Příklady z funkcionální analýzy

Marek Cúth, Jakub Rondoš a Jiří Spurný

2022/12/15

Obsah

Kapitola 1

Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti a příklady Banachových prostorů

PŘÍKLAD 1. $C([0,1])$ a $L_p([0,1])$ pro $p \in [1,\infty]$ mají nekonečnou dimenzi.

ŘEŠENÍ. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná rostoucí posloupnost bodů v $[0,1]$ konvergující k bodu 1. Nalezněme posloupnost $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených množin v $[0,1]$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in U_n$, a $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ pro $m \neq n$. Dále, dle Uryshonova lemmatu existují funkce $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x_n) = 1$ a f_n je nulová na $\bigcup_{m\neq n} U_m$. Potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě lineárně nezávislá množina v $C([0,1])$, a tedy tento prostor má nekonečnou dimenzi. Dále, pro každé $p \in [1,\infty]$ je posloupnost $\{\chi_{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$ charakteristických funkcí množin U_n zřejmě lineárně nezávislá v $L_p([0,1])$, a tedy i tento prostor má nekonečnou dimenzi.

□

PŘÍKLAD 2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Označme

$$C^n([0,1],\mathbb{K}) := \{f : (0,1) \to \mathbb{K};\ f^{(n)} \text{ spojitá na } (0,1) \text{ a lze spojitě rozšířit na } [0,1]\}.$$

(a) Ukažte, že pro každé $k \in \{0,\dots,n\}$ je $f^{(k)}$ spojitá na $(0,1)$ a lze spojitě rozšířit na $[0,1]$.
(b) Uvažujme vzorec

$$\|f\|_{C^n} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^{(n)}\|_\infty, \quad f \in C^n([0,1]).$$

Ukažte, že $(C^n([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_{C^{(n)}})$ je Banachův prostor.

ŘEŠENÍ. (a) Indukcí dokážeme, že pro $k \in \{0,\dots,n-1\}$ je funkce $f^{(k)}$ Lipschitzovská na $(0,1)$. To stačí, neboť každá Lipschitzovská funkce je stejnoměrně spojitá a stejnoměrně spojité funkce na $(0,1)$ se dají spojitě rozšířit na $[0,1]$. Zvolme tedy $i \in \{1,\dots,n\}$ a předpokládejme, že $f^{(i)}$ je spojitá na $(0,1)$ a lze spojitě rozšířit na $[0,1]$ (pro $i = n$ to plyne z definice $C^n([0,1])$, pro ostatní hodnoty i to plyne z indukčního předpokladu). Pro přehlednost označme $g := f^{(i-1)}$. Pak g' je omezená na $(0,1)$. Tvrdíme, že potom g je lipschitzovská funkce. Nejprve uvažujme případ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zvolme $x, y \in (0,1)$, $x < y$, pak dle Věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (x,y)$ splňující $g'(\xi) = \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$, tedy dostáváme

$$|g(y) - g(x)| = |g'(\xi)| \cdot |y - x| \le \|g'\|_\infty \cdot |y - x|,$$

a protože $x, y \in (0,1)$ byly libovolné, dostáváme že g je $\|g'\|_\infty$-lipschitzovská. V případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aplikací již dokázaného reálného případu dostáváme, že $\operatorname{Re} g$ a $\operatorname{Im} g$ jsou K-lipschitzovské pro nějaké $K > 0$, pak ale pro každé $x, y \in [0,1]$ máme

$$\begin{aligned}|g(x) - g(y)| &= \sqrt{|\operatorname{Re} g(x) - \operatorname{Re} g(y)|^2 + |\operatorname{Im} g(x) - \operatorname{Im} g(y)|^2} \le \sqrt{|K|x-y||^2 + |K|x-y||^2} \\ &= \sqrt{2}K|x-y|,\end{aligned}$$

a tedy g je $\sqrt{2}K$-lipschitzovská funkce.

(b) Dle již dokázaného (a) je $\|f\|_{C^n}$ dobře definované reálné číslo pro každou $f \in C^n([0,1])$. Ověřme, že vzorec definuje normu na prostoru $C^n([0,1])$. Máme $\|0\|_{C^n} = 0$ a pokud $f \in \mathbb{C}^n([0,1])$, $f \not\equiv 0$, pak $\|f\|_{C^n} \ge \|f\|_\infty > 0$. Dále, pro $f \in C^n([0,1])$ a $\lambda \in \mathbb{K}$ dostáváme

$$\|\lambda f\|_{C^n} = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty + \dots + \|\lambda f^{(n)}\|_\infty = |\lambda|\|\lambda f\|_{C^n}.$$

Konečně, pro $f, g \in C^n([0,1])$ platí

$$\|f+g\|_{C^n} = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty + \ldots + \|f^{(n)}+g^{(n)}\|_\infty \leq \|f\|_{C^n} + \|g\|_{C^n}.$$

Zbývá dokázat úplnost. Nechť $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyosvká posloupnost v $C^n([0,1])$. Protože pro každé $k \in \{0,\ldots,n\}$ máme $\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \|f_n\|_{C^n}$, jsou posloupnosti $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \{0,\ldots,n\}$ cauchyovské v prostoru $C([0,1])$ (po spojitém dodefinování na $[0,1]$) a protože $C([0,1])$ je Banachův, existují spojité funkce $g_k \in C([0,1])$ že $\|f_n^{(k)} - g_k\|_\infty \to 0$ pro každé $k \in \{0,\ldots,n\}$. Označme $g := g_0$ a ukažme, že $g^{(k)} = g_k$. Postupujme indukcí. Pro $k=0$ to je zřejmé. Pokud je $k>0$ a $g^{(i)} = g_i$ pro $i \leq k-1$, pak $f_n^{(k-1)}$ stejnoměrně konverguje k g_{k-1} a posloupnost $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ je stejnoměrně konvergentní, tedy dle Věty o stejnoměrné konvergenci derivací dostáváme, že $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně konverguje k $(g_{k-1})' = g^{(k)}$ a z jednoznačnosti stejnoměrné limity tak dostáváme, že $g^{(k)} = g_k$. Našli jsme tedy funkci $g \in C^n([0,1])$ splňující $\|f_n^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty \to 0$ pro každé $k \in \{0,\ldots,n\}$, a tedy posloupnost $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje ke g v prostoru $C^n([0,1])$.

□

PŘÍKLAD 3. Nechť (X,ρ) je metrický prostor s metrikou ρ a $x_0 \in X$ je dáno. Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Lip}(X)$ všech lipschitzovských reálných funkcí na X s normou

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = |f(x_0)| + \sup\Big\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)}; x,y \in X, x \neq y\Big\}.$$

(a) Ukažte, že $\mathrm{Lip}(X)$ je Banachův prostor.
(b) Ukažte, že $\mathrm{Lip}([0,1])$ není separabilní.

ŘEŠENÍ. (a) Předpokládejme, že $(f_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí v $\mathrm{Lip}(X)$, která je cauchyovská v normě $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$. Potom z odhadu $|f_n(x_0)| \leq \|f_n\|_{\mathrm{Lip}}$ pro $n \in \mathbb{N}$ plyne, že posloupnost reálných čísel $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ je také cauchyovská, a tedy konvergentní. Dále, zvolme $z \in X$ různé od x_0 (pokud X je jednobodový, pak $\mathrm{Lip}(X) = \mathbb{R}$ je Banachův). Potom pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}&\frac{|f_n(z) - f_n(x_0) - (f_m(z) - f_m(x_0))|}{\rho(z,x_0)} \leq \\ &\leq \sup\Big\{\frac{|(f_n-f_m)(x) - (f_n-f_m)(y)|}{\rho(x,y)}; x,y \in X, x \neq y\Big\} \leq \|f_n - f_m\|_{Lip},\end{aligned}$$

odkud plyne, že také posloupnost čísel $(f_n(z) - f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní. Tedy, jelikož konverguje posloupnost $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$, konverguje i posloupnost $(f_n(z))_{n=1}^\infty$. Můžeme tedy definovat funkci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

Zbývá ukázat, že posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ konverguje k f v normě $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$. Zvolme tedy libovolné $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ je $\|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} < \varepsilon$. Dále fixujme libovolné dva body $x \neq y$ v X. Potom můžeme nalézt $n \geq n_0$ takové, že $|f(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\rho(x,y)$ a $|f(y) - f_n(y)| < \varepsilon\rho(x,y)$. Nyní pro každé $m \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}|(f-f_m)(x_0)| + \frac{|(f-f_m)(x) - (f-f_m)(y)|}{\rho(x,y)} &\leq |(f-f_n)(x_0)| + \frac{|(f-f_n)(x) - (f-f_n)(y)|}{\rho(x,y)} + \\ &\quad + |(f_n-f_m)(x_0)| + \frac{|(f_n-f_m)(x) - (f_n-f_m)(y)|}{\rho(x,y)} \\ &\leq \varepsilon\Big(1 + \frac{2\rho(x,y)}{\rho(x,y)}\Big) + \|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy pro každé $m \geq n_0$ platí $\|f - f_m\|_{\mathrm{Lip}} < 4\varepsilon$, čímž je důkaz dokončen.

(b) Nalezneme nespočetnou diskrétní podmnožinu $\mathrm{Lip}([0,1])$. Zvolme $x_0 = 1$. Nyní nalezneme posloupnost $(g_n)_{n=1}^\infty$ funkcí v $\mathrm{Lip}([0,1])$ takovou, že funkce $(g_n)_{n=1}^\infty$ mají po dvou dijunktní nosiče a $\|g_n\|_{\mathrm{Lip}} = 1$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Konkrétněji, pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme funkci g_n předpisem

$$g_n(x) = \max\Big\{0, \frac{1}{2^{n+2}} - |x - \frac{3}{2^{n+2}}|\Big\}, \quad x \in [0,1],$$

pak g_n je 1-Lipchitzovská a nosič g_n je roven $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$.

Nyní, pro každou podmnožinu přirozených čísel $M \subseteq \mathbb{N}$, jelikož funkce g_n mají po dvou disjunktní nosiče, je funkce

$$f_M = \sum_{n \in M} g_n$$

dobře definovaná a lipschitzovská na $[0,1]$ s $\|f_M\|_{\mathrm{Lip}} = 1$. Navíc, pro dvě různé podmnožiny přirozených čísel M a N je $\|f_M - f_N\|_{\mathrm{Lip}} = 1$. Vskutku, zvolme $n \in (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$, potom $\|f_M - f_N\|_{\mathrm{Lip}} \geq \|g_n\|_{\mathrm{Lip}} = 1$. Tedy množina funkcí

$$\{f_M : M \subseteq \mathbb{N}\}$$

je nespočetná diskrétní podmnožina $\mathrm{Lip}([0,1])$, a tedy $\mathrm{Lip}([0,1])$ není separabilní.

□

PŘÍKLAD 4. Pro posloupnost čísel $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ položme

$$\|(x_n)\|_{bv} = |x_1| + \sum_{k=1}^\infty |x_{k+1} - x_k|.$$

Označme $bv := \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N};\ \|x\|_{bv} < \infty\}$. Dokažte, že $(bv, \|\cdot\|_{bv})$ je Banachův prostor.

ŘEŠENÍ. Nejprve ukažme, že $\|\cdot\|_{bv}$ definuje normu na prostoru bv. Máme $\|0\|_{bv} = 0$. Pokud $x \in bv$ a $\|x\|_{bv} = 0$, pak $x_1 = 0$ a $x_k = x_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, tedy indukcí dostaneme že $x_k = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Pro $x \in bv$ a $\lambda \in \mathbb{K}$ máme

$$\|\lambda x\|_{bv} = |\lambda x_1| + \sum_{k=1}^\infty |\lambda||x_{k+1} - x_k| = |\lambda| \cdot \|x\|_{bv}.$$

Konečně, pro $x, y \in bv$ platí

$$\|x + y\|_{bv} = |x_1 + y_1| + \sum_{k=1}^\infty |x_{k+1} - x_k + y_{k+1} - y_k| \leq \|x\|_{bv} + \|y\|_{bv}.$$

Zbývá dokázat úplnost. Nejprve si uvědomme, že pro každé $x \in bv$ a každé $i \in \mathbb{N}$ máme

$$|x_i| \leq \sum_{k=1}^{i-1} |x_{k+1} - x_k| + |x_1|,$$

tedy platí

$$\forall x \in bv : \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_{bv}. \tag{1}$$

Nechť $(x^k)_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost v prostoru bv. Pak z (1) dostáváme, že $(x^k)_{k=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost také v prostoru ℓ_∞ a tedy z úplnosti ℓ_∞ existuje $x \in \ell_\infty$ splňující $\|x^k - x\|_\infty \to 0$.

Ukažme nyní, že $x \in bv$, tedy že $\|x\|_{bv} < \infty$. Jelikož je posloupnost $(x^k)_{k=1}^\infty$ cauchyovská v bv, je v tomto prostoru omezená a tedy existuje $C > 0$ spňující, že $\|x^k\|_{bv} \leq C$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Pro spor předpokládejme, že $\|x\|_{bv} > C$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $|x_1| + \sum_{n=1}^{n_0} |x_{n+1} - x_n| > C$. Tím ovšem dostáváme spor s tím, že pro každé $n \leq n_0$, posloupnost $(x^k(n))_{k=1}^\infty$ konverguje k x_n, a

$$|x^k(1)| + \sum_{n=1}^{n_0} |x^k(n+1) - x^k(n)| \leq \|x^k\|_{bv} \leq C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tedy $\|x\|_{bv} \leq C < \infty$.

Zbývá dokázat, že $\|x^k - x\|_{bv} \to 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k, l \geq k_0$ je $\|x^k - x^l\|_{bv} < \varepsilon$. Dále, jelikož obě normy $\|x^{k_0}\|_{bv}$ a $\|x\|_{bv}$ jsou konečné, lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x^{k_0}(n+1) - x^{k_0}(n)| < \varepsilon \text{ a } \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Dále, protože $x^k(n) \to x_n$ pro každé $n \in \{1, \dots, n_0\}$, nalezneme $k_1 \geq k_0$ splňující, že pro každé $k \geq k_1$,

$$|x_1 - x^k(1)| + \sum_{n=1}^{n_0} |(x_{n+1} - x_n) - (x^k(n+1) - x^k(n))| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $k \geq k_1$ platí, že

$$\begin{aligned}
\|x - x^k\| &= |x_1 - x^k(1)| + \sum_{n=1}^{n_0} |(x_{n+1} - x_n) - (x^k(n+1) - x^k(n))| \\
&\quad + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |(x_{n+1} - x_n) - (x^k(n+1) - x^k(n))| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |(x_{n+1} - x_n) - (x^{k_0}(n+1) - x^{k_0}(n))| + \|x^{k_0} - x^k\|_{bv} \\
&\leq \varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |(x_{n+1} - x_n)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |(x^{k_0}(n+1) - x^{k_0}(n))| + \|x^{k_0} - x^k\|_{bv} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

□

PŘÍKLAD 5. (a) Nalezněte úplný metrický prostor X a klesající posloupnost $\{B_n\}$ uzavřených koulí v X tak, že $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$.
(b) Ukažte, že v Banachově prostoru X taková posloupnost neexistuje.

ŘEŠENÍ. (a) Nechť $X = (-1, 1)$, a pro $x, y \in (-1, 1)$ definujme

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 + |x - y|, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Je snadné ověřit, že ρ je metrika na X. Navíc (X, ρ) je úplný metrický prostor, neboť neobsahuje žádné cauchyovské posloupnosti.

Nyní lze snadno ověřit, že pro $n \in \mathbb{N}$ je množina $B_n = [\frac{2^n-2}{2^n}, 1)$ uzavřená koule v (X, ρ) o středu $\frac{2^n-1}{2^n}$ a poloměru $1 + \frac{1}{2^n}$. Tedy $\{B_n\}$ je klesající posloupnost uzavřených koulí v (X, ρ) spňující $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$.

(b) Nechť $\{B_n\}$ je libovolná klesající posloupnost uzavřených koulí v Banachově prostoru X. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, nechť x_n značí střed a r_n značí poloměr koule B_n. Jelikož posloupnost koulí $\{B_n\}$ je klesající, je posloupnost $\{r_n\}$ nerostoucí, a tedy konvergentní. Rozlišíme dvě možnosti.

Pokud posloupnost $\{r_n\}$ konverguje k nule, potom je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní. Potom ale zřejmě limita této posloupnosti leží v průniku koulí B_n.

Předpokládejme tedy naopak, že posloupnost $\{r_n\}$ konverguje k číslu $\eta > 0$. Potom lze nalézt $n \in \mathbb{N}$ takové, že $r_n < 2\eta$. Tvrdíme, že pro každé $m \geq n$ je $x_n \in B_m$. Pro spor předpokládejme, že existuje $m > n$ takové, že $x_n \notin B_m$, tedy $\|x_m - x_n\| > r_m$. Potom, jelikož $B_m \subseteq B_n$, je

$$x_m = x_n + (x_m - x_n) \in B_n.$$

Označme

$$y = x_n - (x_m - x_n).$$

Potom $\|y - x_n\| = \|x_m - x_n\|$ a $\|y - x_m\| = 2\|x_m - x_n\|$. Dále ukažme že $B(y, r_m) \subseteq B_n$. Vskutku, pro každé $z \in B(y, r_m)$ máme $x_m + (y - z) \in B_m \subset B_n$ a také $x_n - z = y - z + x_m - x_n$, a tedy

$$\|z - x_n\| = \|(y - z + x_m) - x_n\| < r_n,$$

z čehož dostáváme $z \in B_n$.

Uvažujme nyní body

$$x_m + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}(x_m - x_n) \in B_m \subseteq B_n \text{ a } y + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}(y - x_n) \in B(y, r_m) \subseteq B_n.$$

Potom

$$\|x_m + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}(x_m - x_n) - (y + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}(y - x_n))\| \leq 2r_n.$$

Na druhou stranu,

$$\begin{aligned}
&\|x_m + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}(x_m - x_n) - (y + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}(y - x_n))\| = \\
&= \|x_m - y + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}(x_m - y)\| = \Big(1 + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}\Big)\|y - x_m\| = \\
&= \Big(1 + \frac{r_m}{\|x_m - x_n\|}\Big)2\|x_m - x_n\| = 2(\|x_m - x_n\| + r_m) > 4r_m.
\end{aligned}$$

Dostáváme spor s tím, že $r_n < 2\eta \leq 2r_m$, čímž je důkaz ukončen.

□

2. Lineární operátory a funkcionály

PŘÍKLAD 6. V následujících příkladech ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte zda je operátor T prostý (a pokud ne, zjistěte jeho jádro), zda je operátor T na a zda je operátor T izometrie do, případně izomorfismus do (a pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru).

(a) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.
(b) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.
(c) $X = Y = \ell_1(\mathbb{Z})$, $T((x_n)) = (x_{n+k})_{n=1}^{\infty}$ (kde $k \in \mathbb{Z}$).
(d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$.
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(e) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.
(f) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1}x_n)_{n=1}^{\infty}$.
(g) $X = Y = C([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(h) $X = C([0, r])$, $Y = C^1([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(i) $X = C^1([0, 1])$, $Y = C([0, 1])$, $T(f)(t) = f' - f$.
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(j) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$.
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)

ŘEŠENÍ. (a) Pro každé $(x_n) \in \ell_1$ máme

$$\|T((x_n))\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| = \|(x_n)\|_1,$$

tedy $T(x) \in \ell_1$ pro každé $x \in \ell_1$ a z věty o aritmetice limit snadno dostáváme že T je lineární operátor. S použitím výpočtu výše dále vidíme, že T je izometrie, tedy se jedná o prostý operátor a inverzní operátor má normu rovnu jedné. Konečně, snadno nahlédneme, že $\operatorname{Rng} T \subset \{y \in \ell_1;\ y(1) = 0\}$ a dokonce platí rovnost neboť pro každé $y \in \ell_1$ splňující $y(1) = 0$ máme $T((y_2, y_3, \dots)) = y$. Speciálně, T není na.

(b) Pro každé $(x_n) \in \ell_1$ máme

$$\|T((x_n))\|_1 = \sum_{i=2}^{\infty} |x_i| \leq \|(x_n)\|_1,$$

tedy $T(x) \in \ell_1$ pro každé $x \in \ell_1$ a z věty o aritmetice limit snadno dostáváme že T je lineární operátor. S použitím výpočtu výše dále vidíme, že T je spojitý a $\|T\| \leq 1$. Navíc, $\|T(e_2)\| = 1 = \|e_2\|$, tedy $\|T\| = 1$ a operátor T své normy nabývá. Dále zřejmě $x \in \operatorname{Ker} T$ právě když $x(n) = 0$ pro každé $n \geq 2$ a tedy operátor T není prostý (tedy není ani izomorfismus) a platí $\operatorname{Ker} T = \{x \in \ell_1;\ x(n) = 0 \text{ pro každé } n \geq 2\}$. Konečně, operátor T je surjektivní neboť pro $y \in \ell_1$ máme $T((0, y_1, y_2, \dots)) = y$.

(c) Poznamenejme, že pro $k = \pm 1$ se jedná o hojně užívaný operátor, kterému se říká „levý/pravý shift“. Zvolme $k \in \mathbb{Z}$. Pak pro každé $(x_n) \in \ell_1(\mathbb{Z})$ máme

$$\|T((x_n))\|_1 = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}} |x_{i+k}|} \leq \|(x_n)\|_1,$$

tedy, analogicky jako výše, T je lineární izometrie (a tedy T je prostý). Navíc, T je na neboť pro každé $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$ máme $T((x_{n-k})_{n=1}^{\infty}) = x$.

(d) Tento tip operátoru si lze představit jako operátor daný „nekonečnou maticí“

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Zkusme tedy nejprve vyšetřit chování operátoru $S : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ daného „2x2 podmaticí vlevo nahoře“, konkrétněji $S(x, y) = (x + 2y, x + y)$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Naše intuice spočívá v tom, že norma operátoru T bude určena normou operátoru S, neboť operátor T se dá napsat jako součet S a „identity“ $(x_3, x_4 \dots) \mapsto (x_3, x_4 \dots)$.

Spočtemě tedy nejprve normu operátoru S. Máme

$$\|S\| = \sup\{\|(x + 2y, x + y)\|;\ (x, y) \in S_{\mathbb{R}^2}\} = \sup\{\sqrt{(x + 2y)^2 + (x + y)^2};\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Vzhledem k tomu, že odmocnina je rostoucí funkce, převedli jsme tak úlohu na vyšetřování maxima funkce $f(x, y) := (x + 2y)^2 + (x + y)^2$ na kompaktní množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$. Maximum funkce f na M nalezneme pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů. Nejprve si uvědomme, že pro $(x, y) \in M$ máme

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 4(1 - x^2) + x^2 + 2xy + (1 - x^2) = -3x^2 + 6xy + 5.$$

Pokud je bod $(x, y) \in M$ bodem lokálního extrému, pak musí platit že buď $(2x, 2y) = (0, 0)$ což nenastane pro žádné $(x, y) \in M$, nebo existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující

$$(\lambda 2x, \lambda 2y) = \nabla f(x, y) = (-6x + 6y, 6x),$$

tedy, s přihlédnutím k tomu že případ $x = 0$ nebo $y = 0$ implikuje $(x, y) = (0, 0) \notin M$, máme $\lambda = \frac{3x}{y}$ a proto příslušné $\lambda \in \mathbb{R}$ existuje právě když platí $\frac{6x^2}{y} = -6x + 6y$ což je ekvivalentní s tím, že $x^2 = -xy + y^2$. Na množině M máme $y^2 = 1 - x^2$, tedy po úpravě dostáváme ekvivalentní rovnici $2x^2 = -xy + 1$ a proto máme $y = \frac{1 - 2x^2}{x}$. Z podmínky $(x, y) \in M$ pak musí zároveň platit

$$x^2 + \Big(\frac{1 - 2x^2}{x}\Big)^2 = 1,$$

a snadným vyřešením této rovnice dostaneme že $x^2 \in \{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}\}$, a tedy $y = \frac{1 - 2x^2}{x} = \mp \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{x}$ a také $y^2 = 1 - x^2 = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{10}$. Celkem tedy jedinými kandidáty na lokální extrém f na kompaktní množině M

jsou body

$$\Big\{\Big(\mu\sqrt{\tfrac{5+\lambda\sqrt{5}}{10}}, -\lambda\mu\sqrt{\tfrac{5-\lambda\sqrt{5}}{10}}\Big);\ \mu,\lambda\in\{-1,1\}\Big\},$$

přičemž pro $\mu,\lambda\in\{-1,1\}$ máme

$$f\Big(\mu\sqrt{\tfrac{5+\lambda\sqrt{5}}{10}}, -\lambda\mu\sqrt{\tfrac{5-\lambda\sqrt{5}}{10}}\Big) = -3\frac{5+\lambda\sqrt{5}}{10} - 6\lambda\frac{\sqrt{25-5}}{10} + 5 = \frac{7-3\lambda\sqrt{5}}{2}$$

a funkce f tedy nabývá svého maxima pro $\mu\in\{-1,1\}$ a $\lambda=-1$, a tedy máme

$$\|S\| = \Big\|S\Big(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\Big)\Big\| = \sqrt{f\Big(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\Big)} = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}.$$

Nyní již snadno nalezneme normu operátoru T. Pro každé $x\in S_{\ell_2}$ platí

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_2^2 &= \|S(x_1,x_2)\|_2^2 + \|(x_3,x_4,\dots)\|^2 = \|S(x_1,x_2)\|_2^2 + 1 - \|(x_1,x_2)\|_2^2\\ &\le 1 + \|(x_1,x_2)\|^2(\|S\|^2-1) \le \|S\|^2\end{aligned}$$

a proto je T spojitý lineární operátor splňující $\|T\|\le\|S\|$. Navíc, protože operátor S nabývá své normy (což jsme spočetli výše), existuje $x=(x_1,x_2,0,0,\dots)\in S_{\ell_2}$ splňující $\|T(x)\| = \|S(x_1,x_2)\| = \|S\| = \|T\|$.

Protože operátor S je určen regulární maticí, dostáváme že T je bijekce (tedy je prostý a na), kde operátor $T^{-1}:\ell_2\to\ell_2$ je určen inverzní maticí S^{-1}, tedy po snadném výpočtu inverzní matice dostaneme že $T^{-1}(x) = (-x_1+2x_2, x_1-x_2, x_3, x_4,\dots)$ pro každé $x\in\ell_2$. Konečně, podobným postupem jako výše (tj. převedením úlohy na výpočet extrému funkce dvou proměnných) zjistíme že $\|T^{-1}\| = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$. Vzhledem k tomu, že postup je v tomto případě naprosto analogický, ponecháme detaily výpočtu normy $\|T^{-1}\|$ na čtenáři.

(e) Pro každé $(x_n)\in\ell_2$ máme

$$\|T((x_n))\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\tfrac{1}{n}x_n|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}|x_n|^2 = \|(x_n)\|_2^2,$$

tedy $T(x)\in\ell_2$ pro každé $x\in\ell_2$, T je spojitý lineární operátor a $\|T\|\le 1$. Navíc, $\|T(e_1)\| = 1 = \|e_1\|$, tedy $\|T\|=1$ a operátor T své normy nabývá. Dále zřejmě $x\in\operatorname{Ker}T$ právě když $x(n)=0$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a tedy operátor T je prostý. Pro vyšetření oboru hodnot T si všimneme, že pokud ja dáno $y\in\ell_2$ a $T(x)=y$, pak nutně musí platit $x_n = n\cdot y_n$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Tedy $\operatorname{Rng}T = \{y\in\ell_2\colon (ny_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_2\}$ a operátor T tedy není na, neboť například $y=(\frac{1}{n})\in\ell_2$ ale $y\notin\operatorname{Rng}T$. Operátor T není isomorfismem, protože například $\|Te_n\| = \frac{1}{n}\to 0$ ale $\|e_n\|=1$ pro každé $n\in\mathbb{N}$.

V tuto chvíli by se student mohl divit, jak jsme na to přišli. Obecnou metodou pro vyšetření, zda je operátor isomorfismem, bývá, najít předpis pro inverzní operátor a vyšetřit jeho spojitost. V tomto konrétním případě vidíme že inverzní operátor $T^{-1}:\operatorname{Rng}T\to\ell_2$ je dán předpisem $T^{-1}y = (ny_n)_{n=1}^{\infty}$ pro $y\in\ell_2$, a operátor T je tak isomorfismem právě když je operátor T^{-1} spojitý, ekvivalentně omezený. To nás vede k tomu, že se snažíme zjistit zda existuje konstanta $C>0$ splňující $\|T^{-1}y\| = \|(ny_n)\| \le C\|y\|$. A právě tato úvaha nás pak navede na to, že volbou $y=e_n$ pro dost veliké n bychom mohli dostat spor, což jsme použili výše.

(f) Pro každé $(x_n)\in\ell_2$ máme

$$\|T((x_n))\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|(1-\tfrac{1}{n+1})x_n|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}|x_n|^2 = \|(x_n)\|_2^2, \tag{2}$$

tedy $T(x)\in\ell_2$ pro každé $x\in\ell_2$, T je spojitý lineární operátor a $\|T\|\le 1$. Navíc, pro $n\in\mathbb{N}$ máme $\|e_n\| = 1$ a $\|Te_n\| = \frac{n}{n+1}\to 1$, tedy $\|T\|=1$. Normy se nenabývá, neboť pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $(1-\frac{1}{n+1})<1$ a tedy v (2) máme dokonce ostrou nerovnost $\|T(x)\|_2^2 < \|x\|_2^2$ pro každé $x\in\ell_2$. Dále zřejmě $x\in\operatorname{Ker}T$ právě když $x(n)=0$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a tedy operátor T je prostý. Pro vyšetření oboru hodnot T si všimneme, že pokud ja dáno $y\in\ell_2$ a $T(x)=y$, pak nutně musí platit $x_n = \frac{n}{n+1}\cdot y_n$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\operatorname{Rng} T = \{y \in \ell_2 \colon (\frac{n+1}{n} y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2\}$ a operátor T je tedy na, neboť pro každé $y \in \ell_2$ máme

$$\|(\tfrac{n+1}{n} y_n)\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty |1 + \tfrac{1}{n}|^2 |y_n|^2 \le \sum_{n=1}^\infty |2y_n|^2 = (\|2y\|_2)^2 < \infty. \tag{3}$$

Z úvahy výše vidíme, že inverzní operátor $T^{-1} : \ell_2 \to \ell_2$ je dán předpisem $T^{-1}(y) = (\frac{n+1}{n} y_n)_{n=1}^\infty$ a tedy z (3) dostáváme, že T^{-1} je spojitý operátor a $\|T^{-1}\| \le 2$. Tedy T je isomorfismus. Konečně, máme $\|T^{-1} e_1\| = 2 = 2\|e_1\|$ a tedy $\|T^{-1}\| = 2$ a T^{-1} dokonce nabývá své normy.

(g) Nejprve si připomeňme Větu o derivaci funkce horní meze Riemannova integrálu, podle které pro každou funkci $f \in C([0, r])$ platí, že $[0, r] \ni t \mapsto \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ je spojitá funkce splňující $(Tf)' = f$. Speciálně, pro každé $f \in C([0, r])$ je Tf spojitá (v naší definici používáme spíše Lebesgueův integrál, ale pro spojité funkce jsou oba integrály totožné). Z linearity integrálu tak dostáváme, že $T : C([0, r]) \to C([0, r])$ je dobře definované lineární zobrazení. Dále pro $f \in C([0, r])$ a $t \in [0, r]$ máme

$$|T(f)(t)| \le \int_0^t |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_\infty \int_0^t 1\,\mathrm{d}t \le r\|f\|_\infty,$$

tedy $\|Tf\|_\infty \le \|f\|_\infty$ a proto T je spojitý a $\|T\| \le r$. Navíc, máme $\|T1\|_\infty = r = r\|1\|_\infty$ a proto $\|T\| = r$ a T nabývá své normy. Pokud $Tf = 0$, pak dostáváme že $0 = (Tf)' = f$, operátor T je proto prostý. Operátor T není na, protože každá Tf má všude vlastní derivaci a přitom existují spojité funkce které v nějakém bodě nemají derivaci (dokonce existují i takové spojité funkce, které nemají derivaci v žádném bodě). T není isomorfismus, protože pro posloupnost funkcí $f_n(x) := (n - n^2 x) \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ snadno spočteme, že $\|f_n\| = n \to \infty$, ale $\|Tf_n\| = \int_0^{1/n} (n - n^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(h) Podobně jako v příkladu výše nahlédneme, že pro každé $f \in C([0, r])$ je $Tf \in C^1([0, r])$ a $(Tf)' = f$. Z linearity integrálu tak dostáváme, že $T : C([0, r]) \to C^1([0, r])$ je dobře definované lineární zobrazení. Připomeňme si (viz. Příklad 2), že na prostoru $C^1([0, r])$ uvažujeme normu $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Dále pro $f \in C([0, r])$ a $t, s \in [0, r]$ máme

$$|T(f)(t)| + |(Tf)'(s)| \le \int_0^t |f(x)|\,\mathrm{d}x + |f(s)| \le r\|f\|_\infty + \|f\|_\infty = (r + 1)\|f\|_\infty,$$

tedy $\|Tf\|_{C^1} \le (r + 1)\|f\|_\infty$ a proto T je spojitý a $\|T\| \le r + 1$. Dále máme $T1(t) = t$ pro každé $t \in [0, r]$, tedy $\|T1\|_{C^1} = r + 1 = (r + 1)\|1\|_\infty$, a proto $\|T\| = r + 1$ a T nabývá své normy. Podobně jako v předchozím příkladu odvodíme, že T je prostý. Operátor T není na, protože pro každé $f \in C([0, r])$ platí $Tf(0) = 0$ a tedy $\operatorname{Rng} T \subset \{g \in C^1([0, r]);\ g(0) = 0\}$. Na druhou stranu, pro každou $g \in C^1([0, r])$ splňující $g(0) = 0$ platí, že $Tg'(t) = \int_0^t g'(x)\,\mathrm{d}x = g(t) - g(0) = g(t)$ pro každé $t \in [0, r]$, a tedy $\operatorname{Rng} T = \{g \in C^1([0, r]);\ g(0) = 0\}$ a inverzní operátor $T^{-1} : \operatorname{Rng} T \to C([0, r])$ je dán předpisem $T^{-1} g = g'$ pro každé $g \in \operatorname{Rng} T$. Dále, pro $g \in \operatorname{Rng} T$ platí odhad

$$\|T^{-1} g\|_\infty = \|g'\|_\infty \le \|g\|_{C^1},$$

tedy T^{-1} je spojitý operátor, $\|T^{-1}\| \le 1$ a T je isomorfismus. Konečně, uvažujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkci $g_n(x) = \max\{1 - nx, 0\}$, $x \in [0, r]$. Pak $g_n \in C([0, r])$, $\|g_n\| = 1$ a pro $f_n = T(g_n)$ dostáváme, že

$$\|T^{-1}\| \ge \frac{\|T^{-1} f_n\|}{\|f_n\|_{C^1}} = \frac{\|g_n\|_\infty}{\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty} = \frac{1}{\int_0^{1/n} (1 - nx)\,\mathrm{d}x + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2n} + 1} \to 1,$$

a proto máme $\|T^{-1}\| = 1$.

(i) Z linearity derivace dostáváme, že T je lineární. Pro $f \in C^1([0, 1])$ máme

$$\|Tf\|_\infty \le \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty = \|f\|_{C^1},$$

tedy T je spojité a $\|T\| \le 1$. Dále $\|T1\|_\infty = \|0 - 1\|_\infty = 1 = \|1\|_{C^1}$, tedy $\|T\| = 1$ a operátor T nabývá své normy. Zřejmě máme $f \in \operatorname{Ker} T$ právě když f je řešením homogenní diferenciální rovnice $f' - f = 0$, jejíž fundamentální systém je tvořen funkcí e^t (protože $\lambda = 1$ je jediný kořen charakteristického polynomu $\lambda - 1 = 0$). Tedy T není prostý (a tedy není ani isomorfismus) a máme

$\operatorname{Ker} T = \operatorname{span}\{Ce^t;\ C \in \mathbb{R}\}$. Konečně, T je na, neboť pro každou $g \in C([0,1])$ dle Peanovy věty o existenci řešení diferenciálních rovnic existuje řešení rovnice $f' - f = g$.

(j) Pokud je $p = \infty$, pak je T zřejmě izometrie na, neboť $\|t \mapsto f(t)\|_\infty = \|t \mapsto f(\sqrt{t})\|_\infty$ a $T^{-1} : L_\infty([0,1]) \to L_\infty([0,1])$ je dán předpisem $Tf(t) := f(t^2)$. Předpokládejme tedy nyní, že $p < \infty$ a zvolme $f \in L_p([0,1])$. Pak s použitím substituce „$s = \sqrt{t}$" dostaneme

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 |f(\sqrt{t})|^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(s)|^p 2s \,\mathrm{d}s \le 2\|f\|_p^p, \tag{4}$$

tedy $Tf \in L_p([0,1])$ pro každé $f \in L_p([0,1])$, T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \le \sqrt[p]{2}$. Dále pro funkci $f_n := \sqrt[p]{n} \cdot \chi_{[1-\frac{1}{n},1]}$ máme $\|f_n\|_p = 1$ a zároveň

$$\|Tf_n\|_p^p = \int_{(1-1/n)^2}^1 n \,\mathrm{d}s = n \cdot (1 - (1 - \tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n^2})) \to 2,$$

tedy $\|T\| = \sqrt[p]{2}$. Operátor T své normy nenabývá, neboť pro $s \in A := \{s \in (0,1);\ f(s) \neq 0\}$ máme $|f(s)|^p 2s < 2|f(s)|^p$ a protože množina A má kladnou míru kdykoliv $f \neq 0$, dostáváme pro každou $f \in S_{L_p([0,1])}$ v (4) ostrou nerovnost (tj. $\|Tf\| < \|f\|$). Dále kdykoliv $Tf = 0$, pak $\|Tf\|_p = 0$ a tedy dle výpočtu (4) dostáváme, že $2s|f(s)|^p = 0$ skoro všude, tedy $f = 0$ skoro všude, což dokazuje, že operátor T je prostý. Pro $g \in L_p([0,1])$ máme $Tf = g$ právě když $g(t) = f(\sqrt{t})$ skoro všude, pro takové f s použitím substituce „$t = \sqrt{s}$" dostaneme

$$\int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(\sqrt{s})|^p \frac{1}{2\sqrt{s}} \,\mathrm{d}s = \int_0^1 |g(s)|^p \frac{1}{2\sqrt{s}} \,\mathrm{d}s,$$

a tedy $f \in L_p([0,1])$ právě když $\frac{g(s)}{2\sqrt{s}} \in L_p([0,1])$. Celkem tedy $\operatorname{Rng} T = \{g \in L_p([0,1]);\ \frac{g(s)}{(\sqrt{s})^{1/p}} \in L_p([0,1])\}$ a proto T není na neboť například $g(s) = \frac{1}{(\sqrt{s})^{1/p}} \in L_p([0,1]) \setminus \operatorname{Rng} T$. Dále T není izomorfismus, protože funkce $f_n(t) := \frac{1}{\sqrt[p]{t}} \cdot \chi_{[1/n,1]} \in L_p([0,1])$ splňují že $\|f_n\|_{L_p} \to \infty$, ale $\|Tf_n\|_{L_p} \le \|t^{-1/2p}\|_{L_p} < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

□

PŘÍKLAD 7. Nechť $X = C([-\pi,\pi])$, $Y = L_\infty([-\pi,\pi])$ jsou uvažované jako prostory nad $\mathbb{R}$. Uvažujme pro $k \in \mathbb{Z}$ předpis

$$\phi_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k \,\mathrm{d}t.$$

(a) Zjistete, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $\phi_k \in X^*$. Spočtěte v těchto případech normu ϕ_k a zjistěte, zda se jí nabývá (normu stačí vyjádřit v integrálním tvaru).
(b) Zjistete, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $\phi_k \in Y^*$. Spočtěte v těchto případech normu ϕ_k a zjistěte, zda se jí nabývá (normu stačí vyjádřit v integrálním tvaru).

ŘEŠENÍ. Nejprve vyšetřeme, pro jaká $k \in \mathbb{Z}$ platí, že $\int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| \,\mathrm{d}t < \infty$. Jelikož $|\sin t|$ je π-periodická funkce, stačí vyšetřovat konvergenci integrálu přes interval $[0,\pi]$ a s použitím substituce „$x = \pi - t$" a faktu že $|\sin t| = |\sin(\pi - t)|$ si uvědomíme, že stačí vyšetřovat konvergenci integrálu „u nuly", tedy například přes interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Protože máme $\lim_{t\to 0} \frac{(\sin t)^k}{t^k} = 1$, dle limitního srovnávacího kritéria je integrál konvergentní právě když $\int_0^{\pi/2} t^k \,\mathrm{d}t < \infty$, což je právě když $k > 1$.

(a) Nechť nejprve $k \le 1$. Potom pro konstantní funkci 1 na intervalu $[-\pi,\pi]$ je $\phi_k(1) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t)^k dt$. Tento integrál ale není konvergentní, tedy ϕ_k není v tomto případě dobře definovaný.

Pro $k \ge 0$ je $\int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt \in \mathbb{R}$, a pro $f \in C([-\pi,\pi])$ platí

$$|\phi_k(f)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)(\sin t)^k| dt \le \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt.$$

Tedy ϕ_k je dobře definovaný prvek X^* a $\|\phi_k\| \le \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt$. Nyní ukážeme, že $\|\phi_k\| = \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt$ a zjistíme, ve kterých případech ϕ_k této normy nabývá.

Nechť $k \geq 0$ je sudé. Potom pro konstantní funkci 1 na intervalu $[-\pi, \pi]$ je $\phi_k(1) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t)^k dt = \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt$, a tedy v tomto případě se normy nabývá.

Nechť $k \geq 0$ je liché. Zvolme posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na intervalu $[-\pi, \pi]$ s hodnotami v $[-1, 1]$ splňující, že f_n konvergují bodově k funkci $f = \chi_{(0,\pi]} - \chi_{[-\pi,0)}$.

Potom dle Lebesgueovy věty je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)(\sin t)^k dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k dt = \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt.$$

Tedy $\|\phi_k\| = \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt$ i v tomto případě. Předpokládejme, že normy se nabývá, tedy že existuje funkce $f \in B_X$ splňující, že $\phi_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k dt = \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt$. Uvažujme funkce

$$h(t) = |(\sin t)^k|, \quad t \in [-\pi, \pi], \qquad \text{a} \qquad g(t) = f(t)(\sin t)^k, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Potom zřejmě $g \leq h$. Dále $\int_{-\pi}^{\pi} (h - g) = 0$ dle předpokladu. Odtud plyne, že $g = h$ skoro všude v intervalu $[-\pi, \pi]$. Tedy $f = 1$ skoro všude v intervalu $(0, \pi)$, a $f = -1$ skoro všude v intervalu $[-\pi, 0)$. Tedy f není spojitá v 0, což je spor. Normy se tedy v tomto případě nenabývá.

(b) Pro $k \leq 0$ můžeme obdobně jako výše uvažovat konstantní funkci 1 a opět dostaneme, že ϕ_k není dobře definováno.

Pro $k \geq 0$ je $\phi_k : Y \to \mathbb{R}$ dobře definováno a pro $f \in Y$ platí

$$|\phi_k(f)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)(\sin t)^k| dt \leq \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt,$$

tedy opět $\|\phi_k\| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt$.

Pro $k \geq 0$ sudé se normy opět jako výše nabývá na konstantní funkci 1.

Pro $k \geq 0$ liché uvažujme funkci $f = \chi_{(0,\pi]} - \chi_{[-\pi,0)} \in L_\infty([-\pi, \pi])$. Potom $\phi_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |(\sin t)^k| dt$, a tedy normy se nabývá i v tomto případě.

□

PŘÍKLAD 8. Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je zobrazení $T : L_5([0, 3]) \to L_1([0, 3]^2)$ definované předpisem

$$Tf(x, y) = \frac{f(x)}{(xy)^a}, \qquad f \in L_5([0, 3]).$$

dobře definovaným spojitým lineárním operátorem?
(všechny prostory v tomto příkladě jsou nad tělesem reálných čísel)

ŘEŠENÍ. Dle Fubiniovy věty pro každé $f \in L_5([0, 3])$ máme

$$\|Tf\| = \int_0^3 y^{-a} \,\mathrm{d}y \cdot \int_0^3 \Big| \frac{f(x)}{x^a} \Big| \,\mathrm{d}x.$$

Dle Hölderovy nerovnosti tak dostáváme odhad

$$\|Tf\| \leq \int_0^3 y^{-a} \,\mathrm{d}y \cdot \Big(\int_0^3 \Big| \frac{1}{x^{5a/4}} \Big| \,\mathrm{d}x \Big)^{4/5} \cdot \|f\|_5$$

a protože oba integrály výše jsou konvergentní pro $a < \frac{4}{5}$, T je spojitý lineární operátor kdykoliv $a < \frac{4}{5}$. Na druhou stranu, pokud $a > \frac{4}{5}$, pak $5(a - 1) > -1$ a tedy $x^{a-1} \in L_5([0, 3])$, zároveň ale

$$\|T(x^{a-1})\| = \int_0^3 y^{-a} \,\mathrm{d}y \cdot \int_0^3 \Big| \frac{1}{x} \Big| \,\mathrm{d}x = \infty,$$

a proto T není operátorem z $L_5([0, 3])$ do $L_1([0, 3]^2)$.

Konečně, uvažujme případ kdy $a = \frac{4}{5}$. Uvažujme funkci

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/5}}{n} \chi_{(2^{-(n+1)}, 2^{-n})}.$$

Pak máme

$$\|f\|_{L_5}^5 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^n}{n^5} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5} (2^{-n} - 2^{-(n+1)}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} < \infty,$$

tedy $f \in L_5([0,3])$. Přitom ale

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L_1} &= \int_0^3 y^{-4/5} \, \mathrm{d}y \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^{n/5}}{n \cdot x^{4/5}} \, \mathrm{d}x = \frac{3^{1-4/5}}{1-4/5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n/5}}{n} [x^{1/5}]_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \\ &= 5 \cdot 3^{1-4/5} \cdot 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/5}}{n} 2^{-n/5} (1 - 2^{-1/5}) = 25 \cdot 3^{1-4/5} \cdot (1 - 2^{-1/5}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \end{aligned}$$

Tedy ani v případě $a = \frac{4}{5}$ není T operátorem z $L_5([0,3])$ do $L_1([0,3]^2)$.

□

PŘÍKLAD 9. Dokažte, že operátor $T : L_1([0,1]) \to C^1([0,1])$ definovaný předpisem

$$Tf(x) = \int_0^1 f(y) \exp(xy) \, \mathrm{d}y, \quad f \in L_1([0,1])$$

je dobře definovaný spojitý lineární operátor.
(v tomto příkladu uvažujme jen prostory nad tělesem reálných čísel).

ŘEŠENÍ. Zvolme $f \in L_1([0,1])$. Ověřme předpoklady věty o integrálu závislém na parametru, abychom ověřili že funkce Tf je diferencovatelná. Pro každé $x \in [0,1]$ máme $|f(y) \exp(xy)| \leq e|f(y)| \in L_1([0,1])$ a zároveň $|\frac{\partial}{\partial x} f(y) \exp(xy)| = |yf(y) \exp(xy)| \leq |e \cdot f(y)| \in L_1([0,1])$, tedy předpoklady věty o integrálu závislém na parametru jsou splněny a máme

$$(Tf)'(x) = \int_0^1 yf(y) \exp(xy) \, \mathrm{d}y, \quad x \in [0,1],$$

kde v bodech $x \in \{0,1\}$ máme na mysli jednostranné derivace. Speciálně, $Tf \in C^1([0,1])$, z linearity integrálu je zřejmě T lineární a máme odhad

$$\|Tf\|_{C^1} \leq \int_0^1 |f(y) \exp(xy)| \, \mathrm{d}y + \int_0^1 |yf(y) \exp(xy)| \, \mathrm{d}y \leq 2e\|f\|_{L_1},$$

tedy T je spojité a $\|T\| \leq 2e$.

□

PŘÍKLAD 10. Nechť $a > 0$ a

$$D = \Big\{1, \sin(\tfrac{2\pi}{a} kx), \cos(\tfrac{2\pi}{a} kx);\ k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Dokažte, že pro Banachovy prostory $X \in \{C([0,a]), L_p([0,a]);\ p \in [1,\infty)\}$ platí, že $\overline{\operatorname{span}}\, D = X$.

ŘEŠENÍ. Je snadné si uvědomit, že pro každé $a > 0$ je zobrazení $T : L_p([0,a]) \to L_p([0,2\pi])$ definované předpisem

$$Tf(t) = f(\tfrac{a}{2\pi} t),\ t \in [0,2\pi]$$

linární izometrie na, a tedy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a = 2\pi$ (pro případ $X = C([0,1])$ je situace analogická).

