONTALE è lungo $2a$ L'ASSE VERTICALE è lungo $2b$ La **DISTANZA FOCALE** tra i due fuochi è lunga $2c$.Se l'**ECCENTRICITÀ** ε è vicino a 0 l'ellisse è rotonda, se ε è vicino a 1 l'ellisse è schiacciata.**IPERBOLE** F_1 ed F_2 sono i **FUOCHI**.Iperbole: tutti i punti P in modo che $||F_1P| - |F_2P||$ è costante.La **DISTANZA FOCALE** tra i due fuochi è $2c$.**VERTICI**: i punti dell'iperbole più vicini ai fuochi.L'iperbole all'infinito si avvicina sempre di più a due rette, senza toccarle. Le due rette si chiamano **ASINTOTI**.Se $a = b$ l'iperbole si chiama **iperbole equilatera**. $[0; 0]$ è il **CENTRO** dell'iperboleEquazione, fuochi, ε e vertici se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$V_1[-a; 0]$$

$$V_2[a; 0]$$

Due asintoti $y = \frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$F_1[-c; 0]$$

$$F_2[c; 0]$$

Equazione, fuochi, ε e vertici se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$V_1[0; -b]$$

$$V_2[0; b]$$

Due asintoti $y = \frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$

$$\varepsilon = \frac{c}{b}$$

$$F_1[0; -c]$$

$$F_2[0; c]$$

Iperbole



:

$$y = \frac{k}{x}$$

Asintoti:

$$x = 0 \quad y = 0$$

PARABOLA

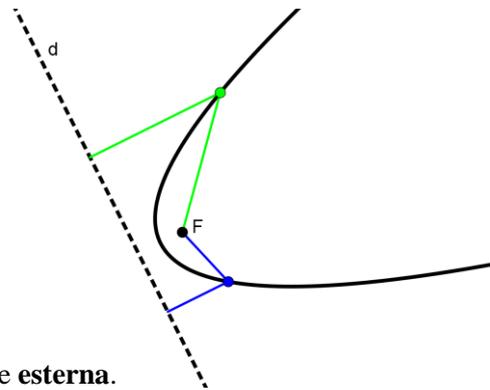
Ci sono una retta d chiamata **retta direttrice** e un punto F chiamato **fuoco**.

I punti della parabola hanno la stessa distanza da d e da F .

Il **vertice V** è il punto più vicino alla retta o al fuoco.

La parabola passa per il punto $P[m; n]$ significa che $n = a \cdot m^2 + b \cdot m + c$

Se una retta tocca la parabola 2 volte si chiama **secante**, 1 volta **tangente**, 0 volte **esterna**.



PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE y

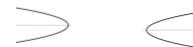


Equazione generica della parabola: $y = ax^2 + bx + c$ se $a > 0$ ☺ se $a < 0$ ☹

Vertice, fuoco e retta direttrice
 $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $F\left(-\frac{b}{2a}; y_V + \frac{1}{4a}\right)$ $y = y_V - \frac{1}{4a}$
 ($\Delta = b^2 - 4ac$ $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$)

Intersezione con gli assi: asse x : $A\left[\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right]$ $B\left[\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right]$ asse y : $C[0; c]$

PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE x



Equazione generica della parabola: $x = ay^2 + by + c$ se $a > 0$ ☺ se $a < 0$ ☹

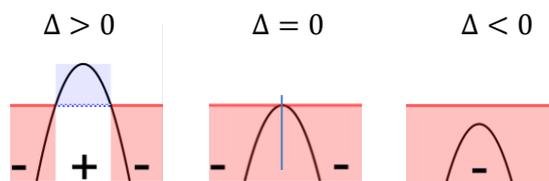
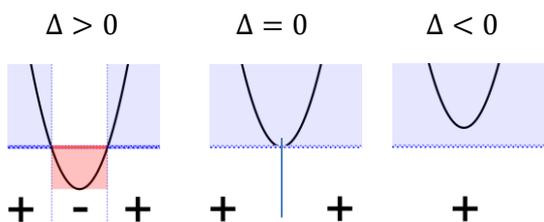
Vertice, fuoco e retta direttrice
 $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ $F\left(x_V + \frac{1}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ $x = x_V - \frac{1}{4a}$
 ($\Delta = b^2 - 4ac$ $x_V = -\frac{\Delta}{4a}$)

Intersezione con gli assi: asse x : $A[c; 0]$ asse y : $B\left[0; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$ $C\left[0; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$

PER LE DISEQUAZIONI:

Se $a > 0$

Se $a < 0$



FUNZIONI

 $y = f(x)$ (cioè y è funzione di x , dipende da x)

ASCISSA = asse x **ORDINATA** = asse y **O** è l'**origine** [0;0] **P[1; 2]** è il punto di ascissa 1 e ordinata 2

CRESCENTE significa che la funzione da sinistra a destra va su.

DECRESCENTE significa che la funzione da sinistra a destra va giù.

CAMPO DI ESISTENZA è l'intervallo dei valori di x in cui la funzione si può calcolare.

CODOMINIO è l'intervallo di valori che la y può avere.

ASINTOTO è una **retta** a cui la funzione si avvicina all'infinito senza mai raggiungerla

FUNZIONE PARI è una funzione **simmetrica rispetto all'asse y** $f(x) = f(-x)$

FUNZIONE DISPARI è una funzione **simmetrica rispetto a O** $f(x) = -f(-x)$

FUNZIONE PERIODICA è una funzione che si ripete sempre uguale regolarmente $f(x + kP) = f(x)$ $k = 1, 2, \dots$

SUCCESSIONI NUMERICHE

SUCCESSIONE NUMERICA: funzione $a_n = f(n)$ dove $n \in \mathbb{N}$, cioè $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. *Ad esempio* $a_n = \frac{n}{2^n}$

a_n si chiama **TERMINE** ennesimo

CONVERGENTE: per n grande, i termini a_n si avvicinano ad un numero k : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ *Ad esempio* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

DIVERGENTE: per n grande, i termini a_n vanno verso infinito: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ *Ad esempio* $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$

INDETERMINATA: tutti gli altri casi. *Ad esempio* $a_n = (-1)^n$

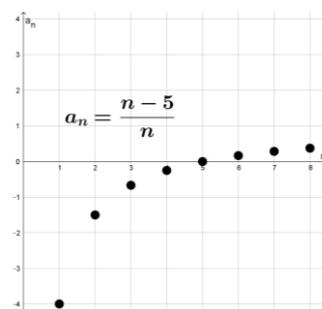
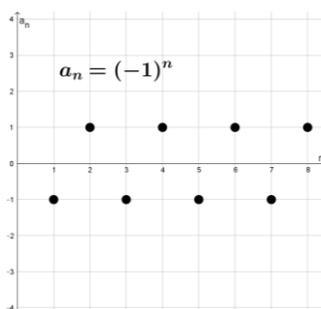
CRESCENTE E DECRESCENTE: come le funzioni. *Crescente* $a_n = 2^n$ *Decrescente* $a_n = \frac{n+1}{n}$

SUCCESSIONI RICORSIVE: si parte da alcuni termini iniziali e una formula *Ad esempio* $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2} \end{cases}$

La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è convergente verso un numero chiamato numero di **Eulero** $e = 2, 71828182845904 \dots$

La successione $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ si chiama successione ricorsiva di **Fibonacci**. I primi termini: 0 1 1 2 3 5 8 13...

Le successioni si disegnano come negli esempi:



PROGRESSIONE E SERIE ARITMETICHE

PROGRESSIONE ARITMETICA: è la successione
(d si chiama **ragione**)

$$a_n = (n - 1)d + a_1$$

oppure $a_n = a_{n-1} + d$

$$d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$$

La progressione aritmetica è sempre **divergente** se $d \neq 0$

CRESCENTE: $d > 0$

DECRESCENTE: $d < 0$

La progressione aritmetica **assomiglia alla retta** d è come k a_0 come q

$$y = m x + q$$

$$a_n = d n + a_0$$

SERIE ARITMETICA: è la **somma** di una progressione aritmetica

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

La serie aritmetica è sempre **divergente** se $a_n \neq 0$ e $d \neq 0$

CRESCENTE: $d > 0$

DECRESCENTE: $d < 0$

PROGRESSIONE E SERIE GEOMETRICHE

PROGRESSIONE GEOMETRICA: è la successione
(q si chiama **ragione**)

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

oppure $a_n = q \cdot a_{n-1}$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$

indefinita verso $\pm\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \nexists \text{ (oscilla tra } +\infty \text{ e } -\infty \text{)}$$

Se $a_1 \neq 0$ e $q = -1$

indefinita tra $-a_1$ e a_1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \nexists \text{ (oscilla tra } -a_1 \text{ e } a_1 \text{)}$$

Se $-1 < q < 1$

convergente a 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Se $q = 1$

sempre a_1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_1$$

Se $a_1 > 0$ e $q > 1$

divergente a $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Se $a_1 < 0$ e $q > 1$

divergente a $-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Se $a_1 = 0$

sempre 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

SERIE GEOMETRICA: è la **somma** di una progressione geometrica

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Se $a_1 \neq 0$ e $q \leq -1$

s_n è **indefinita**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \nexists$$

Se $-1 < q < 1$

s_n è **convergente**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Se $a_1 = 0$

s_n è **convergente**

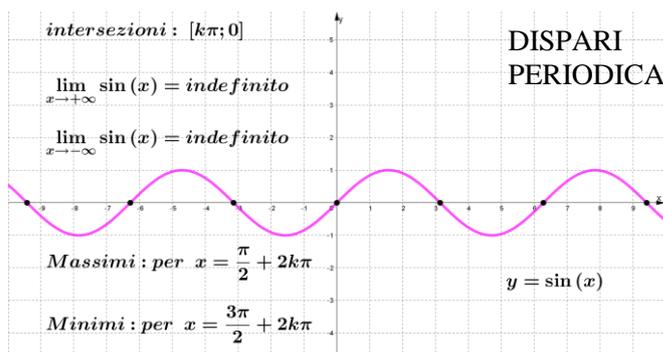
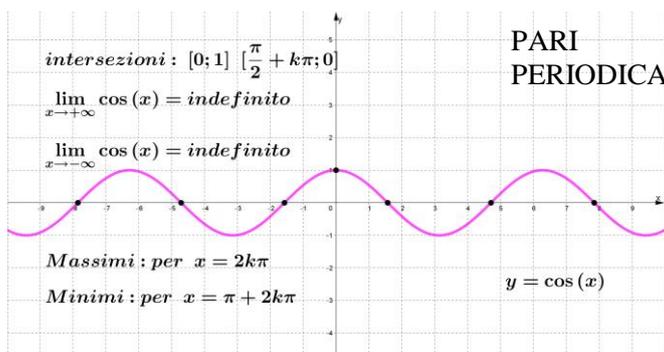
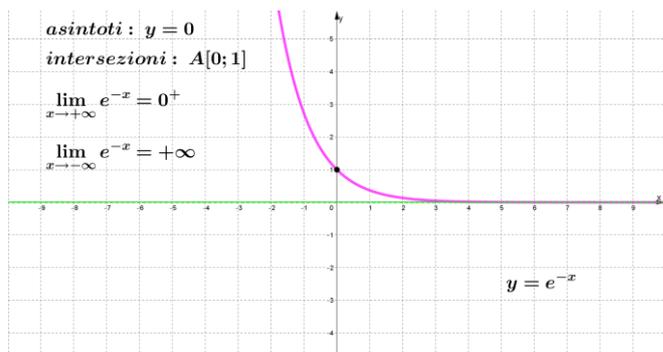
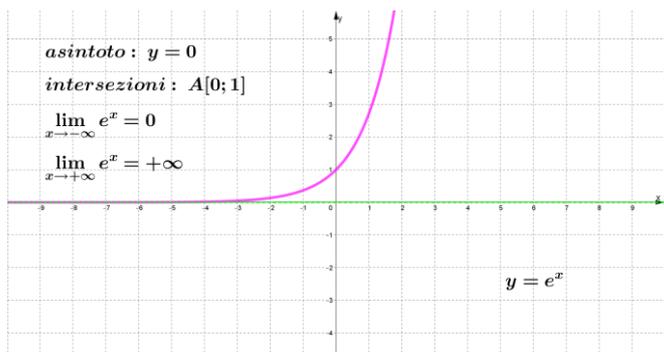
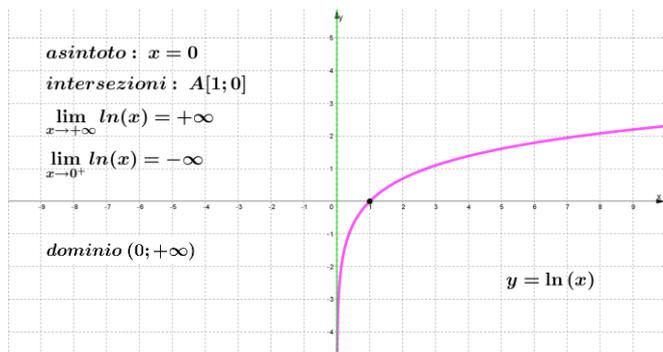
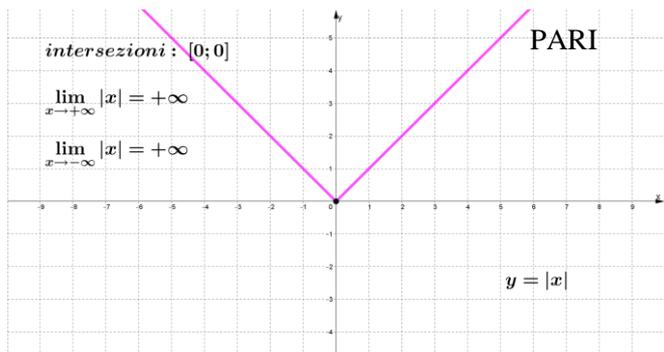
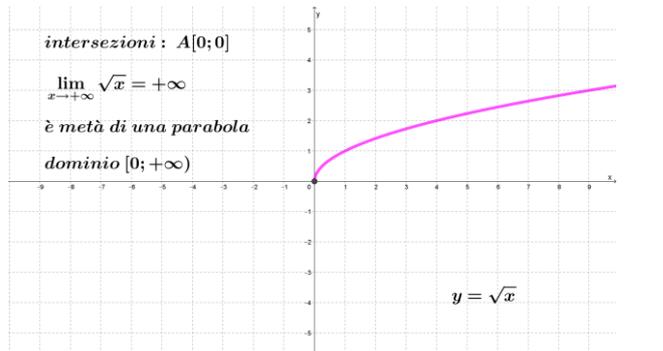
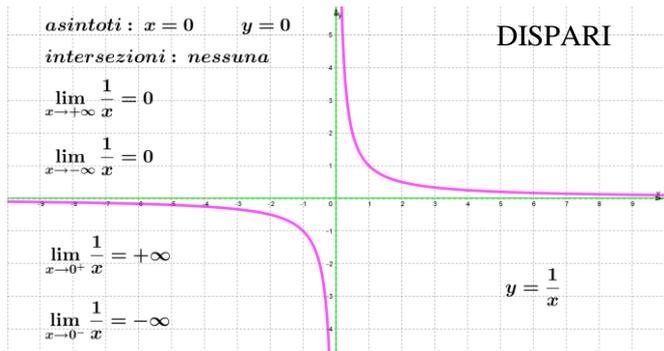
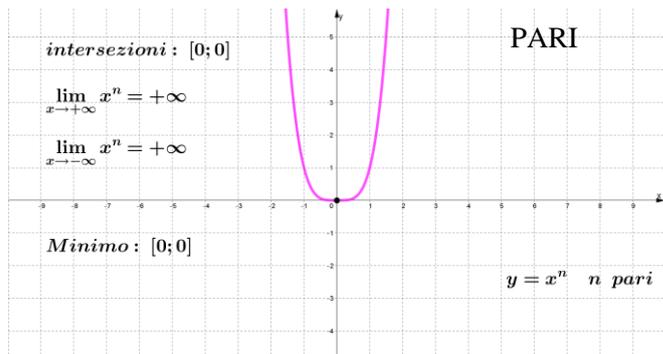
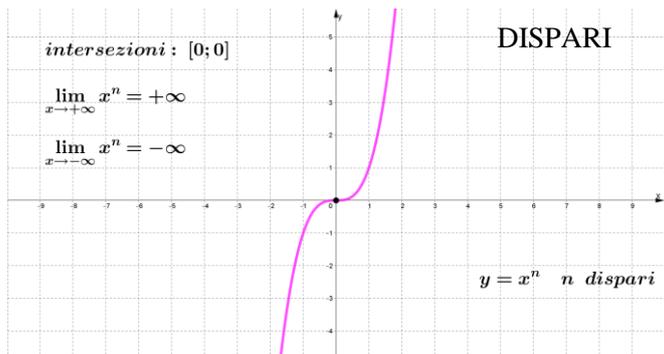
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

Se $a_1 \neq 0$ e $q \geq 1$

s_n è **divergente**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$$

FUNZIONI FONDAMENTALI



LIMITI FONDAMENTALI

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si legge "limite per x che tende ad a di f di x ".

Quando $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limite da sinistra e limite da destra sono uguali) hanno senso queste operazioni:

$$\frac{0}{n} = 0 \quad \frac{0}{\infty} = 0 \quad \frac{n}{0} = \infty \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad \frac{n}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{n} = \infty$$

$$\infty \pm n = \infty \quad +\infty + \infty = +\infty \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty \cdot n = \infty \quad \{n \neq 0\} \quad \infty \cdot \infty = \infty \quad \infty^n = \infty \quad \{se \ n > 0\} \quad \infty^n = 0 \quad \{se \ n < 0\}$$

$$e^{+\infty} = +\infty \quad e^{-\infty} = 0^+ \quad \ln 0^+ = -\infty \quad \ln 0^- = \nexists \quad \ln(+\infty) = +\infty \quad \ln(-\infty) = \nexists$$

Questi sono i casi **indeterminati**:

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$+\infty - \infty$	$\infty \cdot 0$		0^0	∞^0	1^∞
---------------	-------------------------	--------------------	------------------	--	-------	------------	------------

Il calcolo dei limiti serve per passare **dal caso indeterminato al caso determinato**.

Non tutti gli infiniti sono uguali. Alcuni infiniti sono più grandi di altri. Ecco l'ordine degli infiniti:

Per $x \rightarrow \infty$ $\ln x < \sqrt[n]{x} < x < x^n < e^x$ **in una somma / differenza si usa solo l'infinito più grande**

$\frac{\text{infinito di ordine superiore}}{\text{infinito di ordine inferiore}} = \infty$

$\frac{\text{infinito di ordine inferiore}}{\text{infinito di ordine superiore}} = 0$

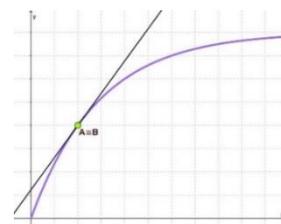
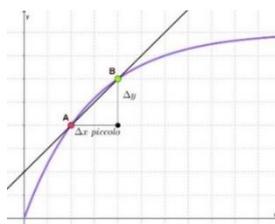
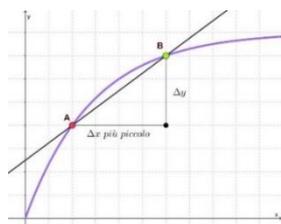
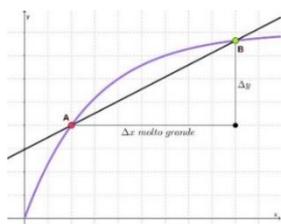
Nei casi $0^0, \infty^0, 1^\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$

Limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Regola di De l'Hôpital: se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ allora $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

DERIVATE

Una funzione $y = f(x)$ è **continua** nel punto x_0 se il limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$.



$A[x; y]$ $B[x + \Delta x; y + \Delta y]$

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

k nella retta AB: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($y = kx + q$)

Nella retta tangente Δx è piccolo, quasi zero: $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$

La derivata è il valore k della retta tangente alla funzione, dice quanto cresce o decresce.

La retta tangente a $f(x)$ è una retta che tocca in un punto il disegno di $f(x)$

$f' > 0$ funzione **crescente** ↗

$f' < 0$ funzione **decrescente** ↘

$f' = 0$ **massimi o minimi** o flessi

<i>(k è un numero, f, g sono funzioni)</i>			
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k	0	$f \cdot g$	$f'g + g'f$
$k \cdot f$	$k \cdot f'$	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
$f \pm g$	$f' \pm g'$	$g(f)$	$f' \cdot g'(f)$
x^2	$2x$	f^2	$2f'f$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	f^n	$f' \cdot n \cdot f^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{f}	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
e^x	e^x	e^f	$f' \cdot e^f$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln f$	$\frac{f'}{f}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f$	$f' \cdot \cos f$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f$	$-f' \cdot \sin f$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	k^x	$k^x \cdot \ln k$

$f'' > 0$ funzione ↖

$f'' < 0$ funzione ↗

$f'' = 0$, se cambia la concavità, c'è un **flesso**

COME TROVARE LA RETTA TANGENTE

Trova l'equazione della retta tangente alla funzione $y = \frac{x^2-3}{x+1}$ nel punto di ascissa $x = -2$.

La derivata è $y' = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$ tangente è $y = kx + q$

$$y = \frac{(-2)^2-3}{-2+1} = -1$$

$$y' = \frac{(-2)^2+2 \cdot (-2)+3}{(-2+1)^2} = 3$$

$$-1 = k \cdot (-2) + q$$

$$k = y'$$

$$x = -2$$

$$y = -1$$

$$k = 3$$

$$q = 5$$

Risultato: $y = 3x + 5$

COME TROVARE I MASSIMI E I MINIMI

Trova i massimi e minimi della funzione $y = \frac{x^2+3}{x+1}$

La derivata è $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ Se $y' = 0$ allora $x^2 + 2x - 3 = 0$ $x = 1$ e -3

Se $x = 1$ e $x = -3$ ci sono massimi, minimi o flessi? Tabella:

	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$x^2 + 2x - 3$		+	-	-	+	
$(x+1)^2$		+	+	+	+	
y'		+	-	-	+	
		↗	Max	↘	mim	↗

La funzione ha:
un massimo per $x = -3$
un minimo per $x = 1$

$$Max[-3; -6]$$

$$mim[1; 2]$$

Con la y'' si trovano i flessi allo stesso modo:

$$\begin{matrix} + & - \\ \sim & F & \sim \end{matrix}$$

DERIVATA DI ALCUNE FUNZIONI $y = f(g)$ Alcuni esempi

La formula è $f(g) \rightarrow g' \cdot f'(g)$, vediamo alcuni esempi:

$y = g(f)$	$y' = f' \cdot g(f)$
$\sin 4x$	$4 \cdot \cos 4x$
$\cos 3x$	$-3 \sin 3x$
$\cos(x^2 - 3x)$	$-(2x - 3) \sin(x^2 - 3x)$
$\ln(3x^2 - 5x + 1)$	$\frac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 1}$
$\sin(2x^3 - x)$	$(6x^2 - 1) \cos(2x^3 - x)$
e^{3x+1}	$3e^{3x+1}$

$y = g(f)$	$y' = f' \cdot g(f)$
$e^{\frac{1}{x}}$	$-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$
$\sin x^2$	$2x \cos x^2$
$\ln^2 x$	$\frac{2 \ln x}{x}$
$(e^x + x)^4$	$4(e^x + 1)(e^x + x)^3$
$\cos^3 x$	$-3 \cos^2 x \sin x$
e^{-x}	$-e^{-x}$

FUNZIONI POLINOMIALI $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$

Una funzione $y = f(x)$ è polinomiale se è **somma di potenze di x** . Ad esempio $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

1) **Dominio:** $(-\infty; +\infty)$

2) **Intersezioni** con gli assi:

se $x = 0$ allora $y = \dots$ se $y = 0$ allora $x = \dots$

(di solito tante soluzioni quanto la potenza più grande di x , ad esempio con x^4 quattro soluzioni...)

3) **Simmetrie:** se la funzione è pari (simmetrica rispetto ad asse y) o dispari (simmetrica rispetto a origine)

PARI: $f(-x) = f(x)$

DISPARI: $f(-x) = -f(x)$

OPPURE NÈ PARI NÈ DISPARI

4) **Segno** della funzione

5) **Limiti** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6) NON CI SONO **MAI ASINTOTI** (la funzione sale o scende velocemente verso infinito)

7) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

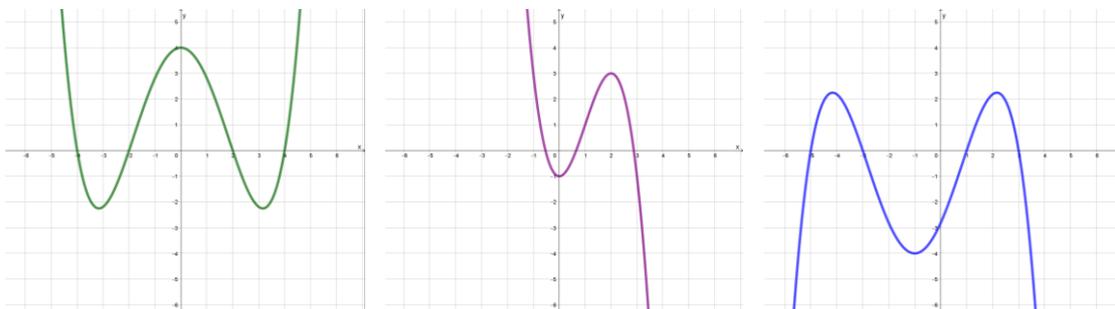
8) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$

9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)

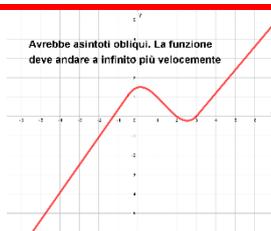
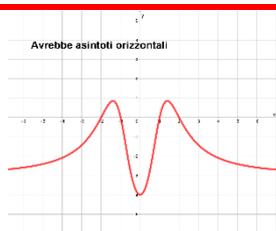
10) **Disegna** i punti trovati e poi la funzione. **SEMPRE** ci sono massimi e minimi, **SEMPRE** flessi

La funzione sale o scende a $\pm\infty$ come le parabole, non come le rette

Disegni possibili:



Disegni **SBAGLIATI**:



FUNZIONI RAZIONALI FRATTE $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

Una funzione $y = f(x)$ è razionale fratta se è una frazione con x in basso. Ad esempio $f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3+2}$

1) **Dominio:** dove il denominatore $B(x) \neq 0$

2) **Intersezioni** con gli assi

se $x = 0$ allora $y = \dots$ se $y = 0$ allora $x = \dots$ **in una frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$ deve essere $A(x) = 0$**

3) **Simmetrie:** vedere se la funzione è pari, dispari o altro (come funzioni polinomiali)

4) **Segno** della funzione

5) **Limiti:** dipendono dal dominio

Ad esempio dominio $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ calcola $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6) **ASINTOTI:**

VERTICALI: di solito dove il denominatore $B(x) = 0$ (possono essere 0, 1 o 2)

ORIZZONTALE: se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ asintoto orizzontale $y = k$

OBLIQUO: se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ forse può esserci un asintoto obliquo

L'asintoto obliquo c'è se il **grado di $A(x)$ è maggiore di uno del grado di $B(x)$**

Esempi: $y = \frac{2x^3-3x}{5x^2+2}$ $y = \frac{x^2+1}{2x+1}$ hanno un asintoto obliquo $y = \frac{3x^2+5}{x^2-1}$ $y = \frac{x^3}{x+2}$ non hanno un asintoto obliquo

Si fa la **divisione $A(x) \div B(x)$** e il risultato senza il resto (SE È UNA RETTA) è l'asintoto obliquo

Oppure si trova $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ a, b devono essere $\neq \infty$

7) **Derivata $f'(x)$** Segno della derivata f' Ricerca massimi o minimi $f'(x) = 0$

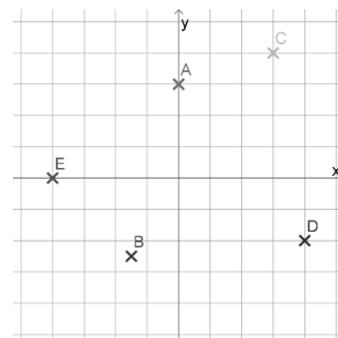
8) **Derivata $f''(x)$** Segno della derivata f'' Ricerca flessi $f''(x) = 0$

9) Completa la tabella con altri valori di x a caso (per avere **più punti**)

10) **Disegna** **prima gli asintoti**, poi i punti, poi la funzione.

ESERCIZI

- 1) Disegna sul piano cartesiano i punti $A[2; -3]$ $B[-1; -1]$ $C[-\frac{5}{2}; 2,4]$ $D[\pi, \sqrt{2}]$ $E[-3; 0]$
- 2) Disegna sul piano cartesiano tutti i punti che hanno ascissa 3.
- 3) Disegna sul piano cartesiano tutti i punti che hanno ordinata 5.
- 4) Disegna sul piano cartesiano tutti i punti in cui l'ordinata è il doppio dell'ascissa.
- 5) Disegna sul piano cartesiano tutti i punti in cui il valore dell'ordinata è più grande dell'ascissa di 1.
- 6) Scrivi le coordinate dei punti sul piano cartesiano a destra.
- 7) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[0; 0]$ e $B[2; 1]$
- 8) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[0; 0]$ e $B[1; 4]$
- 9) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[0; 0]$ e $B[5; 2]$
- 10) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[0; 0]$ e $B[3; 4]$
- 11) Negli esercizi 7, 8, 9, 10 trova il punto medio tra A e C.
- 12) Negli esercizi 7, 8, 9, 10 trova il punto medio tra B e D.
- 13) Negli esercizi 7, 8, 9, 10 trova la lunghezza dei lati del quadrato.
- 14) Negli esercizi 7, 8, 9, 10 trova la lunghezza di AC e BD.
- 15) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[0; 0]$ e $B[2; -3]$
- 16) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[1; 1]$ e $B[3; 2]$
- 17) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[-1; -1]$ e $B[3; 2]$
- 18) Disegna un quadrato ABCD (vertici in senso antiorari) in cui $A[-1; 1]$ e $B[2; 4]$
- 19) Negli esercizi 15, 16, 17, 18 trova il punto medio tra A e C.
- 20) negli esercizi 15, 16, 17, 18 trova il punto medio tra B e D.
- 21) negli esercizi 15, 16, 17, 18 trova la lunghezza dei lati del quadrato.
- 22) negli esercizi 15, 16, 17, 18 trova la lunghezza di AC e BD.



- 23) Completa le tabelle in modo che ABCD formi un quadrato:

$A[0; 0]$	$A[0; 0]$	$A[0; 0]$	$A[0; 0]$				
$B[2; 0]$	$B[5; 2]$	$B[3; 8]$	$B[9; 9]$	$B[20; 2]$	$B[13; 9]$	$B[4; -1]$	$B[5; -2]$
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D

- 24) Con i dati dell'esercizio precedente trova le lunghezze dei lati, l'area e il centro del quadrato

Trova la distanza dall'origine di questi punti:

- | | | | |
|-----------------------------------|---|------------------------|-------------------------------|
| 25) $[3; 7]$ | 29) $[12; 5]$ | 33) $[-8; 15]$ | 37) $[\sqrt{3}; -1]$ |
| 26) $[5; 2]$ | 30) $[-7; 7]$ | 34) $[12; -15]$ | 38) $[-\sqrt{12}; \sqrt{13}]$ |
| 27) $[3; 4]$ | 31) $[0; 16]$ | 35) $[-21; 0]$ | 39) $[\sqrt{7}; -\sqrt{2}]$ |
| 28) $[\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}]$ | 32) $[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ | 36) $[\frac{3}{2}; 2]$ | 40) $[\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ |

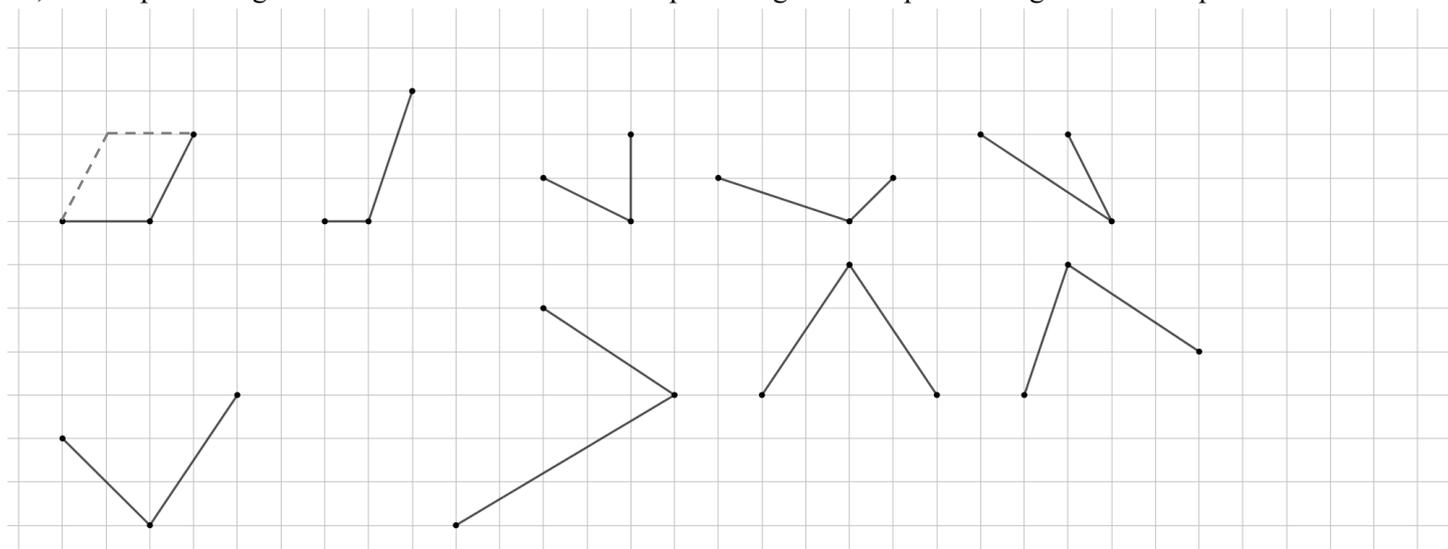
Trova la distanza e il punto medio tra le seguenti coppie di punti:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|---------------------------|
| 41) $[0; 1]$ $[0; 5]$ | 45) $[1; 1]$ $[3; 3]$ | 49) $[-1; -1]$ $[-4; -4]$ |
| 42) $[3; 1]$ $[7; 1]$ | 46) $[1; 5]$ $[5; 1]$ | 50) $[-3; 5]$ $[4; -1]$ |
| 43) $[5; -2]$ $[0; -2]$ | 47) $[2; 3]$ $[10; 6]$ | 51) $[5; 9]$ $[-3; 9]$ |
| 44) $[-1; 2]$ $[4; 2]$ | 48) $[0; 3]$ $[5; 2]$ | 52) $[10; 30]$ $[21; 7]$ |

Trova almeno 5 punti che abbiano distanza dall'origine:

- | | | | | |
|-------|----------------|-----------------|--------|----------------|
| 53) 5 | 54) $\sqrt{5}$ | 55) $\sqrt{10}$ | 56) 13 | 57) $\sqrt{3}$ |
|-------|----------------|-----------------|--------|----------------|
- 58) Trova la distanza del punto $[x; y]$ dall'origine.

59) Completa le figure in basso in modo da avere dei parallelogrammi. Il primo disegno è un esempio.



60) Trova il punto medio tra i punti $[a; b]$ e $[c; d]$.

61) Trova la distanza tra i punti $[a; b]$ e $[c; d]$.

62) Disegna tutti i punti equidistanti dai punti $A[3; 1]$ e $B[1; 1]$. Scrivi l'equazione dei punti.

63) Disegna tutti i punti equidistanti dai punti $A[1; -1]$ e $B[-1; 1]$. Scrivi l'equazione dei punti.

64) * Disegna tutti i punti distanti 5 dall'origine. Scrivi l'equazione di questi punti.

65) * Disegna tutti i punti distanti $\sqrt{13}$ dall'origine. Scrivi l'equazione di questi punti.

66) Parti dal punto $P[-3; 1]$. I seguenti vettori indicano lo spostamento del punto. La parte in alto indica lo spostamento della x , la parte in basso della y . Se il numero è negativo, lo spostamento è a sinistra o in basso. Disegna tutti i punti intermedi e il punto finale:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

67) Fai l'esercizio 66, parti da P e spostati di $\vec{g}, \vec{f}, \vec{e} \dots \vec{a}$

68) Muovi il punto $P[4; 1]$ secondo gli spostamenti: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$. Qual è la posizione finale di P?

69) Trova la lunghezza dei vettori dell'esercizio 66

70) Trova l'angolo dei vettori dell'esercizio 66. Se ricordi i numeri complessi non è difficile.

Scrivi il vettore che passa dal punto A al punto B in questi diversi casi:

71) $A[1; 2] B[3; 5]$

72) $A[2; 3] B[-2; -1]$

73) $A[4; 1] B[-7; 1]$

74) $A[27; -3] B[0; 33]$

Guarda i vettori a destra. Disegna sul quaderno i seguenti vettori:

75) $\vec{a} + \vec{b}$

78) $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$

81) $\vec{a} - \vec{b}$

76) $\vec{b} + \vec{a}$

79) $2\vec{b}$

82) $2\vec{a} - \vec{b}$

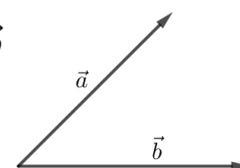
77) $\vec{a} + \vec{a}$

80) $\frac{1}{2}\vec{a}$

83) $\vec{b} - \vec{a}$

84) Disegna il vettore \vec{c} in modo che $\vec{c} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

85) Disegna sul piano cartesiano gli esercizi 75-83, se i vettori sono $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Trova angolo e modulo di questi vettori:

86) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

87) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

88) $\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

89) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

90) $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

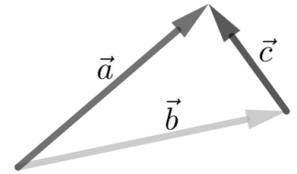
91) $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

92) $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

93) Disegna tutti i punti che dall'origine è possibile raggiungere muovendosi solo dei vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ci si può muovere anche di $-\vec{a}$ e di $-\vec{b}$). Scrivi come arrivare al punto $P[4; -1]$.

94) Segna la giusta relazione tra il vettore \vec{c} e i vettori \vec{a} e \vec{b} :

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$



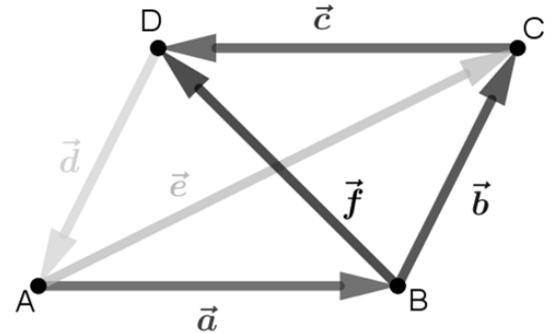
95) Se $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ disegna e scrivi matematicamente:

$\vec{b} = \vec{a} + \vec{a}$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{a} - \vec{a} - \vec{a} - \vec{a}$ $\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{a}$

96) Trova l'angolo e il modulo dei vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ dell'esercizio 95.

97) Nel disegno a destra sono disegnati dei vettori. La soluzione è uno dei vettori o uno dei punti disegnati:

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} =$ | e) $\vec{e} + \vec{c} =$ |
| b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} =$ | f) $\vec{e} + \vec{f} - \vec{b} =$ |
| c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} =$ | g) $A + (C - B) =$ |
| d) $C + (A - D) + (C - B) =$ | |



Trova il prodotto scalare tra i seguenti vettori:

- | | | | |
|---|---|---|--|
| 98) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ | 102) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ | 106) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ | 110) $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ |
| 99) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ | 103) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ | 107) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ | 111) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| 100) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ | 104) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ | 108) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ | 112) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ |
| 101) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | 105) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ | 109) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ | |

113) * Trova in base agli esercizi 98-112 una regola per capire quando il prodotto scalare è uguale a 0.

114) Trova il prodotto scalare tra questi due vettori: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$. Vale ancora la regola trovata nell'esercizio precedente? Come cambiarla?

Trova il prodotto scalare tra i vettori \vec{a} e \vec{b} nei seguenti casi:

- | | |
|---|--|
| 115) \vec{a} ha angolo 0° e modulo 5 | \vec{b} ha angolo 60° e modulo 8 |
| 116) \vec{a} ha angolo 0° e modulo 4 | \vec{b} ha angolo 45° e modulo 9 |
| 117) \vec{a} ha angolo 30° e modulo 2 | \vec{b} ha angolo 30° e modulo 3 |
| 118) \vec{a} ha angolo 30° e modulo $\sqrt{3}$ | \vec{b} ha angolo 60° e modulo 5 |
| 119) \vec{a} ha angolo 20° e modulo 5 | \vec{b} ha angolo 65° e modulo 8 |
| 120) \vec{a} ha angolo 60° e modulo 4 | \vec{b} ha angolo 30° e modulo 9 |
| 121) \vec{a} ha angolo 150° e modulo 2 | \vec{b} ha angolo 60° e modulo 3 |
| 122) \vec{a} ha angolo 15° e modulo $\sqrt{3}$ | \vec{b} ha angolo 195° e modulo 5 |

123) Del vettore $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ trova:

- almeno 5 vettori con lo stesso modulo e angolo diverso
- almeno 5 vettori con lo stesso angolo e modulo diverso
- almeno 5 vettori che formano un angolo di 90° con il vettore \vec{a}
- almeno 5 vettori di direzione opposta ad \vec{a}

124) Del vettore $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ trova:

- almeno 5 vettori con lo stesso modulo e angolo diverso
- almeno 5 vettori con lo stesso angolo e modulo diverso
- almeno 5 vettori che formano un angolo di 90° con il vettore \vec{a}
- almeno 5 vettori di direzione opposta ad \vec{a}

Trova la somma $\vec{a} + \vec{b}$:

125) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

126) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

127) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

128) $|\vec{a}| = 3, \alpha = 0^\circ$ $|\vec{b}| = 3, \beta = 90^\circ$

129) $|\vec{a}| = 5, \alpha = 60^\circ$ $|\vec{b}| = 5, \beta = 120^\circ$

130) $|\vec{a}| = \sqrt{2}, \alpha = 45^\circ$ $|\vec{b}| = \sqrt{8}, \beta = 135^\circ$

Trova l'angolo tra i vettori:

131) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 132) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ 133) $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ 134) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 135) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

136) Trova tra questi vettori quelli paralleli e quelli perpendicolari:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Sai che $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Parti dal punto $P[0; 2]$ e trova matematicamente e graficamente:

137) $P + \vec{a}$ 139) $P + 2\vec{a}$ 141) $P - 2\vec{a}$ 143) $P + \frac{1}{2}\vec{a}$ 144) $P + \frac{3}{2}\vec{a}$
 138) $P - \vec{a}$ 140) $P + 3\vec{a}$ 142) $P - 0\vec{a}$

145) L'espressione $P + t\vec{a}$ rappresenta una retta. Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti trovati in 138-145.

Scrivi l'equazione esplicita della retta che passa per i punti:

146) $A[0; 0]$ e $B[1; 4]$ 149) $A[2; 3]$ e $B[1; 1]$ 152) $A[10; 9]$ e $B[-5; -6]$
 147) $A[0; 0]$ e $B[1; 1]$ 150) $A[3; 1]$ e $B[-3; -1]$ 153) $A[3; 7]$ e $B[5; 2]$
 148) $A[2; 3]$ e $B[1; 4]$ 151) $A[2; -5]$ e $B[-5; 2]$ 154) $A[-3; 7]$ e $B[-5; 2]$

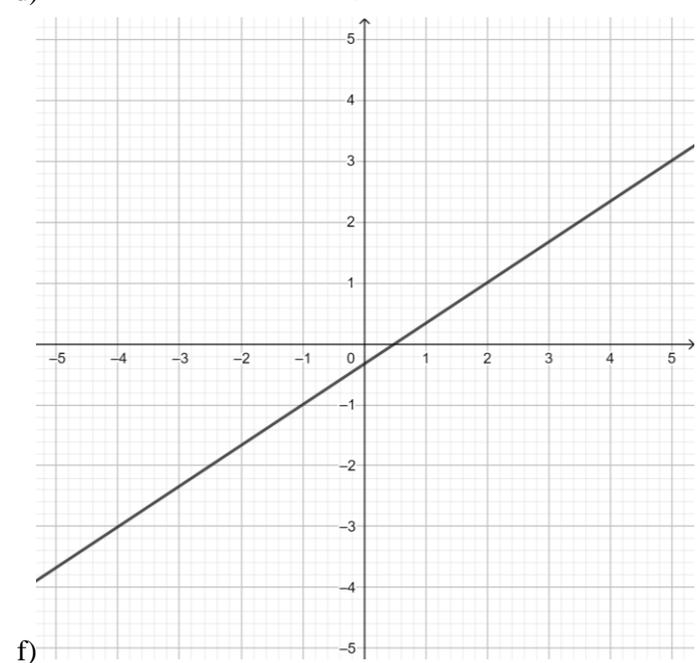
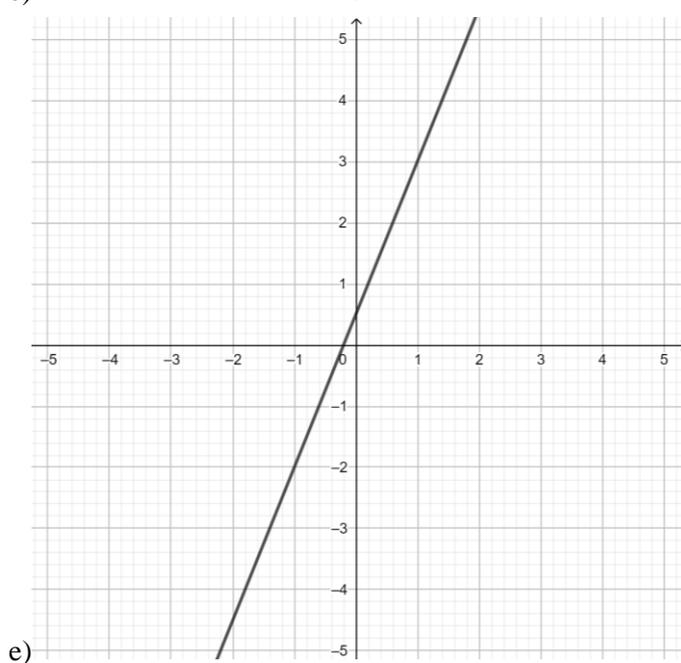
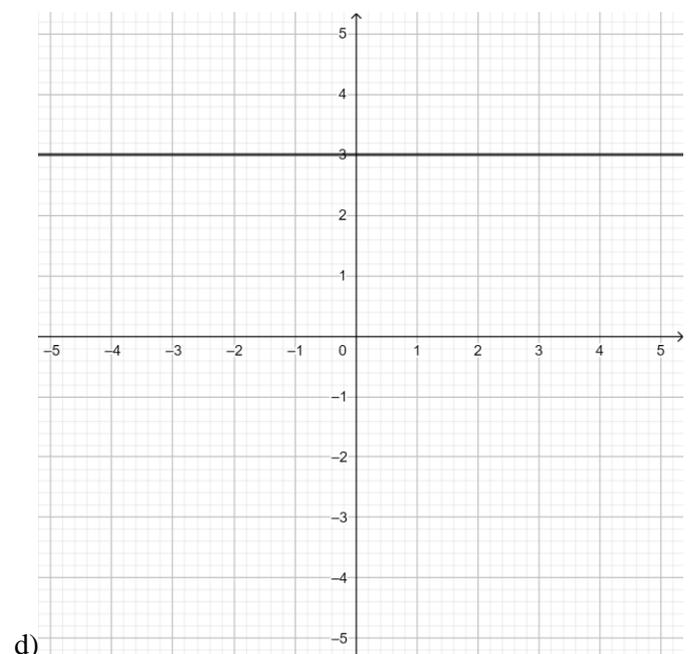
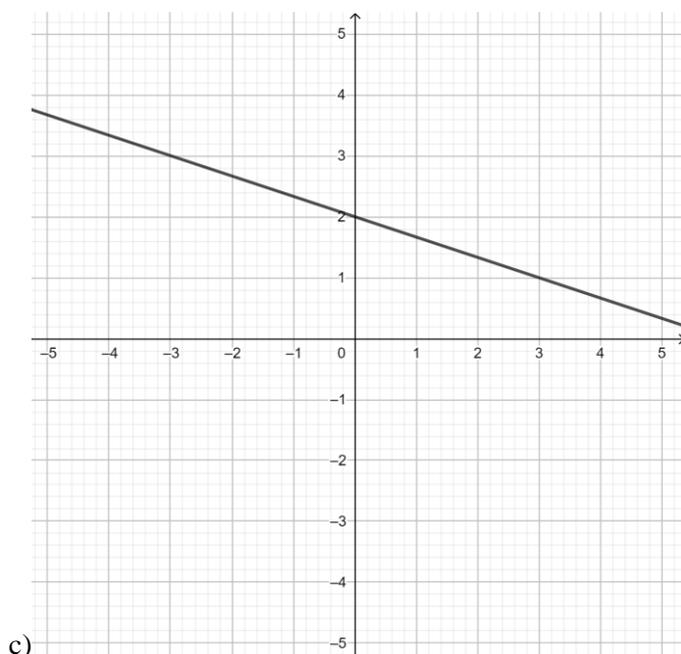
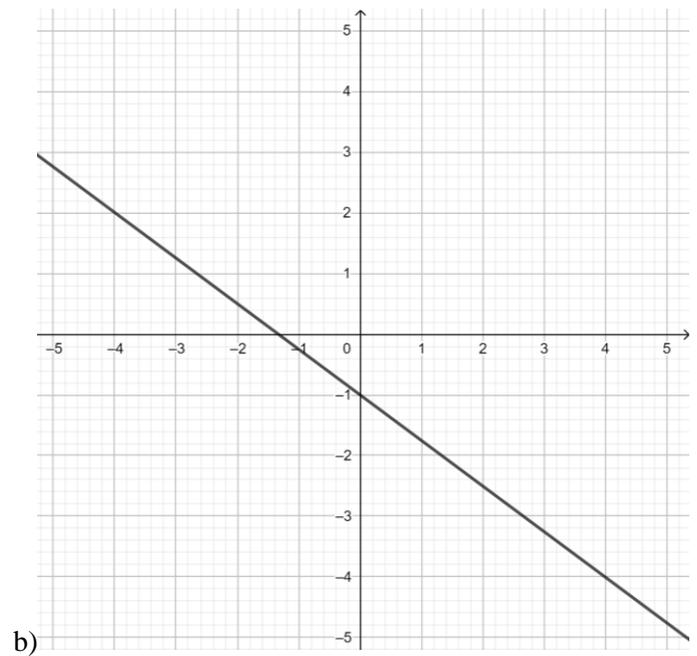
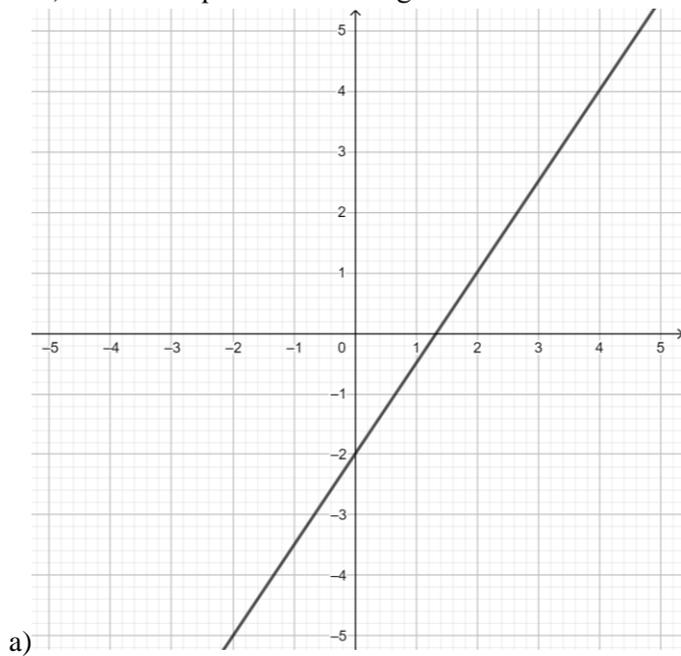
Scrivi i vettori \overrightarrow{AB} :

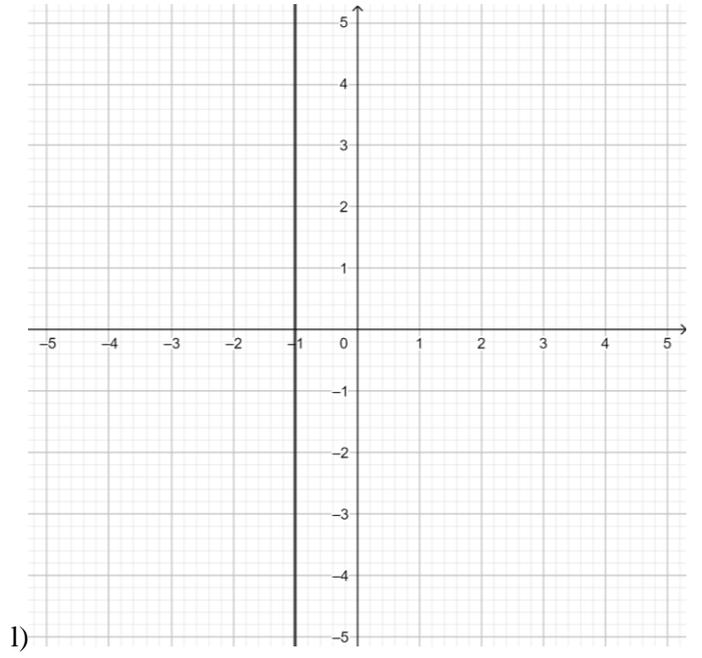
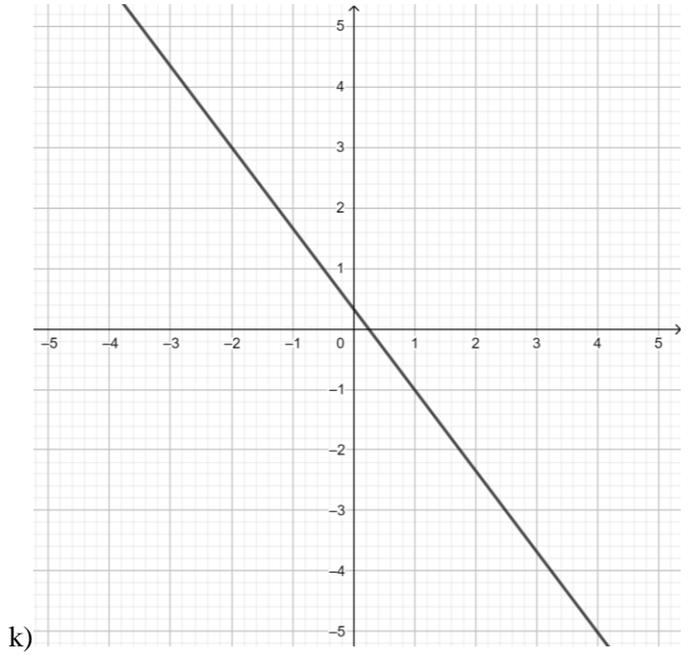
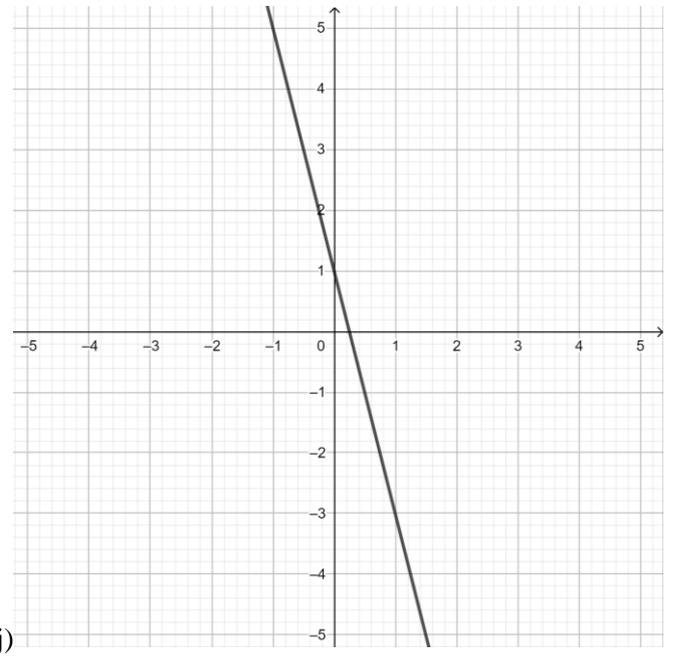
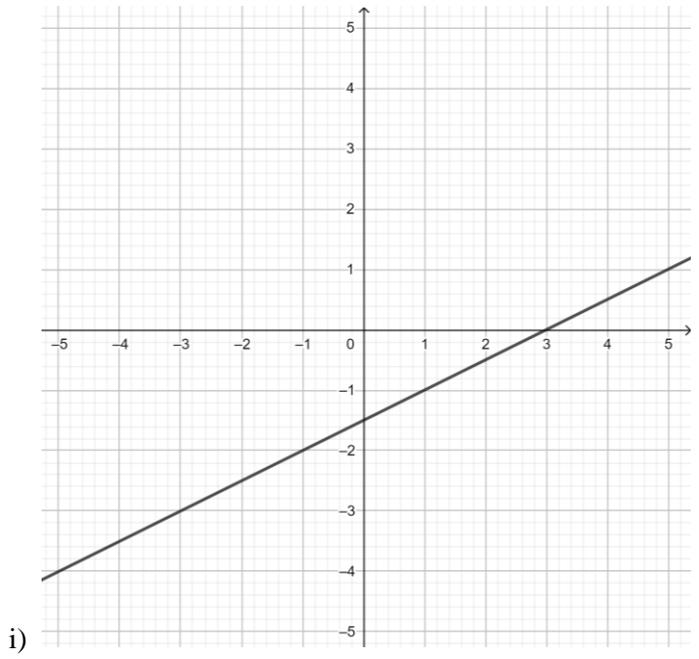
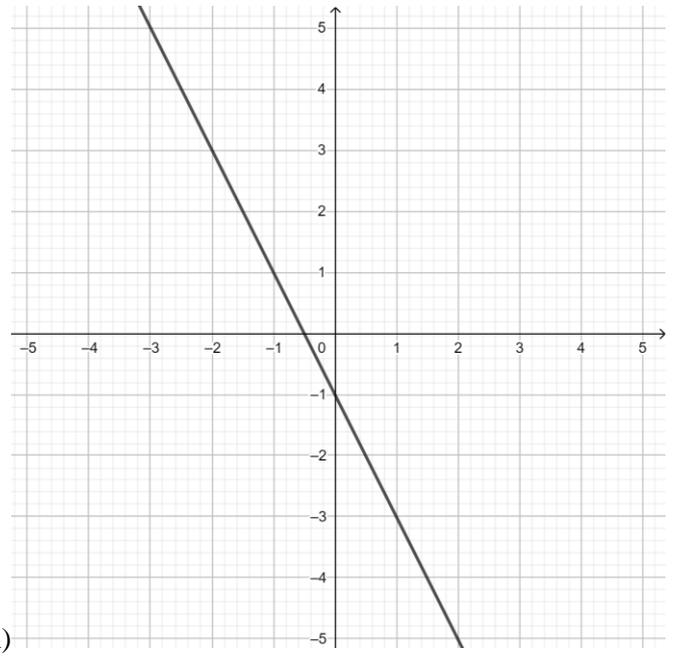
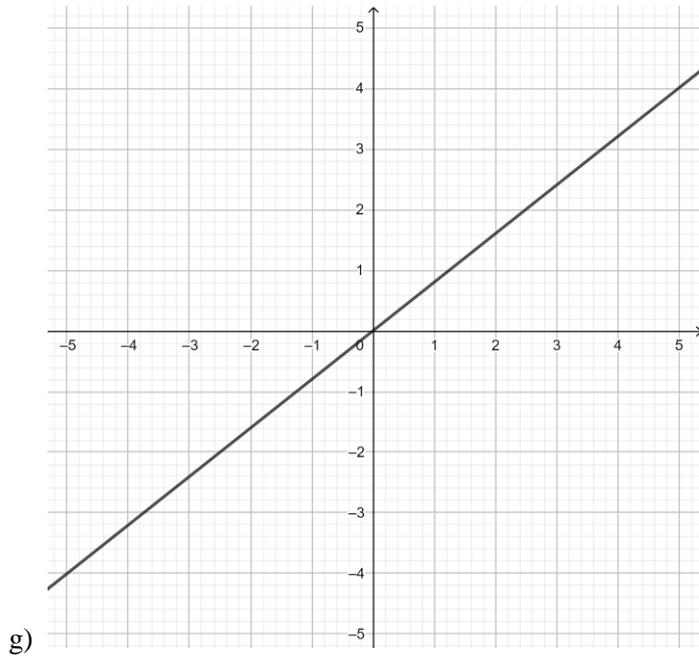
155) $A[2; 3]$ $B[3; 4]$ 157) $A[-1; 1]$ $B[2; 4]$ 159) $A[0; 2]$ $B[-3; 0]$
 156) $A[0; 1]$ $B[3; 2]$ 158) $A[1; -3]$ $B[-2; 0]$ 160) $A[-1; 2]$ $B[3; -4]$