Z teorie Fourierových řad víme, že trigonometrické polynomy jsou husté v $C([0,2\pi])$ (viz. [Z, Věta 4.41]), z čehož dostáváme že $\overline{\operatorname{span}}\, D = X$. V případě že $X = L_p([0,2\pi])$ si uvědomíme, že kdykoliv je množina $A \subset C([0,2\pi])$ hustá v $C([0,2\pi])$, pak je také hustá v $L_p([0,2\pi])$ (což plyne například ihned z důkazu separability $L_p([0,2\pi])$ - viz. Věta FA.1.26).

□

PŘÍKLAD 11 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení). V následujících příkladech ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte zda je operátor T prostý (a pokud ne, zjistěte jeho jádro), zda je operátor T na a zda je operátor T izometrie do, případně izomorfismus do (a pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru). V zadáních níže uvažujeme všechny prostory reálné.

(a) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$.
(b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$
(c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$.
(d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{x_n}{n})_{n=1}^\infty$.
(e) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n+1}{n} x_n)_{n=1}^\infty$.
(f) $X = \ell_1$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \ldots + x_n)_{n=1}^\infty$.
(g) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$.
(h) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.
(i) $X = Y = C([-1, 1])$, $Tf(t) = f(t^2)$.
(j) $X = C^1([0, r])$, $Y = C([0, r])$, kde $r > 0$, $Tf = f'$.
(k) $X = C^2([0, 1])$, $Y = C([0, 1])$, kde $r > 0$, $Tf = f'' + f$.
(l) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.
(m) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$.

VÝSLEDKY. (a) T je izometrie na.
(b) T je isomorfismus na, $\|T\| = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$ a normy se nabývá, $\|T^{-1}\| = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$.
(c) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a není na, $\operatorname{Ker} T = \{x;\ x(2i) = 0, i \in \mathbb{N}\}$.
(d) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{x;\ (nx_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2\}$, není izomorfismus.
(e) $\|T\| = 2$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus, $\|T^{-1}\| = 1$.
(f) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{x \in \ell_\infty;\ (x_n - x_{n-1})_{n=1}^\infty \in \ell_1\}$ (kde $x_0 := 0$), není izomorfismus.
(g) $\|T\| = 3$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus, $\|T^{-1}\| = 3$.
(h) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá, T je prostý a není na, není izomorfismus.
(i) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a není na.
(j) $\|T\| = 1$, normy se nenabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{f;\ f \equiv \text{const}\}$, není izomorfismus.
(k) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{C \sin t + D \cos t;\ C, D \in \mathbb{R}\}$, není izomorfismus.
(l) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabyde právě když $p = \infty$, je prosté a není na, není izomorfismus.
(m) $\|T\| = 1$, normy se nabyde, T není prostý a není na, $\operatorname{Ker} T = \{f \in L_p([0, 1]);\ f|_{[0,\frac{1}{2}]} \equiv 0\}$, T není izomorfismus.

□

3. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

PŘÍKLAD 12. Dokažte, že standartní kvocientová norma na kvocientovém prostoru $\ell_\infty/_{c_0}$ je rovna

$$\|\hat{x}\| = \limsup_{n\to\infty} |x(n)|, \quad \hat{x} \in \ell_\infty/_{c_0}.$$

ŘEŠENÍ. Prostor c_0 je podprostorem ℓ_∞, má tedy smysl uvažovat prostor $l_\infty/_{c_0}$. Dle definice kvocientové normy máme

$$\|\hat{x}\| = \inf\{\|y\| : y \in \hat{x}\}, \quad \hat{x} \in l_\infty/_{c_0}.$$

Volme tedy pevné $x \in l_\infty$.

Pokud $y \in \hat{x}$, potom $y = x - z$ pro nějaké $z \in c_0$. Tedy platí

$$\begin{aligned}\|y\|_\infty &\geq \limsup_{n\to\infty}|y_n| = \limsup_{n\to\infty}|x(n) - z(n)| \geq \limsup_{n\to\infty}|x_n| - \limsup_{n\to\infty}|z(n)| = \\ &= \limsup_{n\to\infty}|x_n|,\end{aligned}$$

neboť $z \in c_0$. Tím je dokázáno že $\|\hat{x}\| \geq \limsup_{n\to\infty}|x_n|$.

Pro důkaz druhé nerovnosti, pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$z_n = (-x_1, \dots, -x_n, 0, 0, \dots) \in c_0.$$

Pak $x + z_n \in \hat{x}$, a

$$\limsup_{n\to\infty}|x(n)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}|x(k)| = \lim_{n\to\infty}\|x + z_n\|_\infty \leq \|\hat{x}\|,$$

čímž je dokázána druhá nerovnost.

□

PŘÍKLAD 13. (a) Nechť Y je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X. Jsou-li Y i X/Y úplné, je X také úplný.

(b) Nechť Y je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.
  (i) X je separabilní,
  (ii) Y i X/Y jsou separabilní.

ŘEŠENÍ. (a) Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru X. Uvažujme posloupnost tříd ekvivalence $\{\widehat{x_n}\}$ v prostoru X/Y. Jelikož pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme

$$\|\widehat{x_n} - \widehat{x_m}\|_{X/Y} = \|\widehat{x_n - x_m}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|x_n - x_m - y\| \leq \|x_n - x_m\|,$$

je také posloupnost $\{\widehat{x_n}\}$ cauchyovská v prostoru X/Y. Jelikož tento prostor je dle předpokladu úplný, existuje $x \in X$ takové, že posloupnost $\{\widehat{x_n}\}$ konverguje k $\widehat{x}$. Tedy posloupnost $\{\widehat{x - x_n}\}$ konverguje k 0 v X/Y. Dále, pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $y_n \in Y$ takové, že

$$\|x - x_n - y_n\| \leq \|\widehat{x - x_n}\| + \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Potom posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská v Y, což plyne z odhadu

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &= \|y_n - x_n + x_n - x + x - x_m + x_m - y_m\| \leq \\ &\leq \|x_n - x_m\| + \|(x - x_m - y_m) - (x - x_n - y_n)\| \leq \\ &\leq \|x_n - x_m\| + \|x - x_m - y_m\| + \|x - x_n - y_n\| \leq \\ &\leq \|x_n - x_m\| + \|\widehat{x - x_m}\| + \tfrac{1}{m} + \|\widehat{x - x_n}\| + \tfrac{1}{n}\end{aligned}$$

pro $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy, jelikož prostor Y je úplný, existuje limita posloupnosti $\{y_n\}$, kterou označíme $y \in Y$. Potom z odhadu (5) plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k $x - y$. Tedy prostor X je úplný.

(b) Předpokládejme nejprve, že X je separabilní. Potom Y je separbilní, jakožto podprostor prostoru X. Navíc, pokud $\{x_n\}$ je spočetná hustá množina v X, potom $\{\widehat{x_n}\}$ je hustá množina v X/Y, což plyne z odhadu

$$\|\widehat{x} - \widehat{x_n}\|_{X/Y} \leq \|x - x_n\|, \quad x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Tedy X/Y je také separabilní.

Předpokládejme naopak, že prostory Y a X/Y jsou separabilní. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v X taková, že množina $\{\widehat{x_n}\}$ je hustá v X/Y, a nechť $\{y_k\}$ je hustá množina v Y. Ukážeme, že množina

$$\{x_n + y_k : n, k \in \mathbb{N}\}$$

je hustá v X. Zvolme $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|\widehat{x} - \widehat{x_n}\| < \varepsilon$. Tedy

$$\inf_{y\in Y}\|x - x_n - y\| = \|\widehat{x} - \widehat{x_n}\| < \varepsilon,$$

a tedy existuje $k \in \mathbb{N}$, takové, že $\|x - x_n - y_k\| < \varepsilon$. Tedy $\{x_n + y_k : n, k \in \mathbb{N}\}$ je hustá v X a X je separabilní.

$\square$

4. Hilbertovy prostory

PŘÍKLAD 14. V následujícím příkladě je dán Hilbertův prostor H, jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0, kde

(a) $H = \mathbb{C}^3$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3;\ ix_1 + ix_2 - x_3 = 0\}$, $x_0 = (i, 2, 0)$.
(b) $H = L_2([-1, 1])$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = \sin t$.
(c) $H = L_2([-1, 1], \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\lambda)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^3$.
(připomeňme, že mírou $\mu = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\lambda$ rozumíme borelovskou míru, pro kterou platí $\int_A f(t)\mathrm{d}\mu(t) = \int_A \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$).

ŘEŠENÍ. Nejprve si naznačme obecný postup jak řešit úlohy tohoto tipu, dále pak se budeme zaobírat konkrétními zadáními (a)-(d). Na začátku řešení úlohy nalezneme nějakou bázi konečně-dimenzionálního prostoru Y. Dále pak pomocí ortogonalizačního procesu nalezneme bázi ortonormální. Konkrétněji, je–li $\{f_1, \ldots, f_n\}$ bází prostoru Y, položíme

$$e_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad e_{k+1} := \frac{f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle f_k, e_i \rangle e_i}{\|f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle f_n, e_i \rangle e_i\|} \text{ pro } k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Pak je snadné ověřit, že $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortonormální bází prostoru Y. Konečně, vzorec pro ortogonální projekci P_Y je dán předpisem

$$P_Y x := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

a bod $P_Y x_0$ je nejbližším bodem v Y k bodu x_0. Podívejme se nyní na jednotlivá konkrétní zadání.

(a) Nejdříve si uvědomíme, že Y je dvoudimenzionálním prostorem s bází $\{(1, 0, i), (0, 1, i)\}$. Pomocí ortogonalizačního procesu nyní nalezněme ortonormální bázi prostoru Y. Položme

$$e_1 = \frac{(1, 0, i)}{\|(1, 0, i)\|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, i).$$

a

$$e_2 = \frac{(0, 1, i) - \langle (0, 1, i), e_1 \rangle e_1}{\|(0, 1, i) - \langle (0, 1, i) e_1, e_1 \rangle\|} = \frac{(0, 1, i) - \frac{1}{2}\langle (0, 1, i), (0, 1, i) \rangle (1, 0, i)}{\|\ldots\|} = \frac{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{i}{2})}{\|(-\frac{1}{2}, 1, \frac{i}{2})\|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, i).$$

Pak $\{e_1, e_2\}$ je ortonormální bází prostoru Y a pro ortogonální projekci P_Y platí vzorec

$$P_Y x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 - ix_3)(1, 0, i) + \tfrac{1}{6}(-x_1 + 2x_2 - ix_3)(-1, 2, i)$$
$$= (\tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{i}{3}x_3, -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{i}{3}x_3, \tfrac{i}{3}x_1 + \tfrac{i}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3), \quad x \in \mathbb{C}^3.$$

Konečně, nejbližším bodem v Y k bodu $x_0 = (i, 2, 0)$ je bod

$$P_Y x_0 = (\tfrac{2i}{3} - \tfrac{2}{3}, -\tfrac{i}{3} + \tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3} + \tfrac{2i}{3}) = \tfrac{1}{3}(-2 + 2i, 4 - i, -1 + 2i).$$

(b) Nejdříve si uvědomíme, že Y je dvoudimenzionálním prostorem s bází $\{1, x, x^2\}$. Pomocí ortogonalizačního procesu nyní nalezněme ortonormální bázi prostoru Y. Položme

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|_{L_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a

$$\widetilde{e_2} = x - \langle x, e_1\rangle e_1 = x - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\cdot 1\,\mathrm{d}t = x,$$

pak $\|\widetilde{e_2}\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$ a tedy po znormalizování dostáváme

$$e_2 = \frac{\widetilde{e_2}}{\|\widetilde{e_2}\|_{L_2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}x.$$

Analogicky spočteme, že

$$\widetilde{e_3} = x^2 - \langle x^2, e_2\rangle e_2 - \langle x^2, e_1\rangle e_1 = x^2 - \tfrac{3}{2}\int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = x^2 - 0 - \tfrac{1}{3},$$

tedy

$$\|\widetilde{e_3}\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1}(t^2 - \tfrac{1}{3})^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^4 - \tfrac{2}{3}t^2 + \tfrac{1}{9}\,\mathrm{d}t = 2(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{9}) = \tfrac{8}{45}$$

a po znormalizování tak dostáváme

$$e_3 = \frac{\widetilde{e_3}}{\|\widetilde{e_3}\|_{L_2}} = \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \tfrac{1}{3}) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1).$$

Pak $\{e_1, e_2, e_3\}$ je ortonormální bází prostoru Y a pro ortogonální projekci P_Y platí vzorec

$$\begin{aligned} P_Y f &= \langle f, e_1\rangle e_1 + \langle f, e_2\rangle e_2 + \langle f, e_3\rangle e_3 \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t + \frac{5}{8}(3x^2-1)\int_{-1}^{1}(3t^2-1)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big(\frac{45}{8}x^2 - \frac{15}{8}\Big)\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t + \Big(-\frac{15}{8}x^2 + \frac{9}{8}\Big)\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f \in L_2([-1,1]). \end{aligned}$$

Konečně, nejbližším bodem v Y k funkci $x_0(t) = \sin t$ je funkce

$$\begin{aligned} P_Y(\sin t) &= \Big(\frac{45}{8}x^2 - \frac{15}{8}\Big)\int_{-1}^{1} t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} t\sin(t)\,\mathrm{d}t + \Big(-\frac{15}{8}x^2 + \frac{9}{8}\Big)\int_{-1}^{1}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + 3x\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t + 0 \overset{\text{per partes}}{=} 3\Big([-t\cos t]_0^1 + \int_0^1 \cos t\,\mathrm{d}t\Big) = 3x(\sin 1 - \cos 1). \end{aligned}$$

(c) Označme $\mu = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\lambda$. Nejdříve si uvědomíme, že Y je dvoudimenzionálním prostorem s bází $\{1, x, x^2\}$. Pomocí ortogonalizačního procesu nyní nalezněme ortonormální bázi prostoru Y. S použitím substituce „$t = \sin u$“ máme

$$\|1\|_{L_2(\mu)}^2 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}\mu = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos u}{\sqrt{\cos^2 u}}\,\mathrm{d}u = \pi.$$

Položme tedy

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|_{L_2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Dále máme

$$\widetilde{e_2} = x - \langle x, e_1\rangle e_1 = x - \tfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x - 0,$$

pak zase s použitím substituce „$t = \sin u$“ máme

$$\|\widetilde{e_2}\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

a tedy po znormalizování dostáváme

$$e_2 = \frac{\widetilde{e_2}}{\|\widetilde{e_2}\|_{L_2}} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x.$$

Analogicky, s použitím výše spočítaného integrálu $\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ spočteme, že

$$\widetilde{e_3} = x^2 - \langle x^2, e_2\rangle e_2 - \langle x^2, e_1\rangle e_1 = x^2 - \frac{2}{\pi}x\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x^2 - 0 - \frac{1}{2},$$

tedy s použitím substituce „$t = \sin u$“ máme

$$\|\widetilde{e_3}\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1}\frac{(t^2-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^4 - t^2 + \frac{1}{4}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2}(\sin^4 u - \sin^2 u + \frac{1}{4})\,\mathrm{d}u,$$

kde poslední integrál snadno spočteme například s použitím vzorce

$$\begin{aligned}\sin^4 u &= \Big(\frac{1-\cos(2u)}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos(2u) + \cos^2(2u)) = \frac{1}{4}\Big(1 - 2\cos(2u) + \frac{1+\cos(4u)}{2}\Big)\\ &= \frac{1}{8}(\cos(4u) - 4\cos(2u) + 3),\end{aligned}$$

tedy po dosazení a snadném výpočtu zjistíme že $\|\widetilde{e_3}\|_{L_2}^2 = \frac{\pi}{8}$ a po znormalizování tak dostáváme

$$e_3 = \frac{\widetilde{e_3}}{\|\widetilde{e_3}\|_{L_2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1).$$

Pak $\{e_1, e_2, e_3\}$ je ortonormální bází prostoru Y a pro ortogonální projekci P_Y platí pro $f \in L_2(\mu)$ vzorec

$$\begin{aligned}P_Y f &= \langle f, e_1\rangle e_1 + \langle f, e_2\rangle e_2 + \langle f, e_3\rangle e_3\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}x\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}(2x^2-1)\int_{-1}^{1}\frac{(2t^2-1)f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \Big(\frac{8}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi}\Big)\int_{-1}^{1}\frac{t^2 f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}x\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \Big(-\frac{4}{\pi}x^2 + \frac{3}{\pi}\Big)\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Konečně, nejbližším bodem v Y k funkci $x_0(t) = t^3$ je funkce

$$\begin{aligned}P_Y(x^3) &= \Big(\frac{8}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi}\Big)\int_{-1}^{1}\frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}x\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \Big(-\frac{4}{\pi}x^2 + \frac{3}{\pi}\Big)\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \frac{4}{\pi}x\int_0^1\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + 0 = \frac{4}{\pi}x\int_0^{\pi/2}\sin^4 u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{4}x,\end{aligned}$$

kde ve třetí rovnosti jsme použili substituci „$t = \sin u$“ a ve čtvrté se použije vzorec $\sin^4 u = \frac{1}{8}(\cos(4u) - 4\cos(2u) + 3)$ odvozený výše.

□

PŘÍKLAD 15. Spočtěte

$$\min_{a,b,c}\int_0^\infty |x^3 - (a + bx + cx^2)e^{-x}|dx,$$

a

$$\max\int_0^\infty |x^3 - g(x)|^2 e^{-x}dx,$$

kde g je kolmé na $\{1, x, x^2\}$, a $\int_0^\infty |g(x)|^2 e^{-x}dx = 1$.

ŘEŠENÍ. Nejrpve si všimněme, že pro $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ je

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!,$$

což odvodíme indukcí. Pro $n = 0$ máme

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1.$$

Pokud víme, že vzorec platí pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, potom pomocí integrace per partes dostaneme

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = [-e^{-x} x^{n+1}]_0^\infty - \int_0^\infty (n+1) x^n (-e^{-x}) dx = 0 + (n+1)n! = (n+1)!,$$

čímž je indukce dokončena.

Dále, uvažujme míru μ na $(0, \infty)$ definovanou na borelovských množinách v $(0, \infty)$ předpisem

$$\mu(A) = \int_A e^{-x} dx.$$

Uvažujme Hilbertův prostor $L_2((0, \infty), \mu)$ a jeho podprostor Y generovaný funkcemi $1, x$ a x^2. Potom úlohu nalezení minima

$$\min_{a,b,c} \int_0^\infty |x^3 - (a + bx + cx^2) e^{-x}| dx$$

lze přeformulovat jako úlohu určení vzdálenosti funkce x^3 od prostoru Y v $L_2((0, \infty), \mu)$. Postupujme tedy jako v Příkladu 14. Nejprve nalezněme ortonormální bázi $\{e_1, e_2, e_3\}$ prostoru Y. Máme

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Položíme tedy $e_1 = 1$ na $(0, \infty)$. Dále máme

$$x - \langle x, f_1 \rangle f_1 = x - \int_0^\infty x e^{-x} dx = x - 1.$$

a

$$\|x - 1\|^2 = \langle x - 1, x - 1 \rangle = \int_0^\infty (x^2 - 2x + 1) e^{-x} dx = 2 - 2 + 1 = 1,$$

tedy položíme $e_2(x) = x - 1$. Dále

$$x^2 - \langle x^2, x - 1 \rangle (x - 1) - \langle x^2, 1 \rangle 1 = x^2 - (6 - 2)(x - 1) - 2 = x^2 - 4x + 2.$$

a

$$\begin{aligned} \|x^2 - 4x + 2\|^2 &= \langle x^2 - 4x + 2, x^2 - 4x + 2 \rangle = \\ &= \int_0^\infty (x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 4) e^{-x} dx = 24 - 48 + 40 - 16 + 4 = 4, \end{aligned}$$

tedy položíme $e_3 = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$. Pak $\{e_1, e_2, e_3\}$ je ortonormální bází prostoru Y. Ortogonální projekce P na prostor Y je potom určena vzorcem

$$P(f) = \sum_{i=1}^3 \langle f, e_i \rangle e_i, \quad f \in L_2((0, \infty), \mu).$$

a tedy pro $f = x^3$ dostáváme

$$\begin{aligned} P(x^3) &= \langle x^3, 1 \rangle 1 + \langle x^3, x - 1 \rangle (x - 1) + \langle x^3, \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \rangle (\frac{x^2}{2} - 2x + 1) \\ &= 6 + (24 - 6)(x - 1) + (\frac{120}{2} - 48 + 6)(\frac{x^2}{2} - 2x + 1) = 9x^2 - 18x + 6. \end{aligned}$$

Celkově tedy máme

$$\begin{aligned} (\min_{a,b,c} \int_0^\infty |x^3 - (a + bx + cx^2) e^{-x}| dx)^2 &= \|x^3 - P(x^3)\|^2 \\ &= \langle x^3 - 9x^2 + 18x - 6, x^3 - 9x^2 + 18x - 6 \rangle = \\ &= \int_0^\infty (x^6 - 18x^5 + 117x^4 - 336x^3 + 432x^2 - 216x + 36) e^{-x} dx = \\ &= 720 - 2160 + 2828 - 2016 + 864 - 216 + 36 = 56. \end{aligned}$$

Nyní přikročme k druhé části příkladu. Naším úkolem je nalézt

$$\max\{\langle x^3 - g(x), x^3 - g(x)\rangle;\ g \in Y^\perp, \|g\| = 1\}.$$

Nechť I značí identické zobrazení na prostoru $L_2((0,\infty),\mu)$. Pro $g \in Y^\perp$ s $\|g\| = 1$ platí

$$\begin{aligned}\langle x^3 - g(x), x^3 - g(x)\rangle &= \langle P(x^3) + (I-P)(x^3) - g(x), P(x^3) + (I-P)(x^3) - g(x)\rangle \\ &= \langle P(x^3), P(x^3)\rangle + \langle (I-P)(x^3), (I-P)(x^3)\rangle - 2\langle (I-P)(x^3), g(x)\rangle \\ &\qquad + \langle g(x), g(x)\rangle \\ &= \|x^3\|^2 + 1 - 2\langle (I-P)(x^3), g(x)\rangle = 721 - 2\langle (I-P)(x^3), g(x)\rangle.\end{aligned}$$

Hledáme tedy

$$\begin{aligned}\max\{\langle x^3 - g(x), x^3 - g(x)\rangle;\ g \in Y^\perp, \|g\| = 1\} &= \max\{721 - 2\langle (I-P)(x^3), g(x)\rangle;\ g \in Y^\perp, \|g\| = 1\} \\ &= 721 - 2\min\{\langle (I-P)(x^3), g(x)\rangle;\ g \in Y^\perp, \|g\| = 1\}.\end{aligned}$$

Protože máme $(I-P)(x^3) \in Y^\perp$, dle Cauchy-Schwartzovy nerovnosti je tento výraz roven

$$721 - 2\langle (I-P)(x^3), \frac{(I-P)(x^3)}{\|(I-P)(x^3)\|}\rangle = 721 - 2\|(I-P)(x^3)\| = 721 - 2\sqrt{56},$$

čímž je příklad vyřešen.

□

PŘÍKLAD 16. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra. Je-li dána $f \in L_2(X, \mathcal{S}, \mu)$, je funkce $g \in L_2(X, \mathcal{T}, \mu)$ podmíněná střední hodnota f, pokud platí

$$\forall T \in \mathcal{T} : \int_T f d\mu = \int_T g d\mu.$$

Hilbertův prostor $M = L_2(X, \mathcal{T}, \mu)$ lze přirozeně uvažovat jako podprostor Hilbertova prostoru $H = L_2(X, \mathcal{S}, \mu)$. Ukažte, že g je podmíněná střední hodnota f právě když $\|f - g\| = \operatorname{dist}(f, M)$.

ŘEŠENÍ. Pro funkce $g \in L_2(X, \mathcal{T}, \mu)$ a $f \in L_2(X, \mathcal{S}, \mu)$ platí, že $\|f - g\| = \operatorname{dist}(f, M)$ právě když $g = P(f)$, kde $P : L_2(X, \mathcal{S}, \mu) \to L_2(X, \mathcal{T}, \mu)$ je ortogonální projekce, a toto platí právě když pro všechny funkce $h \in L_2(X, \mathcal{T}, \mu)$ platí, že $\langle f, h\rangle = \langle g, h\rangle$, což plyne z rovnosti

$$\langle f, h\rangle = \langle f - Pf, h\rangle + \langle Pf, h\rangle = \langle Pf, h\rangle, \quad h \in L_2(X, \mathcal{T}, \mu).$$

Stačí tedy ukázat, že rovnost $\langle f, h\rangle = \langle g, h\rangle$ pro každé $h \in L_2(X, \mathcal{T}, \mu)$ platí právě když

$$\int_T f d\mu = \int_T g d\mu, \quad T \in \mathcal{T}.$$

To ale plyne z hustoty jednoduchých funkcí v $L_2(X, \mathcal{T}, \mu)$, čímž je příklad vyřešen.

□

PŘÍKLAD 17. Dokažte, že $\{\sqrt{2}\sin(n\pi x);\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří ortonormální bázi v $L_2([0,1])$.

ŘEŠENÍ. Nejprve ukažme, že $\{\sin(n\pi x);\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří ortogonální systém. Nechť tedy $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Potřebujeme ukázat, že

$$\int_0^1 \sin(n\pi s)\sin(m\pi s) ds = 0.$$

K tomu využijeme goniometrický vzorec

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(n\pi s)\sin(m\pi s)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((n-m)\pi s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((n+m)\pi s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\big[\sin((n-m)\pi s)\big]_0^1 - \frac{1}{2}\big[\sin((n+m)\pi s)\big]_0^1 = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Dále, pro výpočet norem užijeme vzorec

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \alpha \in \mathbb{R},$$

a pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{1-\cos(2n\pi s)}{2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(2n\pi s)}{2n\pi}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Tedy, $\{\sqrt{2}\sin(n\pi x);\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří ortonormální systém v $L_2([0,1])$.

Abychom ukázali, že tyto funkce tvoří bázi, zvolme libovolnou funkci $f \in L_2([0,1])$, a dodefinujme tuto funkci na lichou funkci $\tilde{f} \in L_2([-1,1])$. Potom dle klasické teorie Fourierových řad lze $\tilde{f}$ napsat ve tvaru

$$\tilde{f}(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi s) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi s)$$

kde konvergence řad se rozumí v prostoru $L_2([-1,1])$ (viz. [Z, Poznámka 4.17 a Věta 4.78]). Jelikož $\tilde{f}$ je lichá, jsou všechny koeficienty a_n pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nulové. Tedy $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi s)$ v prostoru $L_2([0,1])$, a tedy $\{\sqrt{2}\sin(n\pi x);\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L_2([0,1])$.

□

PŘÍKLAD 18 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení). V následujícím příkladě je dán Hilbertův prostor H, jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0, kde

(a) $H = \mathbb{C}^4$; $Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^3;\ x_2 = ix_1, x_4 = (1+i)x_3\}$; $x_0 = (1, i, 1, 1)$.
(b) $H = L_2((0,1))$; Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2; $x_0(t) = e^t$.
(c) $H = L_2((-\pi,\pi))$; Y podprostor tvořený lichými funkcemi; $x_0(t) = t^2 + t + 1$.
(d) $H = L_2((-\pi,\pi))$; Y podprostor generovaný funkcemi sin, cos; $x_0(t) = t^2$.
(e) $H = L_2((0,\frac{\pi}{2}))$; Y podprostor generovaný funkcemi sin, cos; $x_0(t) = 1$.
(f) $H = L_2((0,\infty))$, pro $\alpha > 0$ definujme funkci $f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$; $Y = \operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3\}$; $x_0(t) = f_\beta$ (kde $\beta \in (0,\infty)$).
(g) $H = L_2((0,\infty), e^{-t}\lambda)$; Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2; $x_0(t) = t^5$.

VÝSLEDKY. (a) ON báze Y je například $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1+i}{\sqrt{3}})\}$. OG projekce je $P(x_1,\dots,x_4) = (\frac{1}{2}(x_1 - ix_2), \frac{1}{2}(ix_1 + x_2), \frac{1}{3}x_3 + \frac{1-i}{3}x_4, \frac{1+i}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4)$, nejbližší bod je $(1, i, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i, 1 + \frac{1}{3}i)$.
(b) ON báze Y je například $\{1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})\}$, OG projekce má tvar $P(f)(x) = 180(x^2 - x + \frac{1}{6}) \cdot \int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - (180x^2 - 192x + 36) \cdot \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t + (30x^2 - 36x + 9) \cdot \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, nejbližší bod je $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + 39e - 105$
(c) ON báze Y je například $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$, což plyne z teorie Fourierových řad, OG projekci lze vyjádřit buď pomocí Fourierovy řady $P(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t) \cdot \sin kx$, kde konvergence řady je v prostoru $L_2((-\pi,\pi))$, nebo jednodušeji $P(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, nejbližší bod je $f(x) = x$.
(d) ON báze Y je například $\{\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\}$, OG projekce je dána vzorcem

$$P(f)(x) = \tfrac{1}{\pi}(\sin x \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\,\mathrm{d}t + \cos x \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t\,\mathrm{d}t),$$

nejbližší bod je $f(x) = -4\cos x$.
(e) ON báze Y je například $\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x, -\frac{4}{\sqrt{\pi(\pi^2-4)}} + 2\sqrt{\frac{\pi}{\pi^2-4}} \cos x\}$, OG projekce je dána vzorcem

$$P(f)(x) = \frac{4}{\pi^2-4}(\pi \sin x - 2\cos x) \cdot \int_0^{\pi/2} f(t) \sin t\,\mathrm{d}t + \frac{4}{\pi^2-4}(\pi \cos x - 2\sin x) \cdot \int_0^{\pi/2} f(t) \cos t\,\mathrm{d}t,$$

nejbližší bod je $f(x) = \frac{4}{\pi+2}(\sin x + \cos x)$.

(f) ON báze Y je například $\{\sqrt{2}e^{-x}, 6e^{-2x} - 4e^{-x}, \sqrt{6}(10e^{-3x} - 12e^{-2x} + 3e^{-x})\}$, OG projekce je dána vzorcem $P(f)(x) = (72e^{-x} - 240e^{-2x} + 180e^{-3x}) \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t + (-240e^{-x} + 900e^{-2x} - 720e^{-3x}) \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-2t}\,\mathrm{d}t + (180e^{-x} - 720e^{-2x} + 600e^{-3x}) \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t$, nejbližší bod k f_β je $f(x) = \frac{12\beta^2-60\beta+72}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}e^{-x} - \frac{60\beta^2-240\beta+180}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}e^{-2x} + \frac{60\beta^2-180\beta+120}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}e^{-3x}$.

(g) ON báze Y je například $\{1, x-1, \frac{x^2}{2} - 2x + 1\}$, OG projekce je dána vzorcem $P(f)(x) = (\frac{x^2}{4} - x + \frac{1}{2}) \cdot \int_0^\infty t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t + (-x^2 + 5x - 3) \cdot \int_0^\infty te^{-t}\,\mathrm{d}t + (\frac{x^2}{2} - 3x + 3) \cdot \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t$, nejbližší bod je $f(x) = 600x^2 - 2520x + 720$.

$\square$

Kapitola 2

Hahnova-Banachova věta a dualita

PŘÍKLAD 1. Nechť $\ell_p, p \in [1,\infty]$, jsou uvažované jako prostory nad $\mathbb{R}$. Uvažujme pro $k \in \mathbb{Z}$ předpis

$$\phi_k((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{n^k}, \quad (x_n) \in l_p.$$

Zjistěte, pro která $k \in \mathbb{Z}$ a $p \in [1,\infty]$ je $\phi_k \in (\ell_p)^*$. Pro $p \in [1,\infty)$ a příslušná k spočtěte normu ϕ_k.

ŘEŠENÍ. Nechť $p \in [1,\infty)$ a q je sdružený exponent k p. Pokud posloupnost $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1}$ náleží do prostoru ℓ_q, dle věty o reprezentaci $(\ell_p)^*$ je $\phi_k \in (\ell_p)^*$.

Pro $p \in (1,\infty)$ máme

$$\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{kq}} < \infty \Leftrightarrow kq > 1 \Leftrightarrow k \geq 1,$$

tedy pro $k \geq 1$ je $\phi_k \in (\ell_p)^*$ a dle věty o reprezentaci

$$\|\phi_k\| = \left\| \left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1} \right\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{kq}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Na druhou stranu, pro $k \leq 0$ položíme $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $(x_n) \in \ell_p$, ale

$$\phi_k(x_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

tedy $\phi_k \notin (\ell_p)^*$.

Dále, pro $p = 1$ platí

$$\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty \Leftrightarrow k \geq 0,$$

tedy pro $k \geq 0$ je $\phi_k \in (\ell_1)^*$ a dle věty o reprezentaci

$$\|\phi_k\| = \left\| \left(\frac{1}{n^k}\right)_{n=1}^{\infty} \right\|_\infty = 1.$$

Na druhou stranu, pro $k \leq -1$ položíme $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $(x_n) \in \ell_1$, ale

$$\phi_k(x_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

tedy $\phi_k \notin (\ell_1)^*$.

Zbývá případ $p = \infty$. Pokud $k > 1$, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{n^k} \leq \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty.$$

Tedy $\phi_k \in (\ell_\infty)^*$, a platí $\|\phi_k\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Pokud $k \leq 1$, pak ϕ_k není dobře definovaný, neboť například pro prvek

$$x_n = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

náležící do l_∞ platí $\phi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \infty$.

□

PŘÍKLAD 2. Na prostoru $c_0 \oplus_2 \ell_1$ definujme funkcionál $\varphi : c_0 \oplus_2 \ell_1 \to \mathbb{K}$ předpisem

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + y_n}{2^n}, \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0,\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Ukažte, že $\varphi \in (c_0 \oplus_2 \ell_1)^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

ŘEŠENÍ. Uvažujme posloupnost $z = (\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty} \in c_0 \cap \ell_1$. Označme $I_1 : \ell_1 \to (c_0)^*$ a $I_2 : c_0 \to (\ell_1)^*$ surjektivní izometrie z věty o reprezentaci duálů. Pak vidíme, že platí

$$\varphi(x,y) = I_1(z)(x) + I_2(z)(y), \qquad (x,y) \in c_0 \oplus_2 \ell_1.$$

Tedy, dle izometrické reprezentace $(c_0 \oplus_2 \ell_1)^*$ z Věty FA.2.16 dostáváme, že $\varphi \in (c_0 \oplus_2 \ell_1)^*$ a $\|\varphi\| = \|(\|I_1(z)\|, \|I_2(z)\|)\|_2$. Proto, vzhledem k tomu že I_1 a I_2 jsou izometrie, máme

$$\|\varphi\| = \|(\|z\|_1, \|z\|_\infty)\|_2 = \sqrt{\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

□

PŘÍKLAD 3. Na prostoru $X = L_\infty([0,\pi]) \oplus_1 \ell_3$ nad tělesem reálných čísel definujme funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(f,y) = \int_0^\pi f(t)\cos t \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n 2^n}, \qquad f \in L_\infty([0,\pi]),\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_3.$$

Ukažte, že $\varphi \in X^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

ŘEŠENÍ. Označme nejprve $\phi_1 : L_\infty([0,\pi]) \to \mathbb{R}$ zobrazení definované předpisem

$$\phi_1(f) = \int_0^\pi f(t)\cos t \,\mathrm{d}t, \quad f \in L_\infty([0,\pi]).$$

Pak pro každé $f \in L_\infty([0,\pi])$ máme

$$|\phi_1(f)| \le \|f\|_\infty \int_0^\pi |\cos t| \,\mathrm{d}t = 2\|f\|_\infty,$$

tedy ϕ_1 je dobře definovaný spojitý lineární funkcionál a $\|\phi_1\| \le 2$. Pro $g(t) = \operatorname{sgn}(\cos t) \in L_\infty([0,\pi])$ máme $\|g\|_\infty = 1$ a také

$$\|\phi_1\| \ge \phi_1(g) = \int_0^\pi |\cos t| \,\mathrm{d}t = 2,$$

tedy dostáváme $\|\phi_1\| = 2$.

Označme $\phi_2 : \ell_{3/2} \to (\ell_3)^*$ surjektivní izometrii z věty o reprezentaci duálů a položme $z = (\frac{1}{n2^n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_{3/2}$. Pak vidíme, že platí

$$\varphi(f,y) = \phi_1(f) + \phi_2(z)(y), \qquad (f,y) \in L_\infty([0,\pi]) \oplus_1 \ell_3.$$

Tedy, dle izometrické reprezentace $(L_\infty([0,\pi]) \oplus_1 \ell_3)^*$ z Věty FA.2.16 dostáváme, že $\varphi \in (L_\infty([0,\pi]) \oplus_1 \ell_3)^*$ a

$$\|\varphi\| = \|(\|\phi_1\|, \|\phi_2(z)\|)\|_\infty = \|(2, \|z\|_{3/2})\|_\infty.$$

Protože

$$\|z\|_{3/2}^{3/2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2^3}}\Big)^n = \tfrac{1}{\sqrt{8}-1} < 2,$$

dostáváme tak, že $\|\varphi\| = 2$.

□

PŘÍKLAD 4. Ukažte, že zobrazení $T : \ell_1 \to c^*$ definované předpisem

$$Tf(x) := f(1) \lim_{i\to\infty} x(i) + \sum_{i=1}^{\infty} f(i+1)x(i), \qquad f \in \ell_1,\ x \in c$$

je izometrie na.

ŘEŠENÍ. Pro každé $f \in \ell_1$ a $x \in c$ máme

$$|Tf(x)| \leq |f(1)| \cdot \|x\| + \sum_{i=1}^{\infty} |f(i+1)| \cdot \|x\| \leq \|f\| \cdot \|x\|,$$

tedy T je dobře definovaný spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq 1$.

Abychom ukázali, že T je izometrie, zvolme $f \in \ell_1$. Pro $N \in \mathbb{N}$ uvažujme $x_N \in c$ definované předpisem

$$x_N(i) = \begin{cases} \operatorname{cgn} f(i+1), & \text{pro } i = 1, \dots, N, \\ \operatorname{cgn} f(1), & \text{pro } i > N. \end{cases}$$

Pak platí

$$\|f\| \geq \|Tf\| \geq |Tf(x_N)| = \sum_{i=1}^{N+1} |f(i)| + (\operatorname{cgn} f(1)) \cdot \sum_{i=N+1}^{\infty} f(i+1) \overset{N\to\infty}{\to} \|f\|,$$

a tedy dostáváme $\|Tf\| = \|f\|$. Protože $f \in \ell_1$ bylo libovolné, T je izometrie.

Zbývá ukázat, že T je na. Zvolme $x^* \in c^*$. Nejprve si uvědomme, že $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(e_i)$ je absolutně konvergentní řada. Vskutku, pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $x_n = (\operatorname{cgn}(x^*(e_1)), \dots, \operatorname{cgn}(x^*(e_n)), 0, 0, \dots) \in B_c$, pak máme

$$\sum_{i=1}^{n} |x^*(e_i)| = x^*(x_n) \leq \|x^*\| \cdot \|x_n\| \leq \|x^*\|,$$

a tedy $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(e_i)| \leq \|x^*\|$. Uvažujme nyní $f \in \ell_1$ definované předpisem (kde symbolem $x^*(1)$ rozumíme aplikaci funkcionálu x^* na konstatní posloupnost samých jedniček)

$$f(i) = \begin{cases} x^*(1) - \sum_{i=1}^{\infty} x^*(e_i), & i = 1, \\ x^*(e_{i-1}), & i > 1. \end{cases}$$

Dle předchozího je f dobře definovaný prvek z ℓ_1. Navíc, pro každé $j \in \mathbb{N}$, máme

$$Tf(e_j) = f(1) \cdot 0 + \sum_{i=1}^{\infty} x^*(e_i) e_j(i) = x^*(e_j)$$

a zároveň pro konstantní posloupnost $1 \in c$ máme

$$Tf(1) = x^*(1) - \sum_{i=1}^{\infty} x^*(e_i) + \sum_{i=1}^{\infty} x^*(e_i) = x^*(1).$$

Celkem tedy z linearity a spojitosti dostáváme

$$\forall x \in c = \overline{\operatorname{span}} \big(\{1\} \cup \{e_i;\ i \in \mathbb{N}\}\big) : \qquad Tf(x) = x^*(x),$$

tedy $Tf = x^*$ a T je na.

□

PŘÍKLAD 5. Definujme $\phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\phi(f) := \frac{f(0) + f(1)}{2} + \int_0^1 t f(t)\, \mathrm{d}t, \quad f \in C([0,1]).$$

Nalezněte míru $\mu \in M([0,1])$ splňující, že tato míra reprezentuje funkcionál ϕ pomocí duality z Rieszovy věty o reprezentaci. Určete hodnotu $\|\phi\|$.

ŘEŠENÍ. Uvažujme nejprve borelovskou míru μ_1 definovanou předpisem

$$\mu_1(A) = \int_A t\,\mathrm{d}t.$$

Pak platí, že $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$ pro každou $f \in C([0,1])$. Položíme–li nyní $\mu = \frac{\delta_0+\delta_1}{2} + \mu_1$ (kde symbolem δ_x označujeme Diracovu míru v bodě x), pak máme

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \phi(f), \quad f \in C([0,1]),$$

tedy μ je hledaná míra. Podle Riezsovy věty o reprezentaci pak dostáváme

$$\|\phi\| = \mu([0,1]) = \frac{1+1}{2} + \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}.$$

□

PŘÍKLAD 6. Nechť $k \in \mathbb{N}$.

(a) Ukažte, že $\varphi \in (C^k([0,1]))^*$ právě když existují $\mu_0,\dots,\mu_k \in M([0,1])$ splňující

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^k \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\mu_i(t), \qquad f^{(k)} \in C^k([0,1]). \tag{1}$$

a $\|\varphi\| = \max\{\|\mu_i\|;\ i = 0,\dots,k\}$.

(b) Ukažte, že $\varphi \in (C^k([0,1]))^*$ právě když existují $\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ a $\mu \in M([0,1])$ splňující

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^{(i)}(0) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\mu(t), \qquad f^{(k)} \in C^k([0,1]). \tag{2}$$

ŘEŠENÍ. (a) Je snadné si uvědomit, že pro každou volbu $\mu_0,\dots,\mu_k \in M([0,1])$ je funkcionál φ určený rovností (1) lineární a spojitý, neboť pro takový funkcionál φ a každé $f \in C^k([0,1])$ máme

$$|\varphi(f)| \le \sum_{i=0}^k \int_0^1 |f^{(k)}(t)|\,\mathrm{d}|\mu|(t) \le \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_\infty \cdot \|\mu_i\| \le \max\{\|\mu_i\|;\ i=0,\dots,k\}\|f^{(k)}\|_{C^k},$$

tedy $\|\varphi\| \le \max\{\|\mu_i\|;\ i = 0,\dots,k\}$.

Pro důkaz druhé implikace zvolme $\varphi \in (C^k([0,1]))^*$. Označme

$$\ell_1^k\big(C([0,1])\big) := \underbrace{C([0,1]) \oplus_1 C([0,1]) \oplus_1 \dots \oplus_1 C([0,1])}_{k \text{ mnoho sčítanců}}$$

a uvažujme lineární izometrii $T : C^k([0,1]) \to \ell_1^k\big(C([0,1])\big)$ danou předpisem $T(f) = (f, f', \dots, f^{(k)})$. Pak máme $\varphi\circ T^{-1} \in \big(T(C^k([0,1]))\big)^*$ a dle Hahn-Banachovy věty existuje $\psi \in \big(C([0,1])\oplus_1 C([0,1])\oplus_1 \dots \oplus_1 C([0,1])\big)^*$ splňující $\psi\restriction_{T(C^k([0,1]))} = \varphi \circ T^{-1}$ a $\|\varphi\| = \|\varphi \circ T^{-1}\| = \|\psi\|$. Dle Věty FA.2.16 a Rieszovy věty o reprezentaci dostáváme, že existují $\mu_i \in M([0,1])$, $i = 1,\dots,k$ takové, že

$$\psi(f_1,\dots,f_k) = \sum_{i=1}^k \int_0^1 f_i(t) d\mu_i(t), \quad (f_1,\dots,f_k) \in \ell_1^k\big(C([0,1])\big)$$

a $\|\psi\| = \max\{\|\mu_i\|;\ i = 0,\dots,k\}$. Tedy,

$$\varphi(f) = (\varphi \circ T^{-1} \circ T)(f) = \psi(T(f)) = \sum_{i=1}^k \int_0^1 f^{(i)}(t) d\mu_i(t), \quad f \in C^k([0,1]) \tag{3}$$

a $\|\varphi\| = \max\{\|\mu_i\|;\ i = 0,\dots,k\}$.

(b) Je snadné si uvědomit, že pro každou volbu $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ a $\mu \in M([0,1])$ je funkcionál φ určený rovností (2) lineární a spojitý, neboť pro takový funkcionál φ a každé $f \in C^k([0,1])$ máme

$$|\varphi(f)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| \|f^{(i)}\| + \int_0^1 |f^{(k)}(t)| \,\mathrm{d}|\mu|(t) \leq \Big(\sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| + \|\mu\|\Big) \|f\|_{C^k},$$

tedy $\|\varphi\| \leq \big(\sum_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| + \|\mu\|\big)$.

Pro důkaz druhé implikace zvolme $\varphi \in (C^k([0,1]))^*$ a $\mu_0, \dots, \mu_k \in M([0,1])$ splňující (1).

Nyní si rozmysleme, že pro každou $\mu \in M([0,1])$ existuje $c \in \mathbb{K}$ a $\nu \in M([0,1])$ splňující

$$\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}\mu(t) = cf(0) + \int_0^1 f'(t) \,\mathrm{d}\nu(t), \quad f \in C([0,1]). \tag{4}$$

Vskutku, pro každé $\mu \in M([0,1])$ a $f \in C([0,1])$ s využitím Fubiniovy věty dostáváme

$$\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_0^1 \Big(\int_0^t f'(s) \,\mathrm{d}s + f(0)\Big) \,\mathrm{d}\mu(t) = f(0) \cdot \mu([0,1]) + \int_0^1 f'(s) \cdot \Big(\int_s^1 \,\mathrm{d}\mu(t)\Big) \,\mathrm{d}s,$$

kde $s \mapsto \int_s^1 \,\mathrm{d}\mu(t) = \mu([s,1])$ je nezáporná měřitelná funkce. Tedy, pro $c = \mu([0,1])$ a komplexní (resp. znaménkovou) míru $\nu \in M([0,1])$ definovánou předpisem $\nu(A) = \int_A \mu([s,1]) \,\mathrm{d}s$ platí žádaný vztah (4).

Aplikujeme–li tuto úvahu postupně na každou z měr μ_i, dostáváme pro každé $i = 1, \dots, k$ existenci konstant $c_i^i, \dots, c_{k-1}^i \in \mathbb{K}$ a komplexních (resp. znaménkových) měr $\nu_1^i \dots, \nu_{k-i}^i \in M([0,1])$ splňujících

$$\int_0^1 f^{(i)}(t) d\mu_i(t) = c_i^i f^{(i)}(0) + \int_0^1 f^{(i+1)} \,\mathrm{d}\nu_1^i(t) = \dots = \sum_{j=i}^{k-1} c_j^i f^{(j)}(0) + \int_0^1 f^{(k)} \,\mathrm{d}\nu_{k-i}^i(t), \quad f \in C^k([0,1]).$$

Nyní zbývá použít vztah (1) a posčítat příslušné konstanty c_j^i a míry ν_{k-i}^i. Dostaneme tak nové konstanty $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ a komplexní (resp. znaménkovou) míru $\mu \in M([0,1])$ splňující (2).

□

PŘÍKLAD 7 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení). Řešte následující úlohy.

(a) Nechť $L_{3/2}([0,1])$ je uvažovaný jako prostory nad $\mathbb{R}$. Uvažujme pro $k \in \mathbb{Z}$ předpis

$$\phi_k(f) = \int_0^1 f(x^k) \,\mathrm{d}x, \quad f \in L_p([0,1]).$$

Zjistěte, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $\phi_k \in (L_{3/2}([0,1]))^*$ a spočtěte normu $\|\phi_k\|$.

(b) Definujme $\phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\phi(f) := f(0) - \int_0^{1/2} f(2t) \,\mathrm{d}t, \quad f \in C([0,1]).$$

Nalezněte míru $\mu \in M([0,1])$ splňující, že tato míra reprezentuje funkcionál ϕ pomocí duality z Rieszovy věty o reprezentaci. Určete hodnotu $\|\phi\|$.