Disegna queste rette:

161) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 167) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 173) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
 162) $y = \frac{3}{2}x + 1$ 168) $y = \frac{3}{4}x + 3$ 174) $y = -\frac{3}{5}x + 5$
 163) $3x - 2y + 2 = 0$ 169) $3x - 4y + 12 = 0$ 175) $3x + 5y - 25 = 0$
 164) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 170) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 176) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \end{pmatrix}$
 165) $y = \frac{5}{2}x + 2$ 171) $y = 2x - 1$ 177) $y = \frac{6}{7}x + 2$
 166) $5x - 2y + 4 = 0$ 172) $2x - y - 1 = 0$ 178) $6x - 7y + 14 = 0$
 179) Dagli esercizi 161-178, trova una regola per disegnare la retta e il legame tra le tre diverse formule.

180) Scrivi l'equazione delle seguenti rette:





Dall'equazione vettoriale trova l'equazione esplicita e l'equazione generale della retta:

- 181) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 182) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 183) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 184) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 185) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 186) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 187) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 188) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 189) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 190) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$
- 191) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $y = \dots\dots\dots = 0$

Scrivi l'equazione di una retta parallela alla retta data e una retta perpendicolare (guarda esempio):

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ parallela: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ perpendicolare: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

- 192) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ parallela: perpendicolare:
- 193) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ parallela: perpendicolare:
- 194) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ parallela: perpendicolare:
- 195) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ parallela: perpendicolare:
- 196) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ parallela: perpendicolare:

Trova l'angolo tra le due rette:

- 197) $y = x + 3$ $y = -x + 1$ 200) $y = \frac{2}{3}x - 5$ $y = -\frac{3}{2}x + 2$
- 198) $y = 2x - 3$ $y = 2x + 2$ 201) $y = -x - 3$ $y = 4$
- 199) $y = 3x + 1$ $y = \frac{1}{2}x - 3$ 202) $y = 3x - 1$ $y = \frac{1}{3}x - 1$

203) Usa i dati degli esercizi 155-160 e scrivi l'equazione vettoriale delle rette che passano per AB.

204) Scrivi l'equazione generale e esplicita delle rette dell'esercizio precedente.

Per ogni equazione trova la forma esplicita della retta perpendicolare che passa per il punto $P[0; 0]$:

- 205) $y = 3x - 5$ 207) $y = -x - 3$ 209) $2x + 3y + 5 = 0$
- 206) $y = \frac{2}{5}x + 1$ 208) $2x - y + 1 = 0$ 210) $-x - y + 1 = 0$

211) * Disegna un rettangolo ABCD di area 20 che ha vertici $A[1; 2]$ e $B[4; 3]$.

212) Trova l'equazione della retta perpendicolare al vettore $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e che passa per il punto $P[1; -3]$.

Trova matematicamente l'intersezione tra le seguenti rette:

- 213) $y = 4x + 5$ $y = 3x - 8$ 216) $4x - 5y + 3 = 0$ $2x + 5y + 7 = 0$
- 214) $y = 2x - 5$ $y = -2x + 5$ 217) $4x - 3y + 2 = 0$ $y = \frac{4}{3}x + 2$
- 215) $y = \frac{2}{3}x - 4$ $y = \frac{2}{3}x + 2$ 218) $y = 2$ $y = 3x - 7$

Trova tutti i vertici dei quadrati partendo da A e B:

219) $A[0; 0]$ $B[3; 5]$

221) $A[0; 0]$ $B[2; 9]$

223) $A[1; 3]$ $B[3; 5]$

220) $A[0; 0]$ $B[9; 2]$

222) $A[0; 0]$ $B[12; 19]$

224) $A[2; 3]$ $B[5; 5]$

225) Completa la tabella in modo che le rette perpendicolari passino per il punto $P[2; -1]$:

Vettoriale \perp								
Vettoriale								
Generale \perp								
Generale								
Esplicita \perp								
Esplicita	$y = \frac{2}{3}x - 2$	$y = \frac{3}{5}x + 4$	$y = -\frac{2}{7}x + 1$	$y = \frac{1}{3}x + 1$	$y = 3x - 7$	$y = -4x + 5$	$y = \frac{1}{5}x + 5$	$y = 4$

Trova il modulo e l'angolo di questi vettori:

226) $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

228) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

230) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

232) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

227) $\begin{pmatrix} \sqrt{27} \\ -9 \end{pmatrix}$

229) $\begin{pmatrix} \sqrt{18} \\ -\sqrt{18} \end{pmatrix}$

231) $\begin{pmatrix} \sqrt{12} \\ -2 \end{pmatrix}$

233) $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Trova i vettori $B - A$ nei seguenti casi:

234) $A[0; 0]$ $B[-4; 3]$

236) $A[-7; 1]$ $B[13; -8]$

238) $A[3; -5]$ $B[-8; 3]$

235) $A[-2; 7]$ $B[10; 2]$

237) $A[2; 7]$ $B[2; -1]$

239) $A[-1; -1]$ $B[8; -8]$

Trova l'angolo tra i vettori

240) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

241) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

242) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

243) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

244) Trova l'equazione esplicita, vettoriale e generale delle rette che passano per i punti AB negli esercizi 234-239.

245) Disegna la retta con punti $X[t; 3t - 2]$. Scrivi la forma vettoriale e esplicita.

Completa i vettori in modo da avere modulo 85:

246) $\begin{pmatrix} \\ 51 \end{pmatrix}$

247) $\begin{pmatrix} 84 \\ \end{pmatrix}$

248) $\begin{pmatrix} -40 \\ \end{pmatrix}$

249) $\begin{pmatrix} \\ -75 \end{pmatrix}$

250) $\begin{pmatrix} 77 \\ \end{pmatrix}$

Scrivi un vettore che abbia questi angoli:

251) 0°

253) 45°

255) 270°

257) 60°

252) 180°

254) 225°

256) 135°

258) 90°

259) Disegna la retta $3x - 6y + 9 = 0$.

260) Disegna le rette $y = \frac{2}{3}x - 2$ e $y = -\frac{3}{2}x + 4$ e trova il punto di incontro matematicamente.

261) Disegna le rette $y = -\frac{3}{5}x + 4$ e $y = \frac{5}{3}x - 3$ e trova il punto di incontro matematicamente.

262) Disegna le rette $y = 4x - 3$ e $y = -3$ e trova il punto di incontro matematicamente.

263) Disegna le rette $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e trova il punto di incontro matematicamente.

Trova la distanza retta - punto in questi casi:

264) $x + y - 3 = 0$

$P[0; 0]$

271) $3x - 7 = 0$

$P[-1; -1]$

265) $x - y - 3 = 0$

$P[0; 0]$

272) $y = -\frac{3}{4}x + 2$

$P[5; -5]$

266) $x + 3y - 2 = 0$

$P[1; 2]$

273) $y = \frac{12}{5}x + 1$

$P[-1; 0]$

267) $2x - y - 3 = 0$

$P[-2; 2]$

274) $y = -\frac{5}{12}x + 1$

$P[3; 2]$

268) $3x - 4y - 5 = 0$

$P[2; -2]$

275) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$

$P[3; 2]$

269) $-2x + 9 = 0$

$P[3; 5]$

270) $2x + 7y - 6 = 0$

$P[-4; 2]$

Trova la distanza tra le due rette in questi casi:

276) $y = x - 1$

$y = x + 1$

279) $y = 3x - 1$

$y = 3x + 1$

277) $y = \frac{1}{3}x - 1$

$y = \frac{1}{3}x + 1$

280) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 1$

278) $y = \frac{3}{4}x - 2$

$y = \frac{3}{4}x + 3$

281) $y = -\frac{8}{15}x + 5$

$y = -\frac{8}{15}x - 12$

Completa l'equazione delle rette in modo che passino per il punto dato:

282) $y = ax + 3$ $P[2; -1]$

286) $y = ax - 3$ $P[-2; -1]$

283) $y = -\frac{3}{4}x + b$ $P[-12; 5]$

287) $y = -\frac{3}{2}x + b$ $P[12; -5]$

284) $y = \frac{2}{3}x + b$ $P[4; -7]$

288) $y = ax - 4$ $P[3; -4]$

285) $y = ax - 5$ $P[-12; -5]$

289) $y = -\frac{2}{5}x + b$ $P[-5; -7]$

290) * Descrivi lo spostamento dal punto $A[-2; 3]$ al punto $B[-1; -1]$ usando solo i due vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trova somma e prodotto scalare tra questi vettori:

291) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

292) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

293) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

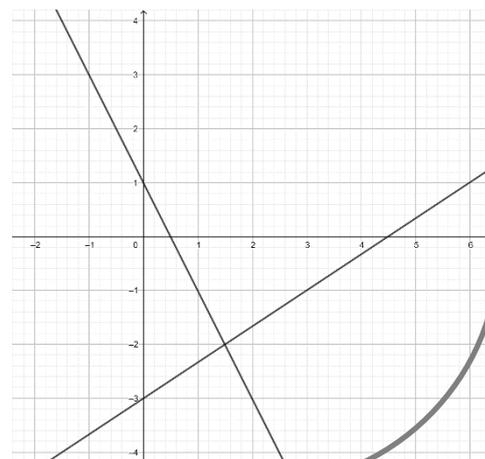
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

294) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

SIMULAZIONE TEST RETTE E VETTORI (durata 70 minuti):

- A. Scrivi in forma esplicita e generale la retta $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- B. Scrivi in forma vettoriale e generale la retta $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Disegna la retta.
- C. Scrivi un vettore perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ e disegnalilo (BENE!).
- D. Calcola angolo e modulo di questi vettori:
- a) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \sqrt{24} \\ -5 \end{pmatrix}$
- E. Calcola la somma, il prodotto scalare e l'angolo tra questi vettori: $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- F. Calcola la somma, il prodotto scalare e l'angolo tra questi due vettori:
 $|a| = \sqrt{18}$ $\alpha = 135^\circ$ $|b| = 5$ $\beta = 270^\circ$
- G. È dato il triangolo ABC: $A[-10; -7]$, $B[-1; 5]$, $C[15; -7]$:
- a) calcola il perimetro;
 - b) trova i punti medi dei lati;
 - c) dimostra matematicamente che il triangolo ABC è rettangolo e trova la sua area.
-
- H. Disegna (BENE!) queste tre rette: a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $y = 3x + 4$ c) $x - 5y + 20 = 0$
- I. Calcola i 3 punti di intersezione tra le tre rette dell'esercizio H. Calcola gli angoli tra le rette usando il prodotto scalare.
- J. Scrivi l'equazione vettoriale della retta perpendicolare alla retta $y = \frac{5}{3}x - 4$ e che passa per il punto $P[15; 13]$.
- K. Scrivi l'equazione vettoriale, esplicita, generale della retta che passa per i punti $A[13; -12]$ e $B[-5; 6]$.
- L. Calcola la distanza tra le rette $y = \frac{12}{5}x + 2$ e $y = \frac{12}{5}x - 2$
- M. Calcola l'angolo tra i vettori $\begin{pmatrix} 72 \\ 48 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -60 \\ 90 \end{pmatrix}$ usando il prodotto scalare.
- N. Scrivi l'equazione esplicita delle due rette nel disegno a destra.
 Calcola il punto di intersezione tra le due rette.



CIRCONFERENZE

Scrivi l'equazione canonica e l'equazione generica delle circonferenze con questi valori:

295) $C[6; 5] \quad r = 2$

301) $C[1; -1] \quad r = 2$

296) $C[3; 8] \quad r = 10$

302) $C[-2; -2] \quad r = 4$

297) $C[1; 1] \quad r = 1$

303) $C[-3; -1] \quad r = \sqrt{10}$

298) $C[3; 4] \quad r = 5$

304) $C[-4; 2] \quad r = \sqrt{7}$

299) $C[1; 2] \quad r = \sqrt{5}$

305) $C[-8; 0] \quad r = 8$

300) $C\left[0; \frac{3}{2}\right] \quad r = \frac{5}{2}$

306) $C\left[\frac{3}{2}; 2\right] \quad r = \frac{5}{2}$

Completa in modo da avere un quadrato perfetto:

307) $x^2 - 4x \dots$

311) $y^2 - 2y \dots$

315) $x^2 + 3x \dots$

308) $x^2 + 6x \dots$

312) $y^2 + 20y \dots$

316) $x^2 - 5x \dots$

309) $x^2 - 10x \dots$

313) $x^2 - 100x \dots$

317) $x^2 + 7x \dots$

310) $x^2 + 12x \dots$

314) $x^2 + 2x \dots$

318) $y^2 + y \dots$

Trova il centro e il raggio delle circonferenze descritte dalle seguenti equazioni:

319) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 144$

325) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

320) $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 10$

326) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

321) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 - 16 = 0$

327) $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$

322) $(x - 5)^2 + y^2 - 25 = 0$

328) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 12 = 0$

323) $x^2 + y^2 - 5 = 0$

329) $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 26 = 0$

324) $x^2 + y^2 + 5x - 5y + \frac{41}{4} = 0$

330) $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0$

331) Trova la distanza tra la retta $8x - 15y + 8 = 0$ e il punto $P[3; 1]$.

332) Completa l'equazione della retta $3x + 4y + c = 0$ in modo che la distanza da $P[0; 0]$ sia 4.

333) Completa l'equazione della retta $3x + 4y + c = 0$ in modo che la distanza da $P[3; -2]$ sia 10.

334) Trova l'equazione della circonferenza tangente alla retta $x + y + 2 = 0$ e con centro $C[6; 10]$.

Scrivi l'equazione canonica e l'equazione generica delle circonferenze con questi valori:

335) $C[-5; 3] \quad r = 12$

336) $C\left[-\frac{5}{2}; 0\right] \quad r = \frac{5}{2}$

Completa in modo da avere un quadrato perfetto:

337) $x^2 + 10x \dots$

338) $x^2 - 8x \dots$

339) $x^2 + 3x \dots$

340) $x^2 + 5x \dots$

Trova centro e raggio delle circonferenze descritte dalle seguenti equazioni:

341) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 10$

344) $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$

342) $(x + 1)^2 + y^2 - 4 = 0$

345) $x^2 + y^2 + 3x + 4y + 4 = 0$

343) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

346) $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 1 = 0$

347) * Trova tutti i valori di c in modo che $x^2 + y^2 - 6x + 10y + c = 0$ sia l'equazione di una circonferenza.

Trova l'equazione generica della circonferenza con centro C e che passa per il punto P in questi casi:

348) $C[0; 0] \quad P[3; 4]$

350) $C[1; 1] \quad P[3; 1]$

349) $C[0; 0] \quad P[2; -1]$

351) $C[3; -4] \quad P[-4; 3]$

Trova i punti di incontro tra circonferenza e retta nei seguenti casi:

352) $(x + 2)^2 + y^2 = 10$

$y = x$

353) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 13$

$y = 5x - 2$

354) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

$2x + 3y = 0$

355) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$

$y = x - 1$

356) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

$-3x + 4y - 11 = 0$

357) $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 11$

$4x - 5y + 32 = 0$

Come gli esercizi 348-351, ma trova anche l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto P:

358) $C[2; 2]$ $P[1; 1]$

360) $C[0; 2]$ $P[2; 0]$

359) $C[1; 3]$ $P[2; 2]$

361) $C[0; 2]$ $P[1; 0]$

362) Trova l'equazione della retta che passa per $P[0; 0]$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$.

363) Trova l'equazione della retta che passa per $P[0; 0]$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.

Scrivi l'equazione della circonferenza con centro nel punto C e tangente alla retta secondo i dati:

364) retta $3x + 2y - 5 = 0$ centro $C[0; 0]$

367) retta $y = x + 3$ centro $C[4; 1]$

365) retta $y = 3x$ centro $C[-3; 1]$

368) retta $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ centro $C[0; 0]$

366) retta $y = 2x$ centro $C[-4; -4]$

369) * Scrivi l'equazione di almeno due circonferenze che sono tangenti alle rette $y = x$, $y = -x$

370) * Scrivi l'equazione di almeno due circonferenze che sono tangenti alle rette $y = \frac{1}{3}x$ e $y = -3x$

371) Trova l'intersezione tra la retta $y = 2x + 1$ e la circonferenza di centro $C[3; 2]$ e raggio $\sqrt{10}$.

372) Trova l'intersezione tra le due rette $y = 3x - 5$ e $2x + 3y + 6 = 0$.

373) Trova l'equazione della retta parallela a $y = 4x - 5$ e che passa per il punto $P[3; -3]$

374) Trova l'equazione della retta perpendicolare a $y = 2x - 3$ e che passa per il punto $P[2; -3]$

375) Stabilisci se il punto $P[3; 5]$ è dentro o fuori la circonferenza $x^2 + y^2 = 25$

376) Stabilisci se il punto $P[72; 55]$ è dentro o fuori la circonferenza $x^2 + y^2 - 130x - 100y + 6325 = 0$.

377) * Trova l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $A[0; 0]$, $B[6; 0]$, $C[4; 4]$.

Trova l'equazione delle circonferenze con centro C e che passano da P nei casi:

378) $C[3; 1]$ $P[4; 4]$

379) $C[2; -2]$ $P[-3; -2]$

380) Trova l'equazione delle rette tangenti in P alle circonferenze trovate negli esercizi 378 e 379.

Disegna queste circonferenze:

381) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$

382) $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$

383) $x^2 + y^2 + 8x - 10 = 0$

Scrivi l'equazione della circonferenza conoscendo il centro e la retta tangente:

384) $C[0; 0]$ $y = 2x + 5$

385) $C[1; -1]$ $y = -3x + 8$

386) $C[1; -3]$ $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Scrivi l'equazione generica delle circonferenze di cui conosci il centro e un loro punto:

387) $C[3; 2]$ $P[0; 2]$

388) $C[-1; -1]$ $P[3; 3]$

389) $C[2; -3]$ $P[6; -6]$

390) Trova l'equazione delle rette tangenti in P alle circonferenze degli esercizi 387-389.

* Trova l'equazione della retta che passa per il punto $[0; 0]$ e tangente alla circonferenza in questi casi:

391) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$

392) $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 40 = 0$

Trova l'intersezione tra retta e circonferenza in questi casi:

393) $x^2 + y^2 - 10x = 0$ $y = 2x - 5$

394) $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$ $y = x - 8$

Stabilisci se i seguenti punti sono fuori, dentro o sulla circonferenza $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$:

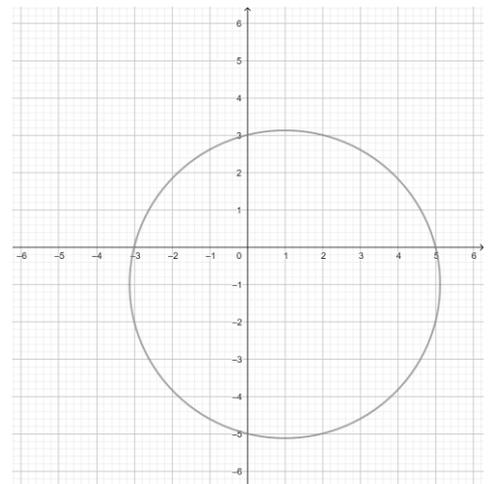
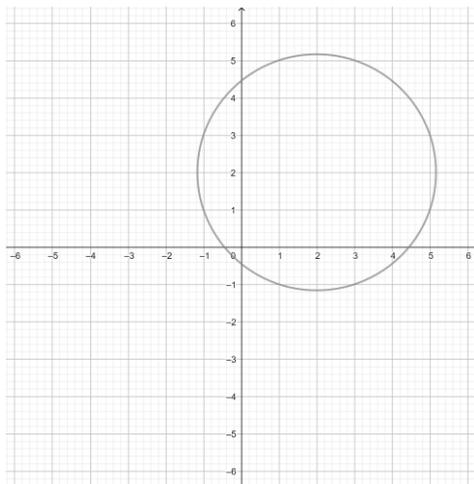
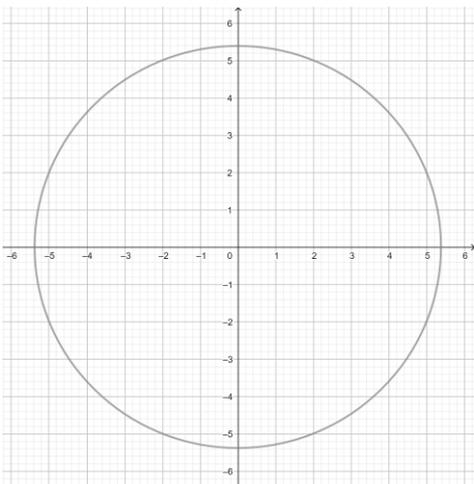
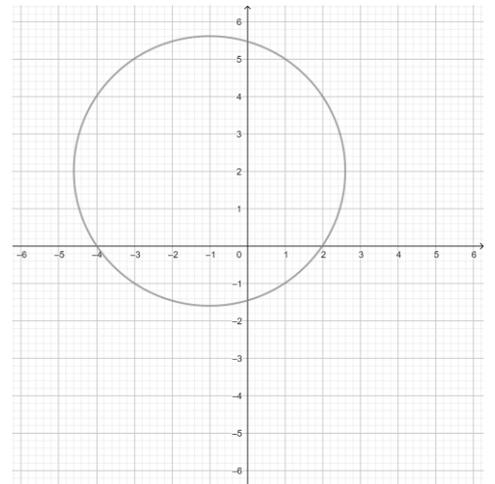
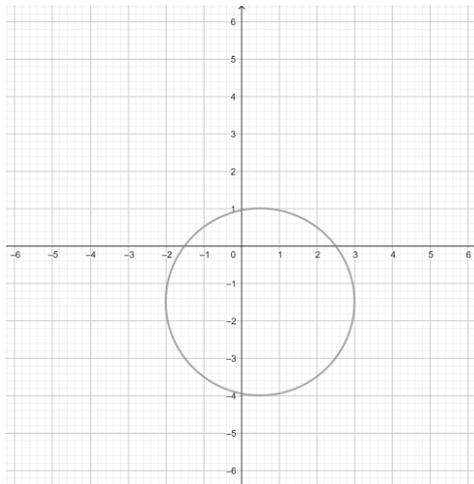
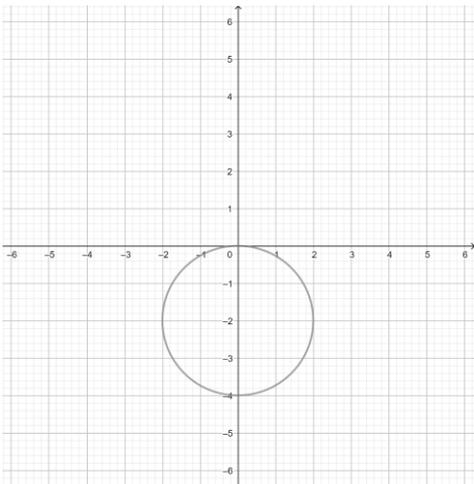
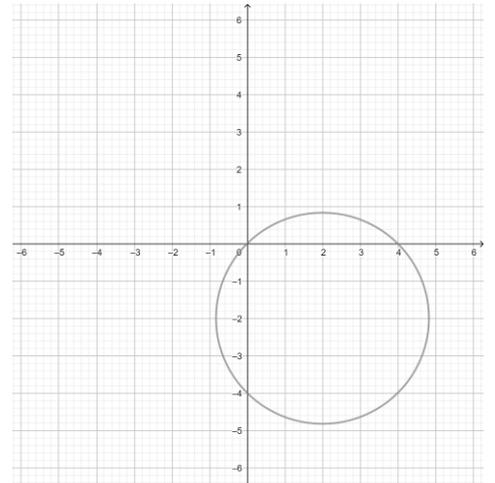
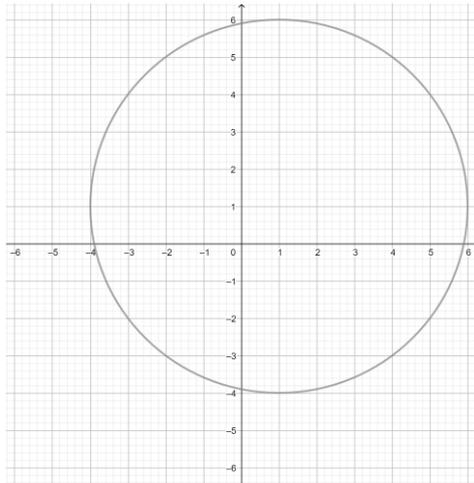
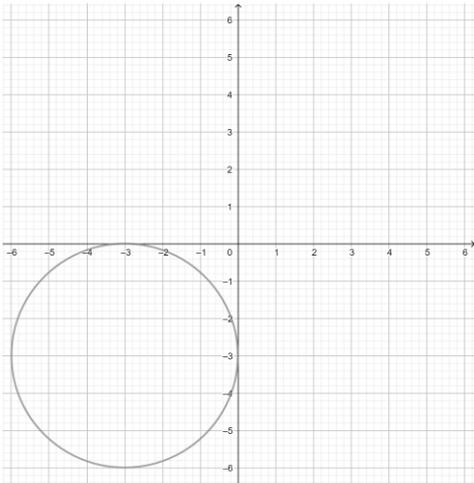
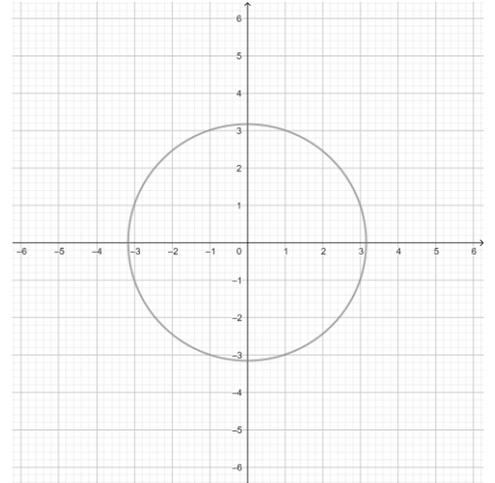
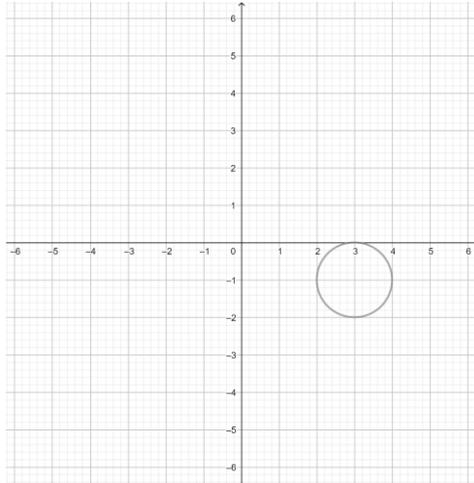
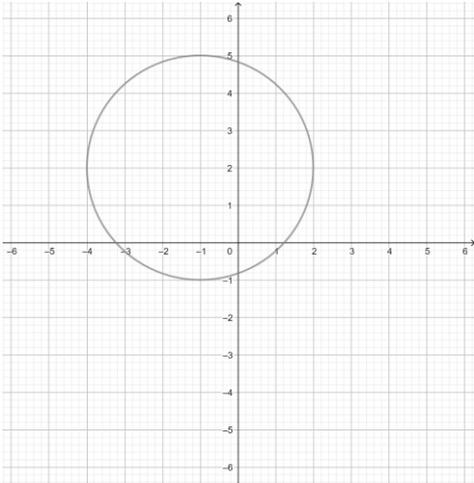
395) $A[2; -5]$

396) $B[7; -13]$

397) $C[-7; -5]$

398) $D[3; -14]$

399) Scrivi l'equazione delle seguenti circonferenze:



Trova l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 25 = 0$ e parallele alle rette:

400) $y = \frac{4}{3}x$

401) $y = 0$

402) $3x + 4y = 0$

403) * Trova l'equazione delle circonferenze che passano per il punto $P[-8; -1]$ e tangenti agli assi xy .

404) * Trova l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A[3; 2]$, $B[1,4]$ e tangente all'asse x .

405) * Trova l'equazione delle circonferenze iscritta e circoscritta al triangolo di vertici $A[0; 0]$, $B[0; 39]$, $C[80; 0]$.

406) Tra le rette parallele alla retta di equazione $y = \frac{2}{3}x$ determina quelle tangenti alla circonferenza di centro $C[1; -1]$ e raggio $\sqrt{13}$.

407) Tra le rette perpendicolari alla retta di equazione $y = \frac{3}{4}x$ determina quelle tangenti alla circonferenza di centro $C[1; -1]$ e raggio 5.

408) Tra le rette perpendicolari alla retta di equazione $y = 3x$ determina quelle tangenti alla circonferenza di centro $C[1; -1]$ e raggio $\sqrt{10}$.

409) Stabilisci per quali valori reali di r la circonferenza di centro $C[2; 2]$ e raggio r è esterna, tangente o secante alla retta di equazione $y = -x$.

410) Stabilisci per quali valori reali di r la circonferenza di centro $C[-3; 1]$ e raggio r è esterna, tangente o secante alla retta di equazione $y = -x$.

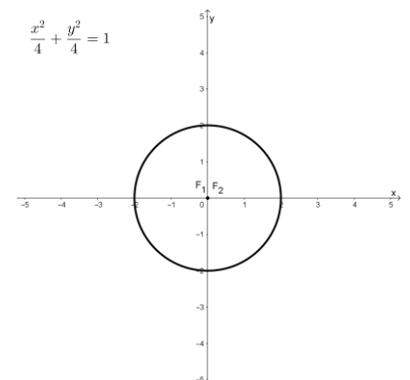
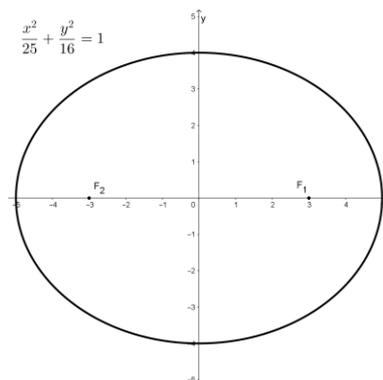
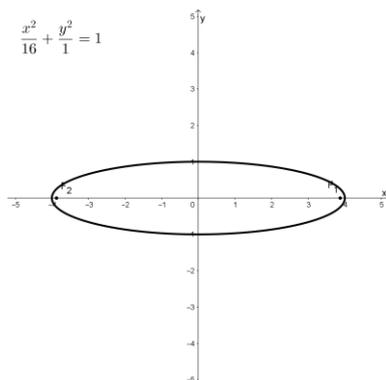
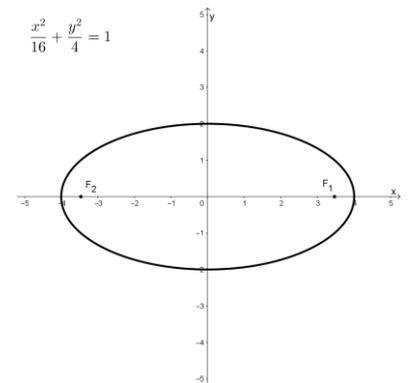
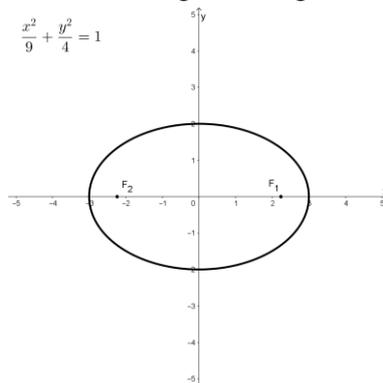
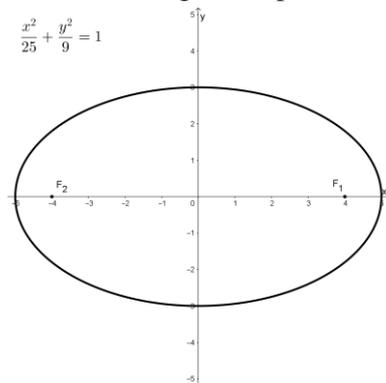
411) Trova la retta tangente alla circonferenza di centro $C[-3; 5]$ nel punto $P[0; 1]$.

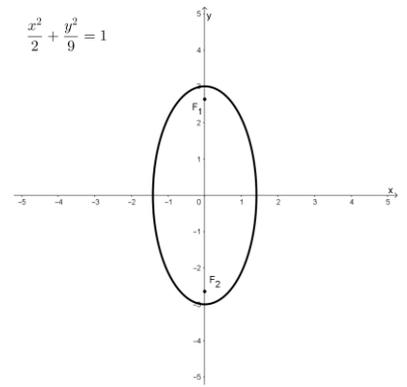
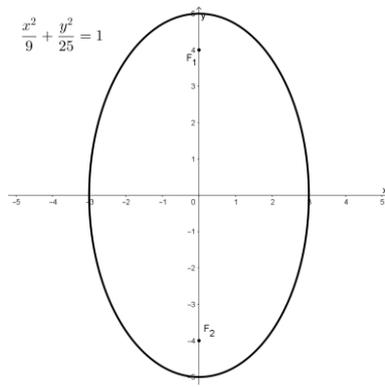
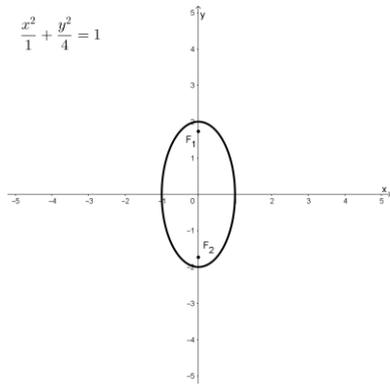
412) * Trova l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A[0; 0]$, $B[3; -1]$, $C[6; 0]$.

413) * Trova l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A[0; \sqrt{8}]$, $B[-2; -2]$, $C[2; -2]$.

ELLISSI, IPERBOLI, PARABOLE (E CIRCONFERENZE)

414) Guarda gli esempi e trova la regola per trovare la lunghezza degli assi e la posizione dei fuochi:





Trova la lunghezza degli assi e la posizione dei fuochi in queste equazioni:

415) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

419) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$

423) $4x^2 + 9y^2 = 1$

416) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

420) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} = 1$

424) $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1$

417) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

421) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$

425) $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

418) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

422) $x^2 + 4y^2 = 1$

426) $16x^2 + 25y^2 = 400$

Trova vertici e fuochi di queste ellissi:

427) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$

430) $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

433) $3x^2 + 5y^2 = 15$

428) $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

431) $16x^2 + 4y^2 = 1$

434) $4x^2 + 16y^2 = 25$

429) $4x^2 + 9y^2 = 1$

432) $x^2 + 4y^2 = 64$

435) $\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 3$

436) Stabilisci per quali valori reali di r la circonferenza di centro $C[-3; 0]$ e raggio r è esterna, tangente o secante alla retta di equazione $y = 2x + 1$.

437) * Una circonferenza di centro $C[-2; 4]$ interseca la retta $y = x + 2$ in due punti A e B . La distanza $|AB| = \sqrt{8}$. Trova il raggio della circonferenza.

438) * Una circonferenza di raggio $\sqrt{50}$ passa per i punti $A[0; 1]$ e $B[2; 5]$. Trova il centro della circonferenza.

439) Trova l'equazione dell'ellisse con vertici $A[4; 0]$, $B[-4; 0]$ e fuochi $F_1[3; 0]$ e $F_2[-3; 0]$.

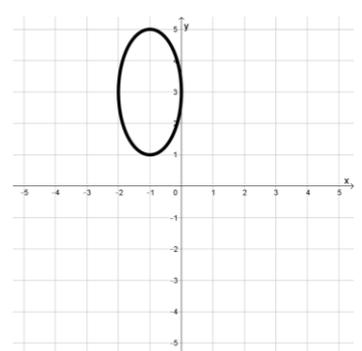
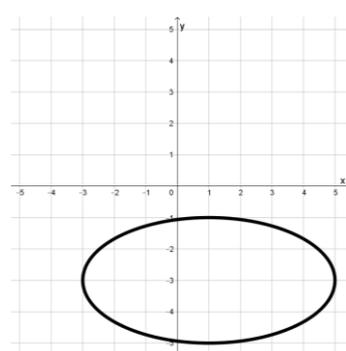
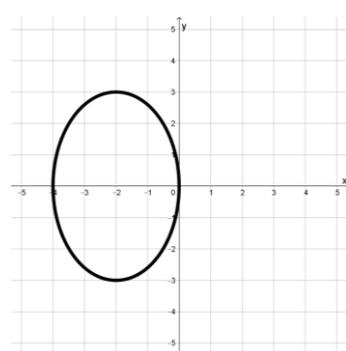
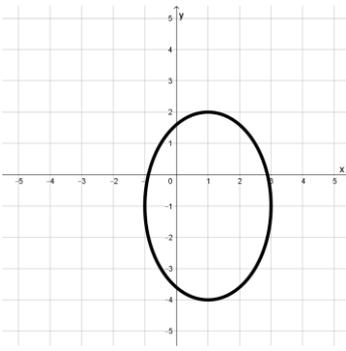
440) Trova l'equazione dell'ellisse con vertici $A[4; 0]$, $B[-4; 0]$ e fuochi $F_1[0; 3]$ e $F_2[0; -3]$.

441) Trova l'equazione dell'ellisse con vertici $A[4; 0]$, $B[-4; 0]$, $C[0; 6]$, $D[0; -6]$.

442) Trova l'equazione dell'ellisse con vertici $A[0; 1]$, $B[0; -1]$ e fuochi $F_1[1; 0]$ e $F_2[-1; 0]$.

443) Trova le intersezioni dell'ellisse $2x^2 + y^2 = 12$ con la retta $y = -x$.

444) Trova l'equazione delle ellissi nei disegni in basso:



445) Trova i fuochi e l'equazione dell'ellisse con vertici nei punti $A[0; 3]$, $B[0; -3]$, $C[4; 0]$, $D[-4; 0]$

446) Trova i fuochi e l'equazione dell'ellisse con vertici nei punti $A[2; 7]$, $B[2; 1]$, $C[-2; 4]$, $D[6; 4]$

Trova centro, a , b , c di queste ellissi:

447) $4x^2 + 9y^2 = 36$

451) $4x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$

455) $4x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

448) $4x^2 + 9y^2 = 144$

452) $4x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$

456) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 32 = 0$

449) $x^2 + 100y^2 = 25$

453) $x^2 + 9y^2 + 6x = 0$

457) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$

450) $4x^2 + y^2 - 4 = 0$

454) $4x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$

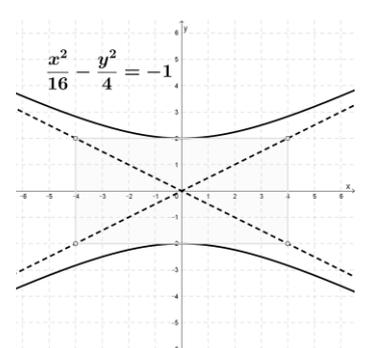
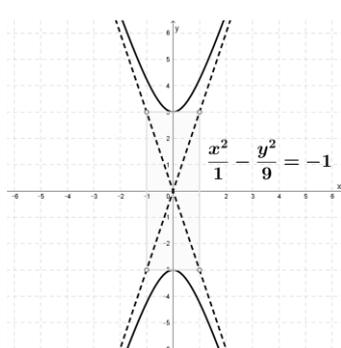
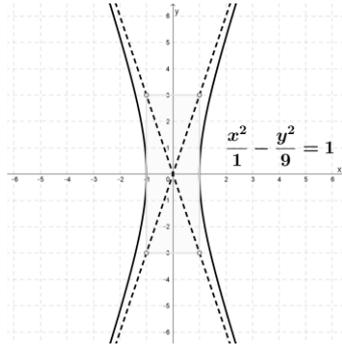
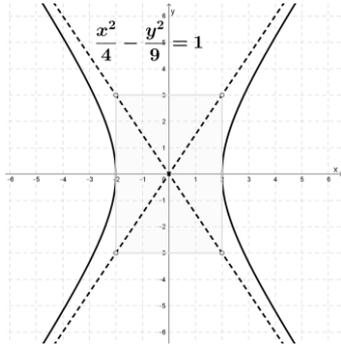
458) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y + 26 = 0$

459) Trova l'equazione dell'ellisse con fuochi in $F_1[3; 0]$ e $F_2[-3; 0]$ e passante per $P[4; 0]$.

460) Trova l'equazione dell'ellisse con fuochi in $F_1[2; 0]$ e $F_2[-2; 0]$ e passante per $P[0; 4]$.

461) Trova l'equazione dell'ellisse con fuochi in $F_1[1; 0]$ e $F_2[-1; 0]$ e passante per $P\left[1; \frac{3}{2}\right]$.

462) Guarda gli esempi e trova la regola per disegnare l'iperbole e i fuochi, e trovare la lunghezza degli assi:



Disegna le seguenti iperboli e i loro asintoti:

463) $x^2 - y^2 = 1$

466) $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$

469) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

464) $x^2 - y^2 = -1$

467) $4x^2 - 9y^2 = 36$

470) $4x^2 - 4y^2 = 1$

465) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

468) $x^2 - y^2 = 4$

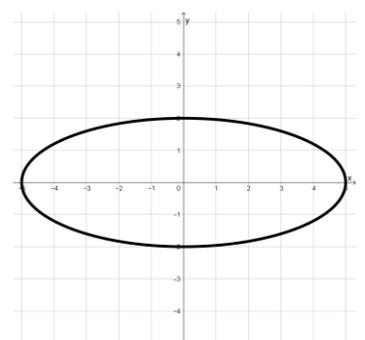
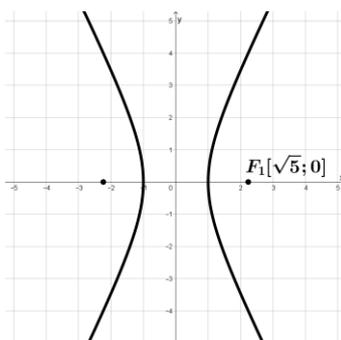
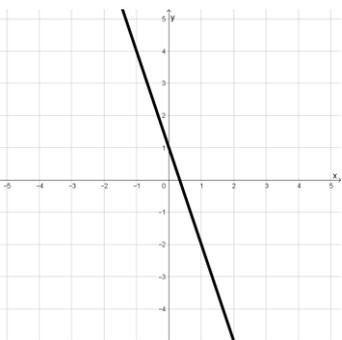
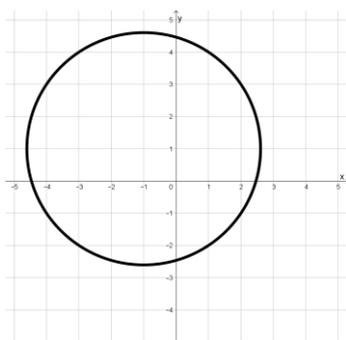
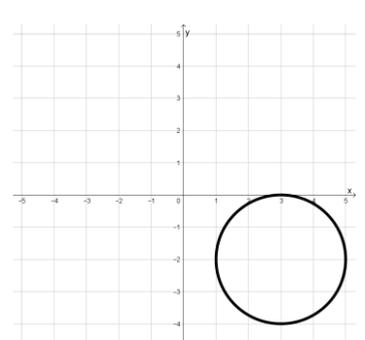
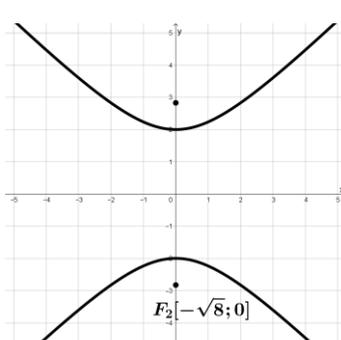
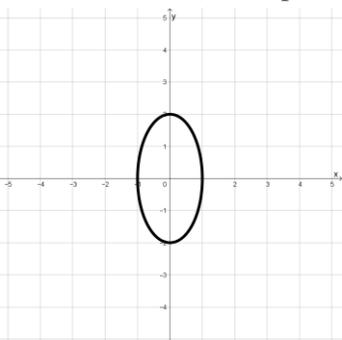
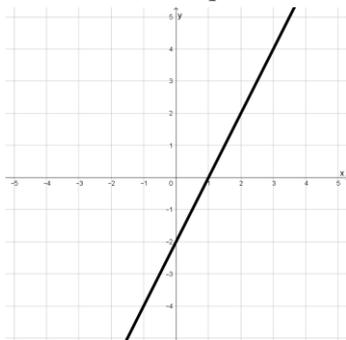
471) $8x^2 - 2y^2 = 1$

472) Trova i fuochi delle iperboli degli esercizi 463-471.

473) * Trova l'equazione di un'iperbole in cui a , b , c sono numeri pari consecutivi.

474) Trova il valore di b in modo che l'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ abbia un fuoco in $F[0; -6]$.

475) Trova le equazioni dei grafici in basso. Quando possibile trova anche fuochi e asintoti.



Disegna sul piano cartesiano queste equazioni:

476) $y = \frac{2}{3}x - 2$

477) $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

478) $x^2 - y^2 = 1$

479) $x^2 - y^2 = 16$

480) $x^2 + 4y^2 = 16$

481) $4y^2 - x^2 = 16$ (attenzione!)

482) $y = -3x + 3$

483) $4x^2 + 16y^2 = 64$

484) $4x^2 + 16y^2 = 16$

485) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$

486) L'ellisse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passa per il punto $A[-3; 2]$. Trova il valore di b e disegna l'ellisse.

487) Un'ellisse ha due fuochi $F_1[2; 0]$ e $F_2[-2; 0]$ e passa per il punto $A[2; 3]$. Scrivi l'equazione dell'ellisse.

488) Un'iperbole ha asintoti $y = \pm \frac{2}{3}x$ e i vertici sono nei punti $A[3; 0]$ e $B[-3; 0]$. Trova l'equazione dell'iperbole e le coordinate dei fuochi.

489) Come l'esercizio precedente, ma con asintoti $y = \pm \frac{2}{3}x$ e i vertici nei punti $A[6; 0]$ e $B[-6; 0]$.

490) Come l'esercizio precedente, ma con asintoti $y = \pm \frac{2}{3}x$ e i vertici sono nei punti $A[0; 6]$ e $B[0; -6]$.

Delle seguenti parabole trova l'intersezione con l'asse x , dove è positiva, dove è negativa, il vertice:

491) $y = x^2$

504) $y = x^2 - 2x + 1$

517) $y = x^2 - 2x$

492) $y = 2x^2$

505) $y = 2x^2 - 4x + 2$

518) $y = x^2 + 4x + 4$

493) $y = 5x^2$

506) $y = 3x^2 - 6x + 3$

519) $y = x^2 + 4x + 5$

494) $y = -3x^2$

507) $y = x^2 - 2x$

520) $y = x^2 + 4x + 3$

495) $y = x^2 + 1$

508) $y = x^2 - 2x - 1$

521) $y = x^2 + 4x$

496) $y = x^2 - 1$

509) $y = x^2 - 2x - 2$

522) $y = 2x^2 + 8x + 8$

497) $y = x^2 - 2$

510) $y = x^2 - 2x - 3$

523) $y = 2x^2 + 8x - 10$

498) $y = x^2 - 4$

511) $y = x^2 - 2x - 4$

524) $y = ax^2 + bx + c$

499) $y = -x^2 - 1$

512) $y = x^2 - 2x + 2$

525) $y = x^2 - 3x + 2$

500) $y = -x^2 + 9$

513) $y = x^2 - 2x + 3$

526) $y = x^2 + 5x - 6$

501) $y = 2x^2 - 1$

514) $y = x^2 - 2x + 5$

527) $y = x^2 - 6x + 5$

502) $y = 2x^2 - 8$

515) $y = 2x^2 - 4x + 3$

528) $y = x^2 - 6x + 8$

503) $y = -4x^2 + 1$

516) $y = 2x^2 - 4x$

529) $y = x^2 + 12x + 20$

Delle seguenti parabole trova l'intersezione con l'asse y , dove è positiva, dove è negativa, il vertice:

530) $x = y^2$

535) $x = y^2 - 1$

540) $x + y^2 = 0$

531) $x = 2y^2$

536) $x = y^2 - 2$

541) $x + y^2 = 4$

532) $x = 5y^2$

537) $x = y^2 - 4$

542) $x + y = y^2$

533) $x = -3y^2$

538) $x = y^2 + 4y + 3$

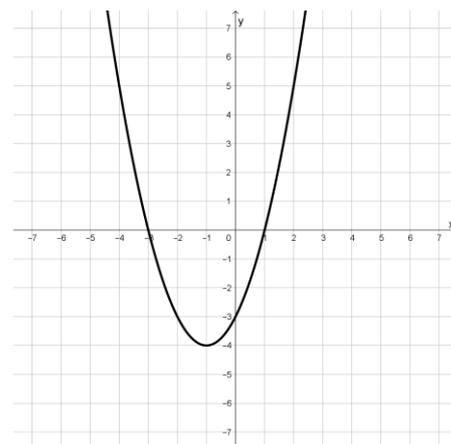
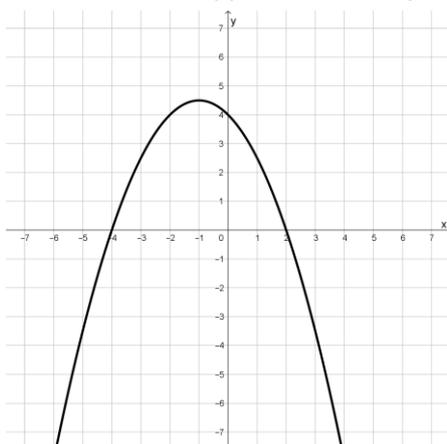
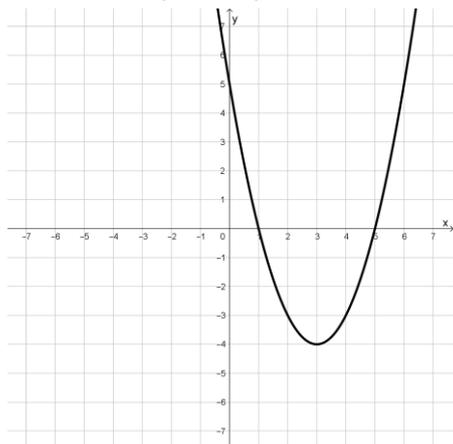
543) $x - y = y^2$

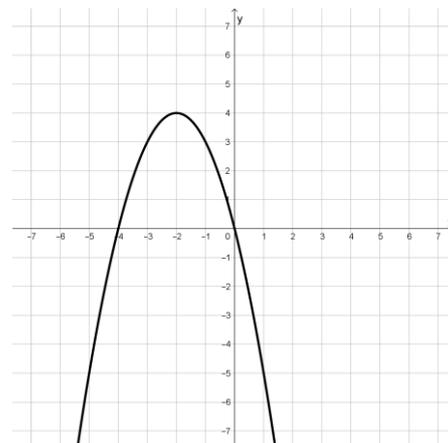
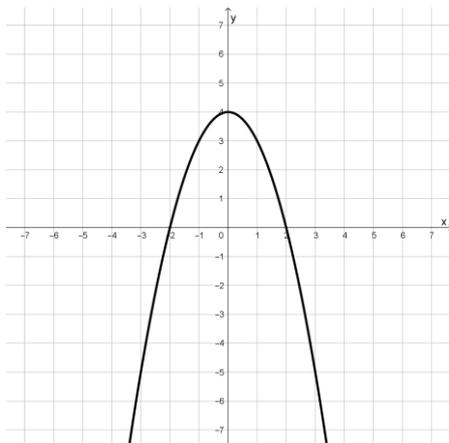
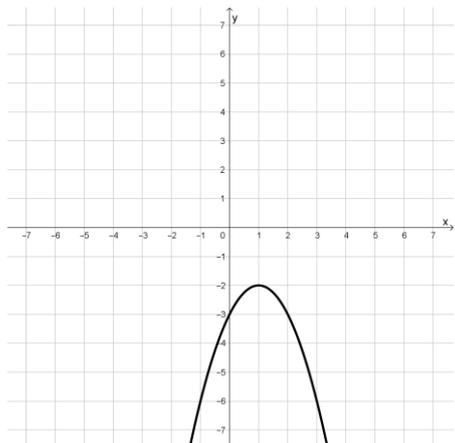
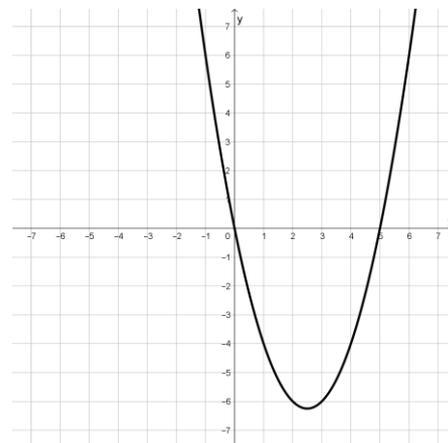
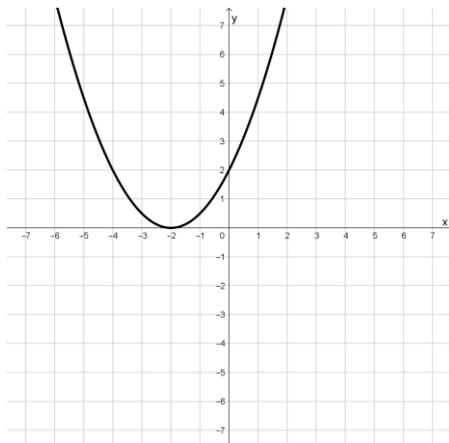
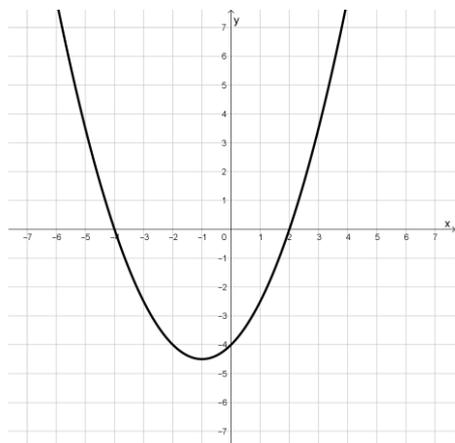
534) $x = y^2 + 1$

539) $x = 2y^2 + ny + 7$

544) $y(y + 2) + x + 1 = 0$

545) * Di ogni disegno decidi se i valori di a, b, c sono maggiori, minori, uguali a 0.