(c) Na prostoru $C[0,1]) \oplus_4 \ell_1$ definujme funkcionál $\varphi : C([0,1]) \oplus_4 \ell_1 \to \mathbb{K}$ předpisem

$$\varphi(f,y) = \tfrac{2f(0)+3f(1)}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{5^{n-1}}, \qquad f \in C([0,1]),\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Ukažte, že $\varphi \in (C([0,1]) \oplus_4 \ell_1)^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

(d) Na prostoru $L_\infty[0,1]) \oplus_\infty c_0$ definujme funkcionál $\varphi : L_\infty[0,1]) \oplus_\infty c_0 \to \mathbb{K}$ předpisem

$$\varphi(f,y) = \int_0^1 f(t) \operatorname{sgn}(\sin \tfrac{1}{t}) \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y_n}{3^n}, \qquad f \in L_\infty[0,1]),\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

Ukažte, že $\varphi \in (L_\infty[0,1]) \oplus_\infty c_0)^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

(e) Zvolme $f \in c_{00} \cap B_{\ell_1}$ a uvažujme pak $W = \{x \in c\colon \lim_{i\to\infty} x(i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)x(i)\} \subset c$. Definujme operátor $T : \ell_1 \to W^*$ předpisem

$$Tg(x) := \sum_{i=1}^{\infty} g(i)x(i), \qquad g \in \ell_1,\ x \in W.$$

Dokažte, že T je izometrie na.

VÝSLEDKY. (a) $\phi_k \in (L_p([0,1]))^*$ právě když $k \leq 1$, v takovém případě $\|\phi_k\| = \frac{1}{\sqrt{k^3}\cdot\sqrt[3]{3(1-k)+k}}$.

(b) $\mu = \delta_0 - \frac{1}{2}\lambda$, kde δ_0 je Diracova míra a λ je Lebesgueova míra; $\|\varphi\| = \frac{3}{2}$.

(c) $\|\varphi\| = \sqrt[4]{8}$.

(d) $\|\varphi\| = \frac{3}{2}$.

$\square$

Kapitola 3

Úplnost v Banachových prostorech

PŘÍKLAD 1. Nechť $\{a_n\}$ jsou nezáporná čísla taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$ pro každou $\{b_n\} \in \ell_2$. Pak $\{a_n\} \in \ell_2$.

ŘEŠENÍ. Uvažujme lineární zobrazení $\phi : \ell_2 \to \mathbb{K}$ dané předpisem

$$a(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad b \in \ell_2.$$

Ověřme nyní, že $\phi \in (\ell_2)^*$. Uvažujme pro $k \in \mathbb{N}$ lineární zobrazení $\phi_k \in (\ell_2)^*$ definované předpisem

$$\phi_k(b) = \sum_{n=1}^{k} a_n b_n, \quad b \in \ell_2.$$

Potom pro každé $b \in \ell_2$ platí

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k(b)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < \infty$$

dle předpokladu (předpoklad zde aplikujeme na posloupnost $(b_n \operatorname{sgn}(a_n b_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$). Tedy dle principu stejnoměrné omezenosti (Věta FA.3.1) platí

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\| = C < \infty.$$

Tedy také $\|\phi\| \leq C < \infty$, a tedy $\phi \in (\ell_2)^*$. Dle standardní reprezentace $(\ell_2)^* = \ell_2$ tak dostáváme, že existuje $c \in \ell_2$ splňující

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n, \quad b \in \ell_2,$$

speciálně, aplikujeme–li rovnost výše pro $b = e_i$, dostáváme $c_i = a_i$, $i \in \mathbb{N}$ a tedy $a = c \in \ell_2$.

□

PŘÍKLAD 2. Ukažte, že existuje neúplný normovaný lineární prostor, který není 1. kategorie.

DŮKAZ. Nechť X je libovolný nekonečně-dimenzionální Banachův prostor a nechť B je algebraická báze X. Zvolme libovolnou prostou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z B. Protože B algebraická báze X, platí $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{span}(B \setminus \{x_k;\ k \geq n\})$ a tedy, protože X je úplný a není tak 1. kategorie v sobě dle Bairovy věty, existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující že $Y := \operatorname{span}(B \setminus \{x_k;\ k \geq n\})$ není 1. kategorie v X.

Pak ale Y není řídká množina v X, ekvivalentně $X \setminus \overline{Y}$ není hustá v X a proto existuje otevřená koule $U(x, r) \subset \overline{Y}$, což implikuje

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kB(x, r) \subset \overline{Y},$$

a tedy Y je hustý v X. Zbývá ukázat, že kdykoliv $Y \subset X$ je hustý podprostor který není 1. kategorie v X, pak není 1. kategorie v Y.

Vskutku, pro spor předpokládejme že existují uzavřené množiny H_n, $n \in \mathbb{N}$ v prostoru Y s prázdným vnitřkem takové, že $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Protože Y je podprostor X, pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje množina $F_n \subset X$, uzavřená v X, splňující $H_n = F_n \cap Y$. Všimněme si nyní, že každá množina $\overline{F_n \cap Y}$ má prázdný vnitřek v X. Vskutku, pokud by existovala koule $\emptyset \neq U(x, \varepsilon) \subset \overline{F_n \cap Y}$, z hustoty Y v X bychom nalezli $y \in Y$ a $\delta > 0$ splňující $U(y, \delta) \subset U(x, \varepsilon)$ a pak bychom dostali že $U(y, \delta) \cap Y \subset \overline{F_n \cap Y} \cap Y \subset H_n$ což je ve sporu s tím, že H_n má prázdný vnitřek v Y. Celkem tedy $Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n \cap Y}$ a každá $\overline{F_n \cap Y}$ má prázdný vnitřek v X, což je spor s tím že Y není 1. kategorie v X.

$\square$

PŘÍKLAD 3. Uvažujme Banachův prostor $C([-1,1])$. Označme

$$C_s([-1,1]) = \{f \in C([-1,1]) : f \text{ je sudá}\} \quad \text{a} \quad C_l([-1,1]) = \{f \in C([-1,1]) : f \text{ je lichá}\}.$$

Dokažte, že platí

$$C([-1,1]) = C_s([-1,1]) \oplus_t C_l([-1,1]).$$

Tedy $C([-1,1])/C_s([-1,1]) \simeq C_l([-1,1])$ a $C([-1,1])/C_l([-1,1]) \simeq C_s([-1,1])$.

ŘEŠENÍ. Stačí ukázat, že $C([-1,1]) = C_s([-1,1]) \oplus_t C_l([-1,1])$, zbytek tvrzení pak plyne z Důsledku FA.3.9

Pro $f \in C([-1,1])$ označme

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2},\ f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

Pak je snadno vidět, že f_1 je sudá, f_2 je lichá, a $f = f_1 + f_2$. Odtud plyne, že $C([-1,1])$ je algebraickým direktním součtem prostorů $C_s([-1,1])$ a $C_l([-1,1])$. Abychom dokázali, že tento direktní součet je topologický, je třeba ukázat, že projekce $P : f \in C([-1,1]) \mapsto f_1$ je spojitá. To je ale zřejmé, neboť pro $f \in C([-1,1])$ a $x \in [-1,1]$ platí

$$|f_1(x)| \le \frac{|f(x)| + |f(-x)|}{2} \le \|f\|.$$

Tedy $\|f_1\| \le \|f\|$, a tedy $\|P\| \le 1$.

$\square$

PŘÍKLAD 4. Najděte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má uzavřený graf a není spojitá v $\mathbb{R}$.

ŘEŠENÍ. Stačí položit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$\square$

Kapitola 4

Lineární operátory

1. Duální operátory

PŘÍKLAD 1. Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

(a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1 + ix_2, (1+i)x_1 - x_2, x_1 - 2ix_2)$;
(b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$;
(c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, \dots)$;
(d) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1+\ldots+x_n}{n})_{n=1}^\infty$;
(e) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(f) $X = L_p([0,2\pi])$, kde $p \in [1,\infty)$, $Y = c_0$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt)_{k=1}^\infty$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(g) $X = L_2([0,2\pi])$, $Y = l_2$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt)_{k=1}^\infty$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(h) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$;
(i) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = f(1-t)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(j) $X = C([-\pi,\pi])$, $Y = \mathbb{R}$, $T(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k\,\mathrm{d}t$, kde $k \in \mathbb{N}$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(k) $X = Y = c_0 \oplus_1 \ell_2$, $T(x,y) = (y,0)$ pro $(x,y) \in c_0 \times \ell_2$;
(l) $X = Y = L_1([0,1]) \oplus_1 L_2([0,1])$, $T(f,g) = (g,g)$ pro $(f,g) \in L_1([0,1]) \times L_2([0,1])$.

ŘEŠENÍ. Budeme užívat standartních reprezentací duálů klasických prostorů z Vět FA.2.15, FA.2.19 a FA.2.20.

(a) Zde použijeme postup z Příkladu FA.4.3. T je linární operátor a je zřejmé, že je také spojitý (jako ostatně každý lineární operátor definovaný na konečně-dimenzionálním prostoru). Jak si snadno uvědomíme s použitím znalostí z lineární algebry, pro operátor T platí

$$T(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dle Příkladu FA.4.3, operátor T^* je reprezentován transponovanou maticí. Tedy dostáváme, že

$$T^*(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1 + (1+i)y_2 + y_3, iy_1 - y_2 - 2iy_3).$$

(b) Nejprve se pokusíme provést intuitivní úvahu. Tento tip operátoru si lze představit jako operátor daný „nekonečnou maticí“

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Dle předchozího příkladu nás intuice vede k tomu, že duální operátor by měl být dán „transponovanou nekonečnou maticí“. Tuto nepřesnou úvahu se nyní pokusíme podpořit matematickým důkazem.

Předně vidíme, že pro každé $x \in \ell_2$ platí

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{i=2}^{\infty} |x_{i-1}|^2 = \|x\|_2^2,$$

tedy T je lineární izometrie do, speciálně $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$. S použitím duality $\ell_2 = (\ell_2)^*$ hledáme operátor $T^* \in \mathcal{L}(\ell_2)$ splňující $(T^*y)(x) = y(Tx)$ pro každé $x, y \in \ell_2$, kde

$$(\underbrace{T^*y}_{\in \ell_2})(\underbrace{x}_{\in \ell_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (T^*y)(n)x(n), \qquad \underbrace{y}_{\in \ell_2}(\underbrace{Tx}_{\in \ell_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)Tx(n).$$

Protože $\overline{\operatorname{span}}\{e_i;\ i \in \mathbb{N}\} = \ell_2$, je každý spojitý lineární operátor jednoznačně určen svými hodnotami na bodech $e_i \in \ell_2$, $i \in \mathbb{N}$ a tedy rovnost $(T^*y)(x) = y(Tx)$ stačí ověřovat pro body $x = e_i$, $i \in \mathbb{N}$. Dále dle předchozího máme

$$(T^*y)(e_i) = \sum_{n=1}^{\infty} (T^*y)(n)e_i(n) = (T^*y)(i), \qquad y(Te_i) = \sum_{n=2}^{\infty} y(n)e_i(n-1) = y(i+1),$$

tedy $T^*y \in \ell_2$ je jediný bod splňující $(T^*y)(i) = y(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$. Vzhledem k tomu že zřejmě $(y_2, y_3, y_4, \ldots) \in \ell_2$, dostáváme konečně

$$T^*y = (y_2, y_3, y_4, \ldots), \qquad y \in \ell_2.$$

Představíme–li si nyní operátor T^* zase pomocí „nekonečné matice“, můžeme se přesvědčit že naše intuitivní představa byla správná. Analogickou intuitivní úvahu lze provést pro další operátory mezi prostory c_0 a ℓ_p, $p \in [1, \infty]$, dále již ji ale provádět nebudeme, neboť formální řešení se tím nijak nezkrátí.

(c) Příklad je možné řešit analogickým způsobem jako úlohu (b), nicméně známe–li již výsledek úlohy (b), je možné odvodit řešení příkladu (c) bez nutnosti cokoliv počítat. Označme symbolem S operátor z úlohy (b). Pak dle řešení přechozího příkladu zadaný operátor T můžeme ztotožnit s operátorem S^*, tedy T^* ztotožníme s operátorem S^{**}. Protože ℓ_2 je reflexivní prostor, dle Tvrzení FA.4.5 máme $S^{**} = \varepsilon_{\ell_2} \circ S$ a tedy S^{**} můžeme ztotožnit s operátorem S. Celkem tedy s pomocí identifikací výše dostáváme $T^* = S^{**} = S$.

(d) Předně vidíme, že pro každé $x \in \ell_1$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|Tx(n)| = \left| \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right| \leq \frac{\|x\|_1}{n},$$

tedy $Tx \in c_0$ a $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_1$, z čehož snadno dostáváme že $T \in \mathcal{L}(\ell_1, c_0)$.

S použitím dualit $(\ell_1)^* = \ell_\infty$ a $(c_0)^* = \ell_1$ tak hledáme operátor $T^* \in \mathcal{L}(\ell_1, \ell_\infty)$ splňující $(T^*y)(x) = y(Tx)$ pro každé $x \in \ell_1$ a $y \in (c_0)^* = \ell_1$. Zvolme $y \in (c_0)^* = \ell_1$. Analogicky jako v úloze (b) si nyní uvědomme, že $\overline{\operatorname{span}}\{e_i;\ i \in \mathbb{N}\} = \ell_1$ a tedy $T^*y \in (\ell_1)^* = \ell_\infty$ je jediný bod z ℓ_∞ splňující $(T^*y)(e_i) = y(Te_i)$ pro $i \in \mathbb{N}$, kde

$$(\underbrace{T^*y}_{\in \ell_\infty})(\underbrace{e_i}_{\in \ell_1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (T^*y)(n)e_i(n) = T^*y(i)$$

a

$$\underbrace{y}_{\in \ell_1}(\underbrace{Te_i}_{\in c_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)Te_i(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_i(1) + \ldots + e_i(n)}{n} y_n = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{y_n}{n}.$$

Dostáváme tak, že nutně

$$T^*y = \left(\sum_{n=i}^{\infty} \frac{y_n}{n} \right)_{i=1}^{\infty}, \qquad y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

(e) V Příkladu 1.6 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(L_p([0,1]))$. S použitím duality $\big(L_p([0,1])\big)^* = L_q([0,1])$ operátor $T^* \in \mathcal{L}(L_q([0,1]))$ splňuje, že pro každé $g \in L_q([0,1])$ je $T^*g \in L_q([0,1]) = \big(L_p([0,1])\big)^*$ jediná funkce z $L_q([0,1])$ splňující $T^*g(f) = g(Tf)$, $f \in L_p([0,1])$, kde

$$\underbrace{(T^*g)}_{\in L_q}(\underbrace{f}_{\in L_p}) = \int_0^1 (T^*g)(t)f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \underbrace{g}_{\in L_q}(\underbrace{Tf}_{\in L_p}) = \int_0^1 g(s)f(\sqrt{s})\,\mathrm{d}t.$$

S použitím substituce „$t = \sqrt{s}$“ dostaneme

$$g(Tf) = \int_0^1 2tg(t^2)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Naším kandidátem na funkci T^*g je tedy funkce $t \mapsto 2tg(t^2)$ a zbývá ověřit, že se jedná opravdu o funkci z $L_q([0,1])$. Pokud $q = \infty$, pak zřejmě $\|2tg(t^2)\|_\infty \le 2\|g\|_\infty$. Pro $q < \infty$ s pomocí substituce „$s = t^2$“ dojdeme k tomu, že

$$\int_0^1 |2tg(t^2)|^q\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |2\sqrt{s}|^{q-1}|g(s)|^q\,\mathrm{d}s \le 2^{q-1}\|g\|_q^q < \infty,$$

tedy funkce $t \mapsto 2tg(t^2)$ je opravdu bodem z $L_q([0,1])$ a operátor T^* je dán předpisem $T^*g(t) = 2tg(t^2)$.

(f) Pro každou $f \in L_p([0,2\pi])$ a každé $n \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$|Tf(n)|_p^p \le \int_0^{2\pi} |f(t)|^p|\cos(nt)|^p\,\mathrm{d}t \le \|f\|_p^p,$$

z čehož snadno dostaneme, že $T \in \mathcal{L}(L_p([0,2\pi]),\ell_\infty)$. Abychom dostali $T \in \mathcal{L}(L_p([0,2\pi]),c_0)$, je třeba ověřit že $\operatorname{Rng} T \subset c_0$. K tomu stačí najít podmnožinu $D \subset L_p([0,2\pi])$ takovou že $\overline{\operatorname{span}}\, D = L_p([0,2\pi])$ a $T(D) \subset c_0$. Tvrdíme, že takovou podmnožinou je $D = \{1, \cos(kt), \sin(kt);\ k \in \mathbb{N}\}$. Vskutku, dle Příkladu 1.10 máme $\overline{\operatorname{span}}\, D = L_p([0,2\pi])$ a $D \subset L_2([0,2\pi])$ je ortogonální systém (viz. Příklad FA.1.116), tedy pro každé $f \in D$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$T(f)(n) = \langle f, \cos(nt)\rangle = \begin{cases} 1 & \text{pokud } f = \cos(nt), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Speciálně, $Tf(n) \neq 0$ maximálně pro jedno $n \in \mathbb{N}$ a tedy $Tf \in c_0$. Ověřili jsme tak, že $T \in \mathcal{L}(L_p([0,2\pi]),c_0)$.

S použitím dualit $(c_0)^* = \ell_1$ a $\big(L_p([0,2\pi])\big)^* = L_q([0,1])$ operátor $T^* \in \mathcal{L}(\ell_1, L_q([0,2\pi]))$ splňuje, že pro každé $y \in \ell_1$ je $T^*y \in L_q([0,2\pi]) = \big(L_p([0,1])\big)^*$ jediná funkce z $L_q([0,2\pi])$ splňující $T^*y(f) = y(Tf)$, $f \in L_p([0,2\pi])$, kde

$$\underbrace{(T^*y)}_{\in L_q}(\underbrace{f}_{\in L_p}) = \int_0^1 (T^*y)(t)f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \underbrace{y}_{\in \ell_1}(\underbrace{Tf}_{\in c_0}) = \sum_{n=1}^\infty y(n)\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Nyní se budeme držet následující heuristické myšlenky. Mělo by platit že

$$\int_0^1 (T^*y)(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^\infty y(n)\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sum_{n=1}^\infty y(n)\cos(nt)\,\mathrm{d}t,$$

a tedy $(T^*y)(t)$ bude funkce daná předpisem $t \mapsto \sum_{n=1}^\infty y(n)\cos(nt)$. Aby tato úvaha byla korektní, je třeba nejprve zdůvodnit proč je možné prohodit integrál a sumu v druhé rovnosti, a pak je třeba ověřit že funkce $t \mapsto \sum_{n=1}^\infty y(n)\cos(nt)$ je prvkem prostoru $L_q([0,2\pi])$.

Nejprve zdůvodněme proč je možné prohodit integrál a sumu. Pro každé $f \in L_q([0,2\pi])$ a $t \in [0,2\pi]$ platí

$$\sum_{n=1}^\infty |y(n)f(t)\cos(nt)| \le \|y\|_1 \cdot |f(t)|,$$

a zároveň $|f| \in L_1([0,1])$ neboť dle Hölderovy nerovnosti

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| \,\mathrm{d}t \leq \|f\|_q \cdot \|1\|_p < \infty.$$

Tedy funkce $\|y\|_1 \cdot |f(t)|$ je integrovatelná majoranta posloupnosti $\left(\sum_{n=1}^N y(n) f(t) \cos(nt)\right)_{N=1}^\infty$ a z Lebesgueovy věty dostáváme

$$y(Tf) = \sum_{n=1}^\infty y(n) \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{n=1}^\infty y(n) \cos(nt) \,\mathrm{d}t.$$

Konečně, řada funkcí $\sum_{n=1}^\infty y(n) \cos(nt)$ je stejnoměrně spojitá dle Weierstrassova kritéria, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $t \in [0, 2\pi]$ platí odhad $|y(n) \cos(nt)| \leq |y(n)|$ a $\sum_{n=1}^\infty |y(n)| = \|y\|_1 < \infty$. Proto je funkce $t \mapsto \sum_{n=1}^\infty y(n) \cos(nt)$ spojitá (jakožto stejnoměrná limita spojitých funkcí) a speciálně je prvkem prostoru $L_q([0,1])$.

Jednotlivé kroky heuristické úvahy výše jsme zdůvodnili, čímž jsme dokázali že

$$T^* y(t) = \sum_{n=1}^\infty y(n) \cos(nt), \quad y \in \ell_1,$$

kde suma napravo je bodově konvergentní a definuje funkci z $L_q([0, 2\pi])$ (dokonce spojitou funkci).

(g) Všimněme si, že pro každé $f \in L_2([0, 2\pi])$ a $n \in \mathbb{N}$ máme $Tf(n) = \langle f(t), \cos(nt) \rangle$. Vzhledem k tomu, že $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt);\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální systém (viz. Příklad FA.1.116), dostáváme tak z Besselovy nerovnosti

$$\sum_{n=1}^\infty |Tf(n)|^2 = \sum_{n=1}^\infty \pi |\langle f(t), \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) \rangle|^2 \leq \pi \|f\|_2,$$

tedy $Tf \in \ell_2$ a $\|Tf\| \leq \pi \|f\|_2$, z čehož snadno dostáváme že $T \in \mathcal{L}(L_2([0, 2\pi]), \ell_2)$.

S použitím dualit $(\ell_2)^* = \ell_2$ a $\left(L_2([0, 2\pi])\right)^* = L_2([0, 2\pi])$ operátor $T^* \in \mathcal{L}(\ell_2, L_2([0, 2\pi]))$ splňuje, že pro každé $y \in \ell_2$ je $T^* y \in L_2([0, 2\pi])$ jediná funkce z $L_2([0, 2\pi])$ splňující $T^* y(f) = y(Tf)$, $f \in L_2([0, 2\pi])$, kde

$$\underbrace{(T^* y)}_{\in L_2}(\underbrace{f}_{\in L_2}) = \int_0^{2\pi} (T^* y)(t) f(t) \,\mathrm{d}t, \qquad \underbrace{y}_{\in \ell_2}(\underbrace{Tf}_{\in \ell_2}) = \sum_{n=1}^\infty y(n) \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \,\mathrm{d}t.$$

Analogicky jako v úloze (f) se budeme snažit ukázat, že „lze prohodit sumu a integrál“ a že funkce $\sum_{n=1}^\infty y(n) \cos(nt)$ je prvkem prostoru $L_2([0,1])$. Situace je ale nyní o trochu komplikovanější, neboť řada $\sum_{n=1}^\infty y(n) \cos(nt)$ nemusí být ani bodově konvergentní (například pro $t = 0$ a $y = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$) a je tedy nutné ji chápat jako prvek prostoru $L_2([0, 2\pi])$, „prohození sumy a integrálu“ pak nemůže plynout z Lebesgueovy věty jako v úloze (f) a bude třeba najít jiný argument. Zafixujme $y \in \ell_2$.

Nejprve dokažme, že řada $\sum_{n=1}^\infty y(n) \cos(nt)$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, a tedy je konvergentní v prostoru $L_2([0, 2\pi])$. To plyne z toho, že pro každé $M > N \geq N_0$ platí

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=N}^M y(n) \cos(nt)\|_2^2 &= \sum_{n=N}^M \|y(n) \cos(nt)\|_2^2 \leq \pi \sum_{n=N_0}^\infty |y(n)|^2 \cdot \|\tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt)\|_2^2 \\
&= \pi \sum_{n=N_0}^\infty |y(n)|^2 \to 0, \quad \text{pro } N_0 \to \infty,
\end{aligned}$$

kde první rovnost plyne z Pythagorovy věty a ortogonality $\{\cos(nx);\ n \in \mathbb{N}\}$ a poslední rovnost z ortonormality $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx);\ n \in \mathbb{N}\}$.

Zafixujme nyní $f \in L_2([0,2\pi])$ a uvědomme si, že díky spojitosti skalárního součinu máme

$$y(Tf) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{2\pi} y_n f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \Big\langle \sum_{n=1}^{N} y_n \cos(nt), f(t) \Big\rangle$$
$$= \Big\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} y_n \cos(nt), f(t) \Big\rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Tedy $T^*y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos(nt)$ pro každé $y \in \ell_2$, kde řada vpravo je konvergentní řada v prostoru $L_2([0,2\pi])$.

(h) V Příkladu 1.6 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$. S použitím duality $(C([0,1]))^* = M([0,1])$ operátor $T^* \in \mathcal{L}(M([0,1]))$ splňuje, že pro každé $\mu \in M([0,1])$ je $T^*\mu \in M([0,1])$ jediná míra z $M([0,1])$ splňující $T^*\mu(f) = \mu(Tf)$, $f \in C([0,1])$, kde

$$(\underbrace{T^*\mu}_{\in M([0,1])})(\underbrace{f}_{\in C([0,1])}) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}(T^*\mu)(t), \qquad \underbrace{\mu}_{\in M([0,1])}(\underbrace{Tf}_{\in C([0,1])}) = \int_0^1 Tf(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Nechť λ značí Lebesgueovu míru na $[0,1]$. Potom pro $f \in C([0,1])$ a $\mu \in M([0,1])$ máme dle Fubiniovy věty

$$\mu(Tf) = \int_0^1 \int_0^t f(x) d\lambda(x) d\mu(t) = \int_0^1 \int_0^1 \chi_{[0,t]}(x) f(x) d\lambda(x) d\mu(t) =$$
$$= \int_0^1 f(x) \int_0^1 \chi_{[0,t]}(x) d\mu(t) d\lambda(x) = \int_0^1 f(x) \int_0^1 \chi_{[x,1]}(t) d\mu(t) d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\mu([x,1])\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Tedy $h_\mu(x) = \mu([x,1])$, $x \in [0,1]$ definuje měřitelnou funkci a protože $\int_0^1 |\mu([x,1])| d\lambda(x) \leq \|\mu\| < \infty$, jedná se o integrovatelnou funkci a tedy borelovská míra $h_\mu\,\mathrm{d}\lambda \in M([0,1])$ definovaná předpisem

$$h_\mu\,\mathrm{d}\lambda(A) = \int_A h_\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

splňuje $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}(T^*\mu)(t) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(h_\mu\,\mathrm{d}\lambda)(x)$ a proto $T^*\mu = h_\mu\,\mathrm{d}\lambda$, $\mu \in M([0,1])$. Jinými slovy, funkce $h_\mu(x) = \mu([x,1])$ je hustotou míry $T^*\mu$ vzhledem k Lebesgueově míře. Nebo ještě jinak řečeno, $T^*\mu$ je míra definovaná předpisem $T^*\mu(A) = \int_A \mu([x,1])\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

(i) Zřejmě pro každé $f \in C([0,1])$ máme $\|f\| = \|Tf\|$, z čehož snadno dostáváme že $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$. S použitím duality $(C([0,1]))^* = M([0,1])$ operátor $T^* \in \mathcal{L}(M([0,1]))$ splňuje, že pro každé $\mu \in M([0,1])$ je $T^*\mu \in M([0,1])$ jediná míra z $M([0,1])$ splňující $T^*\mu(f) = \mu(Tf)$, $f \in C([0,1])$, kde

$$(\underbrace{T^*\mu}_{\in M([0,1])})(\underbrace{f}_{\in C([0,1])}) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}(T^*\mu)(t)$$

a označíme–li $h(t) = 1-t$, $t \in [0,1]$, pak

$$\underbrace{\mu}_{\in M([0,1])}(\underbrace{Tf}_{\in C([0,1])}) = \int_0^1 Tf(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_0^1 f(h(t))\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}h_\#\mu(t),$$

kde $h_\#\mu$ značí obraz míry μ při zobrazení h, tj. míru definovanou předpisem $h_\#\mu(A) = \mu(h^{-1}(A))$. Celkem tedy dostáváme, že $T^*\mu = h_\#\mu$ pro $\mu \in M([0,1])$.

(j) V Příkladu 1.6 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(C([-\pi,\pi]),\mathbb{R})$. S použitím duality $\mathbb{R} = \mathbb{R}^*$ (pomocí duality $\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi_t$, kde $\psi_t(x) = tx$, $x \in \mathbb{R}$) a $(C([-\pi,\pi]]))^* = M([-\pi,\pi]])$ vidíme, že $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, M([-\pi,\pi]]))$ splňuje, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $T^*t \in M([-\pi,\pi]])$ jediná míra z $M([-\pi,\pi]])$ splňující $T^*t(f) = t(Tf)$, $f \in C([-\pi,\pi])$, kde

$$(\underbrace{T^*t}_{\in M([-\pi,\pi])})(\underbrace{f}_{\in C([-\pi,\pi])}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}(T^*t)(x), \qquad \underbrace{t}_{\in\mathbb{R}}(\underbrace{Tf}_{\in\mathbb{R}}) = t\cdot Tf = \int_0^1 f(x)t(\sin x)^k\,\mathrm{d}x$$

a označíme–li $h(x) = (\sin x)^k$, $x \in [-\pi, \pi]$, pak dostáváme podobně jako v úloze h že $T^*t = t \cdot h\,\mathrm{d}\lambda$ pro $t \in \mathbb{R}$, kde $h\,\mathrm{d}\lambda$ značí míru jejíž hustotou vzhledem Lebesgueově míře λ je funkce h.

(k) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je spojitý, lineární a $\|T\| \leq 1$, neboť pro $(x, y) \in X$ platí

$$\|T(x, y)\| = \|(y, 0)\| = \|y\|_\infty \leq \|y\|_1 \leq \|(x, y)\|.$$

S použitím duality $(c_0 \oplus_1 \ell_2)^* = (c_0)^* \oplus_\infty (\ell_2)^* = \ell_1 \oplus_\infty \ell_2$ hledáme operátor $T^* \in \mathcal{L}(\ell_1 \oplus_\infty \ell_2)$ splňující $\big(T^*(x, y)\big)(a, b) = (x, y)\big(T(a, b)\big)$ pro každé $(x, y) \in \ell_1 \oplus_\infty \ell_2$ a $(a, b) \in c_0 \oplus_1 \ell_2$, kde pro $T^*(x, y) = \big(T^*(x, y)_1, T^*(x, y)_2\big) \in \ell_1 \oplus_\infty \ell_2$ máme

$$\big(\underbrace{T^*(x, y)}_{\in \ell_1 \oplus_\infty \ell_2}\big) \underbrace{(a, b)}_{\in c_0 \oplus_1 \ell_2} = \big(T^*(x, y)_1\big)(a) + \big(T^*(x, y)_2\big)(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \big(T^*(x, y)_1\big)_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \big(T^*(x, y)_2\big)_n,$$

$$\text{a zároveň} \qquad \underbrace{(x, y)}_{\in \ell_1 \oplus_\infty \ell_2} \big(\underbrace{T(a, b)}_{\in c_0 \oplus_1 \ell_2}\big) = \underbrace{(x, y)}_{\in \ell_1 \oplus_\infty \ell_2} \big(\, \underbrace{(b, 0)}_{\in c_0 \oplus_1 \ell_2} \,\big) = x(b) + y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n.$$

Jelikož $\overline{\operatorname{span}}\{(e_i, 0), (0, e_i);\ i \in \mathbb{N}\} = c_0 \oplus_1 \ell_2$, je každý prvek $(c_0 \oplus_1 \ell_2)^*$ jednoznačně určen svými hodnotami na bodech $(a, b) \in \{(e_i, 0), (0, e_i);\ i \in \mathbb{N}\}$. Z předchozího vidíme, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ máme

$$\big(T^*(x, y)_1\big)_i = T^*(x, y)(e_i, 0) \quad \text{a} \quad (x, y)(T(e_i, 0)) = 0,$$

tedy $\big(T^*(x, y)_1\big)_i = 0$, a také

$$\big(T^*(x, y)_2\big)_i = T^*(x, y)(0, e_i) \quad \text{a} \quad (x, y)(T(0, e_i)) = x_i,$$

tedy $\big(T^*(x, y)_2\big)_i = x_i$. Celkem tak dostáváme

$$T^*(x, y) = (0, x), \quad (x, y) \in \ell_1 \oplus_\infty \ell_2.$$

(l) Pro přehlednost níže budeme zkráceně psát L_p místo přesnějšího $L_p([0, 1])$ pro $p \in [1, \infty]$. Nejprve si uvědomme, že T je dobře definovaný spojitý lineární operátor. Pro $g \in L_2$ s použitím Hölderovy nerovnosti máme

$$\|g\|_1 \leq \|1\|_2 \cdot \|g\|_2 = \|g\|_2,$$

a tedy pro každé $(f, g) \in X$ je $T(f, g) = (g, g) \in X$ a tedy T je dobře definovaný. Je snadné si uvědomit, že T je lineární a spojitost operátoru a z odhadu

$$\|T(f, g)\| = \|(g, g)\| = \|g\|_1 + \|g\|_2 \leq 2\|g\|_2 \leq 2\|(f, g)\|, \quad (f, g) \in X$$

plyne, že T je spojitý a $\|T\| \leq 2$.

S použitím duality

$$\Big(L_1 \oplus_1 L_2\Big)^* = \big(L_1\big)^* \oplus_\infty \big(L_2\big)^* = L_\infty \oplus_\infty L_2$$

vidíme, že $T^* \in \mathcal{L}(L_\infty \oplus_\infty L_2)$ splňuje, že pro každé $(e, f) \in L_\infty \oplus_\infty L_2$ je $T^*(e, f) = \big(T^*(e, f)_1, T^*(e, f)_2\big)$ jediný bod prostoru $L_\infty \oplus_\infty L_2$ splňující $\big(T^*(e, f)\big)(g, h) = (e, f)\big(T(g, h)\big)$ pro každé $(g, h) \in L_1 \oplus_\infty L_2$, kde

$$\begin{aligned} \big(\, \underbrace{T^*(e, f)}_{\in L_\infty \oplus_\infty L_2} \,\big) \underbrace{(g, h)}_{\in L_1 \oplus_1 L_2} &= \big(T^*(e, f)_1\big)(g) + \big(T^*(e, f)_2\big)(h) \\ &= \int_0^1 g(t) \cdot \big(T^*(e, f)_1\big)(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 h(t) \cdot \big(T^*(e, f)_2\big)(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$\text{a zároveň} \qquad \underbrace{(e, f)}_{\in L_\infty \oplus_\infty L_2} \big(\underbrace{T(g, h)}_{\in L_1 \oplus_1 L_2}\big) = \underbrace{(e, f)}_{\in L_\infty \oplus_\infty L_2} \big(\, \underbrace{(h, h)}_{\in L_1 \oplus_1 L_2} \,\big) = e(h) + f(h) = \int_0^1 (e(t) + f(t))h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Uvědomme si nyní, že pro $(e, f) \in L_\infty \oplus_\infty L_2$ máme $e + f \in L_2$ a tedy $(0, e + f) \in L_\infty \oplus L_2$, zároveň dle předchozího výpočtu máme $(0, e + f)(g, h) = (e, f)(T(g, h))$, a tedy

$$T^*(e, f) = (0, e + f), \quad (e, f) \in L_\infty \oplus_\infty L_2.$$

□

PŘÍKLAD 2 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení). Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

(a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$;
(b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \ldots)$;
(c) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\sum_{k=n}^\infty x_k)_{n=1}^\infty$;
(d) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(e) $X = \ell_1$, $Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$, $t \in [0,1]$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(f) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$, $t \in [0,1]$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(g) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f + f(1) - f(0)$;
(h) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = tf(t)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(i) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(j) $X = L_1([0,1])$, $Y = \mathbb{K}$, $T(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$;
(k) $X = Y = c_0 \oplus_1 \ell_1$, $T(x,y) = \big((\frac{y_n}{n})_{n=1}^\infty, (\frac{x_n}{n^3})_{n=1}^\infty\big)$ pro $(x,y) \in c_0 \oplus_1 \ell_1$;
(l) $X = Y = L_1([0,1]) \oplus_2 C([0,1])$, $T(f,g) = (g, 0)$ pro $(f,g) \in L_1([0,1]) \oplus_2 C([0,1])$.

VÝSLEDKY. (a) $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 + 2y_3, y_1 - y_2 + y_3)$;
(b) $T^*((y_n)) = (y_1 - 2y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \ldots)$;
(c) $T^*((y_n)) = (\sum_{k=1}^n y_k)_{n=1}^\infty$;
(d) $T^*(g) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot g$;
(e) $T^*(g) = \big(\int_0^1 g(t) t^n\,\mathrm{d}t\big)_{n=1}^\infty$, $g \in L_q([0,1])$;
(f) $T^*(\mu) = \big(\int_{[0,1]} t^n\,\mathrm{d}\mu(t)\big)_{n=1}^\infty$, $\mu \in M([0,1])$;
(g) $T^*(\mu) = \mu + \mu([0,1])(\delta_1 - \delta_0)$, $\mu \in M([0,1])$;
(h) $T^*\mu = t\,\mathrm{d}\mu$, $\mu \in M([0,1])$, pro $\mu \in M([0,1])$, tedy $T^*\mu$ je míra definovaná předpisem $T^*\mu(A) = \int_A t\,\mathrm{d}\mu(t)$;
(i) pro každé $\mu \in M([0,1])$ máme $T^*\mu = h_\#\mu$, kde $h(t) = t^2$; tedy, $T^*\mu$ je míra definovaná předpisem $T^*\mu(A) = \mu(\{t \in [-1,1];\ t^2 \in A\})$.
(j) pro každé $t \in \mathbb{K}$ je $T^*t \in L_\infty([0,1])$ funkce definovaná předpisem $(T^*t)(x) = t \cdot (x - \frac{1}{2})$, $x \in [0,1]$;
(k) $T^*(x,y) = \big((\frac{y_n}{n^3})_{n=1}^\infty, (\frac{x_n}{n})_{n=1}^\infty\big)$ pro $(x,y) \in \ell_1 \oplus_\infty \ell_\infty$;
(l) $T^*(f,\mu) = (0, f\,\mathrm{d}t)$ pro $(f,\mu) \in L_\infty \oplus_2 M([0,1])$, kde $f\,\mathrm{d}t$ je míra definovaná předpisem $f\,\mathrm{d}t(A) = \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$.

□

2. Kompaktní operátory

PŘÍKLAD 3. Charakterizujte kompaktní podmnožiny v Banachových prostorech c_0 a l_p. Konkrétně:

(a) Omezená množina $K \subset c_0$ je relativně kompaktní právě když

$$\{\sup_{x \in K} |x(n)|\}_{n=1}^\infty \in c_0.$$

(b) Pro $p \in [1,\infty)$ platí, že omezená množina $K \subset \ell_p$ je relativně kompaktní právě když

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x \in K} \sum_{i=n}^\infty |x(i)|^p \right\} = 0.$$

ŘEŠENÍ. Nejprve připomeňme, že množina K v úplném metrickém prostoru X je relativně kompaktní právě když je totálně omezená právě když z každé posloupnosti v K lze nalézt podposloupnost konvergující v X.

(a) Označme $a_n := \sup_{x\in K}|x(n)|$, $n \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme nejprve že $a_n \to 0$ a dokažme, že K je totálně omezená. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje n_0 splňující $\sup_{n\geq n_0}|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dále množina $\{x\restriction_{\{1,\dots,n_0\}};\ x \in K\} \in (\mathbb{K}^{n_0}, \|\cdot\|_\infty)$ je omezená v konečně-dimenzionálním prostoru $(\mathbb{K}^{n_0}, \|\cdot\|_\infty)$, tedy je totálně omezená a existuje konečná množina $A \subset K$ splňující že pro každé $x \in K$ existuje $a \in A$ splňující $\sup_{n\leq n_0}|x(n) - a(n)| < \varepsilon$. Pak A je konečná ε-síť pro K, neboť pro libovolné $a \in A$ a $x \in K$ dle volby n_0 platí

$$\sup_{n\geq n_0}|a(n) - x(n)| \leq 2\sup_{n\geq n_0}|a_n| \leq \varepsilon.$$

Množina K je tedy totálně omezená a proto relativně kompaktní.

Na druhou stranu, předpokládejme že $\{a_n\}_{n=1}^\infty \notin c_0$. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > \varepsilon$ a můžeme tak nalézt posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ v K a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ splňující $|x^k(n_k)| > \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že z posloupnosti $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ nelze vybrat podposloupnost konvergentní v c_0. Zvolme libovolné $y \in c_0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $|y(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Na druhou stranu víme, že pro každé $k \geq n_0$ je $|x^k(n_k)| > \varepsilon$. Odtud plyne, že pro každé $k \geq n_0$ je

$$\|x^k - y\| \geq |x^k(n_k) - y(n_k)| \geq |x^k(n_k)| - |y(n_k)| > \varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{2} = \tfrac{\varepsilon}{2},$$

a tedy z posloupnosti $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ nelze vybrat podposloupnost konvergující k y, a proto množina K není relativně kompaktní.

(b) Označme $a_n = \sup_{x\in K}\sum_{i=n}^\infty|x(i)|^p$, $n \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme nejprve že $a_n \to 0$ a dokažme, že K je totálně omezená. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje n_0 splňující $|a_{n_0}| \leq (\frac{\varepsilon}{3})^p$. Dále množina $\{x\restriction_{\{1,\dots,n_0\}};\ x \in K\} \in (\mathbb{K}^{n_0}, \|\cdot\|_p)$ je omezená v konečně-dimenzionálním prostoru $(\mathbb{K}^{n_0}, \|\cdot\|_p)$, tedy je totálně omezená a existuje konečná množina $A \subset K$ splňující že pro každé $x \in K$ existuje $a \in A$ splňující $\sum_{n=1}^{n_0}|x(n) - a(n)|^p < \frac{\varepsilon^p}{3}$. Pak A je konečná ε-síť pro K, neboť pro každé $x \in K$ existuje $a \in A$ splňující $\sum_{n=1}^{n_0}|x(n) - a(n)|^p < \frac{\varepsilon^p}{3}$, z čehož dostáváme

$$\|x - a\|_p \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \sqrt[p]{\sum_{n=n_0}^\infty|x(n) - a(n)|^p} \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + 2\sqrt[p]{|a_{n_0}|} \leq \varepsilon.$$

Množina K je tedy totálně omezená a proto relativně kompaktní.

Na druhou stranu, předpokládejme že $a_n \not\to 0$. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > \varepsilon$ a můžeme tak nalézt posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ v K a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ splňující $\sum_{i=n_k}^\infty|x^k(i)|^p > \varepsilon^p$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že z posloupnosti $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ nelze vybrat podposloupnost konvergentní v ℓ_p. Zvolme libovolné $y \in \ell_p$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=n_0}^\infty|y(i)|^p < (\frac{\varepsilon}{2})^p$. Na druhou stranu víme, že pro každé $k \geq n_0$ je $\sum_{i=n_k}^\infty|x^k(i)|^p > \varepsilon^p$. Odtud plyne, že pro každé $k \geq n_0$ je

$$\|x^k - y\|_p \geq \sqrt[p]{\sum_{i=n_k}^\infty|x^k(i) - y(i)|^p} \geq \sqrt[p]{\sum_{i=n_k}^\infty|x^k(i)|^p} - \sqrt[p]{\sum_{i=n_k}^\infty|y(i)|^p} > \varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{2} = \tfrac{\varepsilon}{2},$$

a tedy z posloupnosti $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ nelze vybrat podposloupnost konvergující k y, a proto množina K není relativně kompaktní.

□

PŘÍKLAD 4. Určete, zda je operátor $T : X \to Y$ kompaktní.

(a) $X = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^4, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_3 + 4x_4, x_2 - 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + x_4)$;
(b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$;
(c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{1}{\sqrt{n}}x_n)_{n=1}^\infty$;

(d) $X = \ell_2$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$;
(e) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(f) $X = \ell_1$, $Y = L_1([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$;
(g) $X = Y = C([0,1])$, $T(f) = f - 3f(0) + 2f(1)$;
(h) $X = Y = C([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(i) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 \exp(2ts) f(s)\,\mathrm{d}s$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(j) $X = L_2([0,2\pi])$, $Y = c_0$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt)_{k=1}^{\infty}$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(k) $X = Y = c_0 \oplus_1 \ell_2$, $T(x,y) = (y,0)$ pro $(x,y) \in c_0 \times \ell_2$;
(l) $X = Y = L_1([0,1]) \oplus_1 L_2([0,1])$, $T(f,g) = (g,g)$ pro $(f,g) \in L_1([0,1]) \times L_2([0,1])$.

ŘEŠENÍ. Před vlastním řešením příkladů si nejprve připomeňme některá známá fakta, pomocí kterých budeme níže ověřovat zda operátor je/není kompaktní.

(i) Pokud existuje posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v B_X a $\varepsilon > 0$ splňující že $\|Tx_n - Tx_m\| \geq \varepsilon$ pro každé $n \neq m$, pak operátor T není kompaktní.
(neboť pak z posloupnosti $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ není možné vybrat cauchyovskou podposloupnost)
(ii) Existuje–li posloupnost $\{T_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ konečně-dimenzionálních operátorů $T_N \in \mathcal{F}(X,Y)$, $N \in \mathbb{N}$ splňující $\|T - T_N\| \to 0$, pak T je kompaktní operátor.
(neboť $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subset \mathcal{K}(X,Y)$)
(iii) Pokud existuje nekonečně-dimenzionální podprostor $Z \subset X$ splňující že $T \restriction Z$ je izomorfismus, pak pak operátor T není kompaktní.
(neboť pokud je $\overline{T(B_X)}$ kompaktní množina, pak $\overline{T(B_Z)} \subset \overline{T(B_X)}$ je kompaktní, ale potom $B_Z = T^{-1}(\overline{T(B_Z)})$ je spojitý obraz kompaktu, tedy kompakt což je ve sporu s tím že $\dim Z = \infty$)
(iv) Pokud $Y = C(K)$ kde K je metrický kompakt, T je spojitý operátor a existuje $K > 0$ splňující že každá funkce $f \in T(B_X)$ je K-Lipschitzovská, pak operátor T je kompaktní.
(plyne z Arzelàovy-Ascoliovy věty, neboť spojitost operátoru T je ekvivalentní omezenosti $T(B_X)$ a existence $K > 0$ jako výše implikuje stejnou spojitost funkcí z $T(B_X)$)
V této souvislosti je vhodné připomenout, že pokud je dán interval $I \subset \mathbb{R}$, funkce $f : I \to \mathbb{R}$ má na vnitřku intervalu I vlastní derivaci a platí že $K = \sup_{x\in I}|f'(x)| < \infty$, pak funkce f je K-Lipschitzovská.
(plyne z Věty o střední hodnotě, víceméně to bylo dokázáno v rámci řešení Příkladu 1.2)

Nyní přistoupíme k řešení jednotlivých příkladů.

(a) Zadaný operátor T je lineárním operátorem mezi konečně-dimenzionálními prostory, tedy $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ a T je kompaktní dle (ii).
(b) Pro kanonické vektory $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$ a pro $1 \leq n < m$ máme $\|Te_n - Te_m\| = \|e_{n+1} - e_{m+1}\| = \sqrt{2}$ a tedy T není kompaktní dle (i).
(c) Definujme operátory $T_N : \ell_2 \to \ell_2$ předpisem

$$T_N(x) = (x_1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_2, \ldots, \tfrac{1}{\sqrt{N}}x_N, 0, 0, \ldots), \qquad x \in \ell_2.$$

Pak pro každé $N \in \mathbb{N}$ platí

$$\|T_N(x)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right|^2 \leq \|x\|_2^2, \quad x \in \ell_2$$

tedy operátory T_N jsou spojité a lineární a protože $\operatorname{Rng} T_N \subset \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$, dostáváme $T_N \in \mathcal{F}(\ell_2, \ell_2)$, $N \in \mathbb{N}$.

Dále pro každé $N \in \mathbb{N}$ máme

$$\|(T - T_N)(x)\|_2^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right|^2 \leq \frac{1}{N+1} \cdot \|x\|_2^2, \quad x \in \ell_2$$

a tedy $\|T - T_N\| \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}} \to 0$ a operátor T je kompaktní dle (ii).

(d) Nejprve si uvědomme že s použitím Hölderovy nerovnosti platí

$$\frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n} \leq \|(|x_1|, \ldots, |x_n|)\|_2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}} \leq \|x\| \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad x \in \ell_2, \tag{1}$$

tedy $Tx \in c_0$ pro $x \in \ell_2$ a snadno pak také nahlédneme, že $T \in \mathcal{L}(\ell_2, c_0)$.

Definujme nyní operátory $T_N : \ell_2 \to c_0$ pro $N \in \mathbb{N}$ předpisem

$$T_N(x) = (x_1, \tfrac{x_1+x_2}{2}, \ldots, \tfrac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N}, 0, 0, \ldots), \qquad x \in \ell_2.$$

Pak opět s použitím odhadu (1) vidíme, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ je $T_N \in \mathcal{L}(\ell_2, c_0)$ a protože $\operatorname{Rng} T_N \subset \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$, dostáváme $T_N \in \mathcal{F}(\ell_2, \ell_2)$, $N \in \mathbb{N}$.

Dále pro každé $N \in \mathbb{N}$ znovu s použitím (1) máme

$$\|(T - T_N)(x)\| = \sup_{n \geq N+1} \frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n} \leq \|x\| \cdot \sup_{n \geq N+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\|x\|}{\sqrt{N+1}}, \quad x \in \ell_2$$

a tedy $\|T - T_N\| \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}} \to 0$ a operátor T je kompaktní dle (ii).