- 546) * Nell'esercizio precedente trova l'equazione delle parabole.
- 547) * Stabilisci cosa rappresenta l'equazione $x^2 + 4y^2 = 4x + 4y$ e disegnalala.
- 548) * Stabilisci cosa rappresenta l'equazione $x^2 - 4y^2 = 4x - 4y$ e disegnalala.
- 549) * Scrivi l'equazione e disegna una parabola che passa per il punto $A[3; 10]$ e con vertice in $V[0; 1]$.
- 550) Trova l'intersezione tra la parabola $y = x^2 - 3x + 2$ e la retta $y = -x + 2$. Trova la distanza tra le intersezioni.
- 551) Trova l'intersezione tra la parabola $x = 2y^2 - 5y + 2$ e la retta $x + 4y - 1 = 0$.
- 552) Trova l'intersezione tra la retta $y = 2x - 3$ e la parabola $y = 2x^2 - 6x - 3$. Trova la distanza tra le intersezioni.
- 553) Trova una retta tangente alla parabola $y = x^2$ nel punto di ascissa $x = 2$.
- 554) Trova l'intersezione tra la retta $y = 2x - 3$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$
- 555) * Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ trova i valori di a per cui la distanza tra i punti di intersezione tra la circonferenza e la retta $y = ax$ sia massima.
- 556) * Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ trova i valori di a per cui la distanza tra i punti di intersezione tra la circonferenza e la retta $y = ax$ sia minima.
- 557) Una retta interseca la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ nei punti $A[-4; -2]$ e $B[5; 1]$. Trova l'equazione esplicita della retta.
- 558) La distanza minima terra - sole (perigeo) è 147,1 milioni di Km, la distanza massima (apogeo) è 152,1 milioni di Km. Trova l'equazione dell'ellisse che rappresenta l'orbita della terra, in cui il sole è un fuoco e il centro del sistema solare è l'origine.
- 559) * Disegna la parabola $x^2 = 4y$. Trova l'area del quadrato ABCD, dove A è il vertice della parabola, C è un punto sull'asse y e i punti B, D sono sulla parabola.
- 560) * Disegna la parabola con vertice $V[2; 2]$, che passa per $P[3; 5]$ e con asse parallelo all'asse y .

561) * Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola $y = x^2 - 3x + 4$ nel punto $P[1; 2]$.

CONICHE E NUMERI COMPLESSI:

562) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z| = 2$. $(z = x + iy \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2})$

563) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 3| = 2$.

564) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 3 - 5i| = 4$.

565) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z + 4 - i| = 3$.

566) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 3| + |z + 3| = 10$.

567) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 4| + |z + 4| = 10$.

568) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 3i| + |z + 3i| = 10$.

569) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 5| - |z + 5| = 8$.

570) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 5| - |z + 5| = 6$.

571) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 5i| - |z + 5i| = 8$.

572) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 5i| - |z + 5i| = 6$.

573) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z - 5i| - |z + 5i| = 6$.

574) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z + 5| - |z - 5| = 8$.

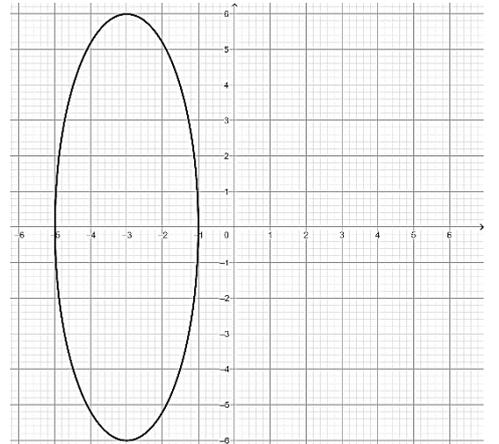
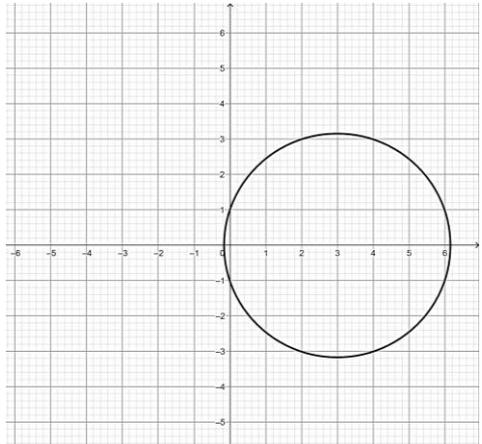
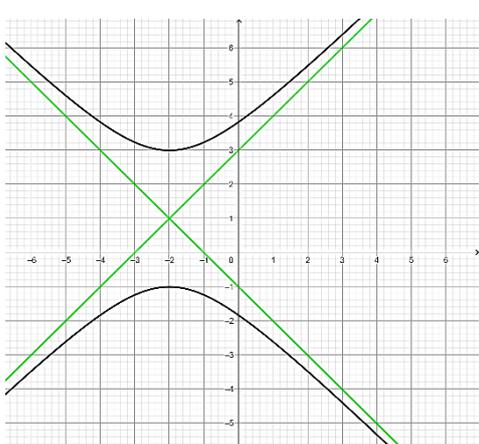
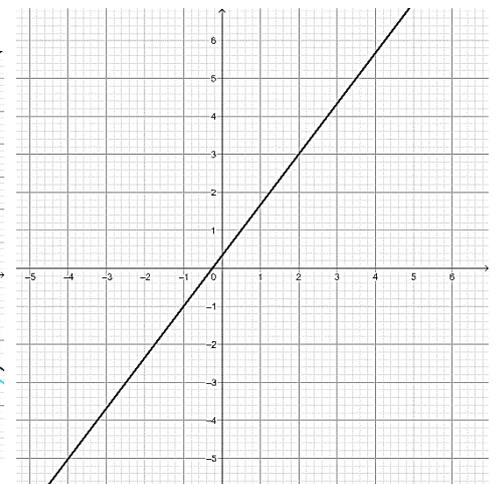
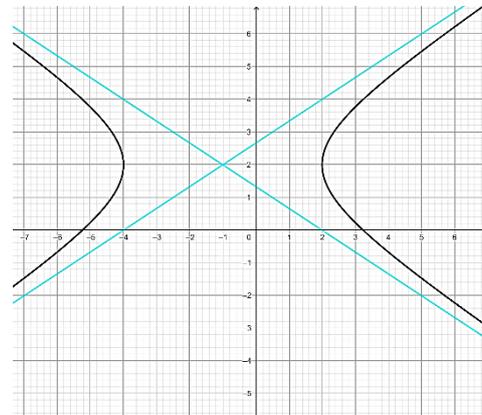
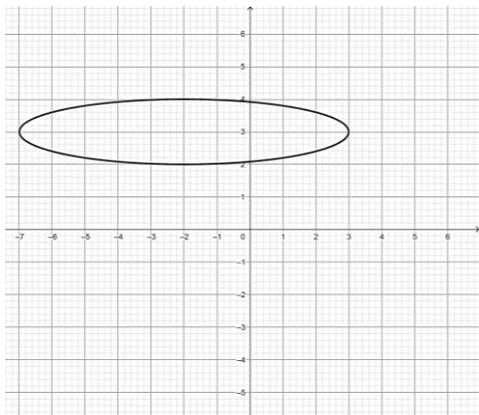
575) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z + 5| - |z - 5| = 6$.

576) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z + 5i| - |z - 5i| = 8$.

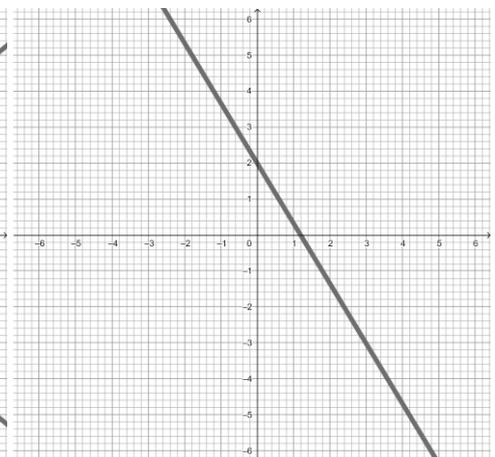
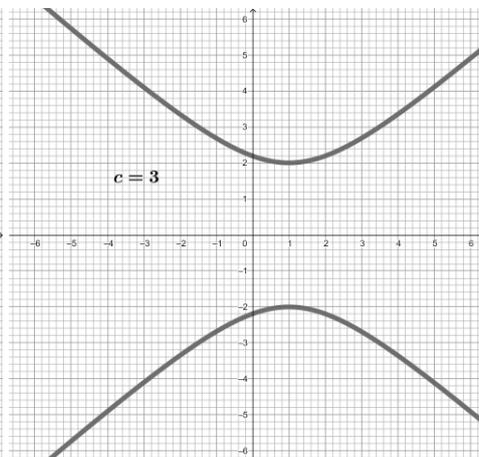
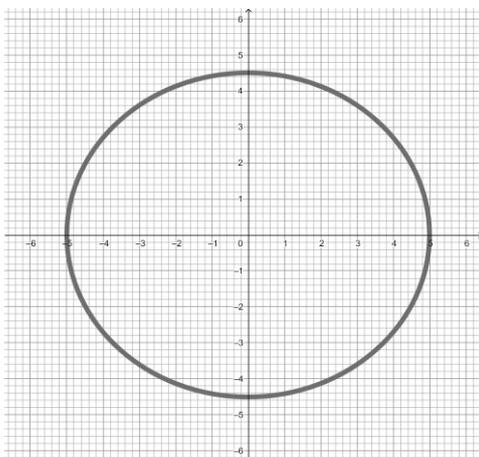
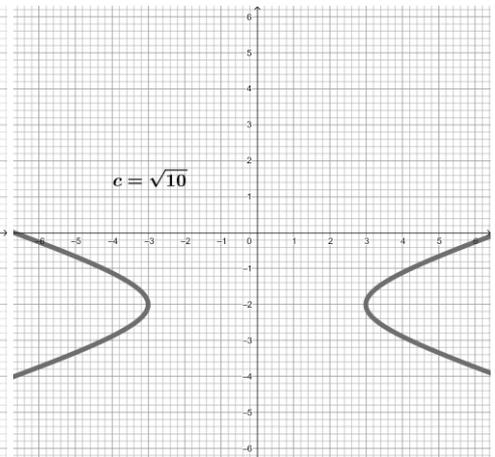
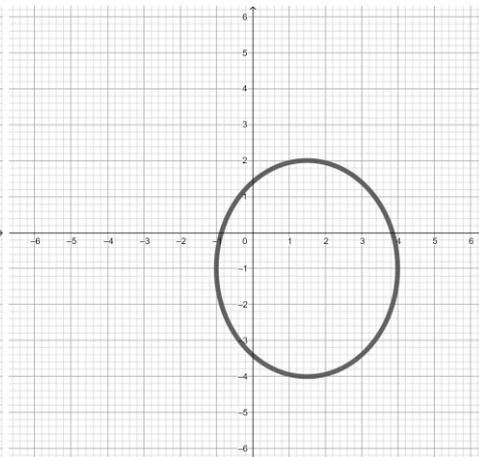
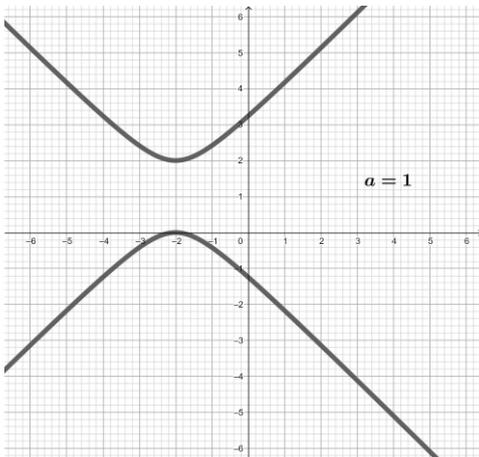
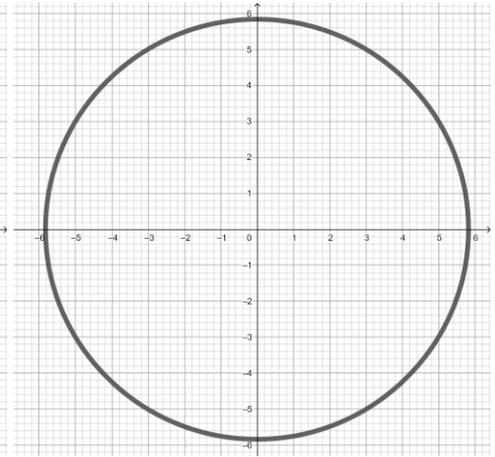
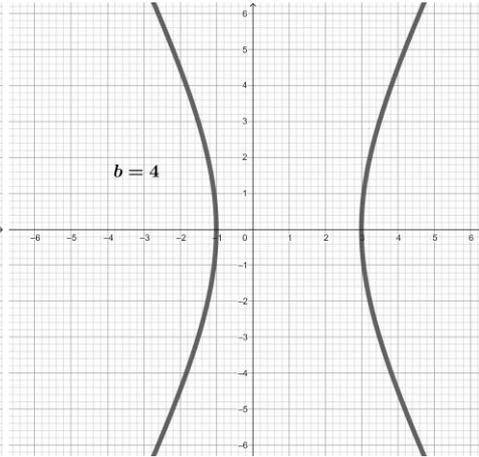
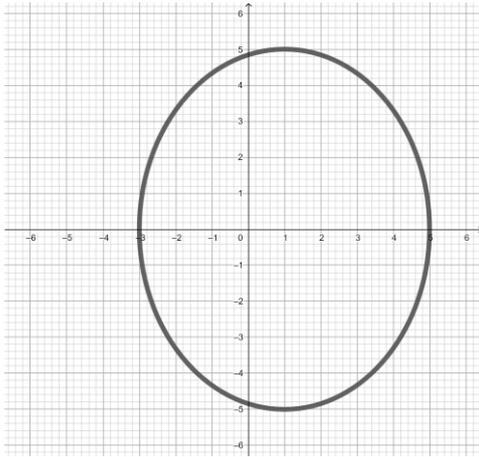
577) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z + 5i| = |z - 5i|$.

578) Disegna sul piano di Gauss i numeri complessi $|z + 2 - 3i| = |z - 6 + 5i|$.

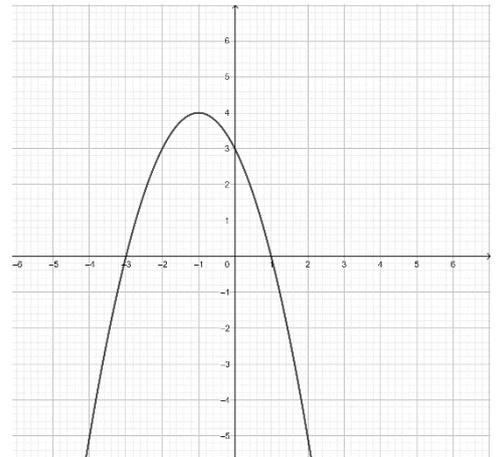
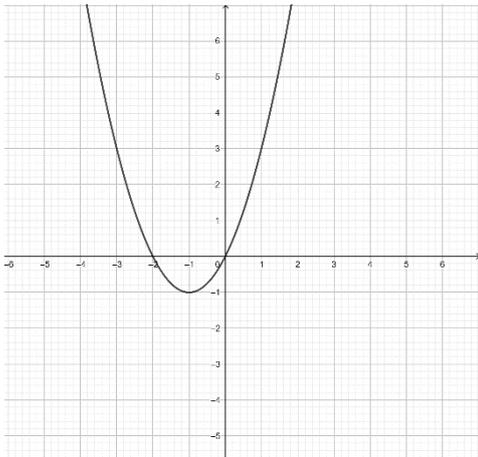
579) Scrivi l'equazione di queste coniche e rette (in forma esplicita). Scrivi anche l'equazione degli asintoti e le coordinate dei fuochi.



580) Scrivi l'equazione delle coniche, le coordinate dei fuochi e l'equazione esplicita degli asintoti:



- 581) Una circonferenza ha centro $C[-3; -3]$ e passa per il punto $A[2; 0]$. Scrivi l'equazione della circonferenza e della retta tangente alla circonferenza in A .
- 582) Una circonferenza di centro $C[-3,4]$ è tangente alla retta $y = 5x - 1$. Scrivi l'equazione della circonferenza.
- 583) Una circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza e che passano per il punto $[0; 0]$ (cioè le rette $y = mx$).
- 584) Una circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$. Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza e che passano per il punto $[9; 7]$ (cioè le rette $(y - 7) = m(x - 9)$).
- 585) Di queste parabole, scrivi le intersezioni con gli assi, per quali intervalli y è positiva, per quali intervalli la funzione è crescente, quali valori può avere y , se a, b sono positivi o negativi, il valore di c , le coordinate del vertice.



- 586) Disegna le seguenti parabole e scrivi le coordinate del vertice e le intersezioni con gli assi:
- a) $x = 2y^2 - 4$ b) $y = -2x^2 + 5x - 2$ c) $x + y^2 + y + 2 = 0$
- 587) Delle seguenti parabole, scrivi gli intervalli di x per cui y è positivo:
- a) $y = \frac{1}{25}x^2 - 1$ b) $y = -\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{3}$
- c) $y = -4x^2 + 12x - 9$ d) $y = 2x^2 - 6x + 9$
- 588) Calcola le intersezioni tra parabola e retta in questi due casi:
- a) Parabola $y = 3x^2 + 5x + 3$ retta $y = 4x + 5$
- b) Parabola $y = -18x^2 + 15x - 8$ retta $y = \frac{1}{3}x + 5$
- 589) Scrivi l'equazione di tutti i punti equidistanti dalla retta $x = -5$ e dal punto $A[1; -3]$.

Studia il segno di queste funzioni:

590) $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{5 - x}$

594) $y = x^4 - 3x^2 + 2$

597) $y = \frac{(4-x)(x^2-9)}{(4-x^2)(x+4)}$

591) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x - 3}$

595) $y = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 4x$

598) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

592) $y = -x^3 + x^2 - x + 1$

596) $y = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{9}x^3$

599) $y = \frac{5}{9-x^2}$

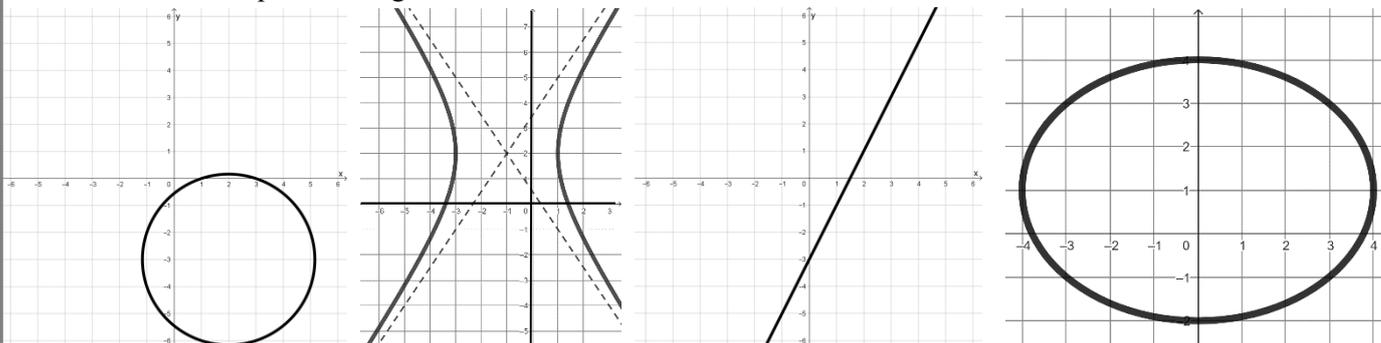
593) $y = x^3 + 10x^2 + 32x + 32$

600) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

SIMULAZIONE TEST CONICHE (durata 75 minuti):

- A. Scrivi l'equazione generica della circonferenza con centro in $C[-3; 7]$ e che passa per il punto $A[0; 6]$.
Disegna la circonferenza.
- B. Calcola i valori di c in modo che l'equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ rappresenti una circonferenza.
- C. Calcola i punti di incontro tra la retta $y = 2x - 5$ e la circonferenza $(x - 7)^2 + (y - 14)^2 = 25$
- D. Scrivi l'equazione **esplicita** della retta tangente nel punto $A[1; -5]$ alla circonferenza con centro $C[-2; -3]$.
Scrivi l'equazione **generica** della circonferenza.
- E. Una circonferenza ha centro $C[4; -6]$ ed è tangente alla retta $y = 4x + 12$. Scrivi l'equazione della circonferenza.

- F. Scrivi le **equazioni** che esprimono le seguenti rappresentazioni sul piano cartesiano, e trova quando possibile i **fuochi** e l'equazione degli **asintoti**:



- G. Trova le intersezioni con gli assi della conica $y = 2x^2 + 3x + 1$
- H. Rappresenta sul piano cartesiano le seguenti equazioni e trova, quando è possibile, **vertici, fuochi, asintoti, centro, raggio**:
- $y = 2x^2 + 3x + 1$
 - $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
 - $x^2 + y^2 + 8x - 8y + 7 = 0$
 - $(x + 2)^2 - 9y^2 = -9$
- I. Trova l'intersezione tra la retta $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e la parabola $y = x^2$.

SUCCESSIONI:

590) È data la funzione $f(n) = 1 + \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Trova i primi 10 valori della funzione e disegnali sul piano cartesiano.

591) È data la funzione $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Il valore di $f(n)$ è il numero di divisori del numero n . Trova i primi 10 valori e disegnali sul piano cartesiano.

592) È data la funzione $f(n) = (-1)^n + 1$. Trova i primi 10 valori della funzione e disegnali sul piano cartesiano.

È data la successione di numeri $\{2, \sqrt{7}, \pi, 4, \frac{5}{2}, -7, \sqrt{99}, 100, -1, 0, -7, \sqrt{3}\}$.

593) Scrivi il termine a_5

594) Scrivi i valori di n per cui $a_n < 0$

595) Scrivi i valori di a_n per cui $n < 3$

Completa le seguenti successioni:

596) 2 5 8 11 ...

597) 1 4 9 ...

598) 3 $\frac{11}{3}$ $\frac{13}{3}$...

599) 4 $\frac{13}{4}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{4}$...

600) 126 42 14 ...

601) 96 -48 24 -12 ...

602) 1 1 2 3 5 ...

603) 5 9 12 14 15 ...

612) 1 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{16}$... $\frac{7}{64}$...

604) 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$...

605) 2 3 5 8 12 ...

606) 2 4 8 14 ...

607) 1 1 2 4 7 13 ...

608) $\frac{2}{27}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{8}{3}$ 16 ...

609) 1 5 14 30 ...

610) 8 12 18 27 ...

611) 0 $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$...

Scrivi i primi 5 termini di queste successioni:

613) $a_n = 2^n$

614) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

615) $a_n = n^2 - 3n + 2$

616) $a_n = (-2)^n$

617) $a_n = -n^2$

618) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

619) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

620) $a_n = 4n - 5$

621) $a_n = 3 \cdot 2^n$

622) $a_n = 10 \cdot 2^{-n}$

623) $a_n = \cos n\pi$

624) $a_n = \sin \frac{n\pi}{6}$

625) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \end{cases}$

626) $\begin{cases} a_1 = -7 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$

627) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = -a_{n-1} \end{cases}$

628) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = (a_{n-1})^2 \end{cases}$

629) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = (a_{n-1})^2 - 2 \end{cases}$

630) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$

631) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$

632) Trova una formula (anche ricorsiva) per le successioni degli esercizi 595-611.

633) Decidi se le successioni degli 595-630 sono crescenti o decrescenti, divergenti, convergenti o indeterminate.

Scrivi come funzione e in maniera ricorsiva queste successioni:

634) 1 2 3 4 5 6 7...

635) 2 4 6 8 10 12 14...

636) 5 4 3 2 1 0...

637) 4 7 10 13 16 19 22...

638) 7 2 -3 -8 -13...

639) 13 13 13 13 13 13...

640) Della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ trova i termini $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{10}, a_{100}, a_{1000}, a_{10000}, a_{100000}$.

- 641) * Completa la tabella. Interessi composti = interessi che si calcolano su quello che si ha al presente
Interessi semplici = interessi che si calcolano su quello che si ha all'inizio

Interessi composti	Cifra iniziale:	Cifra finale:
100% ogni anno	1 000 000 Kč	
50% ogni 6 mesi	1 000 000 Kč	
$\frac{100}{4}\%$ = 25% = un quarto ogni 3 mesi	1 000 000 Kč	
$\frac{100}{12}\%$ = un dodicesimo ogni mese	1 000 000 Kč	
$\frac{100}{365}\%$ = $\frac{1}{365}$ ogni giorno	1 000 000 Kč	
$\frac{100}{8760}\%$ ogni ora	1 000 000 Kč	
$\frac{100}{525\,600}\%$ ogni minuto	1 000 000 Kč	
$\frac{100}{31\,536\,000}\%$ ogni secondo	1 000 000 Kč	

Decidi se queste successioni sono convergenti o divergenti, crescenti o decrescenti:

- 642) $a_n = \frac{1}{4}n + 2$ 648) $a_n = 2^n$ 655) $a_n = (-0,5)^n$
 643) $a_n = -\frac{1}{4}n + 2$ 649) $a_n = 1^n$ 656) $a_n = \frac{10n}{2^n}$
 644) $a_n = \frac{2n}{n+2}$ 650) $a_n = 0,9^n$ 657) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$
 645) $a_n = n^2 - 7n + 10$ 651) $a_n = 1,1^n$ 658) $a_n = \frac{n^2}{10n+1}$
 646) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ 652) $a_n = \frac{n}{2^n}$ 659) $a_n = (-1)^n \cdot n$
 647) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$ 653) $a_n = -2^n$
 654) $a_n = (-2)^n$

Scrivi i primi 5 elementi di queste successioni:

- 660) $a_n = 2n + 1$ 668) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \end{cases}$
 661) $a_n = 4n + 3$ 669) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 10 \end{cases}$
 662) $a_n = -4n$ 670) $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = a_{n-1} - 10 \end{cases}$
 663) $a_n = 10n + 7$ 671) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$
 664) $a_n = -100n + 1$ 672) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = a_{n-1} - 2 \end{cases}$
 665) $a_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$
 666) $a_n = -\frac{1}{10}n + 1$
 667) $a_n = 7n$

Scrivi come funzione e in maniera ricorsiva queste progressioni aritmetiche:

- 673) 3 6 9 12... 679) $\frac{2}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{8}{7}$...
 674) 5 10 15 20 25... 680) $\frac{5}{2}$ 4 $\frac{11}{2}$ 7...
 675) 100 95 90 85 80... 681) 7 $\frac{11}{2}$ 4 $\frac{5}{2}$...
 676) -1 -2 -3 -4... 682) $\frac{1}{3}$ 2 $\frac{11}{3}$ $\frac{16}{3}$ 7...
 677) -5 -3 -1 1 3...
 678) 0 1 2 3 4 5...