(e) V Příkladu 1.6 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(L_p([0,1]))$. Pokud je $p = \infty$, pak jsme v Příkladu 1.6 také ověřili, že operátor T je izometrie a tedy není kompaktní dle (iii). Pro zbytek příkladu tedy uvažujme pouze případ $p \neq \infty$. S použitím substituce „$s = \sqrt{t}$“ dostáváme

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 |f(\sqrt{t})|^p \, \mathrm{d}t = \int_0^1 |f(s)|^p 2s \, \mathrm{d}s, \quad f \in L_p([0,1])$$

a uvažujeme–li tedy nekonečně-dimenzionální podprostor $Z \subset L_p([0,1])$ daný předpisem

$$Z = \{f \in L_p([0,1]);\ f(x) = 0 \text{ pro s.v. } x \in [0, \tfrac{1}{4}]\},$$

pak pro $f \in Z$ máme

$$\tfrac{1}{2}\|f\|_p^p \leq \int_{1/4}^1 2s|f(s)|^p \, \mathrm{d}s = \|Tf\|_p^p \leq 2\|f\|_p^p$$

a tedy $T \restriction Z$ je izomorfismus. Operátor T tak není kompaktní dle (iii).

(f) Definujme operátory $T_N : \ell_1 \to L_1([0,1])$ pro $N \in \mathbb{N}$ předpisem

$$T_N x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n t^n, \qquad x \in \ell_1.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\|T_N x\| \leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} |x_n| t^n \, \mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq \|x\|, \quad x \in \ell_1,$$

tedy operátory T_N jsou spojité a lineární a protože $\operatorname{Rng} T_N \subset \operatorname{span}\{t^1, \ldots, t^N\}$, dostáváme $T_N \in \mathcal{F}(\ell_1, L_1([0,1]))$.

Dále pro každé $N \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\|(T - T_N)(x)\| &\leq \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| t^n \, \mathrm{d}t \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| \int_0^1 t^{N+1} \, \mathrm{d}t \\ &\leq \|x\| \cdot \int_0^1 t^{N+1} \, \mathrm{d}t = \frac{\|x\|}{N+2}, \quad x \in \ell_1,\end{aligned}$$

a tedy $\|T - T_N\| \leq \frac{1}{N+2} \to 0$ a operátor T je kompaktní dle (ii).

(g) Uvažujme nekonečně-dimenzionální podprostor $Z \subset C([0,1])$ daný předpisem
$$Z = \{f \in C([0,1]);\ 2f(1) = 3f(0)\},$$
pak pro $f \in Z$ máme $Tf = f$ a tedy $T \restriction Z$ je izometrie. Operátor T tak není kompaktní dle (iii).

(h) V Příkladu 1.6 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(C([0,r]))$. V Příkladu 1.6 jsme již také zmiňovali, že pro $f \in C([0,1])$ máme $Tf \in C^1([0,1])$ a $(Tf)' = f$, z čehož dostáváme že platí $\|(Tf)'\|_\infty \leq \|f\|$. Každá $g \in T(B_X)$ je tedy 1-Lipschitzovská (protože její derivace je omezená jedničkou jak jsme právě ukázali) a operátor T je proto kompaktní dle (iv).

(i) Nechť $f \in C([0,1])$. Ověřme předpoklady věty o integrálu závislém na parametru, abychom ověřili že funkce Tf je spojitá. Pro každé $t \in [0,1]$ máme $|f(s)\exp(2ts)| \leq e^2\|f\|_\infty \in L_1([0,1])$, tedy předpoklady věty o integrálu závislém na parametru jsou splněny, funkce Tf je spojitá a zároveň z výpočtu výše vidíme, že $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ a $\|T\| \leq e^2$.

Dále snadno nahlédneme, že funkce $\exp$ je e^2-Lipschitzovská na intervalu $[0,2]$, neboť má na tomto intervalu derivaci omezenou právě hodnotou e^2. Pro každé $f \in B_X$ a $t, t' \in [0,1]$ tak dostáváme
$$\begin{aligned}|Tf(t) - Tf(t')| &\leq \int_0^1 |\exp(2st) - \exp(2st')||f(s)|\,\mathrm{d}s \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |\exp(2st) - \exp(2st')|\,\mathrm{d}s \\ &\leq e^2\|f\|_\infty \int_0^1 |2st - 2st'|\,\mathrm{d}s \leq 2e^2|t-t'| \int_0^1 s\,\mathrm{d}s = e^2|t-t'|\end{aligned}$$
a funkce Tf je proto e^2-Lipschitzovská. Každá $g \in T(B_X)$ je tedy e^2-Lipschitzovská a operátor T je proto kompaktní dle (iv).

(j) V Příkladu 1 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(L_2([0,2\pi]), c_0))$. Dále víme, že $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt);\ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální systém v $L_2([0,1])$ (viz. Příklad FA.1.116). Uvažujme nyní posloupnost funkcí $\{f_n\}$ v B_X danou předpisem
$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Pak
$$Tf_n = \Big(\langle \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \cos(kt)\rangle\Big)_{k=1}^\infty = \sqrt{\pi}e_n, \quad n \in \mathbb{N}$$
a tedy pro $n \neq m$ máme $\|Tf_n - Tf_m\| = \sqrt{\pi}\|e_n - e_m\| = \sqrt{2\pi}$. Operátor T tak není kompaktní dle (i).

(k) Uvažujme vektory $(0, e_n) \in c_0 \oplus_1 \ell_2$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\|(0,e_n)\| = 1$, ale
$$\|T((0,e_n)) - T((0,e_m))\| = \|(e_n - e_m, 0)\| = \|e_n - e_m\|_\infty = 1, \qquad n \neq m.$$
Tedy operátor T není kompaktní dle (i).

(l) V Příkladu1 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(X)$. Uvažujme nekonečně-dimenzionální podprostor $Z \subset X = L_1([0,1]) \oplus_1 L_2([0,1])$ daný předpisem
$$Z = \{(0,g);\ g \in L_2([0,1])\}.$$
Pak pro $(0,g) \in Z$ máme $\|T(0,g)\| = \|(g,g)\| = \|g\|_1 + \|g_2\| \geq \|g\|_2 = \|(0,g)\|_X$, a tedy $T \restriction Z$ je izomorfismus. Operátor tak není kompaktní dle (iii).

□

PŘÍKLAD 5. Nechť $k \in C([0,1]^2)$. Pro $f \in C([0,1])$ definujme
$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s,t)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$
Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ a že T je kompaktní operátor.

DŮKAZ. Nechť $f \in C([0,1])$. Ověřme předpoklady věty o integrálu závislém na parametru, abychom ověřili že funkce Tf je spojitá. Pro každé $t \in [0,1]$ máme $|f(s)k(s,t)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|k\|_\infty \in L_1([0,1])$, tedy předpoklady věty o integrálu závislém na parametru jsou splněny, funkce Tf je spojitá a zároveň z výpočtu výše vidíme, že $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ a $\|T\| \leq \|k\|_\infty$.

Zbývá ověřit, že T je kompaktní. K tomu použijeme Arzelàovu-Ascoliovu větu podle které stačí ověřit že $T(B_{C([0,1])}) \subset C([0,1])$ je omezená a stejně spojitá množina. Omezenost $T(B_{C([0,1])})$ plyne ze spojitosti operátoru T a zbývá tak ověřit stejnou spojitost. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $t \in [0,1]$. Protože funkce k je spojitá na kompaktní množině $[0,1]^2$, je stejnoměrně spojitá a tedy existuje $\delta > 0$ splňující

$$\max\{|s_1 - s_2|, |t_1 - t_2|\} < \delta \Rightarrow |k(s_1,t_1) - k(s_2,t_2)| < \varepsilon.$$

Položme $U = [0,1] \cap (t-\delta, t+\delta)$ a zvolme $t' \in U$. Pak pro každé $f \in B_{C([0,1])}$ platí

$$|Tf(t) - Tf(t')| \leq \int_0^1 \|f\|_\infty |k(s,t) - k(s,t')| \, \mathrm{d}s \leq \|f\|_\infty \int_0^1 \varepsilon \, \mathrm{d}s \leq \varepsilon.$$

Ověřili jsme tedy, že $T(B_{C([0,1])})$ je stejně spojitá množina čím je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 6 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení). Určete, zda je operátor $T : X \to Y$ kompaktní.

(a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$;
(b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \ldots)$;
(c) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n}x_n)_{n=1}^\infty$;
(d) $X = \ell_2$, $Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n}x_n)_{n=1}^\infty$;
(e) $X = \ell_1$, $Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \big(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\big)_{n=1}^\infty$;
(f) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \big(\sum_{k=n}^\infty x_k\big)_{n=1}^\infty$;
(g) $X = \ell_{3/2}$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = \big(\frac{x_1+\ldots+x_{2n}}{\sqrt{n}}\big)_{n=1}^\infty$;
(h) $X = L_p([0,1])$, $Y = L_p([0,\frac{\pi}{2}])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f)(t) = f(\sin t)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(i) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$;
(j) $X = \ell_1$, $Y = L_2([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$;
(k) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = tf(t)$;
(l) $X = L_2([0,2\pi])$, $Y = \ell_2$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt)_{k=1}^\infty$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(m) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 f(s)\sqrt{1+t+s^2}\,\mathrm{d}s$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(n) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 sf(\frac{s+t}{2})\,\mathrm{d}s$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel);
(o) $X = C^1([0,1])$, $Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 f(st)\,\mathrm{d}s$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel);
(p) $X = Y = c_0 \oplus_1 \ell_1$, $T(x,y) = \big((\frac{y_n}{n})_{n=1}^\infty, (\frac{x_n}{n^3})_{n=1}^\infty\big)$ pro $(x,y) \in c_0 \oplus_1 \ell_1$;
(q) $X = Y = L_1([0,1]) \oplus_2 C([0,1])$, $T(f,g) = (g,0)$ pro $(f,g) \in L_1([0,1]) \oplus_2 C([0,1])$.

VÝSLEDKY. Níže kromě výsledků uvádíme, kterou z metod (i), (ii), (iii) a (iv) použitých v rámci řešení Příkladu 4 je výhodné použít k řešení příslušného příkladu.

(a) ano (aplikujeme metodu (ii));
(b) ne (aplikujeme metodu (i));
(c) ano (aplikujeme metodu (ii));
(d) ano (aplikujeme metodu (ii));
(e) ano (aplikujeme metodu (ii));
(f) ne (aplikujeme metodu (i));
(g) ano (aplikujeme metodu (ii));
(h) ne (aplikujeme metodu (iii));
(i) ne (aplikujeme metodu (i));
(j) ano (aplikujeme metodu (ii));
(k) ne (aplikujeme metodu (iii));

(l) ne (aplikujeme metodu (i));
(m) ano (aplikujeme metodu (iv));
(n) ano (aplikujeme metodu (iv));
(o) ano (aplikujeme metodu (iv));
(p) ano (aplikujeme metodu (ii));
(q) ano (uvažujeme kompaktní operátor $S \in \mathcal{L}(X, C([0,1]) \oplus_2 C([0,1]))$ definovaný předpisem $S(f,g) = (g,0)$ a uvědomíme si, že $T = Q \circ S$ pro vhodně zvolený operátor Q).

□

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

PŘÍKLAD 7. Pro následující operátory ukažte že $T \in \mathcal{L}(X)$ a určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

(a) $X = \ell_2, T((x_n)) = (x_2, x_3, \ldots)$;
(b) $X = \ell_2, T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

ŘEŠENÍ. (a) V Příkladu 1.6 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$. Nejprve určíme bodové spektrum operátoru T. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která má rovnice

$$T((x_n)) = \lambda(x_n)$$

nenulové řešení v ℓ_2. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$x_{n+1} = \lambda x_n, n \in \mathbb{N},$$

což je ekvivalentní zápisu

$$x_{n+1} = \lambda^n x_1, n \in \mathbb{N}.$$

Jelikož hledáme nenulová řešení, zřejmě musí být $x_1 \neq 0$. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která posloupnost $\{x_1\lambda^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ náleží do ℓ_2, čemuž odpovídá množina $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$. Tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$.

Nyní určíme spektrum operátoru T. Jelikož zřejmě $\|T\| = 1$, dle Věty FA.4.17 platí že $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $B_{\mathbb{K}}$. Dostáváme tak

$$B_{\mathbb{K}} = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)} \subset \sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}},$$

a tedy $\sigma(T) = B_{\mathbb{K}}$.

(b) V Příkladu 1.6 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ a $\|T\| = 1$. Opět nejprve určíme bodové spektrum operátoru T. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která má rovnice

$$T((x_n)) = \lambda(x_n)$$

nenulové řešení v ℓ_2. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$0 = \lambda x_1, x_1 = \lambda x_2, x_2 = \lambda x_3, \ldots.$$

Pokud $\lambda = 0$, máme

$$0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots,$$

a tedy $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Pokud $\lambda \in \mathbb{K} \setminus 0$, má tato soustava opět pouze nulové řešení, a tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$.

Nyní určíme spektrum operátoru T. Dle Věty FA.4.17 víme, že $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}$. Naším úkolem je tedy zjistit, pro která $|\lambda| \leq 1$ platí, že

$$\forall y \in \ell_2 \; \exists x \in \ell_2 : \quad \lambda x - Tx = y,$$

ekvivalentně pro každé $y \in \ell_2$ existuje $x \in \ell_2$ splňující

$$(\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots). \tag{2}$$

Pokud $\lambda = 0$, pak pro $y = e_1$ příslušné $x \in \ell_2$ neexistuje a tedy $0 \in \sigma(T)$. Předpokládejme že $\lambda \neq 0$ a zvolme $y \in \ell_2$. Pak (2) platí, právě když $x_1 = \frac{y_1}{\lambda}$ a $x_{n+1} = \frac{y_{n+1}+x_n}{\lambda}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Tedy indukcí snadno ověříme, že musí platit

$$x_n = \frac{y_1}{\lambda^n} + \frac{y_2}{\lambda^{n-1}} + \ldots + \frac{y_n}{\lambda}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a naším úkolem je zjistit, zda takto definovaná posloupnost x je prvkem ℓ_2 pro každé $y \in \ell_2$. Zvolíme–li ale $y = e_1$, pak dostáváme že $x = (\lambda^{-n})_{n=1}^{\infty}$ a tedy, protože $|\lambda^{-n}|^2 \geq 1$ pro $n \in \mathbb{N}$, posloupnost x není prvkem Banachova prostoru ℓ_2. Celkem tak pro libovolné $\lambda \in B_{\mathbb{K}}$ je $\lambda \in \sigma(T)$ a proto $\sigma(T) = B_{\mathbb{K}}$.

Alternativní a v tomto případě jednodušší metodou pro určení spektra by bylo si uvědomit, že T^* je operátor z úlohy (a) (viz. Příklad 1) a že $\sigma(T) = \sigma(T^*)$. Tedy dle řešení úlohy (a) dostáváme $\sigma(T) = \sigma(T^*) = B_{\mathbb{K}}$. Nemuseli jsme tak výpočet z předchozího odstavce provádět.

□

Na prostorech posloupností můžeme také zkoumat následující velmi obecnou úlohu.

PŘÍKLAD 8. Nechť $X = c_0$, nebo $X = \ell_p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$. Nechť je dále dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ a operátor $T : X \to X$ definovaný předpisem

$$T(x) = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in X.$$

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(X)$, najděte $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a zjistěte, kdy je T kompaktní.

ŘEŠENÍ. Předně si uvědomme, že pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ máme $|Tx(n)| \leq \|(a_n)\|_\infty \cdot |x_n|$, z čehož je snadno vidět že $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| \leq \|(a_n)\|_\infty$. Dále máme $\|T\| \geq \|Te_n\| = |a_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\|T\| = \|(a_n)\|_\infty$.

Uvědomme si nyní, že operátor T je prostý, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \neq 0$. Označíme–li operátor T příslušný posloupnosti (a_n) jako $T_{(a_n)}$, vidíme, že $\lambda I - T_{(a_n)} = T_{(\lambda - a_n)}$ a tedy dle předchozí úvahy dostáváme, že operátor $\lambda I - T_{(a_n)}$ je prostý právě když $\lambda \notin \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z toho plyne, že $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Zkoumejme nyní podmínky, za jakých je operátor T prostý, ale není na. Dle předchozího víme, že pokud je T prostý, pak $a_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Tedy, je–li dáno $y \in X$, pak pro posloupnost x platí $Tx = y$, právě když $x_n = \frac{y_n}{a_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a naším úkolem je zjistit podmínky, za kterých je takto definovaná posloupnost x prvkem prostoru X. Je–li posloupnost $\left(|\frac{1}{a_n}|\right)$ omezená, pak $x = \left(\frac{y_n}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je prvkem prostoru X pro každé $y \in X$ a operátor T je proto na. Naopak, pokud posloupnost $\left(|\frac{1}{a_n}|\right)$ není omezená, nalezneme podposloupnost (a_{n_k}) splňující $|a_{n_k}| \leq \frac{1}{k}$ pro $k \in \mathbb{N}$ a uvažujme posloupnost y danou předpisem

$$y_n = \begin{cases} 0 & n \notin \{n_k;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ a_{n_k} & n = n_k \text{ a } X = c_0, \\ \frac{a_{n_k}}{k^{1/p}} & n = n_k \text{ a } p \in [1, \infty). \end{cases}$$

Pak $y \in X$, ale $x = \left(\frac{y_n}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty} \notin X$ neboť pokud $X = c_0$ pak posloupnost x má na nekonečně mnoha místech jedničku a pokud $X = \ell_p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Celkem jsme tedy ověřili, že operátor T je prostý ale není na, právě když posloupnost $\left(|\frac{1}{a_n}|\right)$ není omezená, ekvivalentně 0 je hromadným bodem množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Označíme–li podobně jako výše operátor T příslušný posloupnosti (a_n) jako $T_{(a_n)}$, vidíme, že $\lambda I - T_{(a_n)} = T_{(\lambda - a_n)}$ a tedy dle předchozí úvahy dostáváme, že operátor $\lambda I - T_{(a_n)}$ je prostý, ale není na, právě když λ není hromadným bodem množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z toho plyne, že $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ sestává z hromadných bodů množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $\sigma(T) = \overline{\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}}$.

Konečně, zjistíme kdy je operátor T kompaktní. Pokud $a \notin c_0$, dle Věty FA.4.27 operátor T není kompaktní. Naopak, pokud $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, pak pro $N \in \mathbb{N}$ definujme operátory $T_N : X \to X$ předpisem

$$T_N x = (a_n x_n)_{n=1}^{N}, \qquad x \in X.$$

Pak, pro každé $N \in \mathbb{N}$, $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|T_N x(n)| \leq \|(a_n)\|_\infty \cdot |x_n|$, z čehož je snadno vidět že operátory T_N jsou spojité a lineární a protože $\operatorname{Rng} T_N \subset \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$, dostáváme $T_N \in \mathcal{F}(X, X)$. Dále pro každé $N \in \mathbb{N}$ máme

$$\|(T - T_N)(x)\| = \|(a_n x_n)_{n=N+1}^\infty\| \leq \|(a_n)_{n=N+1}\|^\infty \cdot \|x\|, \qquad x \in X,$$

a tedy $\|T - T_N\| \leq \|(a_n)_{n=N+1}\|^\infty \to 0$ a operátor T je proto kompaktní. Celkem jsme tedy dokázali, že T je kompaktní, právě když $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$.

□

Obdobný operátor násobení můžeme uvažovat i na prostorech $L_p([0,1])$.

PŘÍKLAD 9. Nechť $X = L_p([0,1])$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$ a $g \in L_\infty([0,1])$. Definujme operátor $T : X \to X$ předpisem

$$Tf = fg, \qquad f \in X.$$

Dokažte, že $T \in \mathcal{L}(X)$, najděte $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a zjistěte, kdy je T kompaktní.

DŮKAZ. Předně si uvědomme, že platí

$$\|fg\| = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)g(t)|^p \, \mathrm{d}t} \leq \sqrt[p]{\|g\|_\infty^p \int_0^1 |f(t)|^p \, \mathrm{d}t} = \|g\|_\infty \cdot \|f\|, \qquad f \in L_p([0,1]), \tag{3}$$

z čehož snadno dostáváme že $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| \leq \|g\|_\infty$. Zvolme nyní $\alpha \in (0, \|g\|_\infty)$. Z definice esenciálního suprema funkce g má množina $A := \{t \in [0,1];\ |g(t)| > \alpha\}$ kladnou míru, a tedy $\operatorname{sgn} g \cdot \chi_A \in L_1 \setminus \{0\}$ a proto platí

$$\sup_{f \in S_X} \|fg\| \geq \frac{T(\operatorname{sgn} g \cdot \chi_A)}{\|\operatorname{sgn} g \cdot \chi_A\|} = \frac{1}{\|\chi_A\|} \int_A |g(t)| \, \mathrm{d}t > \alpha, \qquad \alpha \in (0, \|g\|_\infty) \tag{4}$$

Celkem tedy $\|T\| \in (\alpha, \|g\|_\infty)$ pro každé $\alpha \in (0, \|g\|_\infty)$, a proto $\|T\| = \|g\|_\infty$.

Nyní určíme $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která existuje $f \in X \setminus \{0\}$ splňující $\lambda f = fg$. Uvědomme si, že pro každé $f \in X$ a $t \in [0,1]$ platí $\lambda f(t) = f(t)g(t)$ právě když $f(t) = 0$ nebo $g(t) = \lambda$. Tedy, pokud má množina $g^{-1}(\lambda)$ kladnou míru, pak funkce $f = \chi_{g^{-1}(\lambda)} \in X \setminus \{0\}$ dosvědčuje že $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a naopak, pokud $g(t) \neq \lambda$ skoro všude na $[0,1]$, pak každá $f \in X$ splňující $\lambda f = fg$ je nulová skoro všude a tedy $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Celkem tedy

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ g^{-1}(\lambda) \text{ ja kladné míry}\}.$$

Zkoumejme nyní podmínky, za jakých je operátor T invertibilní. Dle předchozího je T prosté, právě když $g \neq 0$ skoro všude. Předpokládejme tedy že T je prosté. Pak T je invertibilní, právě když T je na, právě když pro každé $h \in X$ existuje $f \in X$ splňující $h = fg$, právě když pro každé $h \in X$ máme $\frac{h}{g} \in X$. Dle rovností (3) a (4) výše ale platí

$$\sup_{h \in S_X} \left\| \frac{h}{g} \right\|_p = \left\| \frac{1}{g} \right\|_\infty,$$

a tedy operátor T je na, právě když esenciální supremum funkce $|\frac{1}{g}|$ je konečné, což je ekvivalentní tomu že existuje $\alpha > 0$ splňující $|\frac{1}{g}| \leq \alpha$ skoro všude, nebo–li $|g| \geq \frac{1}{\alpha}$ skoro všude. Připomeňme, že esenciální obor hodnot funkce $g \in L_\infty([0,1])$ je definován předpisem

$$\operatorname{ess\,Rng} g := \{y \in \mathbb{K};\ \lambda(g^{-1}(U(y, \varepsilon))) > 0 \text{ pro každé } \varepsilon > 0\}.$$

Pak snadno nahlédneme, že $|g| \geq \frac{1}{\alpha}$ skoro všude pro nějaké $\alpha > 0$, právě když $0 \notin \operatorname{ess\,Rng} g$. Celkem tak dostáváme, že prostý operátor T je invertibilní právě když $0 \notin \operatorname{ess\,Rng} g$. Zároveň si uvědomme, že pokud $0 \notin \operatorname{ess\,Rng} g$, pak také $g \neq 0$ skoro všude a operátor T je proto prostý, tedy T je invertibilní právě když $0 \notin \operatorname{ess\,Rng} g$. Označíme–li operátor T příslušný funkci g jako T_g, vidíme že $\lambda I - T_g = T_{\lambda - g}$ a proto z předchozí úvahy dostáváme, že operátor $\lambda I - T_g$ je invertibilní, právě když $0 \notin \operatorname{ess\,Rng}(\lambda - g)$, což snadno ověříme že je ekvivalentní podmínce $\lambda \notin \operatorname{ess\,Rng} g$. Z toho plyne, že $\sigma(T) = \operatorname{ess\,Rng} g$.

Konečně, zjistíme kdy je operátor T kompaktní. Pokud existuje $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \setminus \{0\}$, pak dle předchozího má $g^{-1}(\lambda)$ kladnou míru a tedy

$$Y := \{f \in X;\ f(t) \in g^{-1}(\lambda) \text{ pro s.v. } t \in [0,1]\}$$

je nekonečně-dimenzionální podprostor $L_p([0,1])$ a pro každé $f \in Y$ platí

$$\|Tf\|_p = \sqrt[p]{\int_{g^{-1}(\lambda)} |f(t)g(t)|^p \,\mathrm{d}t} = \lambda \cdot \|f\|_p,$$

a tedy $T \restriction Y$ je isomorfismus. Pak ale T není kompaktní operátor (protože jeho restrikce na nekonečně-dimenzionální podprostor Y je isomorfismus). Je–li tedy T kompaktní operátor, pak $\sigma(T) = \{0\}$ dle Důsledku 25. Pak ale dle předchozího dostáváme, že $0 = \operatorname{ess}\operatorname{Rng} g$, z čehož plyne že $g = 0$ s.v. na $[0,1]$. Pokud $g = 0$ s.v. na $[0,1]$, pak $T = 0$ a tedy se jedná o kompaktní operátor. Zjistili jsme tedy, že T je kompaktní, právě když $g = 0$ s.v. na $[0,1]$.

□

PŘÍKLAD 10. Pro následující operátory ukažte že $T \in \mathcal{L}(X)$ a určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

(a) $X = \ell_1$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, \ldots)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)
(b) $X = c_0 \oplus_1 \ell_2$, $T(x,y) = (y,0)$ pro $(x,y) \in c_0 \times \ell_2$;
(c) $X = C([0,1])$, $T(f)(t) = f(t) + f(1) - f(0)$;
(d) $X = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem reálných čísel)
(e) $X = C_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(-t)$;
(f) $X = L_p(\mathbb{R})$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = f(t-1)$;
(g) $X = L_1([0,1]) \oplus_1 L_2([0,1])$, $T(f,g) = (g,g)$ pro $(f,g) \in L_1([0,1]) \times L_2([0,1])$;
(h) $X = C([0,1])$, $T(f)(t) = f(t^2)$;
(i) $X = C([0,1])$, $T(f)(t) = 2f(t) + t\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + t^2 \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$;

ŘEŠENÍ. (a) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je lineární izometrie na, a tedy $\|T\| = 1$.

Vyšetřeme nejprve bodové spektrum. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{C}$, pro která má rovnice

$$\lambda x = T((x_n)) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots)$$

nenulové řešení v ℓ_1. Protože operátor T je prostý, vidíme že takové řešení neexistuje pro $\lambda \neq 0$. Dále snadno nahlédneme, že pro $\lambda \neq 0$ je $x \in \ell_1$ řešením rovnice výše, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda x_{2n-1} = -x_{2n} \text{ a zároveň } \lambda x_{2n} = x_{2n-1},$$

což (vzhledem k tomu že $\lambda \neq 0$ a tedy $x_{2n} \neq 0 \neq x_{2n-1}$) je ekvivalentní rovnostem

$$-\lambda x_{2n-1} = x_{2n} = \tfrac{x_{2n-1}}{\lambda},$$

tedy $\lambda^2 = -1$, což je ekvivalentní podmínce $\lambda = \pm i$ (za $x \in \ell_1 \setminus \{0\}$ lze pak zvolit například posloupnost $x = e_1 - \lambda e_2$). Zjistili jsme tedy, že $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\pm i\}$.

Nyní určíme $\sigma(T)$. Zvolme $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Abychom zjistili, zda je operátor $\lambda I - T$ na, budeme pro $y \in \ell_1$ hledat $x \in \ell_1$ splňující $\lambda x - Tx = y$. Porovnáním souřadnic $2n$ a $2n-1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme, že $\lambda x - Tx = y$, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda x_{2n-1} + x_{2n} = y_{2n-1} \text{ a zároveň } \lambda x_{2n} - x_{2n-1} = y_{2n},$$

což odpovídá řešení soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & y_{2n-1} \\ -1 & \lambda & y_{2n} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & y_{2n-1} \\ -1-\lambda^2 & 0 & y_{2n} - \lambda y_{2n-1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & y_{2n-1} \\ 1 & 0 & \frac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n}) \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda^2} y_{2n-1} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} y_{2n} \\ 1 & 0 & \frac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n}) \end{array}\right),$$

a tedy kdykoliv $y \in \ell_1$, pak posloupnost x splňuje $\lambda x - Tx = y$, právě když $x_{2n} = \frac{1}{1+\lambda^2} y_{2n-1} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} y_{2n}$ a $x_{2n-1} = \frac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Uvědomme si, že takto definovaná posloupnost x je prvkem ℓ_1, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n})\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{1+\lambda^2} y_{2n-1} + \tfrac{\lambda}{1+\lambda^2} y_{2n}\right| \leq \Big(\left|\tfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right| + \left|\tfrac{2}{1+\lambda^2}\right|\Big) \|y\| < \infty.$$

Ověřili jsme tedy, že operátor $\lambda I - T$ je prostý a na pro každé $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a tedy $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\pm i\}$.

(b) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je spojitý, lineární a $\|T\| \leq 1$.

Vyšetřeme nejprve bodové spektrum. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která má rovnice

$$\lambda(x, y) = T(x, y) = (y, 0)$$

nenulové řešení v $c_0 \oplus_1 \ell_2$. Snadno nahlédneme, že $(x, y) \in c_0 \oplus_1 \ell_2$ je řešením rovnice výše, právě když $\lambda = 0$ nebo $(x, y) = (0, 0)$. Tedy nenulové řešení existuje, právě když $\lambda = 0$ (v takovém případě je nenulovým řešením například bod $(e_1, 0) \in c_0 \oplus_1 \ell_2$). Zjistili jsme tedy, že $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{0\}$.

Nyní určíme $\sigma(T)$. Zvolme $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Abychom zjistili, zda je operátor $\lambda I - T$ na, budeme pro $(x, y) \in c_0 \oplus_1 \ell_2$ hledat $(a, b) \in c_0 \oplus_1 \ell_2$ splňující $(x, y) = \lambda(a, b) - T(a, b) = (\lambda a - b, \lambda b)$, což je ekvivalentní tomu že $b = \frac{y}{\lambda}$ a $a = \frac{x+b}{\lambda}$. Tedy, kdykoliv $(x, y) \in c_0 \oplus_1 \ell_2$, pak (a, b) splňuje že $\lambda(a, b) - T(a, b) = (x, y)$, právě když $(a, b) = (\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda^2}, \frac{y}{\lambda})$, což je prvek prostoru $c_0 \oplus_1 \ell_2$, protože $\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda^2} \in c_0 + \ell_2 \subset c_0$. Ověřili jsme tedy, že operátor $\lambda I - T$ je prostý a na pro každé $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a tedy $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{0\}$.

(c) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je spojitý, lineární a $\|T\| \leq 3$.

Uvažujme nejprve operátor $S \in \mathcal{L}(C([0, 1]))$ definovaný předpisem

$$Sf(t) = f(1) - f(0), \qquad t \in [0, 1].$$

Tento operátor je kompaktní, neboť je jednodimenzionální ($\operatorname{Rng} S$ sestává z konstantních funkcí). Opět určíme bodové spektrum operátoru S. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která má rovnice $S(f) - \lambda f = 0$ nenulové řešení v $C([0, 1])$. Funkce f je řešením rovnice výše, právě když

$$\lambda f(t) = f(1) - f(0), \quad t \in [0, 1].$$

Pokud $\lambda = 0$, potom je tato rovnice splněna pro libovolnou funkci $f \in C([0, 1])$ splňující $f(0) = f(1)$, a tedy $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(S)$. Pokud $\lambda \neq 1$, potom vidíme, že f musí být konstantní funkce rovná $\frac{f(1)-f(0)}{\lambda}$. Protože ale f je konstantní, speciálně máme $f(0) = f(1)$ a tedy f je identicky nulová na $[0, 1]$. Celkem dostáváme, že nenulové řešení rovnice $S(f) - \lambda f = 0$ existuje, právě když $\lambda = 0$ a tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(S) = \{0\}$. Jelikož operátor S je kompaktní, dostáváme $\sigma(S) = \sigma_{\mathrm{p}}(S) = \{0\}$.

Nyní, nechť I značí identický operátor na $C([0, 1])$. Potom máme $T = I + S$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ platí $\lambda I - T = (\lambda - 1)I - S$ a tedy $\sigma(T) = \sigma(S) + 1$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(S) + 1$. Celkem tedy dostáváme $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{1\}$.

(d) V Příkladech 1.6 a 4 jsme ověřili, že T je kompaktní operátor a $(Tf)' = f$ pro $f \in C([0, 1])$. Opět nejprve určíme bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ řešíme rovnici

$$\int_0^t f(x)dx = \lambda f(t), \quad t \in [0, 1]$$

v $C([0, 1])$. Pro $\lambda = 0$ má rovnice zřejmě pouze nulové řešení. Nechť tedy $\lambda \neq 0$. Potom dosazením $t = 0$ dostaneme, že $f(0) = 0$. Dále, levá strana rovnice, a tedy i pravá strana, má derivaci v $[0, 1]$ a zderivováním dostaneme že f je řešením homogenní diferenciální rovnice $\lambda f' - f = 0$, jejíž fundamentální systém je tvořen funkcí $e^{\frac{1}{\lambda}t}$ (protože $\frac{1}{\lambda}$ je jediný kořen charakteristického polynomu). Ovšem jediné takové řešení splňující $f(0) = 0$ je nulová funkce. Tedy rovnice $Tf = \lambda f$ má pouze nulové řešení pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ a proto $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$.

Dále, protože operátor T je kompaktní a $\dim X = \infty$, platí $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{0\}$.

(e) Je snadné si uvědomit, že T je lineární izometrie a tedy $\|T\| = 1$. Opět nejprve určíme bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ řešíme rovnici

$$\lambda f(t) = Tf(t) = f(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tedy máme

$$f(t) = \lambda f(-t) = \lambda^2 f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož hledáme nenulové funkce f řešící tuto rovnici, jediná přípustná čísla λ jsou $\lambda = 1$ nebo $\lambda = -1$. Obě tato čísla náleží do bodového spektra operátoru T, neboť rovnici $f(-t) = f(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$ řeší libovolná sudá funkce v $C_0(\mathbb{R})$, a rovnici $f(-t) = -f(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$ řeší libovolná lichá funkce v $C_0(\mathbb{R})$. Tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{-1, 1\}$.

Nyní určíme spektrum operátoru T. Jelikož už známe bodové spektrum T, zbývá nalézt ta $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, pro která operátor $Tf - \lambda f$ není surjektivní. Zvolme $g \in C_0(\mathbb{R})$, a řešme rovnici

$$T(f) - \lambda f = g.$$

Dostáváme tedy, že

$$f(-t) - \lambda f(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy také

$$f(t) - \lambda f(-t) = g(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kombinací těchto dvou rovnic dostaneme

$$f(t) = g(-t) + \lambda f(-t) = g(-t) + \lambda g(t) + \lambda^2 f(t).$$

Tedy, pokud $\lambda \notin \{-1, 1\}$, potom máme, že

$$f(t) = \frac{g(-t) + \lambda g(t)}{1 - \lambda^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož funkce g náleží do prostoru $C_0(\mathbb{R})$, zřejmě také $f \in C_0(\mathbb{R})$. Přímým dosazením pak snadno ověříme, že tato funkce f řeší rovnici $Tf - \lambda f = g$. Tedy operátor $\lambda I - T$ je na pro každé $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a proto $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{-1, 1\}$.

(f) Je snadné si uvědomit, že T je lineární izometrie a tedy $\|T\| = 1$ a $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| = 1\} = S_{\mathbb{K}}$ dle Lemmatu FA.4.19.

Nejprve určíme bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ řešíme rovnici

$$f(t-1) = \lambda f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

v $L_p(\mathbb{R})$. Tedy pro pevné $t \in \mathbb{R}$ máme

$$f(t-n) = \lambda f(t-(n-1)) = \lambda^2 f(t-(n-2)) = \ldots = \lambda^n f(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

a proto také $\lambda^n f(t+n) = f(t)$, celkem tak dostáváme $f(t-n) = \lambda^n f(t)$ pro $n \in \mathbb{Z}$ a proto $|f(t-n)| = |f(t)|$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Pokud $p \neq \infty$, pak dostáváme

$$\|f\|^p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(t+n)|^p \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}t,$$

což implikuje že $f = 0$ s.v. na $[0,1]$ a tedy $f = 0$ s.v. na $\mathbb{R}$ a proto dostáváme $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$. Na druhou stranu, pro $p = \infty$ je funkce $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-n} \chi_{[n,n+1)}(t)$ omezená, a splňuje naší rovnici, neboť platí

$$Tf(t) = f(t-1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-n} \chi_{[n,n+1)}(t-1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-(n-1)} \chi_{[n,n+1)}(t) = \lambda f(t).$$

Tedy v tomto případě $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = S_{\mathbb{K}}$ (pro případ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je také možné uvažovat obecnou komplexní mocninu $f(t) = \lambda^{-t}$ což by mírně zjednodušilo výpočet výše). Odtud již plyne, že pro $p = \infty$ je

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = S_{\mathbb{K}}.$$

Zbývá zjistit spektrum operátoru T v případě, kdy $p \in [1, \infty)$. Uvažujme tedy rovnici

$$f(t-1) - \lambda f(t) = g(t)$$

pro $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ a $g \in L_p(\mathbb{R})$. Pro pevné $t \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} f(t-n) &= \lambda f(t-n+1) + g(t-n+1) = \lambda\big(\lambda f(t-n+2) + g(t-n+2)\big) + g(t-n+1) \\ &= \ldots = \lambda^n f(t) + \lambda^{n-1} g(t) + \lambda^{n-2} g(t-1) + \ldots + g(t-n+1). \end{aligned} \tag{5}$$

Označíme–li tedy $h_n(t) = f(t-n) - \lambda^n f(t)$ a $g_n(t) = \lambda^{n-1} g(t) + \lambda^{n-2} g(t-1) + \ldots + g(t-n+1)$, pak z rovnosti (5) a z věty o substituci snadno dostáváme

$$\|g_n\|_p = \|h_n\|_p \leq \|f\|_p + |\lambda^n| \|f\|_p = 2\|f\|_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uvažujeme–li ale $g = \chi_{(0,1)} \in L_p(\mathbb{R})$, pak si všimneme že $g(t-k) \neq 0$ právě když $t \in (k, k+1)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\|g_n\|_p^p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} |g_n(t)|^p \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |\lambda^{n-1-k} g(t-k)|^p \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 |g(t)|^p \,\mathrm{d}t = n.$$

Pro $n > 2\|f\|_p^p$ tak dostáváme že pokud $f \in L_p(\mathbb{R})$ je řešením rovnice $Tf - \lambda f = g$, pak $2\|f\|_p^p < n = \|g_n\|_p^p \leq 2\|f\|_p^p$, což je spor. Tedy pro $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ operátor $\lambda I - T$ není na a pro $p \in [1, \infty)$ tak dostáváme $\sigma(T) = S_{\mathbb{K}}$.

(g) V Příkladu 1 jsme již ověřili, že $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| \leq 2$.

Nyní určíme bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ řešíme rovnici $T(f,g) = \lambda(f,g)$ pro $(f,g) \in L_1([0,1]) \oplus_2 L_2([0,1])$, tedy

$$(g,g) = (\lambda f, \lambda g)$$

a porovnáním druhé souřadnice dostáváme, že buď $\lambda = 1$ nebo $g = 0$ s.v. Navíc, pokud $g = 0$ s.v. pak porovnáním první souřadnice vidíme, že buď $\lambda = 0$ nebo $f = 0$ s.v. Pokud tedy existuje nenulové řešení rovnice, pak $\lambda \in \{0,1\}$. Pro $\lambda = 1$ je nenulovým řešením například $(f,g) = (t,t)$, pro $\lambda = 0$ je nenulovým řešením například $(f,g) = (t,0)$. Celkem tedy máme $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{0,1\}$.

Nyní nalezneme spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ a $(e,h) \in X$ hledáme $(f,g) \in X$ vyhovující rovnici

$$(e,h) = \lambda(f,g) - T(f,g) = (\lambda f - g, (\lambda - 1)g).$$

Porovnáním druhé souřadnice vidíme, že $g = \frac{h}{\lambda - 1}$ a poté porovnáním první souřadnice dostaneme $f = \frac{1}{\lambda}(e+g) = \frac{e}{\lambda} + \frac{h}{\lambda(\lambda-1)}$. Řešení tedy existuje pro každé $(e,h) \in X$ a proto je operátor $\lambda I - T$ na pro každé $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Celkem tedy $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{0,1\}$.

(h) Je snadné si uvědomit, že T je lineární izometrie a tedy $\|T\| = 1$ a $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| = 1\} = S_{\mathbb{K}}$ dle Lemmatu FA.4.19.

Nejprve určíme bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ řešíme rovnici $T(f) = \lambda f$ pro $f \in C([0,1])$ a $\lambda \in B_{\mathbb{K}}$, tedy

$$f(t^2) = \lambda f(t), \quad t \in [0,1]. \tag{6}$$

Speciálně máme

$$f(0) = \lambda f(0) \text{ a } f(1) = \lambda f(1).$$

Tedy $\lambda = 1$ nebo $f(0) = f(1) = 0$. Pokud $\lambda = 1$, pak libovolná konstantní funkce v $C([0,1])$ je řešením rovnice (6), tedy $1 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Pokud $\lambda \in S_{\mathbb{K}} \setminus \{1\}$, pak $f(1) = 0$ a dále z rovnosti (6) vidíme, že pro libovolné pevné $t \in [0,1]$ platí

$$f(t) = \lambda f(t^{\frac{1}{2}}) = \lambda^2 f(t^{\frac{1}{4}}) = \ldots = \lambda^n f(t^{\frac{1}{2^n}}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy, jelikož posloupnost $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je omezená a posloupnost $\{t^{\frac{1}{2^n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k číslu 1, ze spojitosti funkce f dostáváme, že $f(t) = 0$. Jelikož $t \in [0,1]$ bylo voleno libovolně, je f nulová funkce. Tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{1\}$.

Nyní nalezneme spektrum operátoru T. Víme, že $\sigma(T) \subseteq S_{\mathbb{K}}$. Uvažujme tedy rovnici

$$f(t^2) - \lambda f(t) = g(t)$$

pro $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ a $g \in C([0,1])$. Pro pevné $t \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$ máme

$$f(t^{2^n}) = \lambda f(t^{2^{n-1}}) + g(2^{n-1}) = \lambda\big(\lambda f(t^{2^{n-2}}) + g(t^{2^{n-2}})\big) + g(t^{2^{n-1}})$$
$$= \lambda^2 f(t^{2^{n-2}}) + \lambda g(t^{2^{n-2}}) + g(t^{2^{n-1}}) = \ldots = \lambda^n f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} g(t^{2^k})$$

a tedy, položíme–li $g_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} g(t^{2^k})$, pak musí být $|g_n(t)|_\infty \leq 2|f(t)| \leq 2\|f\|_\infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $t \in [0,1]$. Ukážeme ale, že existuje spojitá funkce $g \in C([0,1])$ taková, že $g_n(\frac{1}{2}) \to \infty$, což bude spor. Vskutku, na kompaktní množině $K = \{0\} \cup \{(\frac{1}{2})^{2^k};\ k \in \mathbb{N}\}$ definujme spojitou funkci $g \in C(K)$ předpisem $g(0) = 0$ a $g\big((\frac{1}{2})^{2^k}\big) = \frac{\lambda^k}{k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a rozšiřme pomocí Tietzovy věty tuto funkci na spojitou funkci definovanou na $[0,1]$, kterou zase označíme jako $g \in C([0,1])$ (v případě komplexního prostoru aplikujeme Tietzeho větu na reálnou a imaginární část). Pak máme

$$|g_n(\tfrac{1}{2})| = \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} \tfrac{\lambda^k}{k}\Big| = \Big|\lambda^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k}\Big| = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{k} \to \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k} = \infty,$$

a tedy $g \in C([0,1])$ je hledaná funkce, pro kterou rovnice $f(t^2) - \lambda f(t) = g(t)$ nemá řešení v $C([0,1])$ a tedy $\lambda \in \sigma(T)$. Protože $\lambda \in S_{\mathbb{K}}$ bylo libovolné, dostáváme $\sigma(T) = S_{\mathbb{K}}$.

(i) Uvažujme nejprve operátor $S : C([0,1]) \to C([0,1])$ definovaný předpisem

$$S(f)(t) = t\int_0^1 f(x)dx + t^2 \int_0^1 xf(x)dx, \quad t \in [0,1].$$

Tento operátor je kompaktní, neboť je dvoudimenzionální (funkce $t \mapsto t$ a $t \mapsto t^2$ generují $\operatorname{Rng} S$). Nejprve zjistíme bodové spektrum operátoru S. Nechť tedy $\lambda \in \mathbb{K}$, a uvažujme rovnici

$$t\int_0^1 f(x)dx + t^2 \int_0^1 xf(x)dx = \lambda f(t), \quad t \in [0,1].$$

Pokud $\lambda = 0$, potom k vyřešení této rovnice stačí nalézt nenulovou funkci f takovou, že $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 0$. K tomu postačí uvažovat polynomy druhého stupně. Uvažujme tedy funkci

$$f(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2, \quad t \in [0,1].$$

Chceme, aby platilo

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \quad \text{a} \quad 0 = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}C_0 + \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{4}C_2.$$

Tato soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, jedním z nich je $C_0 = -\frac{1}{6}$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$. Tedy $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Nechť tedy nyní $\lambda \neq 0$. Pokud funkce f je řešením naší rovnice, potom f je lineární kombinací funkcí $t \mapsto t$ a $t \mapsto t^2$, konkrétně $f(t) = C_1 t + C_2 t^2$, kde $C_1 = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{\lambda}$ a $C_2 = \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\lambda}$. Dosazením do rovnice dostaneme

$$\lambda C_1 t + \lambda C_2 t^2 = t\int_0^1 C_1 x + C_2 x^2 dx + t^2 \int_0^1 C_1 x^2 + C_2 x^3 dx =$$
$$= t(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2) + t^2(\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{4}C_2).$$

Tedy, pokud má rovnost platit pro každé $t \in [0,1]$, pak dostáváme, že

$$\lambda C_1 = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \quad \text{a} \quad \lambda C_2 = \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{4}C_2.$$

Z první rovnice dostaneme $C_2 = 3(\lambda - \frac{1}{2})C_1$, a dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$(9(\lambda - \frac{1}{4})(\lambda - \frac{1}{2}) - 1)C_1 = 0.$$

Pokud $C_1 = 0$, pak, že $C_2 = 3(\lambda - \frac{1}{2})C_1 = 0$, a tedy f je nulová funkce. Předpokládejme tedy, že $C_1 \neq 0$, a poté přenásobením rovnice číslem $\frac{8}{C_1}$ a roznásobením dostaneme kvadratickou rovnici

$$72\lambda^2 - 54\lambda + 1 = 0,$$

jejímž řešením jsou čísla

$$\lambda_1 = \frac{9+\sqrt{73}}{24} \text{ a } \lambda_2 = \frac{9-\sqrt{73}}{24}.$$

Tedy tato čísla leží v bodovém spektru operátoru S, přičemž vlastní vektory příslušné těmto číslům dostaneme například volbou $C_1 = 1$, tedy

$$f_1(t) = t + 3(\lambda_1 - \frac{1}{2})t^2, f_2(t) = t + 3(\lambda_2 - \frac{1}{2})t^2.$$

Tedy, jelikož operátor S je kompaktní, dostáváme

$$\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{0, \frac{9+\sqrt{73}}{24}, \frac{9-\sqrt{73}}{24}\}.$$

Nyní, nechť I značí identický operátor na $C([0,1])$. Potom máme $T = S + 2I$. Dále, pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ máme $\lambda I - T = (\lambda - 2)I - S$ a tedy $\sigma(T) = \sigma(S) + 2$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(S) + 2$. Celkem tak dostáváme

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{2, \frac{57+\sqrt{73}}{24}, \frac{57-\sqrt{73}}{24}\}.$$

□

PŘÍKLAD 11. Nechť

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & 0 \le t \le s, \\ (1-t)s, & s \le t \le 1, \end{cases}$$

a definujme operátor $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1]))$ rovností

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt, \quad s \in [0,1].$$

Dokažte, že:

(a) Vlastní čísla T jsou čísla $(n\pi)^{-2}, n \in \mathbb{N}$, odpovídající vlastní vektory jsou $\sin(n\pi x)$ a každý vlastní prostor je jednorozměrný.
(b) Normalizované vlastní funkce tvoří ortonormální bázi v $L_2([0,1])$.
(c) Předpokládejme, že funkce $g \in L_2([0,1])$ je vyjádřena vůči bázi tvořené vlastními funkcemi ve tvaru

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x).$$

Ukažte, jak lze pro komplexní číslo λ, které neleží v uzávěru množiny vlastních čísel operátoru T, explicitně zapsat řešení rovnice $Tf - \lambda f = g$.

ŘEŠENÍ. Nejprve poznamenejme, že se jedná o speciální případ operátoru z Příkladu FA.4.14 a tedy T je spojitý lineární operátor, který je navíc kompaktní.