Scrivi i primi 5 elementi, la formula e la forma ricorsiva delle progressioni aritmetiche in cui:

- 679) $a_1 = 3$ $d = 5$ 681) $a_1 = 5$ $d = -1$ 683) $a_1 = 0$ $d = -7$
 680) $a_1 = 8$ $d = 10$ 682) $a_1 = 10$ $d = 0$ 684) $a_1 = 4$ $d = 4$

Scrivi i primi 5 elementi di queste progressioni aritmetiche:

685) $a_n = 3n - 15$

686) $a_n = -3n + 15$

687) $a_n = 2n$

688) $a_n = 8$

689) $a_n = \frac{2}{3}n - 1$

690) $a_n = 10 - 10n$

691) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$

692) $\begin{cases} a_1 = -7 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$

693) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4} \end{cases}$

694) Scrivi le formule degli esercizi 685-690 in forma ricorsiva.

695) Scrivi la forma ricorsiva degli esercizi 691-693 in formule.

696) Trova la somma dei primi 100 numeri.

697) Trova la somma dei primi 1 000 numeri.

698) Trova la somma dei primi 10 000 numeri.

699) Trova la somma dei primi 1 000 numeri dispari.

700) Trova la somma dei primi 1 000 numeri pari.

701) Trova la somma dei primi 5 000 numeri.

702) Trova la somma di tutti i numeri tra 1 000 e 2 000 (compresi).

703) Trova la somma di tutti i numeri dispari tra 1 000 e 2 000.

704) Trova la somma di tutti i numeri tra -1000 e 3000 (compresi).

705) Trova la somma di tutti i numeri divisibili per 3 tra 0 e 1000.

706) Trova la somma di tutti i numeri divisibili per 7 tra 0 e 1000.

707) * Trova la somma di tutti i numeri **non** divisibili per 8 tra 0 e 1000.

Trova la somma dei primi 100 termini delle seguenti progressioni aritmetiche:

708) $a_1 = 5 \quad d = 5$

709) $a_1 = 3 \quad d = 7$

710) $a_1 = -50 \quad d = 1$

711) $a_1 = -100 \quad d = 2$

712) $a_1 = 50 \quad d = -1$

713) $a_1 = 200 \quad d = 10$

714) $a_1 = 200 \quad d = -10$

715) $a_1 = 8 \quad d = 0$

Trova la ragione, i primi 5 termini e la somma dei primi 100 termini delle progressioni aritmetiche in cui:

716) $\begin{cases} a_3 + a_4 = 15 \\ a_1 + a_2 = 10 \end{cases}$

720) $\begin{cases} a_3 + a_4 = 15 \\ a_1 = 10 \end{cases}$

717) $\begin{cases} a_3 + a_4 = 15 \\ a_1 - a_2 = 10 \end{cases}$

721) $\begin{cases} a_3 = 15 \\ a_1 + a_2 = 10 \end{cases}$

718) $\begin{cases} a_3 + a_4 = 15 \\ a_2 - a_1 = 10 \end{cases}$

722) $\begin{cases} a_4 = 15 \\ a_1 + a_2 = 10 \end{cases}$

719) $\begin{cases} a_3 + a_4 = 15 \\ a_2 = 10 \end{cases}$

723) $\begin{cases} a_3 - a_4 = 15 \\ a_1 + a_2 = 10 \end{cases}$

Si hanno due progressioni aritmetiche. La prima ha ragione 4 e parte da 5. La seconda ha ragione 3 e parte da 42.

724) Per quale valore di n le due progressioni si incontreranno?725) * Per quale valore di n le due progressioni avranno la stessa somma?

726) * Un operaio è stato assunto per scavare un pozzo profondo 49 metri. Il primo metro costa 15 euro e ciascuno dei metri successivi costa 6 euro in più del metro precedente. Quanto costa l'ultimo metro scavato? Qual è il costo totale dello scavo?

727) * Qual è la somma degli angoli di un triangolo? Di un quadrato? Di un pentagono? Di una figura di n lati?

728) * Quante diagonali ha un triangolo? Un quadrato? Un pentagono? Una figura di 8 lati? Una figura di n lati?

Trova s_{1000} per le seguenti progressioni aritmetiche:

729) $a_1 = 3 \quad d = 3$

732) $a_1 = 0 \quad d = 10$

736) $a_1 = -1000 \quad d = 2$

730) $a_1 = 8 \quad d = -1$

733) $a_1 = 1000 \quad d = 2$

737) $a_1 = -999 \quad d = 2$

731) $a_1 = 5 \quad d = \frac{1}{2}$

734) $a_1 = 1000 \quad d = -1$

738) $a_1 = 100 \quad d = -\frac{1}{10}$

735) $a_1 = 1000 \quad d = -2$

Trova la ragione e il termine a_{100} delle progressioni aritmetiche in cui:

739) $a_1 = 10 \quad a_5 = 18$

742) $a_{10} = 42 \quad a_{20} = 12$

745) $a_1 = 100 \quad a_{50} = 200$

740) $a_1 = 10 \quad a_{10} = 1$

743) $a_{10} = 70 \quad a_{20} = 0$

746) $a_1 = 200 \quad a_{50} = 0$

741) $a_{200} = 5 \quad a_{300} = 205$

744) $a_1 = 1 \quad a_{1000} = 1000$

747) $a_1 = 45 \quad a_{37} = 21$

* Trova la formula generale e ricorsiva delle progressioni geometriche in cui i primi cinque termini sono:

748) 2 4 8 16 32

755) 32 160 800 4000 20000

749) 1 2 4 8 16

756) -6 18 -54 162 -486

750) 1 3 9 27 81

757) 2 6 18 54 162

751) 9 27 81 243 729

758) 10000 5000 2500 1250 625

752) 1000 100 10 1 0,1

759) $-\frac{2}{3} \quad -1 \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{9}{4} \quad -\frac{27}{8}$

753) 128 -64 32 -16 8

760) $\frac{3}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{3}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{3}{5}$

754) 0,25 0,5 1 2 4

Scrivi i primi cinque elementi di queste progressioni geometriche:

761) $a_n = 5^n$

769) $a_1 = 0 \quad q = 10$

762) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

770) $\begin{cases} a_1 = 0,01 \\ a_n = 20 \cdot a_{n-1} \end{cases}$

763) $a_n = 5 \cdot 2^n$

771) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = -a_{n-1} \end{cases}$

764) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

772) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = -2 \cdot a_{n-1} \end{cases}$

765) $a_1 = 5 \quad q = 10$

773) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} \end{cases}$

766) $a_1 = 3 \quad q = -1$

767) $a_1 = -3 \quad q = 3$

768) $a_1 = 3 \quad q = -3$

Trova la somma dei primi 10 termini delle seguenti progressioni geometriche:

774) $a_n = 2^{n-1}$

789) $a_n = (-0,1)^{n-1}$

775) $a_n = 3^{n-1}$

790) $a_n = 9 \cdot (-0,1)^{n-1}$

776) $a_n = 1,2^{n-1}$

791) $a_n = (-1)^{n-1}$

777) $a_n = 0,5^{n-1}$

792) $a_n = 113 \cdot (-1)^{n-1}$

778) $a_n = 2 \cdot 0,5^{n-1}$

793) $a_n = (-0,8)^{n-1}$

779) $a_n = 0,8^{n-1}$

794) $a_n = (0,7)^{n-1}$

780) $a_n = 4 \cdot 0,8^{n-1}$

795) $a_n = -3 \cdot (0,7)^{n-1}$

781) $a_n = 1,1^{n-1}$

796) $a_n = (1,01)^{n-1}$

782) $a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$

797) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

783) $a_n = 1^{n-1}$

798) $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

784) $a_n = 10 \cdot 1^{n-1}$

799) $a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

785) $a_n = (-2)^{n-1}$

800) $a_1 = 3 \quad a_n = -2 \cdot a_{n-1}$

786) $a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$

801) $a_n = 10^n$

787) $a_n = (-10)^{n-1}$

788) $a_n = (-0,5)^{n-1}$

Trova la formula generale e quella ricorsiva per le seguenti progressioni geometriche. Dire se sono convergenti o divergenti:

802) $a_1 = 2 \quad a_2 = 6$

806) $a_1 = 1 \quad a_3 = 100$

803) $a_2 = 4 \quad a_3 = -8$

807) $a_1 = -3 \quad a_4 = 3$

804) $a_3 = \frac{3}{2} \quad a_4 = \frac{2}{3}$

808) $a_1 + a_2 = 12 \quad a_1 - a_2 = 6$

805) $a_1 = 1 \quad a_4 = 1000$

809) $a_1 = \frac{4}{3} \quad a_2 = \frac{3}{2}$

Trova la somma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ di queste progressioni geometriche:

810) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

813) $a_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

816) $a_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

819) $a_n = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

811) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

814) $a_n = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$

817) $a_n = 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

820) $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

812) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

815) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

818) $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$

821) $a_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

Trova la somma dei primi 1 000 termini di queste progressioni aritmetiche:

822) $a_n = 5n - 4 \quad 000$

825) $a_1 = 1000 \quad a_5 = 990$

823) $a_n = 0,1n - 100$

826) $a_{500} = -1 \quad a_{501} = 1$

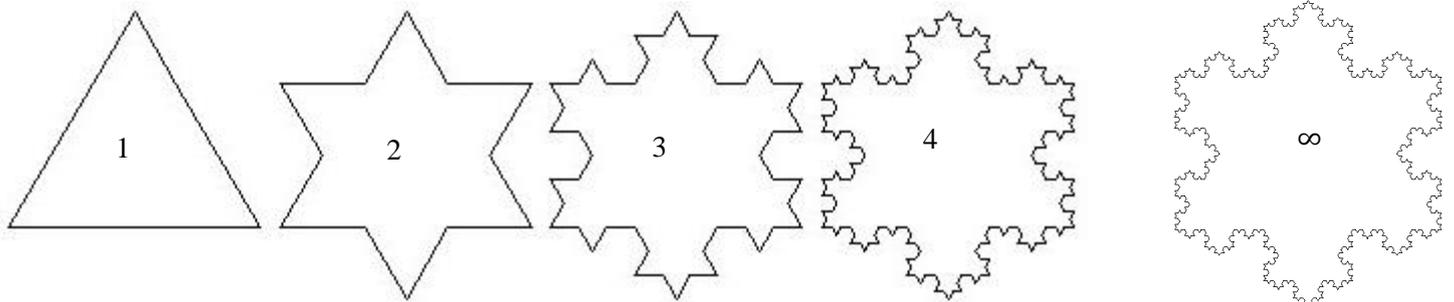
824) $a_n = -n + 500$

827) $a_{100} = 347 \quad a_{900} = 598$

828) * Metto in banca 1 000 000 € e dopo 10 anni ho 10 000 000 €. Quali sono gli interessi annui composti?

829) Trova la formula generale della progressione geometrica in cui $a_2 \cdot a_3 = 9$ e $a_2 + a_3 = 10$ (due possibili soluzioni).

830) Trova i primi 5 elementi della successione $a_n = \sqrt[n]{n}$. Questa successione è convergente, divergente o altro?



* Il frattale in alto si chiama “fiocco di neve”. Ipotizziamo che ogni lato nella figura 1 sia lungo 1 cm:

831) Trova il perimetro delle prime 4 figure

833) Trova il perimetro della figura n

832) Trova il perimetro della figura 10

834) Trova il perimetro della figura ∞

* Adesso ipotizziamo che l’area della figura 1 sia 1 cm²:

835) Trova l’area delle prime 4 figure

837) Trova l’area della figura n

836) Trova l’area della figura 10

838) Trova l’area della figura ∞ (sarà 1,6 cm²)

* Il frattale a destra si chiama polvere di Cantor.

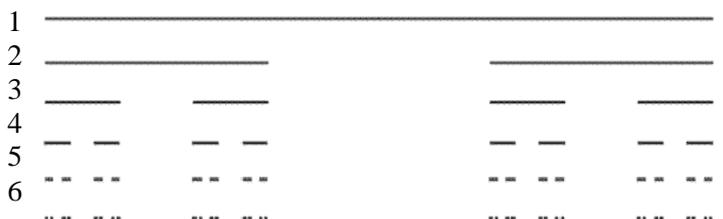
Ipotizziamo che la prima linea sia lunga 10 cm:

839) Trova il numero di linee delle prime 6 figure

840) Trova il numero di linee delle figure 10 e ∞

841) Trova la lunghezza totale delle linee della figura 6

842) Trova la lunghezza totale delle linee della figura ∞



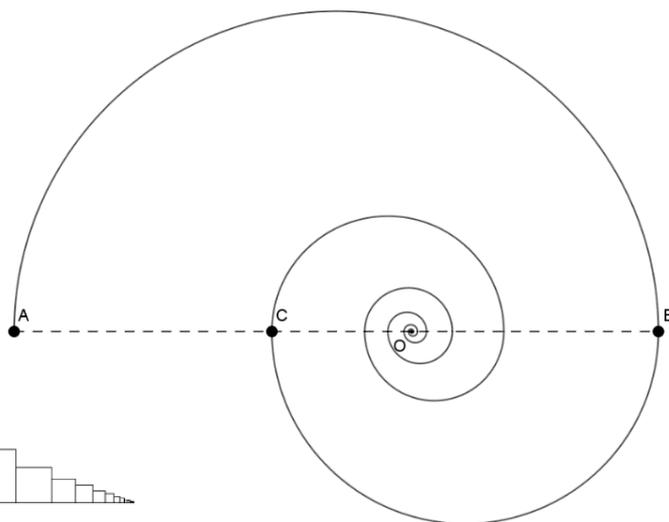
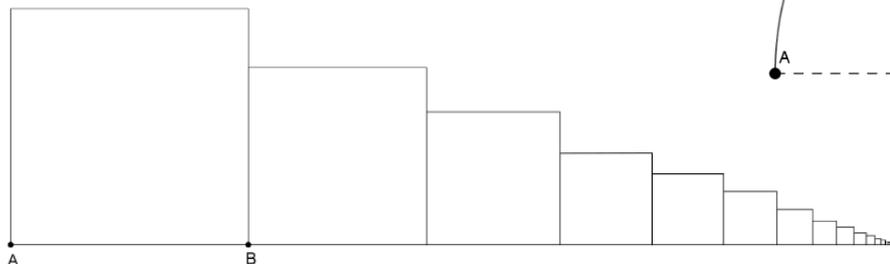


* Il frattale in alto si chiama triangolo di Sierpinsky. Ipotizziamo che l'area della figura nera 1 sia 10 cm^2 :

- 843) Trova l'area della parte nera delle prime 4 figure
- 844) Trova l'area della parte nera della figura 10
- 845) Trova l'area della parte nera della figura n
- 846) Trova l'area della parte nera della figura ∞
- 847) Trova l'area della parte bianca delle prime 4 figure
- 848) Trova l'area della parte bianca della figura 10
- 849) Trova l'area della parte bianca della figura n
- 850) Trova l'area della parte bianca della figura ∞

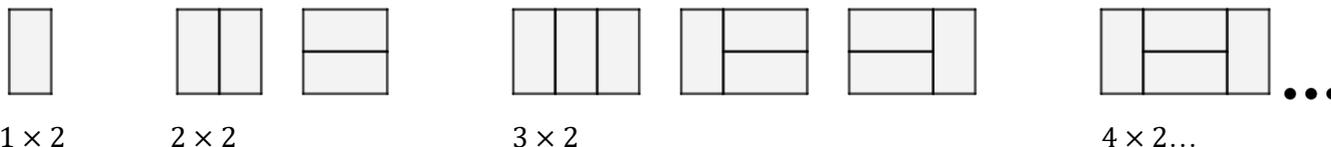
851) Nei quadrati in basso trova l'area totale, se $|AB| = 11$ cm e ogni quadrato successivo ha lato $\frac{5}{6}$ del precedente.

852) Nella spirale a destra il **segmento** $|AB| = 8 \text{ cm}$, BC è $\frac{3}{5}$ di AB e così via. Trova la lunghezza di tutta la **linea** AO . Trova la distanza del **segmento** $|AO|$.



* Per un pavimento usiamo queste mattonelle di dimensione 1×2 :

In basso si vede in quanti modi diversi posso coprire un pavimento $n \times 2$:



- 853) In quanti modi diversi posso coprire un pavimento 4×2 ?
- 854) In quanti modi diversi posso coprire un pavimento 5×2 ?
- 855) In quanti modi diversi posso coprire un pavimento 10×2 ?

856) Scrivi i primi 5 termini della successione $\begin{cases} a_1 = 64 \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{4} \end{cases}$. Trova la somma dei primi 10 termini e la somma di tutti i termini.

857) Trova la somma di tutti i numeri tra -100 e 1000 compresi.

858) Scrivi i primi 5 termini della successione $a_n = \frac{n!}{n^n}$. È convergente divergente o indeterminata?

859) Trova la somma di tutti i numeri divisibili per 7 che si trovano tra 1 e 10 000.

860) Trova i prossimi due elementi di questa successioni. È crescente o decrescente? Convergente, divergente o altro?

$$12 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{13}{8} \quad \dots \quad \dots$$

861) Per quali valori di q la progressione geometrica è convergente a 0?

862) Trova la somma di tutti i numeri dispari compresi tra 0 e 6 000.

863) * Ci sono delle formule per trovare il numero π . Continua con almeno altri due termini le somme o prodotti:

$$\pi = 4 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right) \qquad \pi = 8 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots \right)$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 9} \dots \qquad \pi = 2 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \right)$$

864) Il PIL (HDP) della Cina cresce del 7%. Se oggi il PIL è 8221 miliardi di dollari, quale sarà il PIL tra 10 anni? E tra 20 anni?

865) Trova il volume del bruco a destra. La testa ha raggio 1cm e ogni sfera ha raggio $\frac{2}{3}$ del raggio precedente. Il volume della sfera è $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



866) A cosa è uguale il numero e ? Come si ottiene?

867) Cosa significa funzione dispari?

868) Scrivi i primi 5 elementi della successione $a_n = \frac{5n}{n+1}$. Se converge, scrivere il valore a cui converge.

869) Scrivi i primi 5 termini della successione $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n \cdot a_{n-1} \end{cases}$. A cosa assomiglia?

870) In una successione **aritmetica** $\begin{cases} a_{15} - a_{100} = 136 \\ a_{15} + a_{100} = 64 \end{cases}$. Trova il primo termine e la somma dei primi 100 termini.

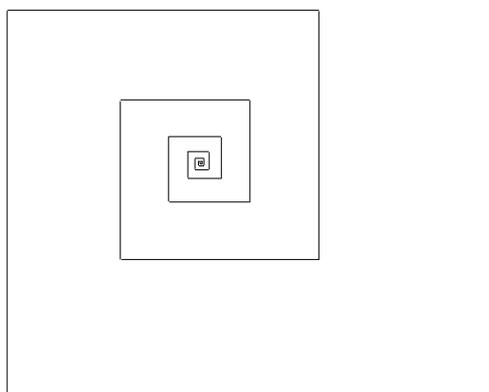
871) Trova la somma di tutti i numeri tra 1 e 800.

872) In una progressione **geometrica** $q = -1,01$ e $a_1 = 2$. Trova i primi 5 termini e la somma dei primi 100 termini.

873) Trova l'ultimo elemento di questa successione. Scrivi la formula ricorsiva della successione (difficile).

1 1 3 5 11 21 43 85 ???

874) Nel disegno in basso ogni lato è $\frac{5}{6}$ del lato precedente. Il primo lato misura 8 cm. Trova la lunghezza di tutta la linea.



SIMULAZIONE TEST SUCCESIONI E SERIE (durata 45 minuti):

- A. Cosa significa asintoto di una funzione?
- B. Cosa significa funzione pari?
- C. Scrivi i primi 5 elementi della successione $a_n = \frac{4n+1}{12n-1}$. Dire se è crescente o decrescente. Se converge, scrivere il valore a cui converge.
- D. Scrivi i primi 5 termini della successione $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = n - a_{n-1} \end{cases}$. Decidere se converge, diverge o altro.
- E. In una successione **aritmetica** $\begin{cases} a_{11} - a_{14} = 12 \\ a_2 + a_3 = -6 \end{cases}$. Trova il primo termine e la somma dei primi 100 termini.
- F. Trova la somma di tutti i numeri divisibili per 6 tra 1000 e 2000.
- G. In una progressione **geometrica** $q = -1,1$ e $a_1 = -5$. Trova i primi 5 termini e la somma dei primi 25 termini.
- H. Trova gli ultimi 2 elementi di questa successione. Scrivi la formula ricorsiva della successione.
 3 7 13 21 31
- I. Nel disegno a destra ogni circonferenza ha area che è $\frac{9}{10}$ della precedente. La circonferenza maggiore ha area 38 cm^2 , cioè bianco + nero è 38 cm^2 . Trova l'area della parte nera.



875) Completa le tabelle:

x	$y = \frac{1}{x}$
0,1	
0,01	
0,001	
0,00001	
0+	
-0,1	
-0,01	
-0,001	
-0,00001	
0-	
100	
1 000	
10 000	
1 000 000	
+	
-100	
-1 000	
-10 000	
-1 000 000	
-	

x	$y = \frac{5}{x-1}$
1,1	
1,01	
1,001	
1,00001	
1+	
0,9	
0,99	
0,999	
0,99999	
1-	
100	
1 000	
10 000	
1 000 000	
+	
-100	
-1 000	
-10 000	
-1 000 000	
-	

x	$y = \frac{7}{x+2}$
-1,9	
-1,99	
-1,999	
-1,99999	
-2+	
-2,1	
-2,01	
-2,001	
-2,00001	
-2-	
100	
1 000	
10 000	
1 000 000	
+	
-100	
-1 000	
-10 000	
-1 000 000	
-	

x	$y = \frac{9x-1}{3x+3}$
-0,9	
-0,99	
-0,999	
-0,99999	
-1+	
-1,1	
-1,01	
-1,001	
-1,00001	
-1-	
100	
1 000	
10 000	
1 000 000	
+	
-100	
-1 000	
-10 000	
-1 000 000	
-	

876) Nei limiti queste frazioni hanno i seguenti "valori":

$$\frac{0}{\text{numero}} = \dots$$

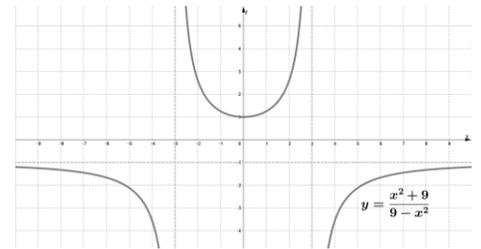
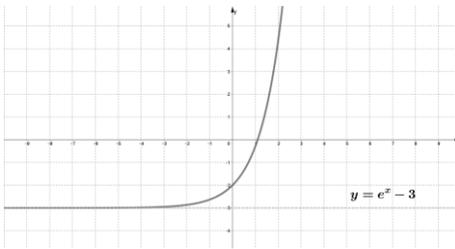
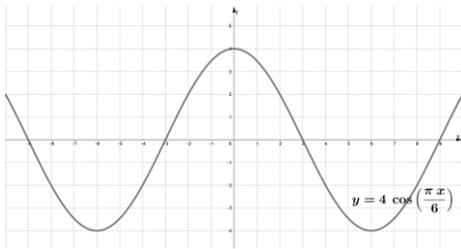
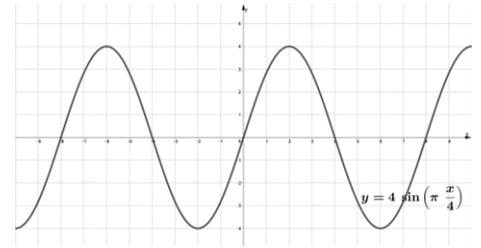
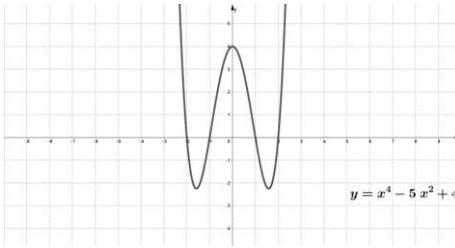
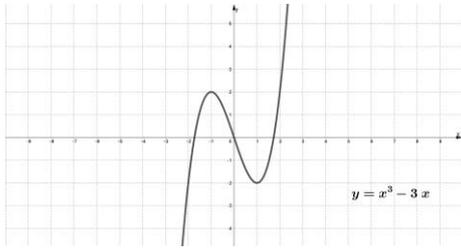
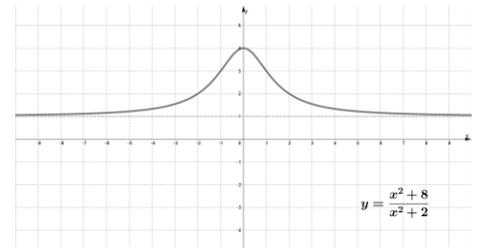
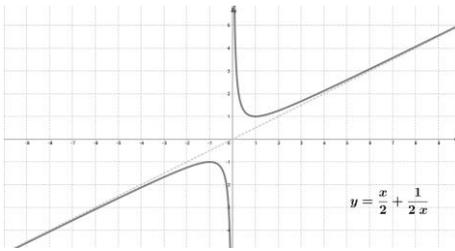
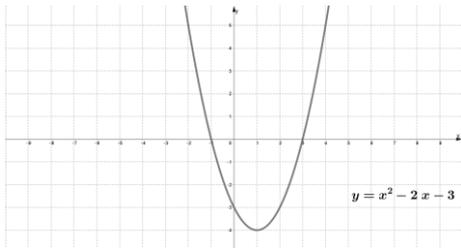
$$\frac{0}{8} = \dots$$

$$\frac{\text{numero}}{0} = \dots$$

$$\frac{\text{numero}}{8} = \dots$$

$$\frac{8}{0} = \dots$$

877) In queste funzioni trova massimi, minimi, intersezioni con gli assi, asintoti. Dire se la funzione è pari o dispari.



Trova il valore dei seguenti limiti:

878) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)$

879) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 5)$

880) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-4}{3x-3}$

881) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x^2+25}$

882) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-25}{x^2+25}$

883) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)$

884) $\lim_{x \rightarrow 1} (e^x - 1)$

885) $\lim_{x \rightarrow -1} (e^x + 1)$

886) $\lim_{x \rightarrow -2} (e^x - 1)$

887) $\lim_{x \rightarrow e} \ln x$

888) $\lim_{x \rightarrow 4} \ln 4x$

889) $\lim_{x \rightarrow -2} \ln(5 - x)$

890) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4x+3}{x^2+2x+1}$

891) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^2+1}$

892) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-1}{x^2+1}$

893) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)$

894) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)$

895) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+6x+9}{x^2-3}$

896) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x}$

897) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1}$

898) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^x+1}{x+3}$

899) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x}$

900) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x}$

901) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8}{x}$

902) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3}{x}$

903) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4-x}{x}$

904) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-x}{3+x}$

905) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{2x-2}$

906) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5}{x+1}$

907) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x+9}{x+1}$

908) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{7-3x}{x-2}$

909) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5+3x}{x-2}$

910) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2}$

911) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10}{x^2}$

912) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{8}{x^2-1}$

913) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sin x}$

914) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-5}{x^2+2}$

915) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+3}{x^2-1}$

916) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+4}$

917) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

918) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x^2 - 4)$

919) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x}$

920) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-2x}$

921) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2-2x}$

922) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3}$

923) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7}{x-3}$

924) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+9}{3-x}$

925) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{7}{(x-1)^2}$

926) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{7}{(x-1)^2}$

927) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{(x-1)^2}$

928) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+x}{x^4}$

929) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1}$

930) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1}$

931) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1}$

932) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2+7}{x+7}$

933) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x+1}$

934) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x}$

935) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x}$

936) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{\sin x}$

937) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{\sin x}$

938) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

939) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x$

940) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2-5x+2}{x^2-7x+6}$

941) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2+3x+2}{2x^2+3x+4}$

942) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2+3x+2}{2x^2+3x}$

943) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2+3x+2}{2x^2-3x}$

944) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-5x+4}$

945) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x}$

946) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x}$

947) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\ln x}$

948) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{\sin x}$

949) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-3}{\sin x}$

950) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2+4}{4x^2-1}$

951) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x$

952) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tan x$

953) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tan x}$

954) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$

955) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$

956) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$

957) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$

958) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

959) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$

960) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

961) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-5}$

962) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5-x}$

963) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{55}{x}$

964) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}$

965) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x}$

966) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{5}$

967) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

968) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$

969) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x$

970) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$

971) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x}$

972) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-5)$

973) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+15)$

974) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$

975) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2)$

976) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^2$

977) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{x+5}$

978) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x+1}$

979) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{2x+8}$

980) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+8}{6x+7}$

981) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{4-x}$

982) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+4}{3-x}$

983) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x+1}{x+10}$

984) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{-x}}$

985) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x+5}$

986) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x)$

987) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)$

988) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$

989) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 10x)$

990) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^x)$

991) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$

992) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x^2+4}$

993) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-4}{x^2+4}$

994) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x+4}$

995) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2+4}$

996) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{4-x}$

997) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

998) * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}$

999) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^4-1}$

1000) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x-2}\right)$

1001) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2-1}\right)$

1002) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

1003) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2})$

1004) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2} \right)$

1005) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x})$

1006) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{8 - x^3}$

1007) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{8 - x^3}$

1008) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^3-1}$

1009) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-2}{x^3}$

1010) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x^2-x}$

1011) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5-1}{x^2-1}$

1012) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5-1}{x^2-1}$

1013) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2}$

1014) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2}$

1015) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

1016) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

1017) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^x}$

1018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^x}$

1019) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

1020) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sin x}$

1021) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sin x^2}$

1022) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

1023) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot \ln x}{x}$

1024) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \ln x}{x}$

1025) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{e^x}$

1026) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

1027) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x}$

1028) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x \ln x}$

1029) * $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

1030) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$

1031) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

1032) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x + 6}{x^2 - 3x - 3}$

1033) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$

1034) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x}{x^2 - 3x}$

1035) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 3x}$

1036) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x^2 + 8x}{x^3 - 3x^2}$

1037) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 4}$

1038) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

1039) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$

1040) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

1041) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 5x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

1042) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$

1043) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 5x + 6}$

1044) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

1045) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

1046) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4}$

1047) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

1048) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6}$

1049) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} \right)$

1050) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$

1051) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$

1052) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{x^2 - 20x + 100}$

1053) * $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^8 - 1}$

1054) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{x^3 - x^2 - 4x - 5}$

1055) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

1056) * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$

1057) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + x}$

1058) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + x}$

1059) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} + x \right)$

1060) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right)$

1061) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{x + 1} - 3x \right)$

1062) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - \frac{4x^2 - 3}{2x + 1} \right)$

1063) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - \frac{8x^2 - 3}{2x + 1} \right)$

1064) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 5 \ln x}{e^x}$

1065) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 5 \ln x}{e^x}$

1066) Della funzione $f(x)$ a destra calcola:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

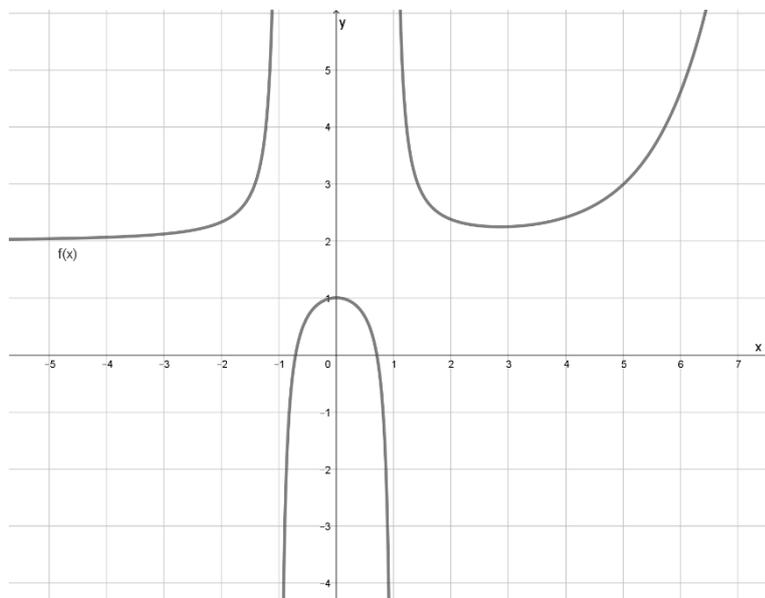
d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

g) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$

h) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$



Calcola i seguenti limiti:

1067) $\lim_{x \rightarrow 5} (3x^2 - 4x - 3)$

1068) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 4)$

1069) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x-8}{x+3}$

1070) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x-8}{x-3}$

1071) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x-8}{x+3}$

1072) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x^2-9}$

1073) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x^2-9}$

1074) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{x^2-9}$

1075) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{x^2-9}$

1076) $\lim_{x \rightarrow e} \ln x$

1077) $\lim_{x \rightarrow e} \ln(x^2)$

1078) $\lim_{x \rightarrow e} \ln^2 x$

1079) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x$

1080) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)$

1081) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - 1)$

1082) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$

1083) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)$

1084) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x}$

1085) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{x-1}}$

1086) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

1087) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{7}{x+2}$

1088) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x+2}$

1089) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+4}{x+2}$

1090) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x}{x+2}$

1091) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{7}{x^2-4}$

1092) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-4x}$

1093) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{x^2-4x+3}$

1094) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

1095) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-5x^2+7x}{x^2+5x}$

1096) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-5x^2+7}{x^2+5x}$

1097) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2-11x-12}{-x^2+9}$

1098) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2+4x}{x^2-2x}$

1099) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^3}{x-5}$

1100) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^3}{x+3}$

1101) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3}{x^2-6x+9}$

1102) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+9}{x-3}$

1103) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x}{2x^2+3x}$

1104) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+2x}{2x^2+3x}$

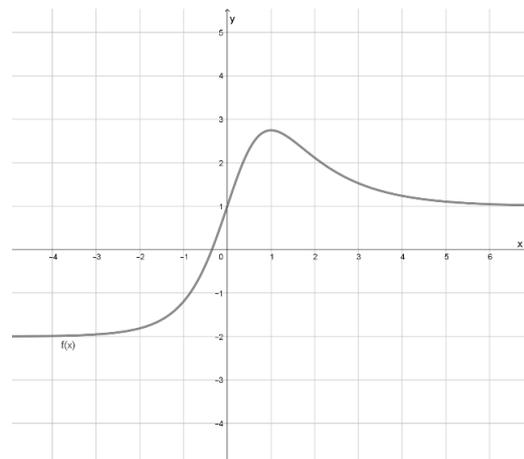
1105) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+2x}{2x^2+3x}$

1106) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x+2x}{2x^2+3x}$

1107) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x+2x}{2x^2+3x}$

1108) Rispondi alle domande sulla funzione a destra:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$
- Quanti massimi ha?
- Quanti minimi ha?
- Quanti flessi ha?
- In quale intervallo è positiva?
- In quale intervallo è decrescente?
- Funzione pari, dispari o altro?



1109) Disegna una funzione $f(x)$ che abbia queste caratteristiche:

pari decrescente per $x \in (-\infty; 0)$ crescente per $x \in (0; +\infty)$ intersezioni: $[-3; 0]$ $[3; 0]$ $[0; -6]$
 negativa per $x \in (-3; 3)$ positiva per $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Un minimo in $[0; -6]$ Flessi in $[1; -4]$ e $[-1; -4]$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

1110) Disegna la retta $y = 3x + b$ che passa per il punto $A[2; 4]$

1111) Trova l'equazione delle tre rette rappresentate sul piano cartesiano.

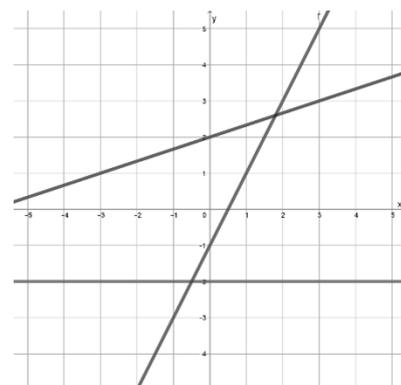
1112) Disegna le rette $x = -3$ $y = -2x + 2$

1113) Per quali valori di a, b una retta $y = ax + b$ è crescente? Decrescente?

1114) Scrivi l'equazione della retta $y = -5x + b$ che passa per il punto $A[3; -5]$

1115) Scrivi l'equazione della retta $y = 8x - b$ che passa per il punto $A[-3; 2]$

1116) Scrivi l'equazione della retta $y = ax + 2$ che passa per il punto $A[-3; 3]$



Calcola i seguenti limiti:

1117) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 2x}{2x^2 + 3x}$

1124) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

1131) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{1 - x^2}$

1118) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x}$

1125) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$

1132) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1 - x^2}$

1119) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

1126) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

1133) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

1120) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

1127) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 - 10x}$

1134) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

1121) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

1128) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 - 10x}$

1135) * $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{2}{x}}$

1122) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2}{x^2}$

1129) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 - 10x}$

1136) * $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

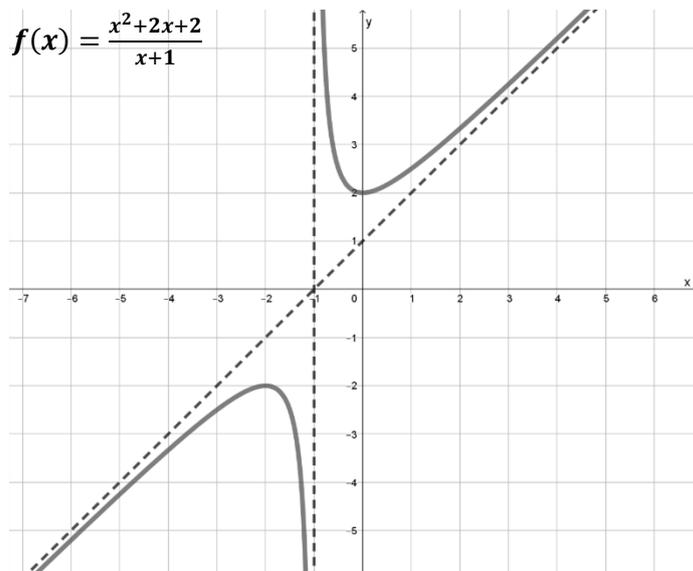
1123) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$

1130) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - x^2}$

1137) * $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

1138) Rispondi alle domande sulla funzione a destra:

- Intersezioni con gli assi?
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$
- Massimi e minimi?
- Intervallo in cui è crescente?
- Intervallo in cui è positiva?
- Flessi?
- Campo di esistenza?
- Simmetrie?



1139) Disegna la funzione $y = e^x(x - 2)$ che ha queste caratteristiche:

Intersezione con gli assi $[0; -2]$ e $[2; 0]$

Positiva per $x \in (1; +\infty)$

Negativa per $x \in (-\infty; 1)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Asintoto orizzontale $y = 0$

Decrescente per $x \in (-\infty; 1)$

Crescente per $x \in (1; +\infty)$

Minimo in $[1; -e]$

Flesso in $[0; -2]$

1140) Disegna la funzione $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$:

Trova le due intersezioni con gli assi

Trova dove è positiva e dove è negativa

Trova il campo di esistenza

Trova limiti per

$x \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow -2^-$

$x \rightarrow -2^+$

Asintoti: $y = 1$ $x = -2$

Sempre crescente

NO massimi e minimi

NO flessi

1141) Disegna la funzione $f(x) = \frac{3x-6}{-x+1}$:

Trova le due intersezioni con gli assi

Trova dove è positiva e dove è negativa

Trova il campo di esistenza

Trova limiti per

$x \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow 1^-$

$x \rightarrow 1^+$

Asintoti: $y = -3$ $x = 1$

Sempre decrescente

NO massimi e minimi

NO flessi

1142) Disegna la funzione $f(x) = \frac{2x-3}{2x-2}$:

Trova le due intersezioni con gli assi

Trova dove è positiva e dove è negativa

Trova il campo di esistenza

Trova limiti per

$x \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow 1^-$

$x \rightarrow 1^+$

Trova gli asintoti

Sempre crescente

NO massimi e minimi

NO flessi

1143) Disegna 3 funzioni pari.

1144) Disegna 3 funzioni dispari.

Calcola i seguenti limiti:

1145) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x+2}{x}$

1149) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{x+5} - x \right)$

1153) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{x-1} \right)$

1146) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+2}{x}$

1150) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right)$

1154) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x-1} + \frac{2x}{1-x} \right)$

1147) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{x} - x \right)$

1151) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x-3} - \frac{x^2}{x+1} \right)$

1155) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{x^2-1} \right)$

1148) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{x+1} - x \right)$

1152) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right)$

1156) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2} \right)$

Calcola i seguenti limiti:

1157) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$

1162) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{x^2+3x+2}$

1167) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

1158) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$

1163) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x}$

1168) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin x)$

1159) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{3-x}$

1164) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x}$

1169) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$

1160) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-50}{5-x}$

1165) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$

1170) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$

1161) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2+5x+1}{5x^2+4x-1}$

1166) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

1171) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-27}{2x^2-12x+18}$

Disegna le seguenti iperboli:

1172) $y = \frac{3x+3}{x}$

1174) $y = \frac{4x-1}{4x-2}$

1176) $y = \frac{x+2}{2-x}$

1173) $y = \frac{x}{3x+3}$

1175) $y = \frac{-x+1}{x-1}$

1177) $y = \frac{3}{x-2}$

1178) Della funzione $f(x)$ in basso scrivi dove è positiva, e poi scrivi il valore di questi limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

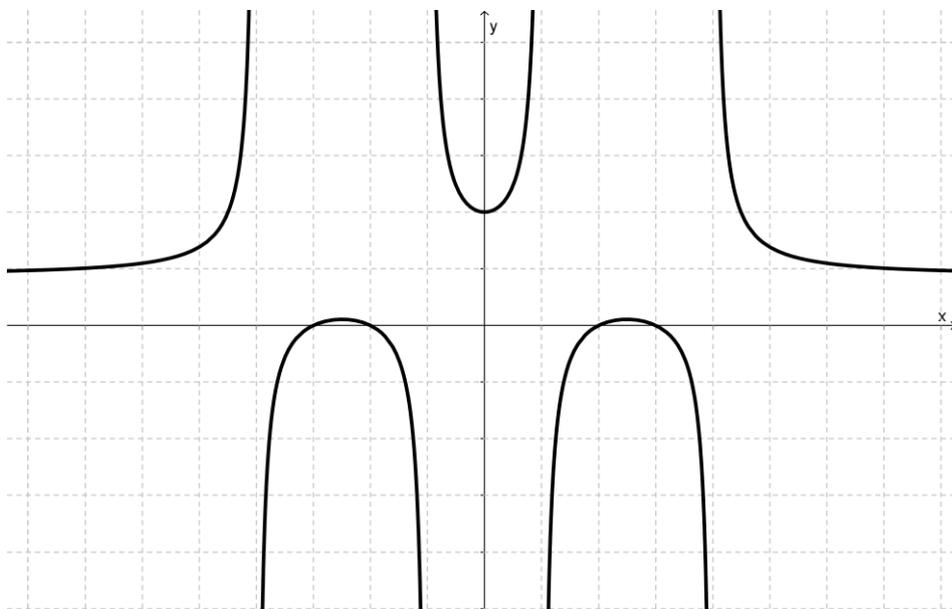
e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

g) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$

h) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$

i) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) =$



SIMULAZIONE TEST LIMITI (durata 5 minuti):

$$\frac{0^+}{0^-} =$$

$$\ln 0^+ =$$

$$-\infty \cdot 10 =$$

$$\frac{+\infty}{0^-} =$$

$$e^{-\infty} =$$

$$-1 \cdot 0^- =$$

$$\frac{0^-}{-\infty} =$$

$$-\infty \cdot (+\infty) =$$

$$e^0 =$$

$$1,1^{+\infty} =$$

$$\ln 0^- =$$

$$\frac{+\infty \text{ grande}}{+\infty \text{ piccolo}} =$$

$$-\infty + \infty =$$

$$\frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$e^{+\infty} =$$

$$\frac{-5}{+\infty} =$$

$$0^- \cdot 0^- =$$

$$\ln(+\infty) =$$

$$\frac{1}{0^-} =$$

$$\frac{-\infty}{3} =$$

$$-\infty - \infty =$$

$$-\infty \cdot 0^- =$$

$$\ln(-\infty) =$$

$$-\infty - 1\,000\,000 =$$

$$\frac{+\infty \text{ piccolo}}{-\infty \text{ grande}} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} =$$

$$\frac{0^-}{1} =$$

Metti in ordine dal più piccolo al più grande:

x^4

e^x

$\ln x$

$\sqrt{x^7}$

x^3

$\sqrt[5]{x^4}$

x^2

SIMULAZIONE TEST LIMITI E FUNZIONI (durata 45 minuti):

I. È data la funzione $y = \frac{6x+3}{2x+2}$:

- a) Trova il dominio
- b) Trova i punti di intersezione con gli assi
- c) Studia il segno della funzione
- d) Trova i limiti importanti
- e) Disegna gli asintoti e la funzione

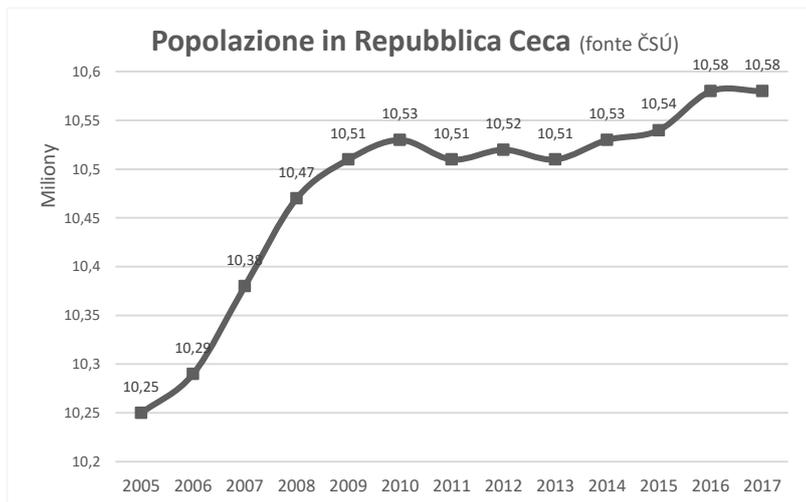
II. Risolvi la disequazione $\frac{2x^2-3x-2}{x^2+2x+2} \leq 0$

III. Risolvi questi limiti:

- a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+9}{x^2-9}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2+9x-9}{-2x^2+x+21}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+9x-9}{-2x^2+x+21}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^3+1}{x+1} \right)$

1179) Rispondi alle domande sul grafico:

- In quale anno c'è la maggiore crescita della popolazione?
- In quale anno la minore crescita?
- In media quanto cresce la popolazione tra il 2005 e il 2015?
- In media quanto cresce la popolazione tra il 2005 e il 2017?
- Se la crescita della popolazione tra il 2005 e il 2017 fosse costante, e i dati del 2005 e del 2017 rimanessero uguali, quanti sarebbero gli abitanti nel 2006? Nel 2011? Come sarebbe il grafico?



Δx è la variazione: $\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è la variazione media della funzione

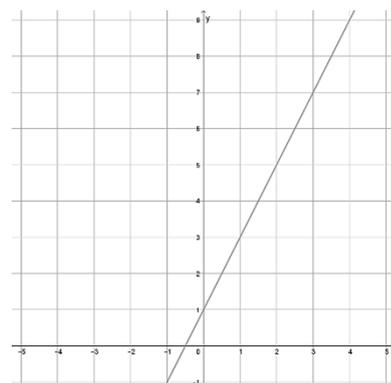
1180) Una macchina parte da Praga e fa questo percorso in un giorno:

Tempo	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00
Distanza da Praga	0	70	200	380	400	450	580	700

- qual è la velocità media della macchina?
- in quale tratto la velocità è maggiore? Minore?
- qual è la velocità media tra le 9 e le 12? E tra le 14 e le 16?

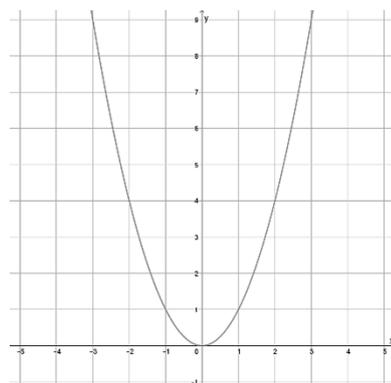
1181) Guardando la retta a destra:

- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$?
- quanto è Δy tra $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,5$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,1$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,0001$?
- quanto è $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra $x_1 = 1$ e $x_2 = 1,0001$?
- quanto è la variazione media?



1182) La parabola a destra è $f(x) = x^2$. Rispondi alle domande:

- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$?
- quanto è $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$?
- quanto è $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,1$?
- quanto è Δy tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,0001$?
- quanto è $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra $x_1 = 1$ e $x_2 = 1,0001$?
- quanto è $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra $x_1 = 2$ e $x_2 = 2,0001$?
- quanto è $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra $x_1 = 3$ e $x_2 = 3,0001$?



- Trova i limiti: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$
- In quale parte del grafico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è positiva? Negativa? Uguale a 0?

Calcola la derivata y' di queste funzioni:

1183) $y = 3x$

1184) $y = 4x - 5$

1185) $y = -3x + 8$

1186) $y = -x$

1187) $y = x + 10$

1188) $y = \frac{1}{2}x$

1189) $y = x^2 + x + 1$

1190) $y = x^3 + x^2 + x + 1$

1191) $y = 2x^2 - 3x$

1192) $y = 4x^2 + 5$

1193) $y = 3x^3 - 2x^2$

1194) $y = x \cdot x$

1195) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

1196) $y = \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$

1197) $y = x(3x^2 - 5x)$

1198) $y = x^{\frac{3}{2}}$

1199) $y = x^{\frac{4}{3}}$

1200) $y = x^{\frac{1}{2}}$

1201) $y = x^{-2}$

1202) $y = x^{-3}$

1203) $y = 6x^{\frac{3}{2}}$

1204) $y = -3x^{\frac{4}{3}}$

1205) $y = -2x^{\frac{1}{2}}$

1206) $y = 4x^{-2}$

1207) $y = -3x^{-3}$

1208) $y = \sqrt{x}$

1209) $y = \sqrt{x^3}$

1210) $y = \sqrt{x^5}$

1211) $y = \sqrt{x^8}$

1212) $y = \sqrt[3]{x}$

1213) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

1214) $y = \sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[4]{x^5}$

1215) $y = \frac{1}{x}$

1216) $y = \frac{1}{x^2}$

1217) $y = \frac{3}{x^2}$

1218) $y = -\frac{1}{x}$

1219) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$

1220) $y = \frac{1}{4x} + \frac{x}{4}$

1221) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

1222) $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$

1223) $y = x^3 + x^0 + x^{-3}$

1224) $y = (x + 1)^2$

1225) $y = (x - 3)^2$

1226) $y = (2x + 5)^2$

1227) $y = (-2x + 3)^2$

1228) $y = (2x - 1)^1$

1229) $y = 3x(3x + 1)$

1230) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^2$

1231) $y = \frac{3x^2}{x}$

1232) $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

1233) $y = (x + 1)(x - 1)$

1234) $y = 4(x^2 - 3x + 2)$

1235) $y = 8x^2(x^2 + 4)$

1236) $y = \frac{3x^2 - 5x - 2}{5x}$

Trova l'equazione delle rette tangenti nei punti di ascissa $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$ delle parabole:

1237) $y = x^2$

1238) $y = x^2 - 2x$

1239) $y = x^2 + 2x$

1240) $y = x^2 - 3x$

1241) $y = x^2 - 3x + 1$

1242) $y = x^2 - 3x + 2$

1243) $y = -x^2$

1244) $y = -x^2 + 4$

1245) $y = -x^2 - x + 2$

Calcola i seguenti limiti:

1246) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

1247) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x - 10}{x^3 - 4}$

1248) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

1249) $\lim_{x \rightarrow -2^-} e^{\frac{1}{x+2}}$

1250) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 3x + 2}$

1251) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x}$

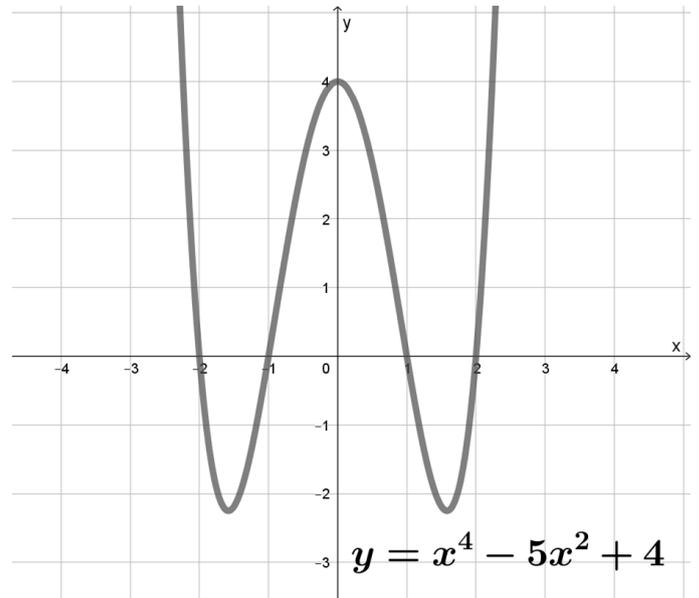
1252) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4x}{x + 1}$

1253) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x - 5}{5x^2 - 4x - 2}$

1254) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

1255) Guardando la funzione a destra rispondi alle domande:

- Funzione pari o dispari?
- Intersezioni con gli assi?
- Senza calcoli, in $x = 2$, y sarà negativa o positiva?
- Senza calcoli, in $x = 2$, y' sarà negativa o positiva?
- Senza calcoli, in $x = 0$, y sarà negativa o positiva?
- Senza calcoli, in $x = 0$, y' sarà negativa o positiva?
- Senza calcoli, in $x = -2$, y sarà negativa o positiva?
- Senza calcoli, in $x = -2$, y' sarà negativa o positiva?
- Senza calcoli, in $x = 3$, y sarà negativa o positiva?
- Senza calcoli, in $x = 3$, y' sarà negativa o positiva?
- Come troviamo i minimi?
- Trova la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = 2$ e nel punto di ascissa $x = -3$.



Calcola la derivata prima di queste funzioni:

1256) $y = \sin x$

1270) $y = x e^x$

1283) $y = \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2}$

1257) $y = 3 \cos x + 1$

1271) $y = 5x e^x$

1284) $y = \frac{\sin x}{x}$

1258) $y = 2 \sin x - 3 \cos x$

1272) $y = \sin x \cos x$

1285) $y = \frac{x+2}{x+1}$

1259) $y = \frac{2}{3} \sin x$

1273) $y = \cos x \sin x$

1286) $y = \frac{2x-3}{x+2}$

1260) $y = \ln x$

1274) $y = -\frac{x}{3} \sin x$

1287) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x+1}$

1261) $y = x - \ln x$

1275) $y = e^x \sin x$

1288) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$

1262) $y = 4 \ln x - x$

1276) $y = (2x - 3)e^x$

1289) $y = \frac{x^2 + 5x}{2x + 5}$

1263) $y = e^x$

1277) $y = (-x + 1) \cos x$

1290) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

1264) $y = -e^x$

1278) $y = (3x + 2) \ln x$

1291) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

1265) $y = -\ln x + 5e^x$

1279) $y = x \ln x$

1292) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

1266) $y = \ln(e^x)$

1280) $y = e^x \ln x$

1293) $y = (x^2 - 2x) \ln x$

1267) $y = \sin x + 3x^2$

1281) $y = x^4 \ln x$

1268) $y = 4x^3 - 5 \cos x$

1282) $y = \frac{e^x}{x}$

1269) $y = x \sin x$

Calcola i seguenti limiti:

1294) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-4}{x^2-4} \right) =$

1296) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 4} =$

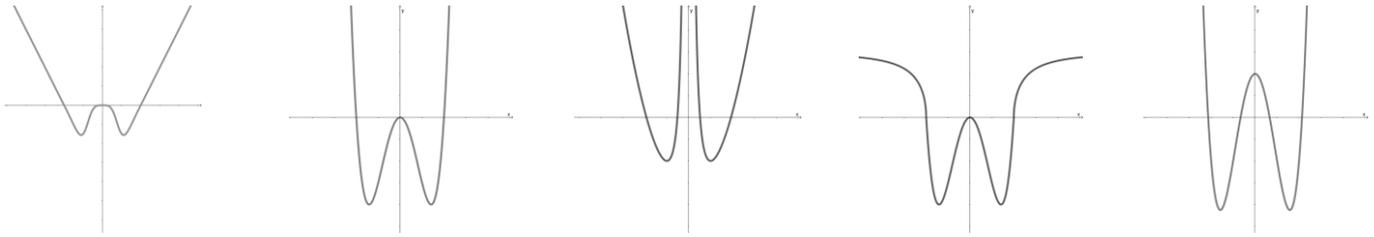
1298) $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 5x + 4} =$

1295) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 4} =$

1297) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 4} =$

1299) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 5x + 4} =$

1300) Tra questi disegni stabilisci senza calcoli quale rappresenta $y = x^4 - 5x^2$, e perché gli altri non possono esserlo.