Dále si uvědomme, že Tf je spojitá funkce pro každou $f \in L_2([0,1])$ dle věty o integrálu závislém na parametru, neboť pro každé $t \in [0,1]$ je $s \mapsto K(s,t)$ spojitá funkce a protože máme $|K(s,t)f(t)| \le |f(t)| \in L_1([0,1])$, předpoklady této věty jsou splněny.

Dokažme ještě, že $Tf(0) = Tf(1) = 0$ a $(Tf)'' = -f$ s.v. pro každou $f \in L_2([0,1])$. Vskutku, zvolíme–li $f \in L_2([0,1])$, pak rozepsáním výrazu $K(s,t)$ dostaneme

$$Tf(s) = (1-s)\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad s \in [0,1].$$

Odsud vidíme, že $Tf(0) = Tf(1) = 0$. Dále, jelikož funkce f náleží do prostoru $L_2([0,1])$, funkce $t \mapsto tf(t)$ náleží do prostoru $L_1([0,1])$, a funkce $t \mapsto (1-t)f(t)$ náleží do $L_1([0,1])$. Tedy levá strana rovnice (jakožto absolutně spojitá funkce), a tedy i pravá strana, mají derivaci skoro všude v $[0,1]$. Po zderivování obou stran rovnice dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}(Tf)'(s) &= -\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + (1-s)sf(s) + \int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t - s(1-s)f(s) \\ &= -\int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Tuto rovnici můžeme ze stejného důvodu jako výše derivovat, a dostaneme

$$(Tf)''(s) = -sf(s) - (1-s)f(s) = -f(s).$$

Tedy, máme $(Tf)'' = -f$, což jsme chtěli dokázat.

Přistupme nyní k řešení jednotlivých zadání.

(a) Zvolme $\lambda \in \mathbb{K}$ a uvažujme rovnici

$$Tf(s) = \lambda f(s), \quad s \in [0,1].$$

Protože funkce Tf je spojitá, dostáváme že f je spojitá funkce a protože máme $(Tf)'' = -f$, dostáváme že Tf (a tedy také f) má spojitou druhou derivaci na $[0,1]$ (nebo přesněji, existuje reprezentant třídy ekvivalence $[Tf]$ který má druhou derivaci atd.). Pokud tedy příslušnou rovnici dvakrát zderivujeme, dostáváme že $f \in C^2([0,1])$ splňuje diferenciální rovnici

$$\lambda f''(s) = -f(s).$$

Tedy, pokud je $\lambda = 0$, dostáváme že $f = 0$ a tedy $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Pokud $\lambda \neq 0$, pak, protože $Tf(0) = Tf(1) = 0$, dostáváme že f je řešením diferenciální rovnice $f'' + \frac{f}{\lambda} = 0$ s počátečními podmínkami $f(0) = f(1) = 0$. Tuto rovnici teď vyřešíme.

Pokud je $\lambda < 0$, pak fundamentální systém je tvořen funkcemi $\exp\big(\pm \frac{s}{\sqrt{|\lambda|}}\big)$ (protože $\pm\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$ jsou kořeny charakteristického polynomu), ovšem jediné řešení splňující počáteční podmínky je pak nulová funkce a tedy $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Pokud je $\lambda > 0$, pak fundamentální systém je tvořen funkcemi $\sin(\frac{s}{\sqrt{\lambda}})$ a $\cos(\frac{s}{\sqrt{\lambda}})$ (protože $\pm\frac{i}{\sqrt{\lambda}}$ je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu) a protože má platit $f(0) = 0$, musí být $f = C\sin(\frac{s}{\sqrt{\lambda}})$ pro nějaké $C \in \mathbb{R}$ a konečně, protože $f(1) = 0$, pokud je f nenulová funkce, musí být $\lambda = (n\pi)^{-2}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Celkem jsme tedy zjistili, že $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{(n\pi)^{-2};\ n \in \mathbb{N}\}$ a vlastní prostor příslušný vlastnímu číslu $(n\pi)^{-2}$ je jednodimenzionální prostor generovaný funkcí $\sin(sn\pi)$.

(b) Plyne ihned z Příkladu 1.17

(c) Označme $u_n = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}$ (což je ortonormální báze $L_2([0,1])$ dle Příkladu 1.17). Pokud funkce $g \in L_2([0,1])$ je vyjádřena ve tvaru $g(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n u_n$, potom dle Lemmatu FA.1.108 platí

$$c_n = \langle g, u_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále, dle (b) můžeme libovolnou funkci $f \in L_2([0,1])$ vyjádřit jako

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \langle f, u_n\rangle u_n.$$

Tedy ze spojitosti operátoru T máme

$$T(f) = \sum_{n=1}^\infty \langle f, u_n\rangle Tu_n = \sum_{n=1}^\infty (n\pi)^{-2}\langle f, u_n\rangle u_n.$$

Tedy chceme, aby platilo

$$\sum_{n=1}^\infty ((n\pi)^{-2} - \lambda)\langle f, u_n\rangle u_n = Tf - \lambda f = \sum_{n=1}^\infty \langle g, u_n\rangle u_n,$$

tedy

$$\langle f, u_n \rangle = \frac{\langle g, u_n \rangle}{(n\pi)^{-2} - \lambda}.$$

Tedy, pokud λ není v uvávěru množiny $\{(n\pi)^{-2} : n \in \mathbb{N}\}$, potom posloupnost $\{\frac{1}{(n\pi)^{-2}-\lambda}\}_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená, a tedy funkce

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, u_n \rangle}{(n\pi)^{-2} - \lambda} u_n$$

náleží do prostoru $L_2([0,1])$, a řeší rovnici $Tf - \lambda f = g$.

□

PŘÍKLAD 12 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení). Pro následující operátory ukažte že $T \in \mathcal{L}(X)$ a určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

(a) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -\frac{1}{2}x_4, x_3, -\frac{1}{3}x_6, x_3, \dots)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)
(b) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, x_2 - \frac{x_1}{1}, x_3 - \frac{x_2}{2}, x_4 - \frac{x_3}{3}, \dots)$;

(c) $X = c_0 \oplus_1 \ell_1$, $T(x,y) = \big((\frac{y_n}{n})_{n=1}^{\infty}, (\frac{x_n}{n^3})_{n=1}^{\infty}\big)$ pro $(x,y) \in c_0 \times \ell_1$;
(d) $X = C([0,1])$, $T(f)(t) = tf(t)$;
(e) $X = C([-1,1])$, $T(f)(t) = f(|t|)$;
(f) $X = C([0,1])$, $T(f)(x) = \int_x^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$;
(g) $X = C_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(t-1)$;
(h) $X = C_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(2t)$;
(i) $X = L_p(\mathbb{R})$, kde $p \in \{1, \infty\}$, $T(f)(t) = f(2t)$;
(příklad je obtížný)
(j) $X = Y = L_1([0,1]) \oplus_2 C([0,1])$, $T(f,g) = (g,0)$ pro $(f,g) \in L_1([0,1]) \oplus_2 C([0,1])$;
(k) $X = L_1((0,\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$, $Tf(x) = f(x) + x^2 \int_0^\infty f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

VÝSLEDKY. (a) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\pm\frac{i}{\sqrt{n}};\ n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$;
(b) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{1\}$;
(c) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\pm\frac{1}{n^2};\ n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ (operátor T je kompaktní);
(d) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0,1]$;
(e) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = \{0,1\}$;
(f) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$ (operátor T je kompaktní);
(g) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = S_{\mathbb{K}}$;
(h) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = S_{\mathbb{K}}$;
(i) pro $p = \infty$: $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = S_{\mathbb{K}}$, pro $p = 1$: $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \frac{1}{2}S_{\mathbb{K}}$;
(j) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$ (operátor T je kompaktní);
(k) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = \{1,3\}$.

□

Kapitola 5

Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

PŘÍKLAD 1. Nalezněte Fourierovu transformaci následujících funkcí.

(a) $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, kde $a > 0$;
(b) $f(x) = e^{-ax}\chi_{[0,\infty)}(x)$, kde $a > 0$;
(c) $f(x) = x \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$;
(d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

ŘEŠENÍ. V těchto příkladech Fourierovu transformaci spočítáme přímo z definice.

(a) Jelikož funkce $\sin$ je lichá a funkce $\cos$ je sudá, pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-itx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\int_{-a}^{a} \cos(-tx) \,\mathrm{d}x + i \int_{-a}^{a} \sin(-tx) \,\mathrm{d}x \Big) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} \cos(tx) \,\mathrm{d}x.$$

Pro $t \neq 0$ tak dostáváme

$$\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big[\frac{\sin(tx)}{t} \Big]_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(at)}{t}$$

a pro $t = 0$

$$\widehat{f}(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a 1 \,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}.$$

(b) S použitím znalostí z komplexní analýzy (použijeme výpočet komplexního integrálu pomocí primitivní funkce a znalost derivace funkce $t \mapsto e^{at}$ pro $a \in \mathbb{C}$) dostáváme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax-itx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\frac{e^{x(-a-it)}}{-a-it} \Big]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+it)}$$

(c) Jelikož funkce $x\sin(x)$ je sudá a funkce $x\cos(x)$ je lichá, podobně jako v úloze (a) pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} x \cdot e^{-itx} \,\mathrm{d}x = i\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 x \cdot \sin(-tx) \,\mathrm{d}x = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 x \cdot \sin(tx) \,\mathrm{d}x$$

a s pomocí metody per partes pak pro $t \neq 0$ dostáváme

$$\widehat{f}(t) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(\Big[-x\tfrac{\cos(tx)}{t} \Big]_0^1 + \frac{1}{t} \int_0^1 \cos(tx) \,\mathrm{d}x \Big) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big(-\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} \Big)$$

a pro $t = 0$ máme

$$\widehat{f}(t) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 x \cdot \sin(0) \,\mathrm{d}x = 0.$$

(d) Nejprve metodami z komplexní analýzy pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočítáme hodnotu

$$I(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{itx} \,\mathrm{d}x.$$

Nejprve uvažujme případ kdy $t > 0$. Uvažujme pro každé $R > 0$ křivky $\psi_R(t) := -R + t2R$, $t \in [0,1]$ a $\varphi_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$. Pak z Jordanova Lemmatu máme

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_R} \frac{e^{izt}}{z^2+1} \,\mathrm{d}z = 0$$

a zároveň

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\psi_R}\frac{e^{izt}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = I(t).$$

Tedy, $I(t)=\lim_{R\to\infty}\int_{\psi_R\dot{+}\varphi_R}\frac{e^{izt}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$. Na druhou stranu, protože $\psi_R\dot{+}\varphi_R$ je uzavřená cesta, dle reziduové věty platí

$$I(t)=\lim_{R\to\infty}\int_{\psi_R\dot{+}\varphi_R}\frac{e^{izt}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\Big(\operatorname{res}_i\frac{e^{izt}}{z^2+1}\Big)\cdot\Big(\operatorname{ind}_{\psi_R\dot{+}\varphi_R} i\Big)$$

a protože index bodu i vzhledem ke křivce $\psi_R\dot{+}\varphi_R$ je roven jedné a funkce $\frac{e^{izt}}{z^2+1}$ má v bodě i pól násbonosti jedna, metodami z komplexní analýzy pro výpočet rezidua dostáváme

$$I(t)=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{e^{izt}}{z+i}=\pi e^{-t},\quad t>0.$$

Pro $t<0$ pak s pomocí substituce „$s=-t$“ dostáváme že $I(t)=I(-t)$ a tedy pro $t<0$ máme $I(t)=\pi e^{t}$, celkem tedy $I(t)=\pi e^{-|t|}$ pro každé $t\neq 0$.

Nyní si uvědomíme, že máme

$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}I(-t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|},\quad t\neq 0$$

a protože funkce $\widehat{f}$ je spojitá, dostáváme $\widehat{f}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|}$ pro $t\in\mathbb{R}$.

□

PŘÍKLAD 2. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce f a s její pomocí odvoďte Fourierovu transformaci funkcí g a h.

(a) $f(x)=e^{-|x|},\ g(x)=x\cdot e^{-|x|}, h(x)=\cos(x)\cdot e^{-|x|}$;

(b) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}},\ g(x)=e^{-x^2}, h(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$.

ŘEŠENÍ. (a) Nejprve z definice spočteme $\widehat{f}(t)$. Pro $t\in\mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{x(1-it)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}e^{x(-1-it)}\,\mathrm{d}x=\Big[\tfrac{e^{x(1-it)}}{1-it}\Big]_{-\infty}^{0}+\Big[\tfrac{e^{x(-1-it)}}{-1-it}\Big]_{0}^{\infty}=\frac{1}{1-it}+\frac{1}{1+it}=\frac{2}{1+t^2},$$

tedy $\widehat{f}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+t^2}$ pro každé $t\in\mathbb{R}$. Všiměnme si nyní, že $g\in L_1(\mathbb{R})$ a tedy dle Věty FA.5.21 dostáváme

$$\widehat{g}(t)=i(\widehat{f})'(t)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\frac{1}{1+t^2}\Big)'(t)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Konečně, uvědomíme si že $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, tedy $h(x)=\frac{1}{2}f(x)\cdot(e^{ix}+e^{-ix})$ a podle Věty FA.5.21 dostáváme

$$\widehat{h}(t)=\frac{1}{2}(\widehat{f}(t-1)+\widehat{f}(t+1))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{1+(t-1)^2}+\frac{1}{1+(t+1)^2}\Big)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{t^2+2}{t^2+4}.$$

(b) Nejprve s uvědomíme, že funkce $f(x)$ je jediným řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$f'(x)+xf(x)=0 \tag{1}$$

s počáteční podmínkou $f(0)=1$. Dokažme, že stejnou diferenciální rovnici splňuje také funkce $\widehat{f}$. Vskutku, protože $f'(x)=-xe^{-x^2/2}\in L_1(\mathbb{R})$ a $xf(x)=xe^{-x^2/2}\in L_1(\mathbb{R})$, dle Věty FA.5.21 dostáváme

$$0=\widehat{f'}+\widehat{xf(x)}=ix\widehat{f}(x)+i(\widehat{f})'$$

a tedy po pronásobení konstantou $-i$ vidíme, že $\widehat{f}$ splňuje rovnici (1) a protože s použitím známého integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ máme

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 1,$$

z jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou dostáváme, že $\widehat{f} = f$.

Aplikací Věty FA.5.21 pak ihned vidíme, že

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{f}(\tfrac{t}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(\tfrac{t}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Všimněme si nyní, že $h \in L_1(\mathbb{R})$ a tedy dle Věty FA.5.21 dostáváme $\widehat{h} = i \cdot \big(\widehat{xg(x)}\big)'$ a protože $xg(x) \in L_1(\mathbb{R})$, opět dle Věty FA.5.21 máme $\widehat{xg(x)} = i \cdot \big(\widehat{g}\big)'$. Celkem tedy pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\widehat{h}(t) = -\big(\widehat{g}\big)''(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\tfrac{t}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}\big)'(t) = \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{4}}\big(2 - t^2\big).$$

$\square$

PŘÍKLAD 3. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce f a odvoďte hodnotu zadaného integrálu.

(a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = (\cos x) \cdot \chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)$ a odvoďte hodnotu integrálu $\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1-t^2} \cos(\frac{t\pi}{2})\,\mathrm{d}t$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$.

(b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = \chi_{(0,1)}(x) - \chi_{(-1,0)}(x)$ a odvoďte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1-\cos t}{t}|^2\,\mathrm{d}t$.

ŘEŠENÍ. (a) Pro každé $t \in \mathbb{R}$ je funkce $\cos(x)\cos(tx)$ sudá a funkce $\cos(x)\sin(tx)$ je lichá, a tedy platí

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot e^{-itx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos(tx)\,\mathrm{d}x.$$

Dvojím použitím metody per partes pak pro $t \neq 0$ máme

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos(tx)\,\mathrm{d}x &= \big[\cos x \cdot \tfrac{\sin(tx)}{t}\big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{t}\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin(tx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{t}\Big(\big[-\sin x \tfrac{\cos(tx)}{t}\big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{t}\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos(tx)\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{1}{t^2} I - \frac{1}{t^2}\cos(\tfrac{t\pi}{2}), \end{aligned}$$

tedy pro $t \notin \{0, \pm 1\}$ platí

$$\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\frac{t\pi}{2})}{1 - t^2}.$$

Ze spojitosti funkce $\widehat{f}$ platí pak vzorec výše i pro $t = 0$ a pro $t = \pm 1$ s použitím L'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\widehat{f}(\pm 1) = \lim_{t \to \pm 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\frac{t\pi}{2})}{1 - t^2} \overset{L'H}{=} \lim_{t \to \pm 1} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\frac{\pi}{2}\sin(\frac{t\pi}{2})}{-2t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Na tomto místě poznamenejme, že alternativně jsme mohli spočítat Fourierovu transformaci funkce $\chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ a poté Fourierovu transformaci funkce f odvodit podobně jako jsme to udělali v Příkladu 2.

Zkusme nyní odvodit hodnotu zadaného integrálu. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ s použitím sudosti funkce cosinus a lichosti funkce sinus dostáváme

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{t\pi}{2})}{1 - t^2} \cos(tx)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\frac{t\pi}{2})}{1 - t^2} e^{itx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{itx}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Nyní si uvědomíme, že $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ (neboť $\widehat{f}$ je spojitá funkce a u nekonečna má absolutně konvergentní integrál dle limitního srovnávacího kritéria, protože $\lim_{t \to \pm\infty} \frac{|\widehat{f}(t)|}{t^{-3/2}} = 0$) a tedy z věty o inverzi dostáváme

$\widehat{\widehat{f}}(-x) = f(x)$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ a protože obě funkce jsou spojité v $\mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$, pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ máme $\widehat{\widehat{f}}(-x) = f(x)$ a tedy

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{t\pi}{2})}{1-t^2} \cos(tx)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} f(x), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}.$$

(b) Pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{-1}^0 -e^{-itx}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 e^{-itx}\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\big[\tfrac{e^{-itx}}{it}\big]_{-1}^0 - \big[\tfrac{e^{-itx}}{it}\big]_0^1\Big)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{it} - \frac{e^{it}}{it} - \frac{e^{-it}}{it} + \frac{1}{it}\Big) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}{it} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-\cos t}{it}.$$

a pro $t = 0$ snadno spočteme

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{-1}^0 -1\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x\Big) = 0.$$

Zkusme nyní odvodit hodnotu zadaného integrálu. Protože $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, dle Plancherelovy věty máme $\|f\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{L_2}$ a tak z předchozího dostáváme

$$\int_{-\infty}^\infty \Big|\frac{1-\cos t}{t}\Big|^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\|\widehat{f}\|_{L_2}^2 = \frac{\pi}{2}\|f\|_{L_2}^2 = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 1\,\mathrm{d}x = \pi.$$

□

PŘÍKLAD 4. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$. Řešení zapište ve tvaru konvoluce.

ŘEŠENÍ. V tomto příkladu uvažujme konvoluci vzhledem k násobku Lebesgueovy míry $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$ (protože budeme chtít používat vzorec $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ pro $f, g \in L_1$). Pokud funkce $y(t)$ splňuje že $y(t) \in L_1(\mathbb{R})$, $y'(t) \in L_1(\mathbb{R})$ a $y''(t) \in L_1(\mathbb{R})$, pak dle Věty FA.5.21 dostáváme

$$\big(\widehat{y'' - y}\big)(t) = \big(\widehat{y''}\big)(t) - \widehat{y}(t) = (it)^2\widehat{y}(t) - \widehat{y}(t) = -(1+t^2)\widehat{y}(t),$$

a tedy pokud tato funkce $y(t)$ řeší zadanou rovnici, pak platí

$$\widehat{y}(t) = -\frac{\widehat{e^{-x^2}}(t)}{1+t^2}.$$

V Příkladu 2 jsme spočetli, že $\frac{1}{1+t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\widehat{e^{-|x|}}(t)$ a tedy dle Věty FA.5.21 platí

$$-\frac{\widehat{e^{-x^2}}(t)}{1+t^2} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \widehat{e^{-x^2}}(t) \cdot \widehat{e^{-|x|}}(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \big(\widehat{e^{-x^2} * e^{-|x|}}\big)(t).$$

Položme $z(t) := \big(e^{-x^2} * e^{-|x|}\big)(t)$, $t \in \mathbb{R}$ a zkusme ověřit, že funkce $y(t) := -\sqrt{\frac{\pi}{2}}z(t)$ je řešením zadané diferenciální rovnice. Protože $e^{-|t|} \in L_1(\mathbb{R})$ a $e^{-t^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$, z Věty FA.5.11 dostáváme, že $z \in C^\infty(\mathbb{R})$, $z'(t) = \big(e^{-|x|} * (-2xe^{-x^2})\big)(t)$ a $z''(t) = \big(e^{-|x|} * \big((4x^2-2)e^{-x^2}\big)\big)(t)$. Tedy, $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ a protože $\{e^{-t^2}, -2te^{-t^2}, (4t^2-2)e^{-t^2}\} \subset L_1(\mathbb{R})$, z Věty FA.5.7 dostáváme že $\{y, y', y''\} \subset L_1(\mathbb{R})$ a dle předchozího máme

$$\big(\widehat{y'' - y}\big)(t) = -(1+t^2)\widehat{y}(t) = \widehat{e^{-x^2}}(t).$$

Protože Fourierova transformace je prosté zobrazení (viz. Důsledek FA.5.28), dostáváme $y''(x) - y(x) = e^{-x^2}$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ a jelikož funkce na pravé i levé straně rovnosti jsou spojité, tak $y''(x) - y(x) = e^{-x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

□

PŘÍKLAD 5. Nechť $0 < b < a$. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení integrální rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-t)^2} y(x)\,\mathrm{d}x = e^{-bt^2}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

ŘEŠENÍ. V tomto příkladu uvažujme konvoluci vzhledem k násobku Lebesgueovy míry $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$. Pak levá strana rovnosti je z definice konvoluce rovna $\sqrt{2\pi}\big(y(x) * (e^{-ax^2})\big)(t)$. Řešíme tedy rovnici

$$\sqrt{2\pi} \cdot \big(y(x) * (e^{-ax^2})\big)(t) = e^{-bt^2}.$$

Připomeňme, že Fourierova transformace je prosté zobrazení a $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. Je–li tedy $y(x) \in L_1(\mathbb{R})$, pak y řeší rovnici výše, právě když řeší rovnici

$$\sqrt{2\pi} \cdot \widehat{y}(t) \cdot \widehat{e^{-ax^2}}(t) = \widehat{e^{-bx^2}}(t). \tag{2}$$

Dle Příkladu 2 víme, že $\widehat{e^{-x^2}}(t) = \frac{e^{-t^2/4}}{\sqrt{2}}$ a tedy z Věty FA.5.21 snadno odvodíme, že $\widehat{e^{-cx^2}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2c}} e^{-t^2/4c}$ pro každé $c > 0$ a dosazením do rovnosti (2) (pro $c = a$, $c = b$ a nakonec také pro $\frac{1}{4c} = \frac{a-b}{4ab}$) tak dostáváme že rovnost (2) je ekvivalentní rovnosti

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2a}{2b}} \exp\Big(-t^2\Big(\frac{1}{4b} - \frac{1}{4a}\Big)\Big) = \sqrt{\frac{a}{2b\pi}} \exp\Big(-t^2\frac{a-b}{4ab}\Big) \\
&= \sqrt{\frac{a}{2b\pi}}\sqrt{\frac{2ab}{a-b}}\mathcal{F}\Big(\exp\Big(-\frac{ab}{a-b}x^2\Big)\Big)(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-b)}}\mathcal{F}\Big(\exp\Big(-\frac{ab}{a-b}x^2\Big)\Big)(t),
\end{aligned}$$

kde pro přehlednost symbolem $\mathcal{F}$ označujeme Fourierovu transformaci. Funkce

$$y(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-b)}} \exp\Big(-\frac{ab}{a-b}x^2\Big), \quad x \in \mathbb{R}$$

zřejmě rovnost výše splňuje a je lehké si uvědomit, že $y \in L_1(\mathbb{R})$, tedy dle předchozích úvah se jedná o hledané řešení zadané integrální rovnice.

□

PŘÍKLAD 6 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení).

(a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$;
(b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$;
(c) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = \sin x \cdot \chi_{(0,\pi)}(x)$;
(d) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$;
(je výhodné použít metody z komplexní analýzy)
(e) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$, kde $a > 0$ a odvoďte potom Fourierovu transformaci funkce $g(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}(1+x^2)^2}$;
(je výhodné použít metody z komplexní analýzy)
(f) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, kde $a, b > 0$ (zde je výhodné použít metody z komplexní analýzy) a odvoďte potom Fourierovu transformaci funkce $g(x) = f(2x)\cos x$;

(g) Nechť je dána funkce $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$. Nalezněte její Fourierovu transformaci (zde je výhodné použít metody z komplexní analýzy, nebo výsledek jednoho z řešených příkladů výše) a s její pomocí pak vyřešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$-2y''(t) + y(t) = \frac{\sin t}{t^3 + 1}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$. Řešení zapište ve tvaru konvoluce (v tomto příkladu uvažujte konvoluci vzhledem k násobku Lebesgueovy míry $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$).

VÝSLEDKY. (a) $\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-e^{-it}}{it}$;
(b) $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\cos t}{t^2}$ pro $t \neq 0$, $\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;
(c) $\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+e^{-i\pi t}}{1-t^2}$ pro $t \neq \pm 1$, $\widehat{f}(1) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = -\widehat{f}(-1)$;
(d) $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{it-|t|}$;
(e) $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|t|} \frac{1+a|t|}{2a^3}$, $\widehat{g}(t) = -it \frac{e^{-|t|}}{2}$;
(f) $\widehat{f}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{(b^2-a^2)\sqrt{2}} \left(\frac{e^{-a|t|}}{a} - \frac{e^{-b|t|}}{b} \right)$,

$$\widehat{g}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4(b^2-a^2)\sqrt{2}} \left(\frac{\exp\left(-a\left|\frac{t-1}{2}\right|\right) + \exp\left(-a\left|\frac{t+1}{2}\right|\right)}{a} - \frac{\exp\left(-b\left|\frac{t-1}{2}\right|\right) + \exp\left(-b\left|\frac{t+1}{2}\right|\right)}{b} \right);$$

(g) $\widehat{f}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)$, $y(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(e^{-|x|/\sqrt{2}} * \frac{\sin x}{x^3+1} \right)(t)$.

□

Kapitola 6

Topologické vektorové prostory

1. Základní vlastnosti

PŘÍKLAD 1. Pokud X je netriviální vektorový prostor a τ je diskrétní topologie na X. Ukažte, že pak (X,τ) není topologický vektorový prostor, přestože je operace sčítání spojitá.

ŘEŠENÍ. Operace násobení skalárem totiž spojitá není. Vskutku, uvažujeme-li nenulové $x \in X$, pak díky diskrétnosti τ neplatí $\frac{1}{n} \cdot x \to 0$. Tedy $\cdot \colon \mathbb{K} \times X \to X$ není spojité.

□

PŘÍKLAD 2. Uvažujme $X = C((0,1))$, tj. prostor všech spojitých funkcí na $(0,1)$. Nechť $\rho\colon X \to [0,+\infty]$ je definována předpisem

$$\rho(f) = \sup_{x\in(0,1)} |f(x)|, \quad f \in X,$$

a pro $f \in X$ a $r > 0$ nechť $U(f,r) = \{g \in X;\ \rho(g-f) < r\}$. Nechť τ na X sestává ze všech množin $U \subset X$ takových, že pro každé $f \in U$ existuje $r > 0$ splňující $U(f,r) \subset U$.

Ukažte, že pak (X,τ) je topologický prostor, který není topologickým vektorovým prostorem.

ŘEŠENÍ. Na začátku si povšimněme, že $\rho(f) = \rho(-f)$ a ρ splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Ověříme, že τ je topologie a každá množina $U(f,r)$ je otevřená. Zjevně je τ uzavřená na libovolná sjednocení a $\emptyset, X \in \tau$. Pokud $U_1, U_2 \in \tau$ a $f \in U_1 \cap U_2$, pak existují $r_1, r_2 > 0$ taková, že $U(f,r_i) \subset U_i$. Položíme-li $r = \min\{r_2, r_2\}$, máme $U(f,r) \subset U_1 \cap U_2$, a tedy τ je uzavřená na konečné průniky. Proto je τ topologie.

Dále uvažujme množinu $U(f,r)$ a $g \in U(f,r)$. Pak $\rho(g-f) = d < r$, což znamená, že $U(g, \frac{r-d}{4}) \subset U(f,r)$. Tedy $U(f,r) \in \tau$.

Konečně ověříme, že násobení skalárem není spojité na $\mathbb{K} \times X$. Uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$. Pokud by násobení bylo spojité, pak by platilo, že $\frac{1}{n} \cdot f \xrightarrow{\tau} 0 \cdot f = 0$. Množina $U(0,1)$ je τ-otevřená, ale $\rho(\frac{1}{n} \cdot f - 0) = \rho(\frac{1}{n} \cdot f) = +\infty$. Tedy posloupnost $\{\frac{1}{n} \cdot f\}$ nekonverguje v τ k nulové funkci. Proto není násobení skalárem spojité.

□

PŘÍKLAD 3. Nalezněte topologii τ na $\mathbb{R}^2$ takovou, že sčítání je odděleně spojité, ale není spojité.

ŘEŠENÍ. Pro každé $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a $r > 0$ definujme $U(x,r) := \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < |y_2 - x_2| < |y_1 - x_1| < r\}$. Nechť τ sestává ze všech množin $U \subset \mathbb{R}^2$ takových, že pro každé $x \in U$ existuje $r > 0$ splňující $U(x,r) \subset U$.

Ověřme nejprve, že τ je topologie. Zjevně je τ uzavřená na libovolná sjednocení a $\emptyset, X \in \tau$. Pokud $U_1, U_2 \in \tau$ a $x \in U_1 \cap U_2$, pak existují $r_1, r_2 > 0$ taková, že $U(x,r_i) \subset U_i$. Položíme-li $r = \min\{r_2, r_2\}$, máme $U(x,r) \subset U_1 \cap U_2$, a tedy τ je uzavřená na konečné průniky. Proto je τ topologie.

Dále ověřme, že $U(x,r) \in \tau$ pro každé $x \in \mathbb{R}^2$ a $r > 0$. Vskutku, pro $z = (z_1, z_2) \in U(x,r)$ položme $r' := \frac{1}{2}\min\{r - |x_1 - z_1|, |x_1 - z_1| - |x_2 - z_2|, |x_2 - z_2|\}$. Pak pro každé $y \in U(z,r')$ máme

$$\begin{aligned}
|x_1 - y_1| &\le |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| < r' + |x_1 - z_1| < r, \\
|x_2 - y_2| &\le |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| < |x_2 - z_2| + r' < |x_1 - z_1|, \\
|x_2 - y_2| &\ge |x_2 - z_2| - |z_2 - y_2| > |x_2 - z_2| - r' > 0,
\end{aligned}$$

tedy $y \in U(x,r)$ a proto $U(z,r') \subset U(x,r)$, tedy jsme ukázali, že $U(x,r) \in \tau$. Všimněme si navíc, že $y \in U(x,r)$ právě když $y - x \in U(0,r)$, a tedy $U(x,r) = x + U(0,r)$.

Dokažme nyní, že sčítání je odděleně spojité. Vskutku, pro $a, x \in \mathbb{R}^2$ zvolme libovolné $U \in \tau$ splňující $a+x \in U$. Nalezněme takové $r > 0$, že $U(a+x, r) \subset U$. Pak $a+U(x, r) = a+x+U(0, r) = U(a+x, r) \subset U$ a tedy funkce $x \mapsto a + x$ je spojitá v $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

Konečně, uvažujme posloupnosti $x_n = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$ a $y_n = (\frac{2}{n}, -\frac{1}{n})$. Pak $x_n \to 0$ a $y_n \to 0$ v $(\mathbb{R}^2, \tau)$, ale $x_n + y_n = (\frac{4}{n}, 0) \notin \bigcup_{r>0} U(0, r)$, a proto $x_n + y_n \not\to 0$. Sčítání tedy není spojité.

□

PŘÍKLAD 4. Nechť X je vektorový prostor, τ_1, τ_2 jsou lineární topologie na X, $\mathcal{B}_2$ je nějaká báze $\tau_2(0)$ a $\mathcal{S}_1$ je nějaká subbáze $\tau_1(0)$. Dokažte, že pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\tau_1 \subset \tau_2$.
(ii) Pro každé $U \in \tau_1(0)$ existuje $V \in \mathcal{B}_2$, $V \subset U$.
(iii) Pro každé $U \in \mathcal{S}_1$ existuje $V \in \tau_2(0)$, $V \subset U$.

ŘEŠENÍ. (i)⇒(ii) Nechť $U \in \tau_1(0)$. Pak existuje $W \in \tau_1$ splňující $0 \in W \subset U$. Protože $W \in \tau_2$, je $U \in \tau_2(0)$. Tedy existuje $V \in \mathcal{B}_2$, $V \subset U$.

(ii)⇒(iii) je triviální.

(iii)⇒(i) Stačí ukázat, že $\tau_1(0) \subset \tau_2(0)$ (zvolme $x \in U \subset \tau_1$, pak existuje $V \in \tau_1(0) \subset \tau_2(0)$ splňující $x+V \subset U$, a tedy $U \in \tau_2$). Nechť tedy $U \in \tau_1(0)$. Pak existují $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}_1$ takové, že $U_1 \cap \dots \cap U_n \subset U$. Dále existují $V_1, \dots, V_n \in \tau_2(0)$ takové, že $V_j \subset U_j$. Tedy $\bigcap_{j=1}^n V_j \subset \bigcap_{j=1}^n U_j \subset U$, což dává $U \in \tau_2(0)$.

□

PŘÍKLAD 5. Řekneme, že $(X, \|\cdot\|)$ je *kvazi-normovaný lineární prostor*, pokud X je vektorový prostor a zobrazení $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ splňuje následující podmínky.

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.
(ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro všechna $a \in \mathbb{K}$ a $x \in X$.
(iii) Existuje $C > 0$ splňující $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ pro všechna $x, y \in X$.

Dále pro $p \in (0, 1]$ řekneme, že $(X, \|\cdot\|)$ je p-normovaný lineární prostor, pokud X je vektorový prostor a zobrazení $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ splňuje podmínky (i), (ii) a navíc

(iii') $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ pro všechna $x, y \in X$.

Dokažte, že každý p-normovaný lineární prostor je kvazi-normovaný a že na každém kvazi-normovaném lineárním prostoru existuje právě jedna topologie τ taková, že (X, τ) je Hausdorffův topologický vektorový prostor a $\{U(0, r);\ r > 0\}$ je báze okolí nuly, kde $U(x, r) := \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$ pro $x \in X$ a $r > 0$.

ŘEŠENÍ. Pro každá $a, b \geq 0$ a každé $p \in (0, 1]$ s využitím Hölderovy nerovnosti (pro $p' = \frac{1}{p}$ a $q' = \frac{1}{1-p}$) dostáváme

$$a^p + b^p \leq (a^{pp'} + b^{pp'})^{1/p'} \cdot (1^{q'} + 1^{q'})^{1/q'} = 2^{1-p}(a + b)^p,$$

a tedy aplikací na $a = \|x\|$ a $b = \|y\|$ dostáváme, že každý p-normovaný lineární prostor splňuje podmínku (iii) s konstantou $C = 2^{1/p-1}$.

Předpokládejme nyní, že $(X, \|\cdot\|)$ je kvazi-normovaný lineární prostor a ověřme, že jsou splněny podmínky Věty FA.6.8 pro $\mathcal{U} := \{U(0, r);\ r > 0\}$. Vskutku, je snadné si rozmyslet, že $\mathcal{U}$ je báze filtru a z podmínky (ii) snadno nahlédneme, že každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená a pohlcující. Navíc, pro $r > 0$ platí $U(0, \frac{r}{2C}) + U(0, \frac{r}{2C}) \subset U(0, r)$, neboť pro $x, y \in U(0, \frac{r}{2C})$ máme

$$\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|) < C(\tfrac{r}{2C} + \tfrac{r}{2C}) = r.$$

Dle Věty FA.6.8 tak dostáváme, že existuje právě jedna topologie τ taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly. Tato topologie je Hausdorffova dle Věty FA.6.10, neboť z podmínky (i) dostáváme, že $\bigcap \mathcal{U} = \{0\}$.

□

2. Lokálně konvexní prostory

PŘÍKLAD 6. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou splňující, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktních množin kladné míry. Pak pro každé $p \in (0,1)$ uvažujme vektorový prostor $L_p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K};\ \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}mu < \infty\}$ (kde ztotožňujeme funkce rovné skoro všude) a zobrazení

$$\|f\|_p := \Big(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}, \quad f \in L_p(\mu).$$

Dokažte, že pak $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ je p-normovaný lineární prostor (viz. Příklad 5), jehož topologie je generovaná metrikou $(f,g) \mapsto \|f-g\|_p^p$ a že tento topologický vektorový prostor není lokálně konvexní.

ŘEŠENÍ. Snadno nahlédneme, že $\|\cdot\|_p$ splňuje podmínky (i), (ii) z Příkladu 5. Abychom ověřili zbývající podmínku (tzv. „p-trojúhelníkovou nerovnost“), stačí si rozmyslet, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{K}$ platí $|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p$ (pak totiž stačí použít monotonii integrálu). Zvolme tedy $a, b \in \mathbb{K}$, bez újmy na obecnosti předpokládejme že $ab \neq 0$. Pak, s použitím jednoduchého faktu že $\varepsilon \le \varepsilon^p$ kdykoliv $\varepsilon \in (0,1)$, dostáváme

$$|a+b|^p \le (|a|+|b|)^p = \tfrac{|a|}{|a|+|b|}(|a|+|b|)^p + \tfrac{|b|}{|a|+|b|}(|a|+|b|)^p \le |a|^p + |b|^p.$$

Jak jsme poznamenali výše, tím je ověřeno, že $(L_p(\mu)), \|\cdot\|_p)$ je p-normovaný lineární prostor. Z toho již plyne, že zobrazení d definované předpisem $d(f,g) := \|f-g\|_p^p$ dobře definuje translačně invariantní metriku na $L_p(\mu)$ a protože zobrazení $t \mapsto t^p$ je homeomorfismus na $(0,\infty)$, tak topologie na $L_p(\mu)$ je generována touto metrikou d. Aby nedošlo ke zmatení, poznamenejme že v souladu s Příkladem 5 budeme dále pro $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ používat značení $U(x,\varepsilon) = \{y \in X;\ \|x-y\| < \varepsilon\}$.

Zbývá dokázat, že $L_p(\mu)$ není lokálně konvexní. Postupujme sporem. Pokud by existovalo U konvexní okolí nuly, pak najdeme $r > 0$ splňující $U(0,r) \subset U$ a z konvexity tak $\operatorname{conv} U(0,r) \subset U$. Na druhou stranu, z toho že U je pohlcující, bychom našli $R > 0$ splňující $U \subset U(0,R)$. Celkem by tak pro nějaké $r < R$ bylo $\operatorname{conv} U(0,r) \subset U(0,R)$. Ukážeme, že to není možné. Uvědomme si, že pro $p \in (0,1)$ dostáváme $n^{1-1/p} \to \infty$, a tedy můžeme najít $n \in \mathbb{N}$ splňující $n^{1-1/p} > \big(\frac{R2}{r}\big)^p$. Dále z předpokladu nalezneme po dvou disjunktní množiny kladné míry $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ a uvažujme $f_i = \frac{r}{2\mu(A_n)^{1/p}}\chi_{A_n} \in U(0,r)$, $i \le n$. Pak $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i \in \operatorname{conv} U(0,r)$, ale na druhou stranu platí

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i\Big\|^p = \sum_{i=1}^n \int_{A_n} \Big|\frac{r}{2n\mu(A_n)^{1/p}}\Big|^p \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \Big|\frac{r}{2n}\Big|^p = \Big|\frac{r}{2}\Big|^p n^{1-1/p} > R^p$$

a tedy $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i \in \operatorname{conv} U(0,r) \setminus U(0,R)$, což je spor.

□

PŘÍKLAD 7. Podívejme se nyní na metrizovatelnost a normovatelnost lokálně konvexních prostorů z Příkladu FA.6.62 a FA.6.64.

(a) Nechť $X = \mathbb{K}^\Gamma$ s topologií bodové konvergence. Dokažte, že pak X je metrizovatelný právě tehdy, když Γ je spočetná. Dále, dokažte že X je normovatelný právě tehdy, když Γ je konečná.
(b) Nechť T je normální Hausdorffův topologický prostor a $X = C(T)$ s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T. Dokažte, že X je normovatelný právě tehdy, když T je kompaktní.

ŘEŠENÍ. (a) Je-li Γ spočetná, je X metrizovatelný dle Lemmatu FA.6.63. Nechť Γ není spočetná a předpokládejme, že X metrizovatelný je. Pak $\tau(0)$ má spočetnou bázi $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Jelikož je X Hausdorffův, $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme body $\gamma_1, \dots, \gamma_{k_n} \in \Gamma$ a $\varepsilon_n > 0$ takové, že pseudonormy $p_{\gamma_i}(x) = |x(\gamma_i)|$, $x \in X$ splňují $U_{p_{\gamma_1},\dots,p_{\gamma_{k_n}},\varepsilon_n} \subset U_n$. Množina $\Gamma' = \bigcup_{n=1}^\infty \{\gamma_1, \dots, \gamma_{k_n}\} \subset \Gamma$ je spočetná, a tedy lze zvolit bod $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'$. Pak je funkce $x = \chi_{\{\gamma\}}$ prvkem $\bigcap_{n=1}^\infty U_{p_{\gamma_1},\dots,p_{\gamma_{k_n}},\varepsilon_n} \subset \bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$. To je ale spor s faktem $x(\gamma) = 1$.

Podívejme se nyní na normovatelnost X. Je-li Γ konečná, je X konečnědimenzionální, a tedy normovatelný dle Věty FA.1.66. Nechť Γ je nekonečná a normovatelná. Pak existuje $U \in \tau(0)$ konvexní a omezené (Věta FA.6.66). Nechť $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ a $\varepsilon > 0$ jsou takové, že pseudonormy $p_{\gamma_i}(x) = |x(\gamma_i)|$,

$x \in X$ splňují $U_{p_{\gamma_1},\dots,p_{\gamma_n},\varepsilon} \subset U$. Zvolíme $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ a uvažujme prostor $Y = \operatorname{span}\{\chi_{\{\gamma\}}\}$. Pak $Y \subset U_{p_{\gamma_1},\dots,p_{\gamma_n},\varepsilon} \subset U$, což ale není možné, neboť Y je neomezený a U omezené (viz Poznámku FA.6.17).

(b) Je-li T kompaktní, pak dle Příkladu FA.6.64(a) generuje norma $p_T(f) = \max_T |f|$ topologii $C(T)$. Nechť T není kompaktní, ale $C(T)$ je normovatelný. Opět použijeme Větu FA.6.66 a zvolíme U omezené okolí 0. Pak existují kompakty $K_1, \dots, K_n$ v T a $\varepsilon > 0$ takové, že $U_{p_{K_1},\dots,p_{K_n},\varepsilon} \subset U$. Uvažujme kompakt $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Jelikož T není kompaktní, existuje $t \in T \setminus K$. Díky Tietzově větě (platné pro normální prostory) existuje $f \in C(T)$ splňující $f = 0$ na K a $f(t) = 1$. Uvažujme opět $Y = \operatorname{span}\{f\}$. Pak $Y \subset U_{p_{K_1},\dots,p_{K_n},\varepsilon} \subset U$, což dává spor díky omezenosti U a Poznámce FA.6.17.

□

PŘÍKLAD 8. Nechť X je vektorový prostor a τ_1, τ_2 jsou lokálně konvexní topologie na X generované systémy pseudonorem $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Dokažte, že pak $\tau_1 \subset \tau_2$ právě když pro každou $p \in \mathcal{P}_1$ existují $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{P}_2$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ taková, že $p(x) \le \max\{\alpha_1 q_1(x), \dots, \alpha_n q_n(x)\}$ pro každé $x \in X$.

ŘEŠENÍ. $\Leftarrow$ Ukážeme, že platí (iii) v Příkladu 4. Nechť $p \in \mathcal{P}_1$, $\varepsilon > 0$, a $U = \{x \in X;\ p(x) < \varepsilon\}$. Dále nechť $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{P}_2$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ splňují $p(x) \le \max\{\alpha_1 q_1(x), \dots, \alpha_n q_n(x)\}$ pro každé $x \in X$. Pak je snadno vidět, že $\{x \in X;\ q_1(x) < \frac{\varepsilon}{\alpha_1}, \dots, q_n(x) < \frac{\varepsilon}{\alpha_n}\} \subset U$.

$\Rightarrow$ Nechť $p \in \mathcal{P}_1$ a $U = \{x \in X;\ p(x) < 1\}$. Dle Příkladu 4 existují $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{P}_2$ a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ taková, že $V = \{x \in X;\ q_1(x) < \varepsilon_1, \dots, q_n(x) < \varepsilon_n\} \subset U$. Položme $\alpha_j = \frac{1}{\varepsilon_j}$ a $q = \max\{\alpha_1 q_1, \dots, \alpha_n q_n\}$. Pak q je pseudonorma na X a $V = \{x \in X;\ q(x) < 1\}$. Zvolme libovolné $\delta \in (0,1)$ a $x \in X$. Je-li $q(x) > 0$, pak $q(\delta \frac{x}{q(x)}) = \delta < 1$ a tedy $\delta \frac{x}{q(x)} \in V \subset U$. Odtud $1 > p(\delta \frac{x}{q(x)}) = \delta \frac{p(x)}{q(x)}$, takže $\delta p(x) < q(x)$. Protože δ lze volit libovolně blízko 1, dostáváme $p(x) \le q(x)$. Je-li $q(x) = 0$, pak také $q(nx) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $nx \in V \subset U$. Odtud $p(nx) < 1$, což dává $p(x) < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $p(x) = 0$.

□

PŘÍKLAD 9. Uvažujme následující topologie na prostoru omezených spojitých funkcí $X = C_b(\mathbb{R})$:

- τ_∞ je dána normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
- τ_K je dána systémem pseudonorem $p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$, $K \subset \mathbb{R}$ kompaktní.
- τ_0 je dána systémem pseudonorem $p_\varphi(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) f(x)|$, $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$.

Pak se jedná o lokálně konvexní Hausdorffovy topologie na X. Označme $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_K$ a $\mathcal{O}_0$ systémy všech omezených podmnožin X v příslušných topologiích. Dokažte, že platí $\tau_K \subsetneq \tau_0 \subsetneq \tau_\infty$, $\mathcal{O}_K \supsetneq \mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_\infty$, že topologie τ_∞ je normová, topologie τ_K je metrizovatelná, ale není normovatelná, a že topologie τ_0 není ani metrizovatelná.

ŘEŠENÍ. Z Příkladu 8 plyne snadno $\tau_K \subset \tau_0 \subset \tau_\infty$ a odtud $\mathcal{O}_K \supset \mathcal{O}_0 \supset \mathcal{O}_\infty$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n \in X$ takovou, že $f_n(n) = 1$, $f_n(n-1) = f_n(n+1) = 0$ a v ostatních bodech $\mathbb{R}$ je f_n dodefinována afinně. Pak $\|f_n\| = 1$ a $p_\varphi(f_n) \to 0$ pro každé $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$. Tedy $\tau_0 \ne \tau_\infty$. Podobně pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $g_n \in X$ takovou, že $g_n(n) = n^2$, $g_n(n-1) = g_n(n+1) = 0$ a ve zbývajících bodech je g_n dodefinována afinně, a dále definujme $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ tak, že $\varphi(0) = 0$, $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a ve zbývajících bodech dodefinujme φ afinně. Pak $p_\varphi(g_n) \ge n$ a pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}$ platí $p_K(g_n) = 0$ pro velká n. Tedy $\{g_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_0$, proto $\mathcal{O}_K \ne \mathcal{O}_0$ a $\tau_K \ne \tau_0$.

Inkluzi $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_\infty$ dokážeme sporem. Můžeme tedy předpokládat, že existuje posloupnost $\{f_n\} \subset X$ taková, že $\{p_\varphi(f_n)\}$ je omezená pro každé $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, ale $\|f_n\| \ge 2n^2$. Tedy existuje $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, $|f_n(x_n)| \ge n^2$. Podle předpokladu $\{x_n\}$ není omezená, jinak by měla hromadný bod $x \in \mathbb{R}$ a zvolíme-li $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ takovou, že $\varphi = 1$ na okolí x, pak $p_\varphi(f_n) \ge n^2$ pro velká n, což je spor s omezeností $\{p_\varphi(f_n)\}$. Tedy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\{x_n\}$ je rostoucí a $x_n \to \infty$. Pak najdeme $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ takovou, že $\varphi(x_n) = \frac{1}{n}$. Odtud $p_\varphi(f_n) \ge n$, což je spor.

Topologie τ_K je metrizovatelná dle Lemmatu FA.6.63, neboť je generovaná spočetným systémem pseudonorem $p_{\langle -n,n\rangle}$, $n \in \mathbb{N}$. Nicméně τ_K není normovatelná, neboť nemá omezené okolí 0. Vskutku, pro spor předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$ je množina $U = \{x \in X;\ p_{\langle -n,n\rangle}(x) < \varepsilon\}$ omezená. Uvažujme nyní funkce $\{f_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ definované tak, že $f_m(n+1) = m$, $f_m(n) = f_m(n+2) = 0$ a ve zbývajících bodech jsou funkce f_m dodefinovány afinně. Pak $\{f_m;\ m \in \mathbb{N}\} \subset U$, ale $p_{\langle -n-1,n+1\rangle}(f_m) = m$, což je spor s omezeností U v topologii τ_K.

Konečně, předpokládejme, že τ_0 je metrizovatelná, tedy $\tau_0(0)$ má spočetnou bázi. Je snadno vidět, že pak existuje posloupnost $\{\varphi_n\} \subset C_0(\mathbb{R})$ taková, že $U_n = \{p_{\varphi_n}(f) < 1\}$ tvoří bázi $\tau_0(0)$. Nalezněme posloupnost $\{x_n\} \subset [0, \infty)$ takovou, že $x_n > x_{n-1} + 1$ a $|\varphi_n(x)| < \frac{1}{2n}$ pro $x \geq x_n$. Dále definujme $\varphi(x_n + 1) = \frac{1}{n}$, $\varphi|_{(-\infty,0]} \equiv 0$ a na zbytku afinně. Pak $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$. Konečně, nechť $f_n \in C_b(\mathbb{R})$ jsou takové, že $\|f_n\|_\infty \leq n$, $f_n(x_n + 1) = n$ a $f_n(x) = 0$ pro $x \leq x_n$. Pak $f_n \in U_n$, ale $p_\varphi(f_n) \geq 1$, a tedy $U_n \not\subset \{p_\varphi(f) < 1\}$, což je spor.

□

PŘÍKLAD 10. Nechť $X = \mathbb{K}^\Gamma$ s topologií bodové konvergence, viz Příklad FA.6.62. Dokažte, že pak $\varphi \in X^*$, právě když existují $\gamma_1, \dots \gamma_n \in \Gamma$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ takové, že $\varphi(f) = \sum_{i=1}^n c_i f(\gamma_i)$, $f \in X$.

ŘEŠENÍ. Nechť $\varphi \in X^*$ a nechť $U \in \tau(0)$ je okolí 0 v X splňující $\sup_{f \in U} |\varphi(f)| \leq 1$. Nalezneme $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pseudonormy $p_i \colon f \mapsto |f(\gamma_i)|$ splňují $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. Uvažujme lineární formy $\varphi_i \colon X \to \mathbb{K}$ definované evaluací v bodě γ_i, tj. $\varphi_i(f) = f(\gamma_i)$. Nechť $f \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i$. Pak $f \in U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$, a tedy $|\varphi(f)| \leq 1$. Tedy $|\varphi| \leq 1$ na $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i$, a tedy $\varphi = 0$ na $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i$. Z Lemmatu FA.6.80 nyní plyne $\varphi \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Tím je netriviální implikace ukázána.

□

3. Oddělovací věty

PŘÍKLAD 11. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Dokažte, že pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Prostor X je konečnědimenzionální.
(ii) Existují otevřené koule $U_1, \dots, U_n$ neobsahující 0 takové, že $S_X \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

ŘEŠENÍ. (i)⇒(ii) je zřejmé z kompaktnosti S_X.

(ii)⇒(i) Předpokládejme nyní, že $\dim X = \infty$, ale S_X lze pokrýt otevřenými koulemi $U_1, \dots, U_n$, které neobsahují 0. Pro každou kouli U_i použitím Věty FA.6.70(b) nalezneme $f_i \in X^*$ a $\alpha_i \in \mathbb{R}$ takové, že $0 = f_i(0) < \alpha_i < \inf f_i(U_i)$. Jelikož $\dim X^* = \dim X = \infty$, existuje nenulový prvek $x \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$ (to plyne z Lemmatu FA.6.80). Pak $y = \frac{x}{\|x\|}$ je též v průniku všech jader $\operatorname{Ker} f_i$, $i = 1, \dots, n$ ale zároveň leží na sféře. Tedy existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $y \in U_j$. Pak ovšem nerovnosti $f_j(y) = 0 < \alpha_j < f_j(y)$ dávají spor.

□

PŘÍKLAD 12. Pokud je $D \neq \emptyset$ konvexní podmnožina Banachova prostoru X splňující $0 \notin \overline{D}$, pak existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že

$$\inf\{\operatorname{Re} f(x) \colon x \in D\} = \inf\{\|x\| \colon x \in D\}.$$

ŘEŠENÍ. Položme $\eta := \inf\{\|x\| \colon x \in D\}$. Pak $\eta > 0$, protože $0 \notin \overline{D}$. Zároveň máme $U(0, \eta) \cap D = \emptyset$ a tedy dle Věty FA.6.70(a) nalezneme $f \in S_{X^*}$ takové, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_D \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in U(0, \eta)$. Pak díky absolutní konvexitě $U(0, \eta)$ dostáváme, že také $|f(x)| < \inf_D \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in U(0, \eta)$. Celkem tedy

$$\eta = \sup\{|f(x)|;\ x \in U(0, \eta)\} \leq \inf_D \operatorname{Re} f \leq \inf_D |f| \leq \|f\| \eta = \eta,$$

a dostáváme tak $\eta = \inf_D \operatorname{Re} f$.

□

PŘÍKLAD 13. Nechť $p \in (0, 1)$ a $X = (c_{00}, \|\cdot\|_p) \subset \ell_p$ je podprostor sestávající z těch posloupností $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$, jejichž nosič je konečný. Nalezněte podprostor $M \subset X$ a $x^* \in M^*$ taková, že neexistuje $\varphi \in X^*$ splňující $\varphi \supset x^*$.

ŘEŠENÍ. Položme $M = \operatorname{span}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, kde (x_n) je nějaká posloupnost ve sféře X taková, že prvky x_n mají disjuktní nosiče a $\|x_n\|_1 \to 0$. Například lze zvolit

$$x_n = \sum_{i=(1+2+3+\ldots+n-1)+1}^{(1+2+3+\ldots+n)} (\tfrac{1}{n})^{1/p} e_i = (0,\ldots,0,(\tfrac{1}{n})^{1/p},\ldots,(\tfrac{1}{n})^{1/p},0,0,\ldots),$$

neboť pak $\|x_n\|_p = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ a zároveň $\|x_n\|_1 = n \cdot (\frac{1}{n})^{1/p} \to 0$.

Uvědomme si, že pak zobrazení $X \ni e_n \mapsto x_n \in M$ jednoznačně určuje lineární izometrii X na M, neboť pro $a \in \mathbb{K}^N$ máme

$$\Big\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\Big\|_p^p = \Big\|\sum_{n=1}^N a_n \sum_{i\in\operatorname{supp} x_n} x_n(i)e_i\Big\|_p^p = \sum_{n=1}^N |a_n|^p \sum_{i\in\operatorname{supp} x_n} |x_n(i)|^p = \sum_{n=1}^N |a_n|^p\|x_n\|_p^p = \sum_{n=1}^N |a_n|^p.$$

Uvědomme si nyní, že existuje $x^* \in M^*$ splňující $x^*(x_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Vskutku, stačí položit

$$x^*(\sum_{n=1}^N a_n x_n) := \sum_{n=1}^N a_n, \quad N \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{K}^N$$

a všimnout si, že pak $x^* = I(1) \circ J$, kde $J : M \to X$ je izometrie popsaná výše, $I : \ell_\infty \to (\ell_p)^*$ je lineární bijekce z Příkladu 68 a symbolem 1 značíme poslounost $1 \in \ell_\infty$ konstantně rovnou jedné. (Alternativně lze spočítat přímo, podobně jako v Příkladu 68, že x^* dobře definuje spojitý lineární funkcionál.)

Zvolme nyní libovolné $\varphi \in (\ell_p)^*$. Zbývá ukázat, že φ není rozšířením x^*, což provedeme tak, že výpočtem ověříme že platí $\varphi(x_n) \to 0$. Vskutku, protože φ je omezené na okolí nuly, existuje $C > 0$ splňující $\sup_{\|x\|\le 1}|\varphi(x)| \le C$ a tedy dostáváme

$$|\varphi(x_n)| = \Big|\sum_{i\in\operatorname{supp} x_n} x_n(i)\varphi(e_i)\Big| \le C \cdot \sum_{i\in\operatorname{supp} x_n} |x_n(i)| = C \cdot \|x_n\|_1 \to 0.$$

□

PŘÍKLAD 14. V tomto příkladu pracujeme nad tělesem reálných čísel, tj $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nechť $X = c_0$. Položme

$$A = \{z \in c_0 \colon z_n \ge 0 \text{ for every } n\}, \quad B = \{(\tfrac{t}{n^2} - \tfrac{1}{n})_{n=1}^\infty \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Dokažte, že A, B jsou disjunktní uzavřené konvexní množiny, ale neexistuje $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ splňující $\sup_B x^* \le \inf_A x^*$.

Poznamenejme, že se jedná o trochu méně technickou variantu Příkladu FA.6.73, ve kterém jsou pro $X = \ell_2$ sestrojeny analogické disjunktní uzavřené konvexní množiny splňující navíc že $A - B$ je husté v X.

ŘEŠENÍ. Je snadné si rozmyslet, že A, B jsou uzavřené konvexní množiny. Dále jsou disjunktní, neboť kdyby pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ bylo $\frac{t}{n^2} - \frac{1}{n} \ge 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $t \ge n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což není možné. Pro spor předpokládejme, že existuje $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ splňující $\sup_B x^* \le \inf_A x^*$. Protože $\inf_A x^* > -\infty$ a množina A je uzavřená na násobky kladných čísel, nemůže existovat $x \in A$ splňující $x^*(x) < 0$ a tedy $x^*|_A \ge 0$, a protože $0 \in A$, dostáváme $\inf_A x^* = 0$. Nechť prvek $x^* \in (c_0)^* = \ell_1$ je reprezentován posloupností $f \in \ell_1$. Pak $f(n) = x^*(e_n) \ge 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tedy platí

$$0 = \inf_A x^* \ge \sup_B x^* = -\sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{n} + \sup_{t\in\mathbb{R}} t \sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{n^2},$$

což implikuje $\sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{n^2} = 0$, a proto platí $f(n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $x^* = 0$, což je spor.

□

4. Slabé topologie a poláry

PŘÍKLAD 15. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $(T_i)_{i\in I}$ omezený net lineárních operátorů z $\mathcal{L}(X,Y)$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $D \subset X$ množina splňující $\overline{\operatorname{span}}\, D = X$. Dokažte, že pak $T_i x \to Tx$ pro každé $x \in X$, právě když $T_i x \to Tx$ pro každé $x \in D$.

Jako důsledek odvoďte následující dvě tvrzení.

(i) Nechť $p \in (1,\infty)$ a uvažujme $X = \ell_p$ jakožto duální prostor $\ell_p = (\ell_q)^*$. Pak pro omezený net (x_i) v ℓ_p a $x \in \ell_p$ platí, že $x_i \overset{w^*}{\to} x$, právě když $x_i(n) \to x(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Pro omezený net (x_i) v c_0 a $x \in c_0$ platí, že $x_i \overset{w}{\to} x$, právě když $x_i(n) \to x(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

ŘEŠENÍ. Označme $C := \max\{\|T\|, \sup_i \|T_i\|\}$ a předpokládejme, že $T_i x \to Tx$ pro každé $x \in D$, z linearity operátorů a spojitosti lineárních operací dostáváme, že $T_i x \to Tx$ pro každé $x \in \operatorname{span} D$. Zvolme nyní $x \in X$, $\varepsilon > 0$ a $d \in \operatorname{span} D$ splňující $\|x - d\| < \frac{\varepsilon}{3C}$. Nalezněme $i_0 \in I$ takové, že $\|T_i d - Td\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každé $i \geq i_0$. Pak pro $i \geq i_0$ platí

$$\|T_i x - Tx\| \leq \|T_i(x-d)\| + \|T_i d - Td\| + \|T(x-d)\| \leq C\tfrac{\varepsilon}{3C} + \tfrac{\varepsilon}{3} + C\tfrac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon,$$

a tedy $T_i x \to Tx$. Tím je netriviální implikace dokázána.

Důsledek (i) pak odvodíme aplikací předchozího na $X = \ell_q$, $Y = \mathbb{K}$, $T_i = x_i$, $T = x$ a $D = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_q$. Konečně, pro odvození důsledku (ii) si připomeňme, že kanonické vnoření $\varepsilon : c_0 \to (c_0)^{**}$ je w-w^* homeomorfismus a tedy důsledek odvodíme aplikací přechozího na $X = (c_0)^* = \ell_1$, $Y = \mathbb{K}$, $T_i = \varepsilon(x_i)$, $T = \varepsilon(x)$ a $D = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset (c_0)^* = \ell_1$.

□

PŘÍKLAD 16. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Dokažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje netriviální podprostor.

Odvoďte pak, že $\overline{S_X}^w = B_X$ a $\overline{S_{X^*}}^{w^*} = B_{X^*}$.

ŘEŠENÍ. Je–li U slabé okolí nuly, pak existuje $F \subset X^*$ konečná a $\varepsilon > 0$, že $U_{F,\varepsilon} \subset U$ (zde $U_{F,\varepsilon} = \{y \in X;\ |x^*(y)| < \varepsilon, x^* \in F\}$). Jelikož $\dim X^* = \infty$ (Tvrzení FA.2.27), z Lemmatu FA.6.80 plyne existence nenulového prvku $z \in \bigcap_{x^*\in F} \operatorname{Ker} x^*$. Položme $Y = \operatorname{span}\{z\}$. Pak $Y \subset U_{F,\varepsilon} \subset U$.

Ukažme nyní, že $\overline{S_X}^w = B_X$. Jelikož je B_X slabě uzavřená množina (Věta FA.6.93), je slabý uzávěr sféry obsažen v B_X. Na druhou stranu, je-li $x \in U_X$ libovolné a U je slabé okolí x, dle předchozího existuje $z \in X \setminus \{0\}$ splňující $x + \operatorname{span}\{z\} \subset U$. Uvažujme $\varphi(t) = \|x + tz\|$, $t \in [0,\infty)$. Pak φ je spojitá, $\varphi(0) = \|x\| < 1$ a $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) \geq \lim_{t\to\infty} t\|z\| - \|x\| = \infty$. Existuje tak $t_0 \in (0,\infty)$, pro které $\varphi(t_0) = 1$. Pak ovšem

$$x + t_0 z \in S_X \cap (x + \operatorname{span}\{z\}) \subset S_X \cap U.$$

Tedy každé slabé okolí x protíná S_X, tj. $x \in \overline{S_X}^w$.

Konečně, jelikož B_{X^*} je w^* uzavřená množina, máme $\overline{S_{X^*}}^{w^*} \subset B_{X^*}$ a jelikož $w^* \subset w$, platí také $\overline{S_{X^*}}^{w^*} \supset \overline{S_{X^*}}^{w} = B_{X^*}$.

□

PŘÍKLAD 17. Nechť X je Banachův prostor, $\dim X = \infty$. Nalezněte pak net v X, který je slabě konvergentní, ale není omezený.

ŘEŠENÍ. Uvažujme indexovou množinu

$$I = \{(U,n);\ U \text{ je slabé okolí nuly}, n \in \mathbb{N}\}$$

s uspořádáním $\prec$ definovaným tak, že $(U,n) \prec (V,m)$ právě když $U \supset V$ a $n \leq m$. Dle Příkladu 16 nalezneme pro každé slabé okolí nuly U prvek $z_U \in X \setminus \{0\}$ splňující $\operatorname{span}\{z_U\} \subset U$. Uvažujme nyní net $(nz_U)_{(U,n)\in I}$. Pak nz_U slabě konverguje k nule, neboť pro každé slabé okolí nuly V je $nz_U \in V$ kdykoliv $(V,1) \prec (U,n)$. Na druhou stranu, net (nz_U) není omezený neboť $\lim_n \|nz_U\| = \infty$.

□

PŘÍKLAD 18. Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho vlastní hustý podprostor. Dokažte, že pak je zobrazení restrikce $r\colon X^* \to Y^*$ surjektivní izometrický izomorfizmus, a tedy X^* lze ztotožnit s Y^*. Navíc, topologie $\sigma(X^*, X)$ je striktně silnější než topologie $\sigma(X^*, Y)$, ale tyto splývají na B_{X^*}.

ŘEŠENÍ. Zobrazení r je zjevně lineární a $\|r(f)\|_{Y^*} \leq \|f\|_{X^*}$. Na druhou stranu, pro každé $g \in Y^*$ existuje právě jedno $f \in X^*$ rozšiřující g a splňující $\|f\| = \|g\|$ (Věta FA.1.62). Pak $\|f\| = \|g\| = \|r(f)\|$, tj. r je surjektivní izometrie.

Zjevně je topologie $\sigma(X^*, Y)$ slabší než $\sigma(X^*, X)$. Jelikož však $(X^*, \sigma(X^*, Y))^* = Y \neq X = (X^*, \sigma(X^*, X))^*$, nejsou tyto topologie stejné.

Jednotková koule B_{X^*} je $\sigma(X^*, X)$-kompaktní. Jelikož je $\sigma(X^*, Y)$ Hausdorffova (Y odděluje body X^*) a slabší než $\sigma(X^*, X)$, splývají tyto topologie na B_{X^*}.

$\square$

PŘÍKLAD 19. Ukažte, že v Tvrzení FA.6.119 platí i obrácené implikace.

ŘEŠENÍ. Předpokládejme nejprve, že (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná. Pak existuje spočetná báze $\{U_n\}$ okolí 0 v (B_{X^*}, w^*). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $F_n \subset X$ konečná a $\varepsilon_n > 0$ takové, že $B_{X^*} \cap U_{F_n,\varepsilon_n} \subset U_n$ (zde $U_{F_n,\varepsilon_n} = \{x^* \in X^*;\ |x^*(x)| < \varepsilon_n, x \in F_n\}$). Položíme $Y = \overline{\operatorname{span}}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$, což je zjevně separabilní podprostor X. Naším cílem je ukázat, že $X = Y$. Kdyby tomu tak nebylo, Věta FA.2.7 implikuje existenci $f \in S_{X^*}$, který splňuje $f = 0$ na Y. Pak ovšem $f \in B_{X^*} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{F_n,\varepsilon_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$, což je spor.

Nechť nyní (B_X, w) je metrizovatelná množina. Jako výše nalezneme spočetnou bázi $\{U_n\}$ okolí 0 a nechť konečné $F_n \subset X^*$ a $\varepsilon_n > 0$ splňují $U_{F_n,\varepsilon_n} \cap B_X \subset U_n$ (zde $U_{F_n,\varepsilon_n} = \{x \in X;\ |x^*(x)| < \varepsilon_n, x^* \in F_n\}$). Uvažujme separabilní podprostor $Y \subset X^*$ definovaný jako $Y = \overline{\operatorname{span}}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$. Kdyby existoval $u^* \in X^* \setminus Y$, nalezli bychom funkcionál $F \in S_{X^{**}}$ takový, že $F = 0$ na Y a $F(u^*) = d = \operatorname{dist}(u^*, Y)$ (vizte Větu FA.2.7). Uvažujme slabé okolí $V \subset B_X$ definované jako $V = \{x \in B_X;\ |u^*(x)| < \frac{d}{2}\}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby $B_X \cap U_{F_n,\varepsilon_n} \subset V$. Dle Goldstineovy věty FA.6.114 existuje $z \in B_X$ splňující

- $|x^*(z)| = |F(x^*) - \varepsilon_z(x^*)| < \varepsilon_n, x^* \in F_n$,
- $|d - u^*(z)| = |F(u^*) - \varepsilon_z(u^*)| < \frac{d}{2}$.

Pak $z \in B_X \cap U_{F_n,\varepsilon_n} \subset V$, a přitom $z \notin V$, neboť $|u^*(z)| \geq d - |\varepsilon_z(u^*) - d| > \frac{d}{2}$. Tento spor ukončuje důkaz.

$\square$

V závěru této kapitoly se budeme věnovat r-normujícím podprostorům. Speciální případ, kdy $r = 1$, je zmíněn v Definici FA.8.13, zde tento pojem dále rozvíjíme.

PŘÍKLAD 20. Nechť X je normovaný prostor a $Y \subset X^*$ je podprostor. Uvažujme pseudonormu

$$\|x\|_Y = p_{B_{X^*} \cap Y}(x) = \sup\{|f(x)|;\ f \in Y, \|f\| \leq 1\}, \quad x \in X.$$

Dokažte, že platí následující.

(a) Platí $\|x\|_Y \leq \|x\|$, $x \in X$.
(b) Pseudonorma $\|\cdot\|_Y$ je norma na X, právě když Y je w^*-hustý v X^*.
(c) Následující tvrzení jsou pro $r > 0$ ekvivalentní. (V tomto případě se pak Y nazývá r-normující. Pokud takové $r > 0$ existuje, Y se nazývá normující.)
  (i) Platí $\|x\|_Y \geq \frac{1}{r}\|x\|$, $x \in X$.
  (ii) Platí $\overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*} \supset \frac{1}{r} B_{X^*}$.
(d) Prostor Y je r-normující pro nějaké $r > 0$ právě tehdy, když $\bigcup_{r>0} \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*} = X^*$.

ŘEŠENÍ. (a) Tato nerovnost je zřejmá z rovnosti $\|x\| = \sup\{|f(x)|;\ f \in B_{X^*}\}$.

(b) Je-li $\overline{Y}^{w^*} = X^*$ a $x \in X \setminus \{0\}$, máme $x \notin (X^*)_\perp$. Z w^*-hustoty Y tak plyne $x \notin Y_\perp$, takže $\|x\|_Y > 0$.

Obráceně, pokud $\overline{Y}^{w^*} \neq X^*$, z Hahnovy-Banachovy věty existuje $x \in Y_\perp$ nenulové. Pak ovšem $\|x\|_Y = 0$, takže $\|\cdot\|_Y$ není norma.

(c) (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť inkluze v (ii) neplatí. Pak existuje $f \in B_{X^*}$ takové, že $\frac{1}{r}f \notin \overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*}$. Z oddělovací Hahnovy-Banachovy věty plyne existence $x \in X$ splňujícího
$$p_{B_{X^*} \cap Y}(x) \leq 1 < |\tfrac{1}{r}f(x)|.$$
Pak nerovnosti
$$\|x\|_Y = p_{B_{X^*} \cap Y}(x) \leq 1 < |\tfrac{1}{r}f(x)| \leq \frac{1}{r}\|f\|\|x\| \leq \frac{1}{r}\|x\|$$
dávají neplatnost (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $\overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*} \supset \frac{1}{r}B_{X^*}$ a $x \in X$ je dáno. Pak
$$\|x\|_Y = \sup\{|f(x)|;\ f \in Y \cap B_{X^*}\} = \sup\{|f(x)|;\ f \in \overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*}\} \geq \sup\{|f(x)|;\ f \in \tfrac{1}{r}B_{X^*}\} =$$
$$= \frac{1}{r}\sup\{|f(x)|;\ f \in B_{X^*}\} = \frac{1}{r}\|x\|.$$

(d) Platí-li $\overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*} \supset \frac{1}{s}B_{X^*}$ pro nějaké $s > 0$, je $\bigcup_{r>0} \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*}$ zřejmě podprostor X^* obsahující $\frac{1}{s}B_{X^*}$. Tedy se rovná prostoru X^*.

Obráceně, nechť $\bigcup_{r>0} \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*} = X^*$. Jelikož $\bigcup_{r>0} \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y \cap nB_{X^*}}^{w^*}$ a množiny $\overline{Y \cap nB_{X^*}}^{w^*}$ jsou normově uzavřené, z Baireovy věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že množina $\overline{Y \cap n_0B_{X^*}}^{w^*}$ obsahuje kouli. Ze symetrie této množiny pak plyne existence nějaké koule sB_{X^*} obsažené v $\overline{Y \cap n_0B_{X^*}}^{w^*}$. Pak ale $\overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*} \supset \frac{s}{n_0}B_{X^*}$.

$\square$

PŘÍKLAD 21. Nechť X je Banachův prostor a $Y \subset X^*$ je w^*-hustý podprostor konečné kodimenze. Dokažte následující tvrzení.

(a) Platí $Y_\perp = \{0\}$ a $Y^\perp \subset X^{**}$ je prostor konečné dimenze.
(b) Vzdálenost $d = \operatorname{dist}(S_Y, \varepsilon(X)) > 0$.
(c) Prostor Y je $(1 + \frac{1}{d})$-normující.

ŘEŠENÍ. (a) Rovnost $Y_\perp = \{0\}$ ihned plyne z w^*-hustoty Y v X^*. Pro důkaz druhého tvrzení uvažme, že vektorový prostor $\overline{Y}^{\|\cdot\|}$ je konečné kodimenze, neboť Y je konečné kodimenze. Tedy $(X/\overline{Y}^{\|\cdot\|})^*$ je konečné dimenze. Jelikož dle Věty FA.2.22 je $(X/\overline{Y}^{\|\cdot\|})^*$ izometrické $(\overline{Y}^{\|\cdot\|})^\perp$, je prostor $Y^\perp = (\overline{Y}^{\|\cdot\|})^\perp$ konečnědimenzionální.

(b) Množina $S_{Y^\perp}$ je dle (a) normově kompaktní, $\varepsilon(X)$ je normově uzavřený prostor a $S_{Y^\perp} \cap \varepsilon(X) = \emptyset$. Tedy vzdálenost těchto množin je kladná.

(c) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$ je dáno. Pokud $\|x\| = \|x\|_Y$, zjevně $\|x\|_Y \geq (1 + \frac{1}{d})^{-1}\|x\|$. Předpokládejme tedy, že $\|x\| - \|x\|_Y > 0$. Máme $\|x\|_Y = \|\varepsilon(x)\restriction_Y\|$. Dle Hahnovy-Banachovy věty FA.2.4 existuje $F \in X^{**}$ takové, že $F\restriction_Y = \varepsilon(x)\restriction_Y$ a $\|F\| = \|x\|_Y$. Pak $F - \varepsilon(x) \in Y^\perp$ a
$$\|x\| = \|\varepsilon(x)\| \leq \|\varepsilon(x) - F\| + \|F\| = \|\varepsilon(x) - F\| + \|x\|_Y.$$
Tedy
$$\|\varepsilon(x) - F\| \geq \|x\| - \|x\|_Y.$$
Pak $\frac{\varepsilon(x)}{\|\varepsilon(x) - F\|} \in \varepsilon(X)$ a $\frac{\varepsilon(x) - F}{\|\varepsilon(x) - F\|} \in S_{Y^\perp}$. Tedy
$$d \leq \left\| \frac{\varepsilon(x)}{\|\varepsilon(x) - F\|} - \frac{\varepsilon(x) - F}{\|\varepsilon(x) - F\|} \right\| = \frac{1}{\|\varepsilon(x) - F\|}\|F\| \leq \frac{\|x\|_Y}{\|x\| - \|x\|_Y},$$
což implikuje
$$\|x\|_Y \geq \frac{d}{1 + d}\|x\| = \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{-1}\|x\|.$$

$\square$

PŘÍKLAD 22. Nechť X je Banachův prostor a $F \in X^{**} \setminus \varepsilon(X)$. Dokažte, že pak $\operatorname{Ker} F$ je normující podprostor X^*.

ŘEŠENÍ. Jádro $\operatorname{Ker} F$ má kodimenzi 1 a je w^*-husté v X^*. (To plyne z toho, že $F \notin \varepsilon(X)$, stačí použít Důsledek FA.6.89 a Větu FA.6.36.) Závěr tak plyne z Příkladu 21.

□

PŘÍKLAD 23. Nechť X je normovaný neúplný prostor. Dokažte, že pak existuje w^*-hustý podprostor X^*, který není normující.

ŘEŠENÍ. Jelikož X není úplný, existuje $F \in \overline{\varepsilon(X)}^{\|\cdot\|} \setminus \varepsilon(X)$. Pak F není w^*-spojitý prvek X^{**} (Důsledek FA.6.89), takže $\operatorname{Ker} F$ je w^*-hustý v X^* (Věta FA.6.36). Není však normující. Vskutku, uvažujme $x_n \in X$ takové, že $\|x_n\| = \|F\|$, $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon(x_n) \to F$ v normě. Pak

$$\|F\|_{X^{**}} = \|\varepsilon(x_n)\|_X = \|x_n\|_X$$

a

$$\begin{aligned}\|x_n\|_{\operatorname{Ker} F} &= \sup\{|f(x_n)|;\ f \in \operatorname{Ker} F \cap B_{X^*}\} = \\ &= \sup\{|\varepsilon_{x_n}(f) - F(f)|;\ f \in \operatorname{Ker} F \cap B_{X^*}\} \leq \|\varepsilon(x_n) - F\| \to 0.\end{aligned}$$

Z toho ji plyne neexistence $r > 0$ splňujícího $\|x_n\|_{\operatorname{Ker} F} \geq \frac{1}{r}\|x_n\|_X$, $n \in \mathbb{N}$.

□

PŘÍKLAD 24. Nechť $X = c_0$ a $X^* = \ell_1$. Uvažujme posloupnost $\{A_n\}$ disjunktních nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť $k_n \in A_n$ je první prvek v A_n. Položme

$$Y = \{x \in \ell_1;\ nx(k_n) + \sum_{j \in A_n \setminus \{k_n\}} x(j) = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokažte, že pak Y je w^*-hustý podprostor ℓ_1, který není normující.

ŘEŠENÍ. Uvědomme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme uvažovat $\ell_1(A_n)$ jako podprostor $\ell_1(\mathbb{N})$. Pak $\ell_1(A_n)$ lze uvažovat jako duál k $c_0(A_n)$ a element $F_n = (n, 1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty(A_n) \setminus c_0(A_n)$ definuje prostor

$$Y_n = \{x \in \ell_1(A_n);\ x \in \operatorname{Ker} F_n\}.$$

Dle Příkladu 22 je Y_n normující podprostor $\ell_1(A_n)$.

Ukažme nejprve, že Y je w^*-hustý v ℓ_1. K tomuto účelu stačí ověřit, že konečně nesené prvky $x \in \ell_1$ jsou v $\overline{Y}^{w^*}$. Je-li tedy $x \in c_{00}(\mathbb{N})$ dáno, zasahuje nosič x pouze do konečně mnoha množin $A_1, \dots, A_{n_0}$. Dle předcházejících úvah je $x\restriction_{A_j}$ w^*-limitou omezené posloupnosti prvků z Y_j (vizte Příklad 20 (d) a Příklad 11.21). Uvažujme posloupnost vzniklou spojením těechto posloupností na $A_1 \cup \dots \cup A_{n_0}$ a dodefinováním 0 na $\mathbb{N} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n_0})$. Pak obdržíme posloupnost v Y w^*-konvergující k x. Tedy Y je w^*-hustý.

Ukažme nyní, že prvek $x \in \ell_1$ definovaný jako

$$x(k) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & k = k_n, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

nepatří do $\bigcup_{r>0} \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*}$. Uvažujme pro spor $r > 0$ splňující $x \in \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*}$. Z metrizovatelnosti (B_{X^*}, w^*) plyne pak existence posloupnosti $\{x_m\} \subset Y$ omezené v normě číslem r, která splňuje $x = w^* - \lim_{m\to\infty} x_m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x\restriction_{A_n} = w^* - \lim_{m\to\infty} x_m\restriction_{A_n}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n_0}) > r$. Jelikož $x(k_n) = \frac{1}{n^2}$, $n = 1, \dots, n_0$, pro všechny až na konečně mnoha $m \in \mathbb{N}$ je $|x_m(k_n)| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$, $n = 1, \dots, n_0$. Pro tato m pak platí

$$\|x_m\restriction_{A_n}\|_{\ell_1(A_n)} \geq \sum_{j \in A_n \setminus \{k_n\}} |x_m(j)| \geq |\sum_{j \in A_n \setminus \{k_n\}} x_m(j)| = |-nx_m(k_n)| > \frac{1}{2n}, \quad n = 1, \dots, n_0.$$

Dostáváme tak pro všechna $m \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho odhad

$$\|x_m\|_{\ell_1(\mathbb{N})} \geq \sum_{n=1}^{n_0} \|x_m\restriction_{A_n}\|_{\ell_1(A_n)} \geq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2n} > r,$$

což je spor. Proto $x \notin \bigcup_{r>0} \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*}$, takže Y není normující.

$\square$

Kapitola 7

Teorie distribucí

1. Prostor testovacích funkcí a distribuce

PŘÍKLAD 1. Řekneme, že posloupnost (x_n) v topologické vektorovém prostoru je *cauchyovská*, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $x_n - x_m \in U$ pro každé $n, m \geq n_0$. Topologický vektorový prostor je *sekvenciálně úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Pro otevřenou $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ uvažujme na prostoru $\mathscr{D}(\Omega)$ dvě topologie. Jednak topologii τ z Věty FA.7.12 a dále pak topologii σ generovanou systémem norem $\|\cdot\|_N$ pro $N \in \mathbb{N}_0$, kde $\|f\|_N := \max_{|\alpha| \leq N} \|D^{(\alpha)} f\|_\infty$, $f \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Dokažte, že $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ je sekvenciálně úplný pro každou otevřenou $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$, ale například prostor $(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \sigma)$ není sekvenciálně úplný.

ŘEŠENÍ. Nejprve dokažme, že $(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \sigma)$ není sekvenciálně úplný. Zvolme $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $0 \leq \psi \leq 1$ a $B(0,1) \subset \operatorname{supp} \psi \subset B(0,2)$ a uvažujme posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi(x-i)}{i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak tato posloupnost je σ-cauchyovská, neboť pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ platí

$$\|f_n - f_m\|_N \leq \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\|\psi\|_N}{i^2} \leq \|\psi\|_N \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

a tedy pro každé $\varepsilon > 0$ platí, že $f_n - f_m \in U_{\|\cdot\|_N, \varepsilon}$ kdykoliv $n, m \geq n_0$, kde n_0 je takové, že $\sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{\varepsilon}{\|\psi\|_N}$. Na druhou stranu, máme $\operatorname{supp} f_n \supset \bigcup_{i=1}^{n} B(i,1)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_m \geq f_n$ pro $n < m$. Tedy bodová limita posloupnosti funkcí f_n má neomezený support a proto není prvkem $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Zvolme nyní otevřenou $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ a cauchyovskou posloupnost (f_n) v $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$. Nejprve si rozmysleme, že (f_n) je omezená. To plyne z obecnějšího pozorování níže.

Fakt: Každá cauchyovská posloupnost v topologickém vektorovém prostoru je omezená.

DŮKAZ FAKTU. Nechť (x_n) je cauchyovská v topologickém vektorovém prostoru X. Zvolme $U \in \tau(0)$ a $V \in \tau(0)$ vyváženou splňující $V + V \subset U$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{f_n - f_{n_0};\ n > n_0\} \subset V$. Dále, protože $\{f_1, \dots, f_{n_0}\}$ je omezená, existuje $t \geq 1$ splňující $\{f_1, \dots, f_{n_0}\} \subset tV$. Pak ale

$$\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{f_n;\ n \leq n_0\} \cup (\{f_{n_0}\} + \{f_n - f_{n_0};\ n > n_0\}) \subset tV \cup (tV + V) \subset t(V+V) \subset tU,$$

a tedy $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená.

□

Pokračujme nyní v řešení Příkladu 1. Protože (f_n) je omezená, dle Věty FA.7.12 existuje kompakt $K \subset \Omega$ splňující $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{D}(K)$. Dále si snadno rozmyslíme, že kdykoliv ρ je translačně invariantní metrika generující topologii τ_K na $\mathscr{D}(K)$, pak posloupnost v $(\mathscr{D}(K), \rho)$ je cauchyovská, právě když je cauchyovská v topologickém vektorovém prostoru $(\mathscr{D}(K), \tau_K)$. Tedy, dle Věty FA.7.11, $\mathscr{D}(K)$ je sekvenciálně úplný prostor. Protože máme $\tau|_{\mathscr{D}(K)} = \tau_K$ (viz. Věta FA.7.12), je posloupnost (f_n) konvergentní v $\mathscr{D}(K)$ a tedy také v $\mathscr{D}(\Omega)$.

□

PŘÍKLAD 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná a τ je topologie z Věty FA.7.12 na $\mathscr{D}(\Omega)$. Dokažte, že τ je největší topologie na $\mathscr{D}(\Omega)$ taková, že inkluze $i_K : (\mathscr{D}(K), \tau_K) \to (\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ je spojité zobrazení pro každý kompakt $K \subset \Omega$.

ŘEŠENÍ. Zvolme kompakt $K \subset \Omega$. Pak spojitost i_K plyne z toho, že $\tau|_{\mathscr{D}(K)} = \tau_K$ (viz. Věta FA.7.12). Na druhou stranu, nechť σ je topologie na $\mathscr{D}(\Omega)$ splňující že $i_K : (\mathscr{D}(K), \tau_K) \to (\mathscr{D}(\Omega), \sigma)$ je spojité pro každý kompakt $K \subset \Omega$. Zvolme $U \in \sigma(0)$ a $W \in \sigma(0)$ absolutně konvexní, pro kterou $W \subset U$. Pak pro každý kompakt $K \subset \Omega$ ze spojitosti i_K dostáváme, že $W \cap \mathscr{D}(K) \in \tau_K(0)$ a tedy $W \in \tau(0)$ (viz. definice topologie τ z Věty FA.7.12). Pak ale také $U \in \tau(0)$. Protože $U \in \sigma(0)$ byla libovolná, máme tak $\sigma(0) \subset \tau(0)$ a proto $\sigma \subset \tau$.

□

PŘÍKLAD 3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná. Pomocí sporu s Bairovou větou dokažte, že $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$, kde τ je topologie z Věty FA.7.12, je nemetrizovatelný prostor.
(Poznamenejme, že nemetrizovatelnost $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ plyne také z Příkladu 5, kde pomocí o trochu techničtějšího argumentu ukážeme, že $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ dokonce není ani “first-countable”.)

DŮKAZ. Nechť $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ je metrizovatelný. Z Věty FA.6.22 můžeme předpokládat, že existuje translačně invariantní metrika σ generující τ. Pak si snadno rozmyslíme, že posloupnost v $(\mathscr{D}(\Omega), \sigma)$ je cauchyovská, právě když je cauchyovská v $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ ve smyslu definice z Příkladu 1. Tedy, dle Příkladu 1 je $(\mathscr{D}(\Omega), \sigma)$ úplný metrický prostor.

Nyní již důkaz snadno dokončíme. Dle Věty FA.7.12(e) je $(\mathscr{D}(\Omega), \tau) = (\mathscr{D}(\Omega), \sigma)$ prostor první kategorie. Tím bychom však obdrželi úplný metrický prostor první kategorie. To je však spor s Baireovou větou, takže metrika σ generující τ nemůže existovat.

□

PŘÍKLAD 4. Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompakt, $x \in \operatorname{Int} K$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ a $M > 0$. Dokažte, že existuje $\varphi \in \mathscr{D}(K)$ splňující $\varphi \geq 0$, $\|\varphi\|_N < \varepsilon$ a $D^{(\alpha)}\varphi(x) = 0$ pro $|\alpha| \leq N$, ale existuje multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $|\beta| = N+1$ takový, že $|D^{(\beta)}\varphi(x)| > M$.

ŘEŠENÍ. Uvažujme libovolnou $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňující $\phi|_{(-1/2,1/2)} \equiv 1$ a $\phi|_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \equiv 0$. Dále zvolme $r \in (0,1)$ splňující $U(x,r) \subset K$ a $r \cdot M(N+1)!\|\phi\|_N \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} < \varepsilon$ pro každé $k \leq N$. Definujme

$$\varphi_0(t) := M \cdot \phi(\tfrac{t}{r}) \cdot t^{N+1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a položme $\varphi(y) := \varphi_0(y_1 - x_1)$, $y \in K$. Pak $D^{(\alpha)}\varphi(y) = \varphi_0^{(k)}(y_1 - x_1)$ pokud $\alpha = (k, 0, 0, \dots, 0)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$ a jinak $D^{(\alpha)}\varphi = 0$. Protože $\varphi_0(t) = M \cdot t^{N+1}$ na okolí bodu 0, je $\varphi_0^{(N+1)}(0) = M(N+1)!$ a $\varphi^{(k)}(0) = 0$ pro $k \leq N$ a tedy $D^{(N+1,0,0,\dots,0)}\varphi(x) = M(N+1)! > M$ a $D^{(\alpha)}\varphi(x) = 0$ pokud $|\alpha| \leq N$. Na druhou stranu, s použitím známého vzorce pro derivaci součinu $(FG)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} F^{(k-i)}G^{(i)}$, pro $k \leq N$ a $|t| < r$ platí

$$\begin{aligned}
|\varphi_0^{(k)}(t)| &\leq M \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left| \frac{1}{r^{k-i}} \phi^{(k-i)}(\tfrac{t}{r}) \cdot (N+1)! \cdot t^{N+1-i} \right| \\
&\leq M\|\phi\|_N \cdot (N+1)! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{1}{|t|^{k-i}} |t|^{N+1-i} \leq M\|\phi\|_N \cdot (N+1)! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} r^{1+N-k} \\
&\leq r \cdot M\|\phi\|_N \cdot (N+1)! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

a tedy snadno nahlédneme že $\|\varphi\|_N = \|\varphi|_{U(x,r)}\|_N < \varepsilon$.

□

PŘÍKLAD 5. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná otevřená množina a τ je topologie na $\mathscr{D}(\Omega)$ z Věty FA.7.12. Vyberme posloupnost kompaktních množin $(K_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ v Ω s neprázdným vnitřkem splňující $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takovou, že pro každý kompak $K \subset \Omega$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $K \subset K_n$ (taková posloupnost existuje, viz. například Tvrzení FA.15.62). Zvolme $x_0 \in \operatorname{Int} K_0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyberme nějaké $x_n \in (\operatorname{Int} K_n) \setminus K_{n-1}$. Uvažujme nyní množinu

$$V := \{f \in \mathscr{D}(\Omega);\ |f(x_{|\alpha|})D^{(\alpha)}f(x_0)| < 1 \text{ for every multiindex } \alpha \in \mathbb{N}^d\}.$$

Dokažte, že platí následující.

(i) Nechť je dána $f \in V$ a absolutně konvexní množina $W \subset \mathscr{D}(\Omega)$ splňující $W \cap \mathscr{D}(K) \in \tau_K(0)$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$. Pak $(f + W) \setminus V \neq \emptyset$. Speciálně, množina $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$ je hustá v $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$.
(ii) $V \cap \mathscr{D}(K) \in \tau_K(0)$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$, ale $V \notin \tau(0)$.
(iii) Množina $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$ je sekvenciálně uzavřená v $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$, tj. každá konvergentní posloupnost prvků z $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$ má limitu v množině $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$.

Nakonec odvoďte, že existuje $f \in \overline{\mathscr{D}(\Omega) \setminus V}$, která není limitou posloupnosti funkcí z $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$. Speciálně, $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ není metrizovatelný prostor.

ŘEŠENÍ. (i): Nechť $f \in V$ a $W \subset \mathscr{D}(\Omega)$ jsou jako v předpokladu. Pak existují $N(n) \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon(n) > 0$ taková, že

$$U_n := U_{\|\cdot\|_{N(n)}, \varepsilon(n)} = \{f \in \mathscr{D}(K_n);\ \|f\|_{N(n)} < \varepsilon(n)\} \subset W \cap \mathscr{D}(K_n).$$

Položme $N := N(0)$ a zvolme $g \in U_{N+1}$ splňující $|f(x_{N+1}) + \frac{1}{2}g(x_{N+1})| > 0$ a $|g(x_{N+1})| > 0$ (nalezneme ji například posunem a posléze vynásobením funkce z Příkladu FA.5.10). Dále dle Příkladu 4 existuje $\varphi \in U_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = N + 1$ splňující

$$|D^{(\alpha)}\varphi(x_0)| > \frac{2}{|f(x_{N+1}) + \frac{1}{2}g(x_{N+1})|} + 2\|f\|_{N+1} + \|g\|_{N+1}$$

Speciálně, $\varphi(x_{N+1}) = 0$, protože $x_{N+1} \notin K_0$ a $\varphi \in \mathscr{D}(K_0)$. Pak pro funkci $\psi := f + \frac{\varphi+g}{2} \in f + W$ dostáváme

$$\begin{aligned}
|\psi(x_{N+1})D^{(\alpha)}\psi(x_0)| &= |f(x_{N+1}) + \tfrac{1}{2}g(x_{N+1})||D^{(\alpha)}(f + \tfrac{\varphi+g}{2})(x_0)| \\
&\geq |f(x_{N+1}) + \tfrac{1}{2}g(x_{N+1})|\Big(\frac{1}{2}|D^{(\alpha)}(\varphi)(x_0)| - |D^{(\alpha)}(f)(x_0)| - \frac{1}{2}|D^{(\alpha)}(g)(x_0)|\Big) \\
&\geq |f(x_{N+1}) + \tfrac{1}{2}g(x_{N+1})|\Big(\frac{1}{2}|D^{(\alpha)}(\varphi)(x_0)| - \|f\|_{N+1} - \frac{1}{2}\|g\|_{N+1}\Big) > 1,
\end{aligned}$$

a tedy $\psi \in (f + W) \setminus V$.

(ii): Zvolme kompakt $K \subset \Omega$ a $n \in \mathbb{N}$ splňující $K \subset K_n$. Pak z konstrukce dostáváme, že $x_m \notin K$ pro $m > n$ a tedy pro každou $f \in \mathscr{D}(K)$ je $f(x_m) = 0$. Pak ale $U_{\|\cdot\|_n, 1} \subset V \cap \mathscr{D}(K)$ a tedy $V \cap \mathscr{D}(K) \in \tau_K(0)$. Pro spor nyní předpokládejme, že $V \in \tau(0)$. Pak existuje absolutně konvexní množina $0 \in W \subset V$ splňující, že $W \cap \mathscr{D}(K) \in \tau_K(0)$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$. Aplikujeme–li ale (i) na $f = 0$, dostáváme že $W \setminus V \neq \emptyset$ což je spor.

(iii): Nechť (f_n) je posloupnost funkcí z $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$, která je konvergentní v prostoru $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ k funkci $f \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pak dle Věty FA.7.12 existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} f_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \xrightarrow{\tau_K} f$. Kdyby platilo že $f \in V$, bylo by dle (ii) $V \cap \mathscr{D}(K)$ okolí funkce f v prostoru $\mathscr{D}(K)$ a tedy by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $f_n \in V \cap \mathscr{D}(K)$, $n \geq n_0$ což by ale byl spor s tím, že (f_n) je posloupnost funkcí z $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$.

Dle (i) je $0 \in \overline{\mathscr{D}(\Omega) \setminus V}$. Zároveň ale $0 \in V$ a proto dle (iii) nulová funkce není limitou posloupnosti funkcí z $\mathscr{D}(\Omega) \setminus V$.

$\square$

PŘÍKLAD 6. Které z následujících vzorců definují distribuci na $\mathbb{R}$ a které definují distribuci na $(0, \infty)$? Pokud vzorec definuje distribuci, určete, zda je tato distribuce konečného řádu.

(a) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$.
(b) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\frac{1}{n})$.
(c) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.

ŘEŠENÍ. (a) Pro každé $\varphi \in \mathscr{D}([-N, N])$ platí

$$|\Lambda\varphi| = \Big|\sum_{n=1}^{N} \varphi(n)\Big| \le N \cdot \|\varphi\|_0$$

a tedy Λ je distribuce řádu nula jak na $\mathbb{R}$ tak na $(0, \infty)$.
(b) Zvolme $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňující $\varphi|_{[0,1]} \equiv 0$. Pak $\Lambda(\varphi) = \infty$ a tedy Λ nedefinuje distribuci na $\mathbb{R}$. Ověřme nyní, že Λ definuje distribuci na $(0, \infty)$. Pokud je $\varphi \in \mathscr{D}([\frac{1}{N}, N])$, pak platí

$$|\Lambda\varphi| = \Big|\sum_{n=1}^{N} \varphi(\tfrac{1}{n})\Big| \le N \cdot \|\varphi\|_0$$

a tedy Λ je distribuce řádu nula na $(0, \infty)$.
(c) Ověřme nejprve, že Λ není distribucí na $\mathbb{R}$. Pro spor předpokládejme, že existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ splňující $|\Lambda(\varphi)| \le C\|\varphi\|_N$, $\varphi \in \mathscr{D}([0, 1])$. Dle Příkladu 4 existuje funkce $\varphi \in \mathscr{D}([\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N}])$ splňující $\varphi^{(N+1)}(\frac{1}{N+1}) > C(N + 1)$ a $\|\varphi\|_N \le 1$. Pak ale platí $\Lambda(\varphi) = \frac{1}{N+1}\varphi^{(N+1)}(\frac{1}{N+1}) > C \ge C\|\varphi\|_N$, což je spor a tedy Λ nedefinuje distribuci na $\mathbb{R}$.