Trova la derivata di queste funzioni:

1301) $y = 4x^3 \cos x$

1302) $y = \frac{x}{x+2}$

1303) $y = \frac{3x}{3-x}$

1304) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

1305) $y = \frac{x-2}{x-3}$

1306) $y = \frac{x-5}{x^2}$

1307) $y = \sin x \cos x$

1308) $y = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$

1309) $y = (2x^2 + 3x + 2)e^x$

1310) $y = \cos^2 x$

1311) $y = \frac{\ln x}{x}$

1312) $y = \frac{e^x}{x}$

1313) $y = \frac{x}{e^x}$

1314) $y = \frac{x^2-1}{e^x}$

1315) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

1316) $y = \ln(3x - 5)$

1317) $y = e^{3x} + 2$

1318) $y = e^{x^2} - x$

1319) $y = \ln(x^2 + 1)$

1320) $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$

1321) $y = \sin(6x)$

1322) $y = x \sin(2x)$

Calcola i seguenti limiti:

1323) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - 3x + 2}{5x - 5} =$

1324) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x^2 - 7x - 6}{x^2 - 2x} =$

1325) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x^2 - 7x - 6}{x^2 - 2x} =$

1326) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 3x} =$

1327) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} =$

1328) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} =$

1329) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} =$

1330) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 - 5x + 6) =$

1331) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 5x + 6) =$

1332) Studia e disegna la funzione $y = \frac{2x-3}{x-3}$. Trova la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = 2$

1333) Studia e disegna la funzione $y = -x^3 - 3x^2$. Trova le rette tangenti nei punti di intersezione con gli assi.

1334) Studia e disegna la funzione $y = \frac{4}{x^2+1}$. Trova la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = -1$

Calcola le seguenti derivate:

1335) $y = 3x \sin x$

1336) $y = 3e^{3x}$

1337) $y = 5 \ln(x^2 - 3x)$

1338) $y = (x + 1)e^{x+1}$

1339) $y = (x + 1) \ln(x + 1)$

1340) $y = \frac{1}{\ln x}$

1341) $y = \sin^4 x$

1342) $y = \cos(x^4)$

1343) $y = \sqrt{x^2 - x}$

1344) $y = 3xe^{4x}$

1345) $y = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

1346) $y = 7 \ln^2 x$

1347) $y = \ln^2(x^2 - 3x)$

1348) $y = 2 \cos(2x) \sin(2x)$

1349) $y = xe^{x^2}$

1350) $y = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$

1351) $y = \tan x$

1352) $y = \tan(x^2)$

Trova le rette tangenti alle seguenti funzioni nei seguenti punti:

- 1353) La tangente a $y = \ln x$ nel punto $x = 1$
 1354) La tangente a $y = \sin(2x)$ nel punto $x = \pi$
 1355) La tangente a $y = e^{x^2}$ nel punto $x = 0$
 1356) La tangente a $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ nel punto $x = 2$
 1357) La tangente a $y = \frac{x-4}{x-3}$ nel punto di intersezione con l'asse x
 1358) La tangente a $y = \frac{x-4}{x-3}$ nel punto di intersezione con l'asse y

Calcola i seguenti limiti:

- 1359) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ 1363) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$ 1367) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{x \sin x}$
 1360) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ 1364) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x^2+3x}$ 1368) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{5x}$
 1361) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ 1365) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{3x}$ 1369) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos x - 1}$
 1362) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ 1366) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin x}$ 1370) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{1-\cos x}$

Disegna le seguenti funzioni:

- 1371) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ Stabilisci se ci sono delle simmetrie.
 1372) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-2}$ Trova l'intersezione tra i due asintoti.
 1373) $y = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$ Trova la retta che passa per il massimo e il minimo.
 1374) $y = \frac{x}{x^2-4}$ Stabilisci se ci sono delle simmetrie.
 1375) $y = \frac{1+3x^4}{x^3}$ Trova la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa $x = 1$. Stabilisci le simmetrie.

Trova la derivata di queste funzioni:

- 1376) $y = 2x \sin(2x)$ 1386) $y = \frac{5}{(x^2-x)^3}$ 1396) $y = \frac{4x^2-4x+3}{(2x-1)^2}$
 1377) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ 1387) $y = (3x-2)e^{3x-2}$ 1397) $y = 2\sqrt{\sin x}$
 1378) $y = \frac{\ln x}{x}$ 1388) $y = 3 \ln(\cos x)$ 1398) $y = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{(x+1)^3}$
 1379) $y = \frac{x^3+1}{x^3}$ 1389) $y = \sin(\ln x)$ 1399) $y = 5e^{\sqrt{x}}$
 1380) $y = \sqrt{x}$ 1390) $y = 7 \ln(\sin(2x))$ 1400) $y = \frac{-24x^2+144}{(x^2+1)^2}$
 1381) $y = 5xe^{3x+2}$ 1391) $y = \ln(\sqrt{x})$ 1401) $y = 5 \cos x \tan x$
 1382) $y = \cos(x^3)$ 1392) $y = \frac{-x^2-1}{2x-3}$ 1402) $y = (3x-1)^4(2x+1)^5$
 1383) $y = -5 \ln^2 x$ 1393) $y = \tan^2 x$ 1403) $y = \frac{(3x-1)^4}{(2x+1)^5}$
 1384) $y = \sin^3(x^5)$ 1394) $y = \frac{8x^3+12x^2+6x+1}{(2x+1)^3}$ 1404) $y = \sqrt{x^2-2x}$
 1385) $y = 4\sqrt{\ln x}$ 1395) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

Calcola i seguenti limiti:

$$1405) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$1406) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x - 1}{x^2 + 1}$$

$$1407) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$1408) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$$1409) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x}$$

$$1410) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$$

$$1411) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$$

$$1412) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$1413) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

$$1414) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{24x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$1415) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$$

$$1416) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x e^x}{\sin x}$$

$$1417) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$1418) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}$$

$$1419) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{4+4x^2}$$

$$1420) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$$

$$1421) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}$$

$$1422) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{\sin x} - 1}$$

$$1423) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x}$$

$$1424) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 5x + 5}{x^2 - 7x + 12}$$

$$1425) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x^2 + 1}$$

Studia le seguenti funzioni:

$$1426) y = -\frac{12}{x^2 + 3}$$

$$1427) y = x^4 - 5x^4 + 4$$

$$1428) y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$1429) y = \frac{12x}{x^2 + 4}$$

$$1430) y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

$$1431) y = \frac{24x}{x^2 + 9}$$

$$1432) y = -x^3 + 4x$$

$$1433) y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$$

$$1434) y = \frac{x^2 - 4}{4x^2 - 4}$$

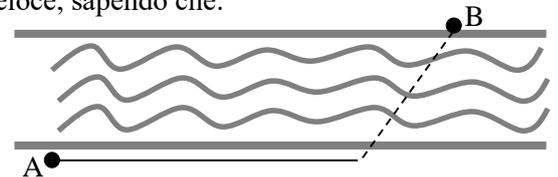
$$1435) y = \frac{x^2 - 7x + 10}{1 - x}$$

$$1436) y = \frac{x^2}{2x - 3}$$

$$1437) y = (x + 1)(x + 2)(x + 4)$$

1438) * Un ragazzo si trova in A e deve arrivare in B. Trova la strada più veloce, sapendo che:

- il fiume è largo 12 m
- il tratto di fiume da percorrere è 80 m
- a nuoto il ragazzo ha una velocità di 0,9 m/s
- a piedi il ragazzo ha una velocità di 4,1 m/s

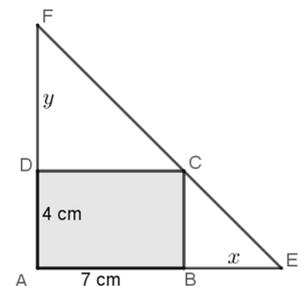


1439) * Trova il punto per cui la distanza tra il punto A[3; 2] e la retta $y = 5x - 4$ è minima.

1440) * Tra tutti i triangoli di area $S = 81 \text{ cm}^2$ e angolo $\alpha = 41^\circ$, trova quello per cui è minima la somma dei lati $b + c$.

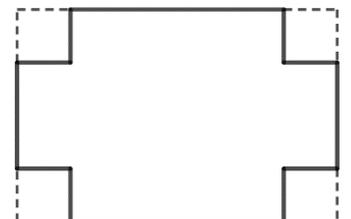
1441) * Il rettangolo ABCD a destra ha base 7 cm e altezza 4 cm. Trova la lunghezza x in modo che il triangolo AEF abbia area minima.

1442) * Sia dato un triangolo rettangolo di base 12 cm e altezza 9 cm. Disegna un rettangolo dentro il triangolo (come a destra), in modo che l'area del rettangolo sia massima.



1443) * Trova la distanza minima tra il punto A[0; 0] e la parabola $y = x^2 - \frac{9}{2}$. Calcola il valore di questa distanza. Trova i due punti per cui questa distanza è minima.

1444) * Ho un pezzo di cartone rettangolare di lati 60 cm e 28 cm. Come devo ritagliare gli angoli in modo da poter costruire una scatola aperta in alto con il volume più grande possibile?



SIMULAZIONE TEST FUNZIONI (durata 120 minuti):

- A. Studia e disegna la funzione $y = \frac{x^2-4}{2-2x}$.
- B. Trova la retta tangente alla funzione precedente nel punto di ascissa $x = 2$.
- C. Studia e disegna la funzione $y = \ln x$.

D. Calcola i seguenti limiti:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2+11x-10}{x^3+5x+6}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{8x^2+11x-10}{x^2+5x+6}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{8x^2+11x-10}{x^2+5x+6}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-5x+2}{x-3} - 3x \right)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\cos x)}{x^2-1}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(3x)-1}{\cos(2x)-1}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln(1+x^2)}$

E. Scrivi le derivate delle seguenti funzioni e semplificalle al massimo:

- a) $y = \frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - x$
- b) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$
- c) $y = \sqrt{x} - x^{-\frac{1}{2}}$
- d) $y = 3 \sin(3x^5)$
- e) $y = \frac{\tan x}{\sin x}$
- f) $y = 8 \ln(-x)$
- g) $y = \frac{x^2+3x+3}{(2x+3)^2}$

ESERCIZI Maturità

CIRCONFERENZA E VETTORI:

- 1) Trovare l'equazione generica della retta r perpendicolare alla retta $y = 2x - 3$ e passante per il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. (2021)
- 2) Trovare il punto di intersezione tra la retta $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e la retta $5x - 2y - 9 = 0$. Trovare l'angolo tra le due rette. (2020)
- 3) Trovare l'equazione generica della circonferenza circoscritta al triangolo OPQ dove $O(0; 0)$, $P(4; 0)$, $Q(0; 2)$. Disegnare la situazione nel sistema cartesiano Oxy . (2017)
- 1445) Disegnare le circonferenze tangenti agli assi x e y e con il centro sulla retta $y = 2x - 3$. Scrivere l'equazione delle circonferenze. (2016)
- 1446) Trovare l'equazione della circonferenza con il centro $C(1, -2)$, tangente alla retta $t: x + 2y - 7 = 0$. Disegnare retta e circonferenza. (2015)
- 1447) Trovare l'equazione della retta passante per il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ perpendicolare al vettore $(2, r)$ dove r è il raggio della circonferenza. (2013)
- 1448) Scrivere l'equazione generica della circonferenza di centro $C(1; -1)$ con il raggio $\sqrt{2}$. Tra le rette parallele alla retta di equazione $x - y + 3 = 0$ determinare quelle tangenti alla circonferenza. (2012)
- 1449) Nel piano cartesiano, trovare le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A[1; 0]$, $B[3; 0]$ e tangenti all'asse y . (2009)

ELLISSI, IPERBOLI E PARABOLE:

- 1450) Scrivere l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, fuoco in $F_1[1; 0]$ e vertice in $A[-3; 0]$. (2017)
- 1451) Trovare il valore del parametro k reale per cui la retta $r: y = k - x$ risulta tangente alla parabola $p: y = x^2 - kx$. Disegnare la parabola per tale valore del parametro k . (2014)
- 1452) Una parabola passa per il punto $G[1; 0]$ ed ha il vertice nel punto $V[4; 9]$. Scrivere l'equazione e rappresentarla graficamente. Qual è l'equazione della sua simmetrica rispetto all'origine? (2011)
- 1453) Nel piano cartesiano trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y , tangente all'asse x in $A[2; 0]$ e passante per $B[1; 1]$. (2009)
- 1454) Nel piano cartesiano trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y , avente il vertice in $V[1; -1]$ e passante per l'origine $O[0; 0]$. (2008)

ALTRO SULLE CONICHE:

- 1455) Decidere il tipo della conica $5x^2 + y^2 = 10x$. Disegnare la conica nel sistema cartesiano. (2018)
- 1456) Risolvere la disequazione $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{x} + 1$. (2017)

SUCCESSIONI:

- 1457) La somma di 94 numeri interi consecutivi risulta 2021. Trovare il primo e l'ultimo termine della successione di numeri. (2021)
- 1458) È data la successione geometrica $2 \quad 4x \quad 8x^2 \quad 16x^3 \quad \dots$
Trovare il valore di x in modo che la somma di tutti gli infiniti termini della successione sia uguale a 5. (2020)
- 1459) In una successione aritmetica $\begin{cases} a_{11} - a_{14} = 12 \\ a_2 + a_3 = -6 \end{cases}$. Trovare il primo termine e la somma dei primi 1000 termini. (2019)
- 1460) Calcolare la somma dei primi 100 termini della progressione aritmetica dove $a_1 + a_4 = 14$ e $a_2 + a_5 = 18$. (2017)

- 1461) In una progressione geometrica la somma di tutti gli infiniti termini è 3. Il primo termine è 2, scrivere i primi 5 termini della progressione. **(2016)**
- 1462) Determinare tutti i termini negativi della progressione aritmetica che soddisfano le condizioni: $\begin{cases} a_3 - a_5 = -48 \\ a_2 + a_3 = 8 \end{cases}$.
Trovare la somma dei primi 1000 numeri della progressione. **(2015)**
- 1463) Unendo i punti medi dei lati di un triangolo si ottiene di nuovo un triangolo. Iterando il procedimento si possono inscrivere infiniti triangoli uno dentro l'altro. Sapendo che il perimetro del primo triangolo vale 9, quale valore si ottiene sommando i perimetri degli infiniti triangoli? **(2012)**

LIMITI E DERIVATE:

- 1464) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$. **(2021)**
- 1465) Usando le proprietà dei limiti calcolare il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ **(2020)**
- 1466) Determinare le equazioni delle rette tangenti alla funzione $y = 2e^{2x} - 9e^x + 4$ nei punti di intersezione con l'asse delle ascisse. **(2020)**
- 1467) Determinare l'equazione della retta tangente alla funzione $y = (-x - 3)e^{-x}$ nel punto di ascissa $x = 1$. **(2019)**
- 1468) Determinare l'equazione della retta tangente alla funzione $y = \frac{3}{x^2 - 4}$ nel punto di ascissa $x = 4$. **(2018)**
- 1469) Data la funzione $f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$ determinare le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione nei punti di flesso. **(2018)**
- 1470) Calcolare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - x}$. **(2018)**
- 1471) Trovare l'equazione della retta t tangente alla funzione $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ nel punto d'intersezione con l'asse y . **(2016)**
- 1472) Trovare massimo e minimo della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$. Calcolare la distanza tra i due punti. **(2016)**
- 1473) Trovare l'equazione della retta t tangente alla funzione $f(x) = \frac{10 \ln x}{x}$ nel punto d'intersezione con l'asse x . **(2015)**
- 1474) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.
- 1475) Trovare l'equazione della retta t tangente alla funzione $f(x) = (x - 1)e^x$ nel punto d'intersezione con l'asse delle ascisse. **(2014)**
- 1476) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x)}$. **(2014)**
- 1477) Trovare la distanza tra i punti estremanti della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 3}$. **(2013)**
- 1478) Trovare l'equazione della retta t tangente alla funzione $f(x) = (3x - 1)e^x$ nel punto di intersezione con l'asse delle ascisse. **(2013)**
- 1479) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$. **(2013)**
- 1480) Dimostrare che per $x > -1$ la derivata della funzione $f(x) = \ln \frac{2x}{\sqrt{(x+1)^3}}$ si può esprimere come l'espressione $f'(x) = \frac{2-x}{2x(x+1)}$ **(2012)**
- 1481) Calcola per $k = 1$ e per $k = 2$ il risultato del seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^k}$. **(2011)**
- 1482) Trovare le equazioni delle rette tangenti alla funzione $f(x) = \frac{2 \cos x}{\cos x + 2}$ nei punti d'intersezione con l'asse delle ascisse. **(2010)**
- 1483) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cos x}{2x}$. **(2010)**

1484) Calcolare il limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-3x}$. (2009)

1485) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x)}$. (2008)

MATURITÄ CECA:

Funkce:

1486) Graf kvadratické funkce f s definičním oborem \mathbf{R} má vrchol $V[-3; 4]$ a prochází bodem $A[-5; 0]$. (2021, 2p)

- a. V kartézské soustavě sestrojte graf funkce f a vyznačte průsečíky grafu se souřadnicovými osami x, y .
- b. Zapište obor hodnot funkce f .

1487) Jsou dány funkce f, g s definičními obory \mathbf{R} : $f: y = -2 - x$ $g: y = -2x$

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A), či nikoli (N). (2021, 2p)

- a. $f(1) < g(1)$
- b. Funkce f je rostoucí
- c. Funkce g je konstantní
- d. Grafy funkcí f a g mají společný bod $P[2; -4]$.

1488) Je dán výraz V s reálnou proměnnou x : $V(x) = \frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{x}{(x+1)} - \frac{x}{x+2}$ Které tvrzení je pravdivé? (2021, 2p)

- A) Hodnota výrazu V je nulová pro $x = 0$.
- B) Hodnota výrazu V je rovna 2 pro $x = -2$.
- C) Hodnota výrazu V je pro $x = -3$ menší než pro $x = 3$.
- D) Hodnota výrazu V nemůže být rovna 1.
- E) Hodnota výrazu V nemůže být nikdy záporná.

1489) Přiřaďte ke každé nerovnici množinu všech jejích řešení v oboru \mathbf{R} . (2021, 2p)

- a. $(x - 3)(x + 2) < 0$
- b. $\frac{x+3}{2-x} < 0$
- c. $\frac{(x-3)^2}{x+2} < 0$
- d. $\frac{(x+3)(x-2)}{x+3} < 0$
- A) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$
- B) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2)$
- C) $(-\infty; -2)$
- D) $(-\infty; 2)$
- E) $(-3; 2)$
- F) $(-2; 3)$

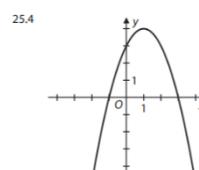
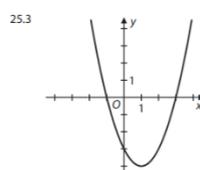
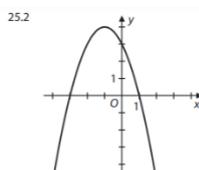
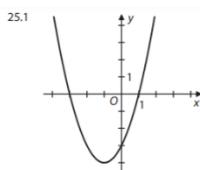
1490) Je dán výraz: $\frac{-45}{5y-9}$. Určete všechna $y \in \mathbf{R}$, pro která je daný výraz záporný. (2020, 1p)

1491) Pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce: $y = \log_9(1 - x)$. (2020, 2p)

- a. Určete definiční obor funkce
- b. Určete, pro které hodnoty proměnné x platí $y = 0,5$.

Každému z grafů kvadratické funkce přiřaďte odpovídající předpis. (2020, 4p)

- A) $y = (x - 3)(x + 1)$
- B) $y = (x - 3)(x - 1)$
- C) $y = (3 - x)(x + 1)$
- D) $y = (x + 3)(x + 1)$
- E) $y = (x + 3)(x - 1)$
- F) $y = (x + 3)(1 - x)$



1492) Kvadratická funkce má předpis $y = 2x^2 - 3x$. Její graf protíná přímka p ve dvou různých bodech $P [p_1; 9]$ a $Q [q_1; 9]$. Vypočítejte souřadnice p_1, q_1 bodů P, Q . (2019, 2p)

1493) Je dána funkce $f: y = \log_2 x$. (2019, 3p)

- a. Dopačíte souřadnici a_2 bodu $A[4; a_2]$ grafu funkce f .
- b. Dopačíte souřadnici b_1 bodu $B[b_1; -1]$
- c. Sestrojte graf funkce f s přesně vyznačenými body A, B a průsečíkem P grafu funkce f se souřadnicovou osou x .

1503) V geometrické posloupnosti platí: $a_2 = \sqrt[3]{3}$ $a_3 = -\sqrt[3]{9}$. Jaká je hodnota součtu $a_1 + a_4$?

(2020, 2p)

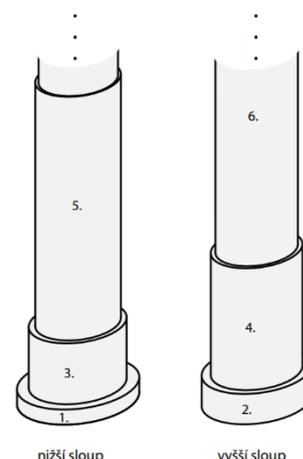
- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) jiná hodnota

1504) V Kocourkově navrhli nereálný plán stavby dvou sloupů sahajících do nebe. Na stavbu se má použít celkem 20 válců. Jednotlivé válce jsou podle výšky označeny pořadovými čísly od 1 do 20. Nejnižší je 1. válec s výškou 1 m, 2. válec má výšku 2 m a rovněž každý další válec je dvakrát vyšší než válec s pořadovým číslem o 1 nižším. (Tedy 3. válec má výšku 4 m, 4. válec 8 m atd.) Nižší sloup bude postaven ze všech válců označených lichými pořadovými čísly od 1 do 19, vyšší sloup ze všech válců označených sudými pořadovými čísly od 2 do 20. Určete

(2019, 2p)

a. v metrech výšku 20. válce

b. výšku nižšího sloupu.



1505) Pravý úhel je rozdělen na tři úhly, jejichž velikosti tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Nejmenší z těchto tří úhlů má velikost 11° .

Určete ve stupních velikost největšího z těchto tří úhlů. (2019, 1p)

I SETTE MESSAGGERI

Partito ad esplorare il regno di mio padre, di giorno in giorno vado allontanandomi dalla città e le notizie che mi giungono si fanno sempre più rare. Più di otto anni sono passati, esattamente otto anni, sei mesi e quindici giorni di ininterrotto cammino. Credevo, alla partenza, che in poche settimane avrei facilmente raggiunto i confini del regno, invece ho continuato ad incontrare sempre nuove genti e paesi; e dovunque uomini che parlavano la mia stessa lingua, che dicevano che sono il loro principe.

Penso a volte che la bussola sia impazzita e che, credendo di andare sempre verso sud, noi in realtà siamo forse andati girando su noi stessi, senza mai aumentare la distanza che ci separa dalla capitale; questo potrebbe spiegare il motivo per cui ancora non siamo giunti alla frontiera. Ma più spesso ho il dubbio che questo confine non esista, che il regno si estenda senza limite e che mai potrò arrivare alla fine.

Mi misi in viaggio che avevo già più di trent'anni, troppo tardi forse. Mi preoccupai di poter comunicare, durante il viaggio, con i miei cari, e fra i miei cavalieri scelsi i sette migliori, che mi servissero da messaggeri. Credevo che sette fossero troppi. Con il tempo mi accorsi al contrario che erano molto pochi; eppure nessuno di essi è mai stato malato, e non ha mai avuto problemi. Tutti e sette mi hanno servito con fedeltà e devozione. Ecco i loro nomi: Alessandro, Bartolomeo, Caio, Domenico, Ettore, Federico, Gregorio.

Mandai il primo, Alessandro, la sera del mio secondo giorno di viaggio, quando avevamo percorso già un'ottantina di leghe. La sera dopo inviai il secondo, poi il terzo, poi il quarto, fino all'ottava sera di viaggio, in cui partì Gregorio. Il primo non era ancora tornato.

Arrivò la decima sera, mentre stavamo preparando il campo per la notte. Alessandro aveva percorso, nel medesimo tempo, una distanza una volta e mezza la nostra; in una giornata, mentre noi avanzavamo di quaranta leghe, lui ne faceva sessanta, ma non di più. Così anche gli altri. Bartolomeo, partito per la città alla terza sera di viaggio, ci raggiunse alla quindicesima; Caio, partito alla quarta, fu di ritorno alla ventesima. Mi accorsi che bastava moltiplicare per cinque i giorni fin lì trascorsi per sapere quando il messaggero sarebbe arrivato.

Allontanandoci sempre più dalla capitale, la strada dei messaggeri era ogni volta più lunga. Dopo cinquanta giorni di cammino, l'intervallo fra un arrivo e l'altro dei messaggeri cominciò a crescere; mentre prima me ne vedevo arrivare al campo uno ogni cinque giorni, questo intervallo divenne di venticinque; intere settimane passavano senza avere notizia dalla mia città.

Dopo sei mesi l'intervallo fra un arrivo e l'altro dei messaggeri aumentò a quattro mesi. Essi mi portavano notizie lontane; le buste mi arrivavano rovinare e sporche. Andammo avanti. Le nuvole, il cielo, l'aria, i venti, gli uccelli, mi apparivano nuove e diverse; e io mi sentivo straniero.

Avanti, avanti! Persone incontrate mi dicevano che i confini non erano lontani. Erano già passati quattro anni dalla mia partenza. La capitale, la mia casa, mio padre, erano troppo lontani. Venti mesi di silenzio e di solitudine passavano ora fra i messaggeri. Mi portavano lettere ingiallite dal tempo, e in esse trovavo nomi dimenticati, sentimenti che non riuscivo a capire. Il mattino successivo, dopo una sola notte di riposo, il messaggero ripartiva nella direzione opposta.

Otto anni e mezzo sono trascorsi. Stasera cenavo da solo nella mia tenda quando è entrato Domenico, che riusciva ancora a sorridere anche se stanco. Da quasi sette anni non lo rivedevo. Per tutto questo tempo egli aveva corso per portarmi quel pacco di buste che finora non ho avuto voglia di aprire. Egli è già andato a dormire e ripartirà domani.

Ripartirà per l'ultima volta. Ho calcolato che, se tutto andrà bene, potrò rivedere Domenico solo fra trentaquattro anni. Io allora ne avrò settantadue. Ma comincio a sentirmi stanco ed è probabile che la morte arriverà prima. Così non lo potrò mai più rivedere.

Fra trentaquattro anni (prima anzi, molto prima) Domenico vedrà inaspettatamente la mia tenda e si domanderà perché mai io abbia fatto così poco cammino. Entrerà nella mia tenda con le lettere ingiallite dagli anni, e mi vedrà immobile disteso sul letto, morto.

Eppure, va, Domenico! Porta, il mio ultimo saluto alla città dove io sono nato. Tu sei l'ultimo legame con il mondo che un tempo fu anche mio. I messaggi mi hanno fatto sapere che molte cose sono cambiate, che mio padre è morto, che la Corona è passata a mio fratello maggiore, che mi considerano perduto.

Tu sei l'ultimo legame con loro, Domenico. Il quinto messaggero, Ettore, che mi raggiungerà fra un anno e otto mesi, non potrà ripartire perché non farebbe più in tempo a tornare. Dopo di te il silenzio, o Domenico, a meno che finalmente io non trovi i confini. Ma mi sto convincendo che non esiste frontiera.

Non esiste frontiera, almeno non nel senso che noi siamo abituati a pensare. Non ci sono mura, né fiumi, né montagne. Probabilmente supererò il limite senza accorgermene neppure, e continuerò ad andare avanti. Per questo io voglio che Ettore e gli altri messaggeri dopo di lui, quando mi avranno nuovamente raggiunto, partano avanti, affinché io possa sapere ciò che mi attende. Un'ansia strana da qualche tempo si accende in me alla sera, e non è più rimpianto delle gioie lasciate, come accadeva nei primi tempi del viaggio; è l'impazienza di conoscere le terre verso cui vado.

Vedo che di giorno in giorno, man mano che avanzo verso la mèta, nel cielo c'è una luce nuova; e le piante, i monti, i fiumi sembrano diversi dai nostri. Una speranza nuova mi porterà domani ancora più avanti, verso quelle montagne che le ombre della notte stanno nascondendo. Io andrò avanti, mentre Domenico andrà nella direzione opposta, per recare alla città l'inutile mio messaggio.

a) Completa la tabella:

	Partenza	1° arrivo	2° arrivo	3° arrivo	4° arrivo	5° arrivo	6° arrivo
Alessandro	2 giorni	10					
Bartolomeo	3 g.	15					
Caio	4 g.	20					
Domenico	5 g.	25					
Ettore	6 g.						
Federico	7 g.						
Gregorio	8 g.						

b) C'è un errore nel calcolo dei giorni del viaggio. Quanti anni, mesi, giorni sono passati esattamente?

c) Se il principe morisse all'età di 100 anni, quale messaggero lo vedrebbe per ultimo ancora vivo?

d) Se una lega significa 4,828 Km, quanti chilometri avrà percorso il principe dopo 70 anni?