Ověřme nyní, že Λ definuje distribuci na $(0, \infty)$. Pokud je $\varphi \in \mathscr{D}([\frac{1}{N}, N])$, pak platí

$$|\Lambda\varphi| = \Big|\sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{n}\varphi^{(n)}(\tfrac{1}{n})\Big| \le N \cdot \|\varphi\|_N$$

a tedy Λ je distribuce $(0, \infty)$. Tato distribuce ale není konečného řádu. Vskutku, pro spor předpokládejme že existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ splňující že pro každý kompakt $K \subset (0, \infty)$ platí $|\Lambda(\varphi)| \le C\|\varphi\|_N$ kdykoliv $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. Pak podobně jako výše nalezneme $\varphi \in \mathscr{D}([\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N}])$ splňující $\varphi^{(N+1)}(\frac{1}{N+1}) > C(N + 1)$ a $\|\varphi\|_N \le 1$ a podobně jako výše pak dostaneme $\Lambda(\varphi) > C\|\varphi\|_N$, což je spor a tedy Λ není distribuce konečného řádu na $(0, \infty)$.

□

2. Operace s distribucemi

PŘÍKLAD 7. (a) Nechť $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ je kladná a $\Lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$. Dokažte, že pak $S \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$ splňuje $\alpha S = \Lambda$ právě tehdy, když $S = \alpha^{-1}\Lambda$.
(b) Nechť jsou dány $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a $\Lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$. Dokažte, že pak $(f\Lambda)' = f'\Lambda + f\Lambda'$.

ŘEŠENÍ. (a) Pokud $S = \alpha^{-1}\Lambda$, pak pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí

$$(\alpha S)(\varphi) = S(\alpha\varphi) = (\alpha^{-1}\Lambda)(\alpha\varphi) = \Lambda(\varphi).$$

Obráceně, nechť $\alpha S = \Lambda$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Pak $\alpha^{-1}\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, takže

$$(\alpha^{-1}\Lambda)(\varphi) = \Lambda(\alpha^{-1}\varphi) = (\alpha S)(\alpha^{-1}\varphi) = S(\varphi).$$

Tedy $S = \alpha^{-1}\Lambda$.
(b) Pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí

$$(f\Lambda)'(\varphi) = -f\Lambda(\varphi') = -\Lambda(f\varphi') = -\Lambda((f\varphi)' - f'\varphi) = \Lambda'(f\varphi) + \Lambda(f'\varphi) = f\Lambda'(\varphi) + f'\Lambda(\varphi),$$

a tedy $(f\Lambda)' = f'\Lambda + f\Lambda'$.

□

PŘÍKLAD 8. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $x_0 \in (a, b)$. Ukažte, že $S \in \mathscr{D}((a, b))$ reší rovnici $(x - x_0)S = 0$ právě když existuje $c \in \mathbb{K}$ splňující $S = c\Lambda_{\delta_{x_0}}$.

ŘEŠENÍ. Nejprve ověřme, že každá $c\Lambda_{\delta_{x_0}}$ reší zadanou rovnici. Vskutku, pro $\varphi \in \mathscr{D}((a,b))$ máme

$$(x-x_0)c\Lambda_{\delta_{x_0}}(\varphi) = c\Lambda_{\delta_{x_0}}(x\varphi(x)) - cx_0\Lambda_{\delta_{x_0}}(\varphi(x)) = cx_0\varphi(x_0) - cx_0\varphi(x_0) = 0$$

a tedy opravdu platí $(x-x_0)c\Lambda_{\delta_{x_0}} = 0$.

Na druhou stranu, předpokládejme, že platí vztah $(x-x_0)S = 0$. Je-li $\varphi \in \mathscr{D}((a,b))$ prvek $\operatorname{Ker}\Lambda_{\delta_{x_0}}$, tj. $\varphi(x_0) = 0$, můžeme položit $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(x_0 + t(x-x_0))\,\mathrm{d}\lambda(t)$, $x \in (a,b)$. Snadno indukcí pomocí věty o diferencovatelné závislosti integrálu s parametrem odvodíme, že ψ je nekonečně diferencovatelná. Dále máme

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(x_0 + t(x-x_0))\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{x-x_0}\left[\varphi(x_0 + t(x-x_0))\right]_{t=0}^1 = \frac{\varphi(x)}{x-x_0}, & x \neq x_0, \\ \varphi'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Proto má ψ kompaktní nosič, a je tedy prvkem $\mathscr{D}((a,b))$. Zjevně platí $\varphi(x) = (x-x_0)\psi(x)$. Nyní dostáváme

$$0 = (x-x_0)S(\psi) = S(x \mapsto (x-x_0)\psi(x)) = S(\varphi).$$

Tedy $\operatorname{Ker}\Lambda_{\delta_{x_0}} \subset \operatorname{Ker} S$. Dle Lemmatu FA.6.80 je $S = c\Lambda_{\delta_{x_0}}$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$.

□

PŘÍKLAD 9. Nalezněte všechna řešení zadaných rovnic pro $S \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$.

(a) $xS = \Lambda_1$.
(b) $xS' + S = 0$.
(c) $S' + xS = 0$.

ŘEŠENÍ. (a) Začněme citací Příkladu FA.7.25, z kterého plyne vztah $x\Lambda_{\frac{1}{x}} = \Lambda_1$. Dále si uvědomme, že $x\Lambda_{\delta_0}(\varphi) = \Lambda_{\delta_0}(x \mapsto x\varphi(x)) = 0$ pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Tedy $x(\Lambda_{\frac{1}{x}} + c\Lambda_{\delta_0}) = \Lambda_1$.

Obráceně, nechť S řeší rovnici $xS = \Lambda_1$. Pak pro distribuci $S - \Lambda_{\frac{1}{x}}$ platí $x\left(S - \Lambda_{\frac{1}{x}}\right) = xS - x\Lambda_{\frac{1}{x}} = 0$, a tedy z Příkladu 8 dostáváme, že $S - \Lambda_{\frac{1}{x}} = c\Lambda_{\delta_0}$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$. Celkem tak dostáváme, že všechna řešení zadané rovnice jsou tvaru $\Lambda_{\frac{1}{x}} + c\Lambda_{\delta_0}$, $c \in \mathbb{K}$.
(b) Dle Příkladu 7 je zadaná rovnice ekvivalentní $(xS)' = 0$. Tedy, dle Příkladu FA.7.24 rovnice je splněna, právě když $xS = c\Lambda_1$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$ a dle již dokázané části (a) tak dostáváme, že všechna řešení zadané rovnice jsou tvaru $c_1\Lambda_{\frac{1}{x}} + c_2\Lambda_{\delta_0}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.
(c) Uvědomme si, že řešením diferenciální rovnice $f' + xf(x) = 0$ je funkce $f(x) = e^{-x^2/2}$. Zkusme tedy ukázat, že všechna řešení zadané rovnice jsou regulární distribuce $c\Lambda_f$, $c \in \mathbb{K}$. Dle Příkladu 7 pro každou $S \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$ a každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí

$$(e^{x^2/2}S)'(\varphi) = \left(xe^{x^2/2}S + e^{x^2/2}S'\right)(\varphi) = e^{x^2/2}(xS + S')(\varphi) = (xS + S')(e^{x^2/2}\varphi(x))$$

a tedy snadno nahlédneme, že S řeší zadanou rovnici právě když $(e^{x^2/2}S)' = 0$. Tedy, dle Příkladu FA.7.24 rovnice je splněna, právě když $e^{x^2/2}S = c\Lambda_1$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$ a dle Příkladu 7 dostáváme že všechna řešení zadané rovnice jsou tvaru $cf(x)\Lambda_1 = c\Lambda_f$, $c \in \mathbb{K}$.

□

PŘÍKLAD 10. Nalezněte distribuci $\Lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$ splňující $\Lambda'' + \Lambda = \Lambda_{\delta_0}$ a $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každé $\varphi \in \mathscr{D}((-\infty,0))$.

ŘEŠENÍ. Jelikož každá funkce z $\operatorname{span}\{\cos,\sin\}$ řeší rovnici $y'' + y = 0$ na $\mathbb{R}$, budeme vzhledem k podmínce $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každé $\varphi \in \mathscr{D}((-\infty,0))$ uvažovat distribuci Λ_f, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0), \\ a\cos x + b\sin x, & x \in [0,\infty), \end{cases}$$

kde $a, b \in \mathbb{K}$ určíme tak, aby Λ_f řešila naši úlohu.

Pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ máme

$$\begin{aligned}(\Lambda_f'' + \Lambda_f)(\varphi) &= \int_0^\infty \varphi''(x)\,(a\cos x + b\sin x)\;\mathrm{d}\lambda_1(x) + \Lambda_f(\varphi) = \\ &= [\varphi'(x)(a\cos x + b\sin x)]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty \varphi'(x)(-a\sin x + b\cos x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) + \Lambda_f(\varphi) = \\ &= [\varphi'(x)(a\cos x + b\sin x)]_{x=0}^\infty - [\varphi(x)(-a\sin x + b\cos x)]_{x=0}^\infty + \\ &\quad + \int_0^\infty \varphi(x)(-a\cos x - b\sin x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) + \int_0^\infty \varphi(x)(a\cos x + b\sin x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \\ &= -\varphi'(0)(a) - (-\varphi(0)(b)) = b\varphi(0) - a\varphi'(0).\end{aligned}$$

Volbou $a = 0$ a $b = 1$ tak nalezneme požadovanou distribuci.

□

PŘÍKLAD 11. Nechť

$$f(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > |x|, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Dokažte, že pak distribuce Λ_f řeší rovnici $D^{(2,0)}\Lambda - D^{(0,2)}\Lambda = \Lambda_{\delta_{(0,0)}}$.

ŘEŠENÍ. Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ je dáno. Položme $\eta_1(s) = \varphi(s,s)$ a $\eta_2(s) = \varphi(-s,s)$, $s \in \mathbb{R}$. Pak máme

$$\begin{aligned}&\left(D^{(2,0)}\Lambda_f - D^{(0,2)}\Lambda_f\right)(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\int_{t>|x|} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}(x,t) - \int_{t>|x|} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}(x,t)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^\infty -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,|x|)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,t) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(-t,t)\right)\,\mathrm{d}t\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^0 -\partial_2\varphi(s,-s)\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty -\partial_2\varphi(s,s)\,\mathrm{d}s - \left(\int_0^\infty (\partial_1\varphi(t,t) - \partial_1\varphi(-t,t))\,\mathrm{d}t\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty -\partial_2\varphi(-s,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty -\partial_2\varphi(s,s)\,\mathrm{d}s - \int_0^\infty \partial_1\varphi(s,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty \partial_1\varphi(-s,s)\,\mathrm{d}s\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty (-\partial_2\varphi(-s,s) + \partial_1\varphi(-s,s))\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty (-\partial_2\varphi(s,s) - \partial_1\varphi(s,s))\,\mathrm{d}s\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[-\int_0^\infty \eta_2'(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^\infty \eta_1'(s)\,\mathrm{d}s\right] = \\ &= \frac{1}{2}(\eta_1(0) + \eta_2(0)) = \varphi((0,0)).\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

□

PŘÍKLAD 12. Nechť $f(x) = \|x\|^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^3$. Dokažte, že pak f je lokálně integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^3$ a distribuce Λ_f splňuje rovnice $\triangle\Lambda_f = -4\pi\Lambda_{\delta_{(0,0,0)}}$.

ŘEŠENÍ. Jelikož je f spojitá na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, stačí ověřit její itegrovatelnost na $B(0,1)$. Máme však pomocí sférických souřadnic rovnost

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|}\,\mathrm{d}\lambda_3(x) = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi \frac{r^2\sin\alpha}{r}\,\mathrm{d}\alpha\right)\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = 2\pi < +\infty.$$

Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ je dána. Označme $g(r) = r^{-1}$, $r \in (0,\infty)$. Pak $f(x) = g(\|x\|)$, a tedy mimo 0 platí vztahy

$$\partial_i f(x) = g'(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|} \quad \text{a} \quad \partial_{ii}(x) f = g''(\|x\|)\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right)^2 + g'(\|x\|)\left(\frac{\|x\| - \frac{x_i^2}{\|x\|}}{\|x\|^2}\right).$$

Tedy mimo 0 platí

$$\triangle f(x) = \sum_{i=1}^{3} \partial_{ii} f(x) = g''(\|x\|) + g'(\|x\|)\frac{1}{\|x\|^2}\left(3\|x\| - \frac{\|x\|^2}{\|x\|}\right) = g''(\|x\|) + g'(\|x\|)\frac{2}{\|x\|} =$$
$$= \frac{2}{\|x\|^3} - \frac{1}{\|x\|^2}\frac{2}{\|x\|} = 0.$$

Uvažujme nyní známý vzorec (známý pod názvem „Gaussova věta o divergenci“)

$$\int_\Omega \operatorname{div} h \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} \langle h, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2, \tag{1}$$

kde Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^3$ s hladkou hranicí, $h\colon G \to \mathbb{R}^3$ je spojitě diferencovatelné na otevřené $G \supset \overline{\Omega}$ a $\vec{n}$ je jednotkové normálové pole orientující $\partial\Omega$, které směřuje ven z množiny Ω. Položíme-li pro spojitě diferencovatelné funkce f, φ vektorovou funkci $h = f\nabla\varphi$, pak

$$\operatorname{div} h = \operatorname{div}(f\nabla\varphi) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i(f\partial_i\varphi) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i f \partial_i \varphi + f\sum_{i=1}^{3}\partial_{ii}\varphi = \langle \nabla f, \nabla\varphi\rangle + f\triangle\varphi.$$

Tedy máme z (1) rovnost

$$\int_{\partial\Omega} \langle f\nabla\varphi, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \int_\Omega \operatorname{div}(f\nabla\varphi) = \int_\Omega \langle\nabla f, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{d}\lambda_3 + \int_\Omega f\triangle\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3.$$

Prohozením f a φ dostáváme

$$\int_{\partial\Omega} \langle \varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \int_\Omega \langle\nabla f, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{d}\lambda_3 + \int_\Omega \triangle f\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3.$$

Z těchto dvou rovnic máme

$$\int_\Omega f\triangle\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} \langle f\nabla\varphi, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 - \int_\Omega \langle\nabla f, \nabla\varphi\rangle \,\mathrm{d}\lambda_3 =$$
$$= \int_{\partial\Omega} \langle f\nabla\varphi, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 - \int_{\partial\Omega} \langle\varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 + \int_\Omega \triangle f\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3.$$

Nyní můžeme přikročit k výpočtu $\triangle\Lambda_f(\varphi)$. Máme totiž

$$\triangle\Lambda_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} f\triangle\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0_+\\ R\to\infty}} \int_{\Omega(\varepsilon,R)} f\triangle\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3,$$

kde $\Omega(\varepsilon, R) = \{x \in \mathbb{R}^; \varepsilon \le \|x\| \le R\}$. Označme $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \|x\| = \varepsilon\}$ a podobně $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = R\}$. Pak dle předběžných výpočtů platí

$$\int_{\Omega(\varepsilon,R)} f\triangle\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\Omega(\varepsilon,R)} \triangle f\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3 + \int_{\partial\Omega(\varepsilon,R)} \langle f\nabla\varphi - \varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 =$$
$$= 0 + \int_{S_\varepsilon} \langle f\nabla\varphi - \varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 + \int_{S_R} \langle f\nabla\varphi - \varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2.$$

Jelikož $\operatorname{supp}\varphi$ je kompaktní, je

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \langle f\nabla\varphi - \varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = 0.$$

První část integrálu přes S_ε odhadneme následovně:

$$|\int_{S_\varepsilon} \langle f\nabla\varphi, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2| \le \|\nabla\varphi\|_\infty \int_{S_\varepsilon} |f| \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \|\nabla\varphi\|_\infty \frac{1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \underset{\varepsilon\to 0_+}{\to} 0.$$

Pro druhou část intregrálu přes S_ε použijeme rovnost

$$\int_{S_\varepsilon} \langle\varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \int_{S_\varepsilon} \langle\varphi(0)\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 + \int_{S_\varepsilon} \langle(\varphi - \varphi(0))\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2, \tag{2}$$

kde druhý integrál lze odhadnout pomocí K-lipschitzovskosti φ jako

$$|\int_{S_\varepsilon} \langle (\varphi - \varphi(0))\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2| \le K \int_{S_\varepsilon} \varepsilon |g'(\varepsilon)| \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = 4\pi K \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2 \underset{\varepsilon\to 0_+}{\to} 0$$

(v prvním odhadu jsme použili fakt $\partial_i f(x) = g'(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|}$ a $\vec{n}(x) = -\frac{1}{\|x\|}(x_1, x_2, x_3)$, takže

$$\langle \nabla f, \vec{n}\rangle = -g'(\|x\|)\frac{1}{\|x\|^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -g'(\|x\|).)$$

Nakonec spočteme limitu prvního integrálu v (2). Máme

$$\varphi(0)\int_{S_\varepsilon} \langle \nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \varphi(0)\int_{S_\varepsilon} -g'(\varepsilon)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \varphi(0)\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varphi(0).$$

Tedy

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{S_\varepsilon} \langle f\nabla\varphi - \varphi\nabla f, \vec{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2 = -4\pi\varphi(0).$$

Tím je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 13. Pro distribuci Λ na $\mathbb{R}^d$ a funkci $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ definujme zobrazení $\Lambda * \Lambda_\varphi : \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}$ předpisem

$$\Lambda * \Lambda_\varphi(\psi) := \Lambda(\tilde{\varphi} * \psi), \qquad \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Dokažte, že platí následující.

(a) $\Lambda * \Lambda_\varphi$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí $D^\alpha(\Lambda * \Lambda_\varphi) = (D^\alpha\Lambda) * \Lambda_\varphi$.
(b) Pokud $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_f * \Lambda_\varphi = \Lambda_{f*\varphi}$.
(c) $\Lambda_{\delta_0} * \Lambda_\varphi = \Lambda_\varphi$.

Aplikujte předchozí k důkazu následujícího tvrzení: Nechť $N \in \mathbb{N}$, $\{a_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N\} \subset \mathbb{K}$ a předpokládejme, že distribuce Λ v $\mathbb{R}^d$ splňuje rovnici

$$\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha \Lambda = \delta_0. \tag{3}$$

Pak pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ distribuce $\Lambda * \Lambda_\varphi$ splňuje rovnici

$$\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha(\Lambda * \Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi.$$

Navíc, pokud $\Lambda = \Lambda_f$ pro nějakou $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * \varphi$ řeší rovnici

$$\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha(f * \varphi) = \varphi.$$

(Poznámka: řešením rovnice (3) se proto říká *fundamentální řešení*. Uvědomte si v této souvislosti důležitost Příkladů 11 a 12, kde jsme našli fundamentální řešení jistých rovnic.)

ŘEŠENÍ.

(a) Dle Vět FA.5.11 a FA.5.7(b) platí, že $\tilde{\varphi} * \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a tedy je snadné si uvědomit, že $\Lambda * \Lambda_\varphi$ je dobře definovaná lineární funkce. Zvolme nyní kompakt $K \subset \mathbb{R}^d$. Pak dle Důsledku FA.7.15 existuje $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ splňující $|\Lambda(f)| \le C\|f\|_N$, $f \in \mathscr{D}(K + \operatorname{supp}\tilde{\varphi})$. Zároveň pro každé $\psi \in \mathscr{D}(K)$ dle Věty FA.5.7(b) dostáváme, že $\operatorname{supp}\tilde{\varphi} * \psi \subset K + \operatorname{supp}\tilde{\varphi}$ a tedy platí (ve výpočtu níže používáme použitím Věty FA.5.11 a FA.5.7(a))

$$|(\Lambda * \Lambda_\varphi)(\psi)| \le C\|\tilde{\varphi} * \psi\|_N = C\max_{|\alpha|\le N}\|\tilde{\varphi} * D^\alpha\psi\|_\infty \le C\|\tilde{\varphi}\|_1 \cdot \max_{|\alpha|\le N}\|D^\alpha\psi\|_\infty = C\|\tilde{\varphi}\|_1 \cdot \|\varphi\|_N.$$

Dle Důsledku FA.7.15 je tedy $\Lambda * \Lambda_\varphi$ distribucí na $\mathbb{R}^d$.

Zároveň, pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ máme

$$\begin{aligned} D^\alpha(\Lambda * \Lambda_\varphi)(\psi) &= (-1)^{|\alpha|}(\Lambda * \Lambda_\varphi)(D^\alpha\psi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(\tilde{\varphi} * D^\alpha\psi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha(\tilde{\varphi} * \psi)) \\ &= D^\alpha\Lambda(\tilde{\varphi} * \psi) = (D^\alpha\Lambda * \Lambda_\varphi)(\psi). \end{aligned}$$

(b) Pro $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\begin{aligned} \Lambda_f * \Lambda_\varphi(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\tilde{\varphi} * \psi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\psi * \tilde{\varphi})(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\varphi(y-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)(f * \varphi)(y)\,\mathrm{d}y = \Lambda_{f*\varphi}(\psi) \end{aligned}$$

a tedy $\Lambda_f * \Lambda_\varphi = \Lambda_{f*\varphi}$.

(c) Pro $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\Lambda_{\delta_0} * \Lambda_\varphi(\psi) = (\tilde{\varphi} * \psi)(0) = (\psi * \tilde{\varphi})(0)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\varphi(y-0)\,\mathrm{d}y = \Lambda_\varphi(\psi)$$

a tedy $\Lambda_{\delta_0} * \Lambda_\varphi = \Lambda_\varphi$.

Pokud distribuce Λ v $\mathbb{R}^d$ splňuje rovnici (3), pak

$$\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha(\Lambda * \Lambda_\varphi) \overset{(a)}{=} \Big(\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha\Lambda\Big) * \Lambda_\varphi = \Lambda_{\delta_0} * \Lambda_\varphi \overset{(c)}{=} \Lambda_\varphi.$$

Konečně, pokud $\Lambda = \Lambda_f$ pro nějakou $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak dle (b) máme $\Lambda_f * \Lambda_\varphi = \Lambda_{f*\varphi}$ a tedy s použitím předchozího a Tvrzení FA.7.22 dostáváme, že pro funkci $g = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha(f*\varphi)$ platí

$$\Lambda_g = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha \Lambda_{D^\alpha(f*\varphi)} = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha \Lambda_{f*\varphi} = \Lambda_\varphi.$$

Dle Poznámky FA.7.18 tedy $g = \varphi$ skoro všude a ze spojitosti funkcí g a φ tak dostáváme, že $g = \varphi$ všude.

□

3. Temperované distribuce

PŘÍKLAD 14. Nechť Λ_n je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}$ generovaná funkcí $x \mapsto e^{inx}$. Dokažte, že pak posloupnost $\{\Lambda_n\}$ konverguje k 0 v $\mathscr{S}_1^*$, přestože funkce e^{inx} nekonvergují bodově k 0.

ŘEŠENÍ. Pro $\varphi \in \mathscr{S}_1$ máme

$$\Lambda_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{inx}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \widehat{\varphi}(-n) \to 0,$$

neboť $\widehat{\varphi} \in C_0(\mathbb{R})$. Na druhou stranu, $|e^{inx}| = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, tedy funkce $x \mapsto e^{inx}$ nekonvergují bodově k 0.

□

PŘÍKLAD 15. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$ splňuje $\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu_d = 1$. Položme pro $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = n^d f(nx)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Dokažte, že pak temperované distribuce Λ_{f_n} konvergují v $\mathscr{S}_d^*$ k Λ_{δ_0}.

ŘEŠENÍ. Nechť $\varphi \in \mathscr{S}_d$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pomocí Lebesgueovy věty nalezneme $r > 0$ takové, že $\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r)}|f|\,\mathrm{d}\mu_d < \varepsilon$. Nechť $\delta > 0$ je zvoleno tak, že $|\varphi(z) - \varphi(0)| < \varepsilon$, kdykoliv $\|z\| < \delta$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$

splňuje $\frac{r}{n_0} < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ dostáváme

$$\begin{aligned}
|(\Lambda_{f_n} - \Lambda_{\delta_0})(\varphi)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^d} \varphi f_n \,\mathrm{d}\mu_d - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0) f \,\mathrm{d}\mu_d\Big| = \\
&= \Big|\int_{R^d} \varphi(\frac{y}{n}) f(y) \,\mathrm{d}\mu_d(y) - \int_{R^d} \varphi(0) f(y) \,\mathrm{d}\mu_d(y)\Big| \leq \\
&\leq \int_{R^d} |f(y)||\varphi(\frac{y}{n}) - \varphi(0)| \,\mathrm{d}\mu_d(y) \leq \\
&\leq \int_{B(0,r)} |f(y)||\varphi(\frac{y}{n}) - \varphi(0)| \,\mathrm{d}\mu_d(y) + \int_{R^d \setminus B(0,r)} |f(y)||\varphi(\frac{y}{n}) - \varphi(0)| \,\mathrm{d}\mu_d(y) \leq \\
&\leq \int_{B(0,r)} |f(y)| \varepsilon \,\mathrm{d}\mu_d(y) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} |f(y)| 2\|\varphi\|_\infty \,\mathrm{d}\mu_d(y) \leq \\
&\leq \varepsilon \left(\|f\|_{L_1(\mu_d)} + 2\|\varphi\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

□

PŘÍKLAD 16. Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $f \geq 0$. Dokažte, že pak Λ_f je temperovaná distribuce právě když existují $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ splňující

$$\forall R \geq 1 : \quad \int_{U(0,R)} f(x) \,\mathrm{d}x \leq C(1+R)^N. \tag{4}$$

DŮKAZ. V našem řešení použijeme charakterizaci temperovaných distribucí z Příkladu FA.7.47. Předpokládejme nejprve, že Λ_f je temperovaná distribuce a tedy existují $A > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ splňující $|\Lambda_f(\varphi)| \leq A\nu_N(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Zvolme $\psi \in \mathscr{D}(B(0,2))$ takovou, že $\psi|_{B(0,1)} \equiv 1$ a označme $C := A \cdot 4^N \cdot \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \psi\|$. Pak pro každé $R > 0$ platí

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{U(0,R)} f(x) \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi(\tfrac{x}{R}) \,\mathrm{d}x \leq A\nu_N(\psi(\tfrac{\cdot}{R})) \leq A(1+4R^2)^N \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \psi(\tfrac{\cdot}{R})\| \\
&\leq C(1+R^2)^N \leq C(1+R)^{2N}.
\end{aligned}$$

Naopak, nechť existují $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ splňující (4). Pak pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
|\Lambda_f(\varphi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)|\varphi(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_{U(0,1)} f(x)|\varphi(x)| \,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{x;\ 2^k \leq \|x\| < 2^{k+1}\}} f(x)|\varphi(x)| \,\mathrm{d}x \\
&\leq C2^N \nu_0(\varphi) + C \sum_{k=0}^{\infty} (1+2^{k+1})^N \sup_{\{x;\ 2^k \leq \|x\| < 2^{k+1}\}} |\varphi(x)| \\
&\leq C2^N \nu_0(\varphi) + C \sum_{k=0}^{\infty} (3 \cdot 2^k)^N \sup_{\{x;\ 2^k \leq \|x\| < 2^{k+1}\}} |\varphi(x)| \\
&\leq 3^N \cdot C\Big(\nu_0(\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{\{x;\ 2^k \leq \|x\| < 2^{k+1}\}} \|x\|^{N+1} |\varphi(x)|\Big) \leq 3^N \cdot C \cdot 2 \cdot \nu_{N+1}(\varphi),
\end{aligned}$$

a tedy Λ_f je temperovaná distribuce.

□

PŘÍKLAD 17. Uvažujme funkce $f(x) = e^x$ a $g(x) = e^x \cos(e^x)$. Dokažte, že pak f negeneruje temperovanou distribuci na $\mathbb{R}$, zatímco g ano.

DŮKAZ. Funkce $h(x) = \sin(e^x)$ generuje temperovanou distribuci dle Příkladu FA.7.46. Její derivace je tedy též temperovaná distribuce. Ta je však rovna Λ_g, neboť

$$\Lambda_h'(\varphi) = (-1)\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) h(x) \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) h'(x) \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \Lambda_g(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}_1.$$

Tedy Λ_g je temperovaná distribuce.

Abychom ukázali, že f negeneruje temperovanou distribuci, použijeme Příklad 16. Zvolme $N \in \mathbb{N}_0$. Pak platí

$$\frac{1}{(1+R)^N} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^R - e^{-R}}{(1+R)^N} \overset{R\to\infty}{\to} \infty,$$

a tedy Λ_f není temperovaná distribuce.

□

PŘÍKLAD 18. Nechť Λ_{δ_0} značí temperovanou distribuci na $\mathbb{R}$ danou Diracovou mírou v bodě 0 a Λ_1 nechť je regulární distribuce na $\mathbb{R}$ generovaná konstantní funkcí $x \mapsto 1$ (viz Příklady FA.7.46). Dokažte, že pak

$$\widehat{\Lambda_{\delta_0}} = \Lambda_1 \quad \text{a} \quad \widehat{\Lambda_1} = \Lambda_{\delta_0}.$$

ŘEŠENÍ. Pro výpočet první rovnosti vezmeme $\varphi \in \mathscr{S}_1$ a počítáme

$$\widehat{\Lambda_{\delta_0}}(\varphi) = \Lambda_{\delta_0}(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i0x}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \Lambda_1(\varphi).$$

Pro důkaz druhé nerovnosti opět uvážíme $\varphi \in \mathscr{S}_1$ a za pomoci Věty FA.7.42 dostáváme

$$\begin{aligned}\widehat{\Lambda_1}(\varphi) = \Lambda_1(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)\,\mathrm{d}\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t) e^{-i0t}\,\mathrm{d}\mu_1(t) = \widehat{\widehat{\varphi}}(0) = \\ = \varphi(-0) = \varphi(0) = \Lambda_{\delta_0}(\varphi).\end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 19. Pro $\Lambda \in \mathscr{S}_d^*$ definujme $\tilde{\Lambda} \colon \mathscr{S}_1 \to \mathbb{K}$ jako $\tilde{\Lambda}(\varphi) = \Lambda(\tilde{\varphi})$, $\varphi \in \mathscr{S}_d$. Dokažte, že pak platí následující.

(a) $\tilde{\Lambda}$ je temperovaná distribuce a pro $f \in L_p(\mu_d)$, $1 \le p \le \infty$, platí $\widetilde{\Lambda_f} = \Lambda_{\tilde{f}}$.

(b) $\widehat{\widehat{\Lambda}} = \widetilde{\Lambda}$.

ŘEŠENÍ. (a) Zobrazení $\tilde{\Lambda}$ je zjevně lineární na $\mathscr{S}_1$. Je-li $\{\varphi_n\}$ posloupnost v $\mathscr{S}_d$ konvergující v σ k 0, je dle Vět FA.7.38 a FA.7.39(a) posloupnost $\{\widetilde{\varphi_n}\}$ v $\mathscr{S}_d$ a konverguje k 0. Tedy $\tilde{\Lambda}(\varphi_n) = \Lambda(\widetilde{\varphi_n}) \to 0$, a $\tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}_d^*$.

Je-li $f \in L_p(\mu_1)$ pro nějaké $p \in [1, \infty]$, máme

$$\widetilde{\Lambda_f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\varphi} f\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu_d = \Lambda_{\tilde{f}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}_d.$$

(b) Pro $\varphi \in \mathscr{S}_d$ máme

$$\widehat{\widehat{\Lambda}}(\varphi) = \Lambda(\widehat{\widehat{\varphi}}) = \Lambda(\tilde{\varphi}) = \tilde{\Lambda}(\varphi),$$

tj. (b) je ověřeno.

□

PŘÍKLAD 20. Dokažte, že $\widehat{\Lambda_{\sin}} = \frac{1}{2i}\left(\Lambda_{\delta_1} - \Lambda_{\delta_{-1}}\right)$.

ŘEŠENÍ. Nejprve si povšimneme, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\widehat{\Lambda_{\delta_x}}(\varphi) = \Lambda_{\delta_x}(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-ixt}\,\mathrm{d}\mu_1(t) = \Lambda_{t\mapsto e^{-ixt}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}_1.$$

Tedy $\widehat{\Lambda_{\delta_x}} = \Lambda_{t\mapsto e^{-ixt}}$.

Použijme tento fakt k odvození

$$\Lambda_{\sin t} = \Lambda_{\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})} = \frac{1}{2i}\left(\Lambda_{t\mapsto e^{i1t}} - \Lambda_{t\mapsto e^{-i1t}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\widehat{\Lambda_{\delta_{-1}}} - \widehat{\Lambda_{\delta_1}}\right).$$

Opětovnou aplikací Fourierovy transformace dostáváme díky Příkladu 19 rovnosti

$$\widehat{\Lambda_{\sin}} = \frac{1}{2i}\left(\widehat{\widehat{\Lambda_{\delta_{-1}}}} - \widehat{\widehat{\Lambda_{\delta_1}}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\widetilde{\Lambda_{\delta_{-1}}} - \widetilde{\Lambda_{\delta_1}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\Lambda_{\delta_1} - \Lambda_{\delta_{-1}}\right),$$

kde jsme přitom použili rovnost $\widetilde{\Lambda_{\delta_x}} = \Lambda_{\delta_{-x}}$. (Ta plyne z výpočtu

$$\widetilde{\Lambda_{\delta_x}}(\varphi) = \Lambda_{\delta_x}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x) = \Lambda_{\delta_{-x}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}_1.)$$

□

PŘÍKLAD 21. Nechť $f = \chi_{(-1,1)}$ a $g = \widehat{f}$. Pak $g = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} \in L_2(\mu_1)$ (viz Příklad 5.1). Tedy $\Lambda_g \in \mathscr{S}_1^*$ (viz Příklady FA.7.46). Dokažte, že pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_f$.

ŘEŠENÍ. Použijeme fakt $(N) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ k odvození

$$(N) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -\pi, & k < 0. \end{cases}$$

(Zde $(N) \int$ značí Newtonův integrál, odvození vzorce výše je snadné a proto jej zde podrobněji neuvádíme.)

Uvažujme nyní funkci

$$F(k) = \lim_{\substack{r \to 0_+ \\ R \to \infty}} \int_{I_{r,R}} \frac{e^{ikx}}{x} \, \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{R},$$

kde pro $0 < r < R$ značíme $I_{r,R} = (-R, -r) \cup (r, R)$. Pak díky lichosti funkce $\frac{\cos(kx)}{x}$ a existenci integrálů $(N) \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(kx)}{x} \, \mathrm{d}x$, $(N) \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{x} \, \mathrm{d}x$ dostáváme

$$F(k) = \lim_{\substack{r \to 0_+ \\ R \to \infty}} \int_{I_{r,R}} \frac{e^{ikx}}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{r \to 0_+ \\ R \to \infty}} \left(\int_{I_{r,R}} \frac{\cos(kx)}{x} \, \mathrm{d}x + i \int_{I_{r,R}} \frac{\sin(kx)}{x} \right) = i \lim_{\substack{r \to 0_+ \\ R \to \infty}} \int_{I_{r,R}} \frac{\sin(kx)}{x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= i(N) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x} = \begin{cases} i\pi, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -i\pi, & k < 0. \end{cases}$$

Dále, označme pro $0 < r < R$ a $k \in \mathbb{R}$ výraz $B(r, R, k) = \int_{I_{r,R}} \frac{\sin x}{x} e^{ikx} \, \mathrm{d}x$. Pak

$$B(r, R, k) = \int_{I_{r,R}} \frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right) e^{ikx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2i} \left(\int_{I_{r,R}} \frac{e^{i(k+1)x}}{x} - \int_{I_{r,R}} \frac{e^{i(k-1)x}}{x} \right),$$

a tedy

$$\lim_{\substack{r \to 0_+ \\ R \to \infty}} B(r, R, k) = \frac{1}{2i} \left(F(k+1) - F(k-1) \right) = \begin{cases} 0, & |k| > 1, \\ \frac{\pi}{2}, & |k| = 1, \\ \pi, & k \in (-1, 1). \end{cases} \tag{5}$$

Nechť F značí Fourierovu transformaci na $L_2(\mu_1)$. Dle Věty FA.7.50(a) platí $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$. Stačí tedy spočítat $F(g)$. Uvažujme $g_n = g\chi_{(-n,n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $g_n \in L_1(\mu_1)$, a tedy $F(g_n) = \widehat{g_n}$. Dle (5) pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{g_n}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-n}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} e^{-itx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \frac{\sin x}{x} e^{-itx} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi} (N) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-itx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{r \to 0_+ \\ R \to \infty}} B(r, R, -t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1, \\ 1, & t \in (-1, 1), \end{cases}$$

a tedy funkce $\{\widehat{g_n}\}$ konvergují pro n jdoucí do nekonečna k funkci f skoro všude. Dle Příkladu FA.5.32 platí $Fg = f$ skoro všude. Tedy $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_f$.

□

PŘÍKLAD 22. Nechť temperovaná distribuce Λ splňuje rovnici $\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha \Lambda = 0$ (kde $(a_\alpha)_{|\alpha|\le N}$ je konečná posloupnost v $\mathbb{K}$). Uvažujme pak polynom $P(x) = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha (ix)^\alpha$. Dokažte, že platí následující.

(a) Pokud polynom P nemá žádné kořeny v $\mathbb{R}^d$, pak $\Lambda = 0$.
(b) Pokud polynom P nemá kořeny v $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, pak $\Lambda = \Lambda_Q$ pro nějaký polynom Q.
(c) Aplikujte předchozí k důkazu následujícího zobecnění Liouvilleovy věty: Nechť holomorfní funkce $f \in H(\mathbb{C})$ pro nějaká $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ splňuje, že $|f(x)| \le C(1+|x|)^N$, $x \in \mathbb{C}$. Pak $\varphi(x,y) = f(x+iy)$ je polynom stupně nejvýše N.

ŘEŠENÍ. Aplikací Fourierovy transformace na rovnici $\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha D^\alpha \Lambda = 0$ dle Věty FA.7.50 dostáváme, že $P(x)\widehat{\Lambda} = 0$. Přistupme nyní k důkazu jednotlivých tvrzení.
(a) Pokud polynom P nemá žádné kořeny v $\mathbb{R}^d$, pak pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je $\frac{\varphi}{P} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a tedy $\widehat{\Lambda}(\varphi) = P(x)\widehat{\Lambda}(\frac{\varphi}{P}) = 0$. Tedy $\widehat{\Lambda} = 0$ a proto $\Lambda = 0$.
(b) Pokud polynom P nemá žádné kořeny v $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, pak analogicky jako výše dostaneme, že $\widehat{\Lambda}(\varphi) = 0$ kdykoliv $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Tedy, $\widehat{\Lambda}$ je nulová na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ a proto $\operatorname{supp} \widehat{\Lambda} \subset \{0\}$. Dle Věty FA.7.33 je tedy $\widehat{\Lambda} = \sum_{|\alpha|\le M} b_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_0}$ pro nějakou konečnou posloupnost $(b_\alpha)_{|\alpha|\le M}$ v $\mathbb{K}$. Pak ale dle Věty FA.7.50 je $\widehat{\widehat{\Lambda}} = Q\widehat{\Lambda_{\delta_0}}$ pro nějaký polynom Q. Zároveň ale

$$\widehat{\Lambda_{\delta_0}}(\varphi) = \Lambda_{\delta_0}(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i.\langle 0,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d = \Lambda_1(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$$

a proto dle Příkladu 19 dostáváme $\tilde{\Lambda} = \widehat{\widehat{\Lambda}} = Q\Lambda_1 = \Lambda_Q$ pro nějaký polynom Q, a tedy $\Lambda = \Lambda_{\tilde{Q}}$.
(c) Pokud je $f \in H(\mathbb{C})$, pak pro $\varphi(x,y) := f(x+iy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dostáváme, že $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a z Cauchy-Riemanových podmínek $\partial_1\varphi + i\partial_2\varphi = 0$. Zároveň z předpokladu vidíme, že φ je majorizovaná polynomem a tedy Λ_φ je temperovaná distribuce, která splňuje rovnici $\partial_1\Lambda_\varphi + i\partial_2\Lambda_\varphi = 0$. Protože polynom $P(x) = -ix + y$ nemá kořeny v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dostáváme z (b), že $\Lambda_\varphi = \Lambda_Q$ pro nějaký polynom, tedy $\varphi = Q$ skoro všude a ze spojitosti tak dostáváme, že φ je polynomem. Konečně, z podmínky $|f(x)| \le C(1+|x|)^N$ dostáváme, že stupeň polynomu φ je nejvýše N.

□

PŘÍKLAD 23 (Další příklady k procvičení - s výsledky, bez podrobného řešení).

(a) Které z následujících předpisů definují distribuci na $\mathbb{R}$ a které definují distribuci na $(0,\infty)$? Pokud předpis definuje distribuci, rozhodněte zda má tato distribuce konečný řád.
   (i) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty n\varphi^{(n)}(n)$.
   (ii) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\varphi(\frac{1}{n})$.
   (iii) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.
(b) Nalezněte všechna řešení následujících rovnic pro $S \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$.
   (i) $S' = \Lambda_{\delta_{x_0}}$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.
   (ii) $S'' = \Lambda_{\delta_{x_0}}$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.
   (iii) $(1+x)^2 S'' = 0$.
   (iv) $(x-1)S = \Lambda_1$.
(c) Uvažujte funkci

$$f(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}), & t > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

   Dokažte, že $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ a že distribuce Λ_f je řešením rovnice $\partial_t\Lambda - \partial_x^2\Lambda = \Lambda_{\delta_{(0,0)}}$.
(d) Které z následujících předpisů definují temperovanou distribuci na $\mathbb{R}$?
   (i) $\Lambda(\varphi) := \sum_{j=-\infty}^\infty j^2\varphi(j)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
   (ii) $\Lambda(\varphi) := \sum_{j=-\infty}^\infty e^j\varphi(j)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
   (iii) $\Lambda(\varphi) := \int_0^{10} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{10}^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

VÝSLEDKY. (a) předpis (i) definuje distribuci na $\mathbb{R}$ řádu nekonečno; (ii) nedefinuje distribuci na $\mathbb{R}$, definuje distribuci řádu 0 na $(0,\infty)$; (iii) nedefinuje distribuci na $\mathbb{R}$, definuje distribuci řádu nekonečno na $(0,\infty)$.

(b) S řeší rovnici (i) právě když $S \in \{\Lambda_{[x_0,\infty)]} + c\Lambda_1;\ c \in \mathbb{K}\}$; rovnici (ii) právě když $S \in \{(x-x_0)\Lambda_{[x_0,\infty)]} + c\Lambda_1 + d\Lambda_x;\ c,d \in \mathbb{K}\}$; rovnici (iii) právě když $S \in \operatorname{span}\{\Lambda_1, \Lambda_x, \Lambda_{[-1,\infty)}, (1+x)\Lambda_{[-1,\infty)}\}$; a rovnici (iv) právě když $S \in \{\Lambda_{\frac{1}{x-1}} + c\Lambda_1;\ c \in \mathbb{K}\}$, kde $\Lambda_{\frac{1}{x-1}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(1-\varepsilon,1+\varepsilon)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

(c) Postup je analogický jako u Příkladu 12, jen není třeba používat Gaussovu větu o divergenci.

(d) předpisy (i) a (iii) definují temperovanou distribuci na $\mathbb{R}$, předpis (ii) nikoliv.

$\square$

Kapitola 8

Bochnerův integrál

1. Měřitelná zobrazení

PŘÍKLAD 1. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. slabě k $f \in Æ(\Omega, X)$. Dokažte, že pak f je silně měřitelné.

ŘEŠENÍ. Použijeme Pettisovu větu (Věta FA.8.17). Je-li $\phi \in X^*$, pak $\{\phi \circ f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí konvergující bodově s. v. k funkci $\phi \circ f$. Tedy $\phi \circ f$ je měřitelná, odkud plyne, že f je slabě měřitelné.

Dle předpokladu existuje množina E_0 míry nula taková, že $f_n(\omega)$ konverguje slabě k $f(\omega)$ pro $\omega \notin E_0$. Dále existují $E_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(E_n) = 0$ a $f_n(\Omega \setminus E_n)$ je separabilní. Položme $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$. Pak $\mu(E) = 0$. Díky Větě FA.6.93(a) platí, že $f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \setminus E_n)}^{w} \subset \overline{\operatorname{span}}^{w} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \setminus E_n) = \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \setminus E_n)$. Odtud plyne separabilita $f(\Omega \setminus E)$. Dle Věty FA.8.17 je tedy f silně měřitelné.

□

PŘÍKLAD 2. Nechť K je metrizovatelný Hausdorffův kompaktní prostor a $X = C(K, \mathbb{K})$ je prostor všech spojitých funkcí se supremovou normou. Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor a $f\colon \Omega \to X$ je zobrazení. Dokažte, že pak f je slabě měřitelné právě tehdy, když pro každé $k \in K$ je zobrazení $\omega \mapsto f(\omega)(k)$ měřitelné (jakožto zobrazení z Ω do $\mathbb{K}$).

ŘEŠENÍ. $\Rightarrow$ Je-li $k \in K$, je Diracova míra $\delta_k \in M(K, \mathbb{K}) = (C(K, \mathbb{K}))^*$, a tedy $\delta_k \circ f$ je slabě měřitelné zobrazení.

$\Leftarrow$ Nechť

$$M = \left\{ \mu \in M(K, \mathbb{K});\ \omega \mapsto \int_K f(\omega)\, \mathrm{d}\mu \text{ je měřitelné z } \Omega \text{ do } \mathbb{K} \right\}.$$

Pak M je podprostor $M(K, \mathbb{K})$ obsahující všechny Diracovy míry (dle předpokladu) a uzavřený na limity w^*-konvergentních posloupností. Nechť D značí množinu všech Diracových měr. Pak $D_\circ = B_{C(K,\mathbb{K})}$ z definice. Tedy dle věty o bipoláře (Věta FA.6.110) platí

$$\overline{\operatorname{aconv} D}^{w^*} = \overline{\operatorname{aconv}}^{w^*} D = (D_\circ)^\circ = (B_{C(K,\mathbb{K})})^\circ = B_{M(K,\mathbb{K})}.$$

Tedy $\operatorname{aconv} D$ je w^*-hustý v $B_{M(K,\mathbb{K})}$. Jelikož je K metrizovatelný, je $C(K, \mathbb{K})$ separabilní, a tedy je $(B_{M(K,\mathbb{K})}, w^*)$ metrizovatelná množina (Tvrzení FA.6.119(a)). Proto z předchozího plyne, že pro každou $\mu \in B_{M(K,\mathbb{K})}$ existuje posloupnost $\{\mu_j\} \subset \operatorname{aconv} D \subset M$, která splňuje $\mu_j \xrightarrow{w^*} \mu$. Tedy $\mu \in M$. Jelikož je M podprostor $M(K, \mathbb{K})$, platí $M = M(K, \mathbb{K})$.

□

PŘÍKLAD 3. Uvažujme prostor $([0,1], \Sigma, \lambda)$, kde λ je Lebesgueova míra na $[0,1]$ a $X = C([0,1], \mathbb{K})$. Nechť $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{K}$ je funkce. Dokažte, že pak zobrazení $\Phi\colon t \mapsto f(t, \cdot)$ z $[0,1]$ do X je silně měřitelné, právě když platí následující podmínky:

- $u \mapsto f(t, u)$ je spojitá na $[0,1]$ pro každé $t \in [0,1]$,
- $t \mapsto f(t, u)$ je lebesgueovsky měřitelná pro každé $u \in [0,1]$.

ŘEŠENÍ. $\Rightarrow$ Jelikož Φ má hodnoty v X, musí být pro každé $t \in [0,1]$ funkce $u \mapsto f(t, u)$ spojitá. Dále, pro $u \in [0,1]$ je funkce $t \mapsto \Phi(t, \cdot)(u) = f(t, u)$ lebesgueovsky měřitelná dle Příkladu 2.

$\Leftarrow$ Předpokládejme nyní platnost našich podmínek. Z první plyne, že Φ má hodnoty v X. Z druhé pak vyplývá, že pro každé $u \in [0,1]$ je $t \mapsto \Phi(t)(u) = \Phi(t, \cdot)(u) = f(t, u)$ lebesgueovsky měřitelné. Tedy opět díky Příkladu 2 ($[0,1]$ je metrizovatelný kompakt) dostáváme slabou měřitelnost Φ. Jelikož je však X separabilní, je Φ silně měřitelné díky Větě FA.8.17.

□

PŘÍKLAD 4. Nechť $(\Omega, \Sigma\,\lambda)$ je interval $(0,\infty)$ s Lebesgueovou mírou λ a $X = L_\infty((0,\infty))$. Nechť $\psi\colon \Omega \to \mathbb{K}$ je funkce a $\Phi\colon \Omega \to X$ je definováno jako $\Phi(\omega) = \psi(\omega)\chi_{(0,\omega)}$. Dokažte, že pak Φ je silně měřitelné právě tehdy, když $\psi = 0$ λ-skoro všude.

ŘEŠENÍ. Pokud $\psi = 0$ λ-skoro všude, je $\Phi = 0$ skoro všude a tedy je silně měřitelná. Obráceně, nechť $\psi \neq 0$ λ-skoro všude. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že množina $A = \{\omega \in \Omega;\ |\psi(\omega)| \geq \delta\}$ má λ-míru kladnou. Pro $\omega_1, \omega_2 \in A$ splňující $\omega_1 < \omega_2$ však platí

$$\|\Phi(\omega_2) - \Phi(\omega_1)\|_X \geq \|\psi(\omega_2)\chi_{(\omega_1,\omega_2)}\|_X \geq \delta.$$

Tedy pro každou $A' \subset \Omega$ λ-míry 0 je $\Phi(A \setminus A')$ nespočetná δ-diskrétní množina v X. Tedy Φ není silně měřitelná dle Věty FA.8.17(ii).

□

2. Bochnerův integrál

PŘÍKLAD 5. Nechť $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou λ, $X = L_p((0,1))$ pro $p \in [1,\infty)$ Nechť $\psi\colon \Omega \to \mathbb{K}$ je funkce a $\Phi\colon \Omega \to X$ je definováno jako

$$\Phi(\omega)\colon u \mapsto \psi(\omega)\chi_{(0,\omega)}(u), \quad u \in (0,1).$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení.

(a) Zobrazení Φ má hodnoty v X a je slabě měřitelné, právě když ψ je lebesgueovsky měřitelná.
(b) Je-li ψ lebesgueovsky měřitelná, je Φ silně měřitelné. Pak je Φ bochnerovsky integrovatelné právě tehdy, když $\int_0^1 |\psi(\omega)|\omega^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}\lambda(\omega) < +\infty$.
(c) Je-li Φ bochnerovsky integrovatelné a $\Psi\colon u \mapsto \int_u^1 \psi(\omega)\,\mathrm{d}\lambda(\omega)$, $u \in (0,1)$, pak $\Psi \in X$ a $\int_\Omega \Phi\,\mathrm{d}\lambda = \Psi$.

ŘEŠENÍ. (a) Zjevně jsou hodnoty $\Phi(\omega) = \psi(\omega)\chi_{(0,\omega)}$ v X.

Je-li ψ lebesgueovsky měřitelná a $g \in X^* = L_q((0,1))$ (zde q je sdružený exponent k p), platí pro $\omega \in (0,1)$ vztah

$$g(\Phi(\omega)) = \int_0^1 \Phi(\omega) g\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \psi(\omega)\chi_{(0,\omega)}(u)g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u) = \psi(\omega)\int_0^\omega g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u).$$

Tedy $\omega \mapsto g(\Phi(\omega))$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, neboť $\omega \mapsto \psi(\omega)$ je lebesgueovsky měřitelná a $\omega \mapsto \int_0^\omega g\,\mathrm{d}\lambda$ je absolutně spojitá ($g \in L_q((0,1)) \subset L_1((0,1))$). Proto je Φ slabě měřitelné.

Obráceně, je-li Φ slabě měřitelné a $g = \chi_{(0,1)} \in X^*$, máme z předcházejícího vzorce vztah $g(\Phi(\omega)) = \psi(\omega)\omega$. Tedy $\psi(\omega) = \frac{g(\Phi(\omega))}{\omega}$ je lebesgueovsky měřitelná.

(b) Silná měřitelnost Φ nyní plyne z (a) a Věty FA.8.17. Podle Věty FA.8.28 je Φ bochnerovsky integrovatelné, právě když $\int_\Omega \|\Phi(\omega)\|_X\,\mathrm{d}\lambda(\omega) < +\infty$. Máme však

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|\Phi(\omega)\|_X\,\mathrm{d}\lambda(\omega) &= \int_{(0,1)} \left(\int_0^1 |\Phi(\omega)(u)|^p\,\mathrm{d}\lambda(u)\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\lambda(\omega)\\ &= \int_{(0,1)} \left(\int_0^1 |\psi(\omega)\chi_{(0,\omega)}(u)|^p\,\mathrm{d}\lambda(u)\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\lambda(\omega)\\ &= \int_{(0,1)} \left(|\psi(\omega)|\int_0^\omega 1\,\mathrm{d}\lambda(u)\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\lambda(\omega) = \int_0^1 |\psi(\omega)|\omega^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}\lambda(\omega),\end{aligned}$$

odkud tvrzení (b) plyne.

(c) Označme $\tilde{\Psi} = \int_\Omega \Phi \,\mathrm{d}\lambda$, což je dle předpokladu prvek X. Jelikož $\psi(\omega)\omega^{\frac{1}{p}}$ je v $L_1((0,1))$, je ψ v $L_1((u,1))$ pro každé $u \in (0,1)$. Tedy funkce Ψ je absolutně spojitá na $(u,1)$ pro každé $u \in (0,1)$, z čehož plyne její spojitost na $(0,1)$. Tedy Ψ je lebesgueovsky měřitelná na $(0,1)$.

Pro každé $g \in X^*$ pak platí

$$\begin{aligned} g(\tilde{\Psi}) &= \int_\Omega g(\Phi(\omega)) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) = \int_0^1 \left(\int_0^\omega \psi(\omega) g(u) \,\mathrm{d}\lambda(u) \right) \mathrm{d}\lambda(\omega) \\ &= \int_0^1 g(u) \left(\int_u^1 \psi(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(\omega) \right) \mathrm{d}\lambda(u) = \int_0^1 g(u)\Psi(u) \,\mathrm{d}\lambda(u). \end{aligned}$$

(Fubiniovu věta lze použít, jelikož díky Hölderově nerovnosti platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\omega |\psi(\omega)||g(u)| \,\mathrm{d}\lambda(\omega) \,\mathrm{d}\lambda(u) &= \int_0^1 |\psi(\omega)\omega^{\frac{1}{p}}|\omega^{\frac{-1}{p}} \left(\int_0^\omega |g(u)| \,\mathrm{d}\lambda(u) \right) \mathrm{d}\lambda(\omega) \\ &\le \int_0^1 |\psi(\omega)\omega^{\frac{1}{p}}|\omega^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{X^*} \left(\int_0^\omega 1^p \,\mathrm{d}\lambda(u) \right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\lambda(\omega) \\ &\le \int_0^1 |\psi(\omega)\omega^{\frac{1}{p}}|\omega^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{X^*} \omega^{\frac{1}{p}} \,\mathrm{d}\lambda(\omega) \\ &= \|g\|_X^* \int_0^1 |\psi(\omega)\omega^{\frac{1}{p}}| \,\mathrm{d}\lambda(\omega) < +\infty.) \end{aligned}$$

Tedy pro každou $E \subset (0,1)$ měřitelnou platí (funkce $g = \chi_E$ je v X^*) $\int_E \tilde{\Psi} \,\mathrm{d}\lambda = \int_E \Psi \,\mathrm{d}\lambda$. Proto $\Psi = \tilde{\Psi} \in X$ a Ψ je Bochnerův integrál $\int_\Omega \Phi \,\mathrm{d}\lambda$.

□

PŘÍKLAD 6. Nechť $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou λ, $X = L_p((0,1))$ pro $p \in [1,\infty)$ Nechť $\psi \colon \Omega \to \mathbb{K}$ je funkce splňující $\psi\chi_{(0,\omega)} \in L_p((0,\omega))$ pro každé $\omega \in (0,1)$ a $\Phi \colon \Omega \to X$ je definováno jako

$$\Phi(\omega) \colon u \mapsto \psi(u)\chi_{(0,\omega)}(u), \quad u \in (0,1).$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení.

(a) Zobrazení Φ má hodnoty v X a je silně měřitelné.
(b) Zobrazení Φ bochnerovsky integrovatelné právě tehdy, když $\int_0^1 \|\psi\chi_{(0,\omega)}\|_{L_p((0,\omega))} \,\mathrm{d}\lambda(\omega) < +\infty$.
(c) Je-li Φ bochnerovsky integrovatelné a $\Psi \colon u \mapsto \psi(u)(1-u)$, $u \in (0,1)$, pak $\Psi \in X$ a $\int_\Omega \Phi \,\mathrm{d}\lambda = \Psi$.

ŘEŠENÍ. (a) Pro pevné $\omega \in (0,1)$ je dle předpokladu $\Phi(\omega) = \psi\chi_{(0,\omega)} \in L_p((0,\omega)) \subset L_p((0,1)) = X$.

Pro $g \in X^* = L_q((0,1))$ (zde q je opět sdružený exponent k p) a pro $\omega \in (0,1)$ platí

$$g(\Phi(\omega)) = \int_0^1 \Phi(\omega)(u) g(u) \,\mathrm{d}\lambda(u) = \int_0^\omega \psi(u) g(u) \,\mathrm{d}\lambda(u).$$

Jelikož $\int_0^\omega |\psi \cdot g| \,\mathrm{d}\lambda \le \|\psi\chi_{(0,\omega)}\|_{L_p((0,\omega))} \cdot \|g\|_{X^*} < +\infty$, pro každé $\omega \in (0,1)$ je funkce $\psi g \chi_{(0,\omega)} \in L_1((0,\omega))$. Pro pevné $\omega_0 \in (0,1)$ je tedy funkce $\omega \mapsto \int_0^\omega \psi g \,\mathrm{d}\lambda$, $\omega \in [0,\omega_0]$ absolutně spojitá na $[0,\omega_0]$. Tedy $\omega \mapsto \int_0^\omega \psi g \,\mathrm{d}\lambda$ je spojitá na $(0,1)$, speciálně je zde měřitelná. Proto je Φ slabě měřitelná.

Díky separabilitě prostoru X však dostáváme silnou měřitelnost Φ (viz Věta FA.8.17).

(b) Dle Věty FA.8.28 je třeba vyzkoumat konveregenci integrálu $\int_\Omega \|\Phi(\omega)\|_X \,\mathrm{d}\lambda(\omega)$. Ten se však rovná

$$\int_\Omega \|\Phi(\omega)\|_X \,\mathrm{d}\lambda(\omega) = \int_0^1 \left(\int_0^\omega |\psi(u)|^p \,\mathrm{d}\lambda(u) \right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\lambda(\omega).$$

Odtud (b) plyne.

(c) Funkce Ψ je zjevně lebesgueovsky měřitelná na $(0,1)$. Označme $\tilde{\Psi} = \int_\Omega \Phi(\omega)\,\mathrm{d}\lambda(\omega)$. Pak pro $g \in X^*$ platí

$$g(\tilde{\Psi}) = \int_0^1 g(\Phi(\omega))\,\mathrm{d}\lambda(\omega) = \int_0^1 \left(\int_0^\omega \psi(u)g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u)\right)\mathrm{d}\lambda(\omega) =$$
$$= \int_0^1 \psi(u)g(u)\int_u^1 1\,\mathrm{d}\lambda(\omega)\,\mathrm{d}\lambda(u) = \int_0^1 \psi(u)(1-u)g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u).$$

(Fubiniovu větu lze použít, neboť

$$\int_0^1 \left(\int_0^\omega |\psi(u)g(u)|\,\mathrm{d}\lambda(u)\right)\mathrm{d}\lambda(\omega) \le \|g\|_{X^*}\|\psi\chi_{(0,\omega)}\|_{L_p((0,\omega))} < +\infty.)$$

Jako v Příkladu 5 nyní odvodíme, že $\Psi \in X$ a $\int_\Omega \Phi\,\mathrm{d}\lambda = \Psi$.

$\square$

PŘÍKLAD 7. Nechť (Ω,Σ,λ) je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou λ, $X = L_p\left((0,1)\right)$ pro $p \in [1,\infty)$. Nechť $\psi\colon \Omega \to (0,1]$ je lebesgueovsky měřitelná funkce a $\Phi\colon \Omega \to X$ je definováno jako

$$\Phi(\omega)\colon u \mapsto \chi_{(0,\psi(\omega))}(u), \quad u \in (0,1).$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení.

(a) Zobrazení Φ má hodnoty v X a je silně měřitelné.
(b) Zobrazení Φ bochnerovsky integrovatelné a $\int_\Omega \Phi\,\mathrm{d}\lambda = \Psi$, kde $\Psi\colon u \mapsto \lambda(\psi^{-1}(u,1))$, $u \in (0,1)$.

ŘEŠENÍ. (a) Zjevně platí $\Phi(\omega) \in X$ pro každé $\omega \in \Omega$. Pro $g \in X^*$ máme

$$g(\Phi(\omega)) = \int_0^1 \Phi(\omega)(u)g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u) = \int_0^{\psi(\omega)} g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u).$$

Označme $G(t) = \int_0^t g\,\mathrm{d}\lambda$, což je absolutně spojitá funkce na $[0,1]$ (díky tomu, že $g \in L_q\left((0,1)\right) \subset L_1\left((0,1)\right)$). Pokud ψ je spojitá, je funkce $\omega \mapsto g(\Phi(\omega)) = \int_0^{\psi(\omega)} g\,\mathrm{d}\lambda = G(\psi(\omega))$ spojitá, a tedy lebesgueovsky měřitelná na Ω. Pro obecnou ψ zvolme spojité funkce $\psi_n\colon (0,1) \to (0,1]$ λ-skoro všude konvergující k ψ. Pak pro $\omega \in \Omega$ splňující $\psi_n(\omega) \to \psi(\omega)$ platí

$$\int_0^{\psi_n(\omega)} g\,\mathrm{d}\lambda = G(\psi_n(\omega)) \to G(\psi(\omega)) = \int_0^{\psi(\omega)} g\,\mathrm{d}\lambda.$$

Tedy je funkce $\omega \mapsto \int_0^{\psi(\omega)} g\,\mathrm{d}\lambda$ λ-skoro všude bodovou limitou spojitých funkcí, a proto se jedná o lebesgueovsky měřitelnou funkci. Tím dostáváme, že zobrazení $\omega \mapsto g(\Phi(\omega))$ je lebesgueovsky měřitelné pro každé $g \in X^*$, tj. Φ je slabě měřitelné. Ze separability X a Věty FA.8.17 dostáváme silnou měřitelnost Φ.

(b) Jelikož $\int_\Omega \|\Phi(\omega\|_X\,\mathrm{d}\lambda(\omega) \le 1$, je Φ bochnerovsky integrovatelné dle Věty FA.8.28. Označme $\tilde{\Psi} = \int_\Omega \Phi\,\mathrm{d}\lambda$. Pak pro $g \in X^*$ dostáváme

$$g(\tilde{\Psi}) = \int_\Omega g(\Phi(\omega))\,\mathrm{d}\lambda(\omega) = \int_0^1 \left(\int_0^{\psi(\omega)} g(u)\,\mathrm{d}\lambda(u)\right)\mathrm{d}\lambda(\omega) =$$
$$= \int_0^1 g(u)\left(\int_{u<\psi(\omega)<1} 1\,\mathrm{d}\lambda(\omega)\right)\mathrm{d}\lambda(u) = \int_0^1 g(u)\Psi(u)\,\mathrm{d}\lambda(u).$$

(Fubiniovu větu lze použít, neboť $G = \{(\omega,u) \in (0,1)^2];\ 0 \le u \le \psi(\omega)\}$ je lebesgueovsky měřitelná a

$$\int_G |g(u)|\,\mathrm{d}\lambda(\omega,u) = \int_0^1 |g(u)|\left(\int_{u<\psi(\omega)<1} 1\,\mathrm{d}\lambda(\omega)\right)\mathrm{d}\lambda(u) \le \int_0^1 |g(u)|\,\mathrm{d}\lambda(u) < +\infty.$$

Navíc z Fubiniovy věty máme, že Ψ je měřitelná.) Stejně jako v předchozích příkladech tak obdržíme $\Psi = \tilde{\Psi} \in X$ a $\int_\Omega \Phi\,\mathrm{d}\lambda = \Psi$.

$\square$

PŘÍKLAD 8. Nechť $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ je interval $[-\pi, \pi]$ s Lebesgueovou mírou λ, $X = c_0$ a $\varphi \in L_1([-\pi, \pi])$. Nechť $f\colon [-\pi, \pi] \to c_0$ je definovaná jako

$$f(t)(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že pak f je bochnerovsky integrovatelná funkce a $\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda = 0$.

ŘEŠENÍ. *Krok 1.* Ukážeme nejprve, že $f(t) \in c_0$ pro každé $t \in [0, 1]$. Vzhledem k tomu, že toto je zjevné pro $t = 0$, můžeme bez újmu na obecnosti uvažovat $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Pro takovéto pevné t definuje formule

$$(T\psi)(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin(ntx)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

zobrazení z $L_1([-\pi, \pi])$ do ℓ_∞. Ověříme, že $\operatorname{Rng} T \subset c_0$. Je-li totiž $\psi \in \mathscr{D}((-\pi, \pi))$, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned} |T\psi(n)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin(ntx)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{-1}{nt} \left[\psi(x) \cos(ntx)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{nt} \int_{-\pi}^{\pi} \psi'(x) \cos(ntx)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{1}{n|t|} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi'(x)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tedy $T(\mathscr{D}((-\pi, \pi)) \subset c_0$. Jelikož $\mathscr{D}((-\pi, \pi))$ je hustý v $L_1([-\pi, \pi])$, platí $\operatorname{Rng} T \subset c_0$.

Krok 2. V tomto kroku ověříme slabou měřitelnost f. Nechť tedy $a \in \ell_1$ je libovolné a ψ_a je prvek $(c_0)^*$ jemu odpovídající. Pak pro každé $t \in [-\pi, \pi]$ platí díky odhadu

$$\left|\varphi(x)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(ntx)\Big)\right| \le |\varphi(x)| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{1}$$

rovnost

$$\begin{aligned} \psi_a(f(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(t)(n)a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(ntx)\right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Jelikož je funkce

$$t \mapsto \varphi(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(ntx)\right)$$

spojitá pro každé $x \in [-\pi, \pi]$, díky odhadu (1) je i funkce $t \mapsto \psi_a(f(t))$ spojitá na $[-\pi, \pi]$. Jest tedy λ-měřitelná.

Krok 3. Protože prostor X je separabilní, je funkce f také silně měřitelná. Navíc, pro každé $t \in [-\pi, \pi]$ a $n \in \mathbb{N}$ máme nerovnost

$$|f(t)(n)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \|\varphi\|_{L_1([-\pi,\pi])},$$

a tedy funkce $t \mapsto \|f(t)\|_{c_0}$ je omezená a proto λ-integrovatelná. Celkem tak dostáváme, že f je bochnerovsky integrovatelná.

Integrál $\int_{[-\pi,\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda$ nyní vypočteme. Vezmeme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a bázový vektor $e_n \in \ell_1$. Pak

$$\begin{aligned} \left(\int_{[-\pi,\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda\right)(n) &= \psi_{e_n}\left(\int_{[-\pi,\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda\right) = \int_{[-\pi,\pi]} f(t)(n)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(ntx)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ntx)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ntx)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{-\cos(ntx)}{nx}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0, & x \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

dostáváme

$$\left(\int_{[-\pi,\pi]} f\,\mathrm{d}\lambda\right)(n) = 0.$$

Proto platí $\int_{[-\pi,\pi]} f\,\mathrm{d}\lambda = 0$.

□

PŘÍKLAD 9. Nechť (Ω,Σ,λ) je interval $[0,1]$ s Lebesgueovou mírou λ a nechť $\varphi \in L_\infty([0,1])$. Dokažte, že pak platí následující tvrzení.

(a) Funkce $\Phi(y) = \int_0^y \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, $y \in [0,1]$ je absolutně spojitá funkce na $[0,1]$ a funkce $y \mapsto \frac{1}{y}\Phi(y)$, $y \in (0,1)$, je spojitá omezená funkce.

(b) Nechť $X = C([0,1])$. Pak funkce $f\colon [0,1] \to X$ definovaná jako

$$f(t)(x) = \int_0^x \varphi(ts)\,\mathrm{d}s, \quad x \in [0,1], t \in [0,1],$$

je bochnerovsky integrovatelná na $[0,1]$ a

$$\left(\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}\lambda\right)(x) = \int_0^x \frac{1}{y}\Phi(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in [0,1]. \tag{2}$$

(c) Nechť $Y = L_p([0,1])$ pro nějaké $p \in [1,\infty]$ a funkce $f\colon [0,1] \to Y$ je definována jako v (b). Pak f je integrovatelná a platí (2).

ŘEŠENÍ. (a) Jelikož je $\varphi \in L_1([0,1])$, je Φ absolutně spojitá na $[0,1]$. Tedy, funkce $y \mapsto \frac{1}{y}\Phi(y)$ je spojitá v každém bodě intervalu $(0,1]$. Dále

$$\limsup_{y\to 0_+} \frac{1}{y}\Phi(y) \le \limsup_{y\to 0_+} \frac{1}{y}\int_0^y |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \le \|\varphi\|_\infty$$

a podobně $\liminf_{y\to 0_+} \frac{1}{y}\Phi(y) \ge -\|\varphi\|_\infty$. Funkce $y \mapsto \frac{1}{y}\Phi(y)$ je proto omezená na $(0,1)$.

(b) Nejprve ověříme, že $f(t) \in X$ pro každé $t \in [0,1]$. To ale plyne z odhadu

$$|f(t)(x_2) - f(t)(x_1)| \le \int_{x_1}^{x_2} |\varphi(ts)|\,\mathrm{d}s \le \|\varphi\|_\infty (x_2 - x_1)$$

platného pro každé body $x_1 < x_2$ z intervalu $[0,1]$.

Nyní ověříme slabou měřitelnost f. Nechť tedy $\mu \in M([0,1])$ je libovolná Radonova míra a ψ_μ je prvek X^* jí příslušející. Pak

$$\begin{aligned}(\psi_\mu \circ f)(t) &= \int_{[0,1]} f(t)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,1]} \left(\int_0^x \varphi(ts)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{[0,1]} \frac{1}{t}\left(\int_0^{tx} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{t}\Phi(tx)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \frac{1}{t}\int_{[0,1]} \Phi(tx)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned} \tag{3}$$

Jelikož je Φ omezená spojitá funkce, je funkce $t \mapsto \psi_\mu(f(t))$ spojitá na $(0,1)$. Jest tedy λ-měřitelná.

Protože je X separabilní prostor, je f silně měřitelná. Jelikož máme

$$\|f(t)\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |f(t)(x)| \le \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x \|\varphi\|_\infty\,\mathrm{d}x \le \|\varphi\|_\infty,$$

je funkce $t \mapsto \|f(t)\|_X$ λ-integrovatelná na $[0,1]$. Proto je f bochnerovsky integrovatelná.

Uvažujme nyní Diracovu míru ε_x, kde $x \in [0,1]$ je jakékoliv. Pak s použitím již dokázané rovnosti (3) dostáváme

$$\psi_{\varepsilon_x}\left(\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}\lambda\right) = \int_{[0,1]} \psi_{\varepsilon_x}(f(t))\,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_0^1 \frac{1}{t}\Phi(tx)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_0^x \frac{x}{s}\Phi(s)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^x \frac{1}{s}\Phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Tím je ověřena formule (2).

(c) Nechť nyní $Y = L_p([0,1])$ pro libovolné $p \in [1,\infty]$. Jelikož $Id : C([0,1]) \to Y$ je spojité zobrazení, z Věty FA.8.32 vidíme, že f je integrovatelná a že platí (2).

□

3. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

PŘÍKLAD 10. Nechť (Ω,Σ,μ) je prostor s úplnou nenulovou mírou μ, X je Banachův prostor a $p,q \in [1,\infty]$ jsou vzájemně sdružené exponenty (tj. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Pro $g \in L_q(\mu,X^*)$ uvažujme zobrazení $I_g\colon L_p(\mu,X) \to \mathbb{K}$ definované jako

$$I_g(f) = \int_\Omega g(\omega)(f(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L_p(\mu,X).$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení.

(a) $I_g \in (L_p(\mu,X))^*$ a zobrazení $I\colon L_q(\mu,X^*) \to (L_p(\mu,X))^*$ definované jako $I(g) = I_g$ je izometrie do.
(b) Je-li μ konečná, $X = c_0$, pak $I\colon L_\infty(\mu,\ell_1) \to ((L_1(\mu,c_0))^*$ je surjektivní.
(c) Je-li $(\Omega,\Sigma,\mu) = (2^{\mathbb{N}},\Sigma,\mu)$, kde μ je součinová pravděpodobnostní míra na $2^{\mathbb{N}}$, a $X = \ell_1$, pak $I\colon L_\infty(\mu,\ell_\infty) \to (L_1(\mu,\ell_1))^*$ není na.

ŘEŠENÍ. (a) Nejprve ukážeme, že funkce $\omega \mapsto g(\omega)(f(\omega))$ je μ-měřitelná, kdykoliv $f \in L_p(\mu,X)$ a $g \in L_q(\mu,X^*)$ jsou schodovité. Nechť tedy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou měřitelná konečná dělení Ω taková, že lze psát $f(\omega) = \sum_{A\in\mathcal{A}} \chi_A(\omega)x_A$ a $g = \sum_{B\in\mathcal{B}} \chi_B(\omega)x_B^*$, pro nějaké vektory $x_A \in X$ a $x_B^* \in X^*$. Uvažujme měřitelné dělení $\mathcal{C}$ množiny Ω, které zjemňuje $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Pak lze psát $f(\omega) = \sum_{C\in\mathcal{C}} \chi_C(\omega)x_C$ a $g = \sum_{C\in\mathcal{C}} \chi_C(\omega)x_C^*$ pro vhodné vektory indexované systémem $\mathcal{C}$. Pak je ale

$$\omega \mapsto g(\omega)\,(f(\omega)) = \sum_{C\in\mathcal{C}} \chi_C(\omega)x_C^*(x_C)$$

schodovitá funkce s hodnotami v $\mathbb{K}$, tedy je μ-měřitelná.

Pro obecné $f \in L_p(\mu,X)$ a $g \in L_q(\mu,X^*)$ uvažujme schodovité $f_n \in Æ(\Omega,X)$, $g_n \in Æ(\Omega,X^*)$ takové, že $f_n \to f$ a $g_n \to g$ μ-skoro všude. Pak $h_n(\omega) = g_n(\omega)\,(f_n(\omega))$ jsou dle předchozího μ-měřitelné a μ-skoro všude konvergují bodově k funkci $h(\omega) = g(\omega)\,(f(\omega))$. (To plyne z pozorování, že pokud $\{x_n\} \subset X$, $\{x_n^*\} \subset X^*$, $x_n \to x$ a $x_n^* \to x^*$, pak

$$|x_n^*(x_n) - x^*(x)| \le |x_n^*(x_n) - x_n^*(x)| + |x_n^*(x) - x^*(x)| \le \|x_n^*\|\|x_n - x\| + \|x_n^* - x^*\|\|x\|,$$

tj. $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$.) Tedy h, jakožto μ-skoro všude bodová limita μ-měřitelných funkcí, je μ-měřitelná.

Dále, díky Hölderově nerovnosti je $h \in L_1(\mu)$, neboť

$$\int_\Omega |h(\omega)|\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega |g(\omega)\,(f(\omega))|\,\mathrm{d}\mu(\omega) \le \int_\Omega \|g(\omega)\|\|f(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) \le \|f\|_{L_p(\mu,X)}\|g\|_{L_q(\mu,X^*)}.$$

Tedy pro každé $g \in L_q(\mu,X^*)$ je zobrazení I_g dobře definované. Zjevně je lineární a z právě provedeného odhadu platí $\|I_g\|_{(L_p(\mu,X))^*} \le \|g\|_{L_q(\mu,X^*)}$. Z toho dostáváme, že zobrazení $I\colon g \in L_q(\mu,X^*) \mapsto I_g \in (L_p(\mu,X))^*$ je lineární a normy nejvýše 1.

Nyní ukážeme, že I je izometrie na schodovitých funkcích. Nechť tedy $g \in Æ(\Omega,X^*)$ je schodovitá, $g \in L_q(\mu,X^*)$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje μ-měřitelné dělení $\mathcal{A}$ prostoru Ω a vektory $x_A^* \in X^*$, $A \in \mathcal{A}$ takové, že $g(\omega) = \sum_{A\in\mathcal{A}} \chi_A(\omega)x_A^*$. Z duality pro skalární prostory L_p víme, že existuje funkce $h \in B_{L_p(\mu)}$ nezáporná taková, že $\int_\Omega h(\omega)\|g(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega) > \|g\|_{L_q(\mu,X^*)} - \varepsilon$. Uvažujme kladná čísla $\varepsilon_A > 0$ taková, že

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} \left(\varepsilon_A \int_A h(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\right) < \varepsilon.$$

Nechť $x_A \in S_X$ splňují $x_A^*(x_A) > \|x_A^*\| - \varepsilon_A$. Položíme $f(\omega) = \sum_{A\in\mathcal{A}} h(\omega)\chi_A(\omega)x_A$ a uvědomíme si, že f je silně měřitelná ($\operatorname{Rng} f \subset \operatorname{span}\{x_A;\ A \in \mathcal{A}\}$ je separabilní a f je slabě měřitelná, jelikož pro $x^* \in X^*$ je funkce $\omega \mapsto x^*(f(\omega)) = \sum_{A\in\mathcal{A}} h(\omega)\chi_A(\omega)x^*(x_A)$ μ-měřitelná) a $\|f(\omega)\|_X^p = \sum_{A\in\mathcal{A}} |h(\omega)|^p$. Tedy

$$\|f\|_{L_p(\mu,X)}^p = \int_\Omega \|f(\omega)\|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A |h(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega |h(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) \le 1.$$

Proto

$$\begin{aligned}
\|I_g\| &\ge |I_g(f)| = \int_\Omega g(\omega)\,(f(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A x_A^*(h(\omega)x_A)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \ge \\
&\ge \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A h(\omega)(\|x_A^*\| - \varepsilon_A)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \ge \sum_{A\in\mathcal{A}} \int_A h(\omega)\|x_A^*\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) - \varepsilon = \\
&= \int_\Omega \sum_{A\in\mathcal{A}} h(\omega)\chi_A(\omega)\|x_A^*\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) - \varepsilon = \int_\Omega h(\omega)\|g(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) - \varepsilon > \\
&> \|g\|_{L_q(\mu,X^*)} - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je izometričnost I na schodovitých funkcích ověřena. Dle Věty FA.8.42(a) je tedy I izometrie na $L_q(\mu, X^*)$ v případě $q \in [1,\infty)$.

Pokud $q = \infty$ (tj. $p = 1$), můžeme změnou na množině míry 0 předpokládat, že g je separabilně hodnotová. Zvolme $\varepsilon \in (0, \|g\|_{L_\infty(\mu,X^*)})$ a označme $c = \|g\|_{L_\infty(\mu,X^*)} - \varepsilon > 0$. Nechť $A = \{\omega \in \Omega;\ \|g(\omega)\| > c\}$. Pak $\mu(A) > 0$.

Tvrdíme, že existuje $x^* \in g(A) \cap \operatorname{ess\,Rng} g$. Vskutku, pokud $g(A) \subset X^* \setminus \operatorname{ess\,Rng} g$, z definice $\operatorname{ess\,Rng} g$ lze pro každé $x^* \in g(A)$ nalézt $r_{x^*} > 0$ tak, že $\mu(g^{-1}(U(x^*, r_{x^*}))) = 0$. Ze separability $g(\Omega)$ plyne existence spočetně mnoha koulí $\{U_{x_i^*};\ i \in \mathbb{N}\}$ pokrývajících $g(A)$, jejichž vzory mají míru 0. Pak ovšem $A \subset g^{-1}(g(A)) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g^{-1}(U_{x_i^*})$ je μ-nulová množina. To je však spor.

Existuje tedy $x^* \in g(A)$ takové, že pro každé $r > 0$ je $g^{-1}(U(x^*, r))$ kladné míry. Uvažujme $B = g^{-1}(U(x^*, \varepsilon))$ a nechť $x \in S_X$ splňuje $x^*(x) > \|x^*\| - \varepsilon$. Pak $\mu(B) > 0$ a funkce $f(\omega) = \frac{1}{\mu(B)}\chi_B(\omega)x \in L_1(\mu, X)$. Navíc je $\|f\|_{L_1(\mu,X)} = 1$. Aplikací funkce g na f však dostáváme

$$\begin{aligned}
\|I_g\| &\ge \int_\Omega g(\omega)\,(f(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B g(\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \\
&= \frac{1}{\mu(B)} \int_B \left((g(\omega) - x^*)(x) + x^*(x)\right)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \ge \\
&\ge \frac{1}{\mu(B)} \int_B (-\varepsilon\|x\| + \|x^*\| - \varepsilon)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \ge c - 2\varepsilon = \|g\|_{L_\infty(\mu,X^*)} - 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je izometričnost I ověřena i pro případ $q = \infty$.

(b) Ukážeme nyní, že I je na v případě $p = 1$ a $X = c_0$. Nechť tedy $\Lambda \in (L_1(\mu, c_0))^*$ je dáno. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme bázový vektor $e_n \in c_0$ a definujme komplexní míru $\lambda_n\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ jako

$$\lambda_n(E) = \Lambda(\chi_E e_n), \quad E \in \Sigma.$$

Ověřme, že λ_n je míra. Zjevně $\lambda_n(\emptyset) = 0$ a jsou-li $\{E_j\} \subset \Sigma$ disjunktní množiny, máme

$$\chi_{\bigcup_{j=1}^k E_j}(\omega)e_n \to \chi_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j}(\omega)e_n, \quad \omega \in \Omega,$$

a $\|\chi_{\bigcup_{j=1}^k E_j}(\omega)e_n\|_{c_0} \leq 1$. Tedy dle Věty FA.8.30 platí $\chi_{\bigcup_{j=1}^k E_j}(\omega)e_n \to \chi_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j}(\omega)e_n$ v $L_1(\mu, c_0)$. Proto dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) &= \Lambda\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j}(\omega)e_n\right) = \lim_{k\to\infty}\Lambda\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^k E_j}(\omega)e_n\right) = \\ &= \lim_{k\to\infty}\Lambda\left(\sum_{j=1}^k \chi_{E_j}e_n\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^k \Lambda\left(\chi_{E_j}e_n\right) = \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^k \lambda_n(E_j) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_n(E_j).\end{aligned}$$

Tedy λ_n je míra na (Ω, Σ), která navíc splňuje $\lambda_n(E) = 0$, kdykoliv $\mu(E) = 0$ (tj. je absolutně spojitá vůči μ).

Klíčovým krokem důkazu bude odhad

$$\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|(E) \leq \|\Lambda\|\mu(E), \quad E \in \Sigma. \tag{4}$$

Abychom ho dokázali, uvažujme množinu $E \in \Sigma$ μ-kladné míry (pro μ-nulovou množinu odhad zjevně platí). Nechť $\varepsilon > 0$ a $N \in \mathbb{N}$ jsou pevné. Nechť $\mathcal{A}_n \subset \Sigma$, $n \in \{1, \dots, N\}$ jsou konečná dělení E splňující

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_n} |\lambda_n(A)| > |\lambda_n|(E) - \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \{1, \dots, N\}.$$

Nechť $\mathcal{A} \subset \Sigma$ je konečné dělení E zjemňující všechna dělení $\mathcal{A}_n$. Pak pro každé $n \in \{1, \dots, N\}$ platí

$$|\lambda_n|(E) - \frac{\varepsilon}{2^n} < \sum_{A\in\mathcal{A}_n} |\lambda_n(A)| = \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \Big|\sum_{B\in\mathcal{A}, B\subset A} \lambda_n(B)\Big| \leq \sum_{A\in\mathcal{A}_n}\sum_{B\in\mathcal{A}, B\subset A} |\lambda_n(B)| = \sum_{B\in\mathcal{A}} |\lambda_n(B)|.$$

Položme $c_{n,B} = \operatorname{sgn}\lambda_n(B)$ pro $B \in \mathcal{A}$ a $n \in \{1, \dots N\}$. Uznačme $x_B = \sum_{n=1}^N c_{n,B}e_n$. To je vektor splňující $\|x_B\|_{c_0} \leq 1$. Máme tak odhad

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N |\lambda_n|(E) &\leq \varepsilon + \sum_{n=1}^N\sum_{B\in\mathcal{A}} |\lambda_n(B)| = \varepsilon + \sum_{n=1}^N\sum_{B\in\mathcal{A}} c_{n,B}\lambda_n(B) = \\ &= \varepsilon + \sum_{B\in\mathcal{A}}\sum_{n=1}^N c_{n,B}\Lambda\left(\chi_B e_n\right) = \varepsilon + \sum_{B\in\mathcal{A}} \Lambda\left(\chi_B x_B\right) = \\ &= \varepsilon + \Lambda\left(\sum_{B\in\mathcal{A}} \chi_B x_B\right) \leq \varepsilon + \|\Lambda\| \Big\|\omega \mapsto \sum_{B\in\mathcal{A}} \chi_B(\omega)x_B\Big\|_{L_1(\mu, c_0)} = \\ &= \varepsilon + \|\Lambda\| \int_E \Big\|\sum_{B\in\mathcal{A}} \chi_B(\omega)x_B\Big\|_{c_0} \,\mathrm{d}\mu(\omega) \leq \varepsilon + \|\Lambda\| \int_E 1 \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \varepsilon + \|\Lambda\|\mu(E).\end{aligned}$$

Tím je nerovnost (4) ověřena.

Použijeme nyní pro každé $n \in \mathbb{N}$ Radonovu-Nikodýmovu větu k nalezení $g_n : \Omega \to \mathbb{K}$ takových, že $g_n \in L_1(\mu)$ a $\lambda_n(E) = \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $E \in \Sigma$. Položme $g(\omega) = \{g_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\omega \in \Omega$. Naším cílem je nyní ukázat, že $g \in L_\infty(\mu, \ell_1)$.

K tomuto účelu vezmeme libovolnou $E \in \Sigma$ a odhadneme dle (4)

$$\begin{aligned}\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(\omega)| \,\mathrm{d}\mu(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n \circ (\chi_E \operatorname{sgn} g_n) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega (\chi_E \operatorname{sgn} g_n) \,\mathrm{d}\lambda_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E (\operatorname{sgn} g_n) \,\mathrm{d}\lambda_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_E 1 \,\mathrm{d}|\lambda_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|(E) \leq \\ &\leq \|\Lambda\| \mu(E).\end{aligned}$$

Funkce $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ je proto omezená μ-skoro všude konstantou $\|\Lambda\|$. Speciálně tak dostáváme, že $g(\omega) \in \ell_1$ pro μ-skoro všechna ω. Jelikož jsou všechny funkce g_n μ-měřitelné a ℓ_1 je separabilní, je funkce $g\colon \Omega \to \ell_1$ silně měřitelná dle Věty FA.8.17(iv). Navíc máme pro μ-skoro všechny $\omega \in \Omega$ odhad

$$\|g(\omega)\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(\omega)| \leq \|\Lambda\|,$$

tj. $g \in L_\infty(\mu, \ell_1)$.

Zbývá již jen dokázat, že $I_g = \Lambda$. Pokud $f = \chi_E e_n$ pro nějaké $E \in \Sigma$ a $n \in \mathbb{N}$, máme

$$I_g(f) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{\infty} g_j(\omega) f_j(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_E g_n(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \lambda_n(E) = \Lambda(f).$$

Je-li $f = \chi_E x$ pro nějaké $x \in c_0$, je $f = \lim_{j \to \infty} \sum_{n=1}^{j} x_n \chi_E e_n$ v prostoru $L_1(\mu, c_0)$. Tedy $\operatorname{span}\{\chi_E e_n;\ n \in \mathbb{N}, E \in \Sigma\}$ je hustý v $L_1(\mu, c_0)$ (vizte Věta FA.8.42(a)). Proto $I_g = \Lambda$ a I je zobrazení na.

(c) Nechť $g = \{g_n\}$ je posloupnost μ-měřitelných funkcí na Ω, která splňuje $C = \sup_\omega \sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n(\omega)| < +\infty$. Pak zobrazení $\Lambda\colon L_1(\mu, \ell_1) \to \mathbb{K}$ definované jako

$$\Lambda(f) = \Lambda(\{f_n\}) = \int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\omega) f_n(\omega) \right) \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f = \{f_n\} \in L_1(\mu, \ell_1),$$

je prvek $(L_1(\mu, \ell_1))^*$. Vskutku, funkce $g_n \cdot f_n$ jsou μ-měřitelné a z odhadu

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(\omega) f_n(\omega)| \right) \mathrm{d}\mu(\omega) \leq C \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\omega)| \,\mathrm{d}\mu(\omega) = C \int_\Omega \|f(\omega)\|_{\ell_1} \,\mathrm{d}\mu(\omega) = C \|f\|_{L_1(\mu, \ell_1)}$$

plyne nejen existence integrálu $\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\omega) f_n(\omega) \right) \mathrm{d}\mu(\omega)$, ale i odhad na normu pro funkcionál Λ (zobrazení $f \mapsto \Lambda(f)$ je zjevně lineární na $L_1(\mu, \ell_1)$). Tedy Λ je spojitý lineární funkcionál na $L_1(\mu, \ell_1)$.

Ne každá posloupnost $\{g_n\}$ splňující výše uvedený odhad však generuje prvek $g \in L_\infty(\mu, \ell_\infty)$. Položme například $g_n(\sigma) = \sigma_n$, $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$. Pak g_n jsou měřitelné (dokonce spojité na $2^{\mathbb{N}}$), ale pro různé prvky $\sigma, \omega \in 2^{\mathbb{N}}$ platí

$$\|\{g_j(\sigma)\} - \{g_j(\omega)\}\|_{\ell_\infty} \geq |g_n(\sigma) - g_n(\omega)| = 1,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sigma_n \neq \omega_n$. Proto zobrazení $g\colon \Omega \to \ell_\infty, \omega \mapsto \{g_j(\omega)\}$ nemá esenciálně separabilní obor hodnot, tj. není silně měřitelné. Funkcionál Λ tak není roven I_g pro žádné $g \in L_\infty(\mu, \ell_\infty)$.

$\square$

Kapitola 9

Banachovy algebry

PŘÍKLAD 1. Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2)$ je normální, právě když $a = d$ a $|b| = |c|$, nebo $\overline{c} = \frac{\overline{a-d}}{a-d} b$. Vskutku, dle Příkladu FA.4.3 je $A^\star = \left(\begin{smallmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{smallmatrix}\right)$. Tedy

$$A^\star A = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \overline{a}b + \overline{c}d \\ a\overline{b} + c\overline{d} & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \overline{a}b + \overline{c}d \\ \overline{\overline{a}b + \overline{c}d} & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \quad \text{a}$$

$$AA^\star = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} \\ \overline{a}c + \overline{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} \\ \overline{a\overline{c} + b\overline{d}} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že A je normální, právě když $|b| = |c|$ a $\overline{a}b + \overline{c}d = a\overline{c} + b\overline{d}$. Druhou rovnici upravíme na $\overline{c}(a - d) = b(\overline{a} - \overline{d}) = b\overline{(a - d)}$. Odtud již tvrzení ihned plyne.

1. Algebra

FAKT 2. *Nechť $(X, \cdot, e)$ je monoid.*

(i) Jednotkový prvek je určen jednoznačně.
(ii) Pokud $x \in X$ má levý a pravý inverzní prvek, pak jsou si tyto rovny. Speciálně, pokud existuje inverzní prvek, pak je určen jednoznačně.
(iii) Nechť $x, y \in X$. Je-li $xy = e$ a $yx \neq e$, pak prvek $z = yx$ je netriviální idempotent, tj. $z^2 = z$ a $z \neq e$.

DŮKAZ. (i) Platí-li $e_0 u = u$ pro každé $u \in X$, pak $e_0 = e_0 e = e$.
(ii) Nechť $yx = e$ a $xz = e$. Pak $y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z$.
(iii) Je $z^2 = (yx)(yx) = y(xy)x = yex = yx = z$.

□

FAKT 3. *Nechť $(X, +, 0, \cdot, e)$ je okruh.*

(i) Pro každé $x \in X$ platí $0x = x0 = 0$.
(ii) Obsahuje-li X alespoň dva prvky, pak $e \neq 0$.
(iii) Pro každé $x, y \in X$ platí $(-x)y = x(-y) = -(xy)$.
(iv) Nechť $x, y \in X$. Je-li $xy = e$ a $yx \neq e$, pak prvek $z = yx$ je netriviální idempotent, tj. $z^2 = z$, $z \neq e$ a $z \neq 0$.
(v) Nechť $x, y \in X$. Je-li $e - xy$ invertovatelný, pak je také $e - yx$ invertovatelný. Platí $(e - yx)^{-1} = e + y(e - xy)^{-1}x$.■■■[toto mame pro algebry v dukazu spekter]

DŮKAZ. (i) Platí $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$. Přičtením $-(0x)$ k oběma stranám rovnosti dostaneme $0 = 0x$. Pro $x0$ obdobně.
(ii) Nechť $x \in X$, $x \neq 0$. Pokud $e = 0$, pak $x = ex = 0x = 0$ dle (i), což je spor.
(iii) Máme $(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0$ a $x(-y) + xy = x(-y + y) = x0 = 0$.
(iv) Podle Faktu 2(iii) stačí ukázat, že $z \neq 0$. Protože $z \neq e$, obsahuje X alespoň dva prvky. Předpokládejme, že $z = 0$. Pak $e = ee = (xy)(xy) = x(yx)y = x0y = 0y = 0$ dle (i), což je spor s (ii).

(v) Položme $z = (e - xy)^{-1}$. S použitím (iii) pak obdržíme $(e + yzx)(e - yx) = e - yx + yzx - yzxyx = e - yx + yz(x - xyx) = e - yx + yz(e - xy)x = e - yx + yex = e$ a $(e - yx)(e + yzx) = e - yx + yzx - yxyzx = e - yx + y(e - xy)zx = e$.

□

V Banachově algebře se na vzorec z (v) dá přijít následovně: předpokládáme-li, že $\|x\| < 1$ a $\|y\| < 1$, pak $z = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$, $e - yx$ je invertovatelný a $(e - yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (yx)^n = e + \sum_{n=1}^{\infty} y(xy)^{n-1}x = e + y\big(\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n\big)x = e + yzx$, přičemž jsme využili spojitosti násobení.

■■■[co ty ostatni priklady z cviceni 2014?]

PŘÍKLAD 4. (a) Každá dvoudimenzionální algebra s jednotkou je komutativní:

(b) Nechť $A_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right);\ a, b \in \mathbb{C}\}$ a $A_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right);\ a, b \in \mathbb{C}\}$. Pak A_1 a A_2 jsou podalgebry komplexní algebry $M(2 \times 2)$, které nejsou izomorfní. Každá dvoudimenzionální komplexní algebra s jednotkou je izomorfní buď A_1, nebo A_2.

(c) Algebra $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right);\ a, b, c \in \mathbb{K}\}$ je nekomutativní Banachova algebra dimenze 3.

DŮKAZ. (a) Je-li $\{e, u\}$ její báze, pak $(\alpha e + \beta u)(\gamma e + \delta u) = \alpha\gamma e + (\alpha\delta + \beta\gamma)u + \beta\delta u^2 = (\gamma e + \delta u)(\alpha e + \beta u)$ (důvod je ten, že prvky báze spolu vzájemně komutují).

(b) Množiny A_1 i A_2 jsou zjevně vektorové podprostory $M(2 \times 2)$. Dále $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{smallmatrix}\right)$, tedy A_1 i A_2 jsou podalgebry $M(2 \times 2)$ obsahující jednotku (jednotkovou matici).

Předpokládejme, že $\varphi\colon A_2 \to A_1$ je izomorfismus. Položme $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a všimněme si, že $v^2 = 0$. Nechť $\varphi(v) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. Pak $0 = \varphi(v^2) = \varphi(v)^2 = \left(\begin{smallmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{smallmatrix}\right)$, tedy $a = b = 0$. To znamená, že $\varphi(v) = 0$, což je spor s prostotou φ.

Nyní nechť A je dvoudimenzionální komplexní algebra s jednotkou e. Tvrdíme, že existuje $v \in A$ takové, že $\{e, v\}$ je báze A a $v^2 = 0$ nebo $v = e$. Nechť $u \in A$ je takové, že $\{e, u\}$ je báze A. Nechť dále $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ jsou taková, že $u^2 = \alpha e + \beta u$. Je-li $\beta = 0$, pak stačí vzít $v = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}u$. Jinak položme $v_1 = e - \frac{2}{\beta}u$. Pak $v_1^2 = (e - \frac{2}{\beta}u)^2 = e - \frac{4}{\beta}u + \frac{4}{\beta^2}u^2 = e - \frac{4}{\beta}u + \frac{4}{\beta^2}(\alpha e + \beta u) = (1 + \frac{4\alpha}{\beta^2})e$. Je-li $(1 + \frac{4\alpha}{\beta^2}) = 0$, pak položíme $v = v_1$, jinak vezmeme $v = (1 + \frac{4\alpha}{\beta^2})^{-\frac{1}{2}}v_1$.

Je-li $v^2 = 0$, pak definujeme $\varphi\colon A \to A_2$ pomocí $\varphi(ae + bv) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Zobrazení φ je zjevně lineární izomorfismus. Dále $\varphi\big((ae + bv)(ce + dv)\big) = \varphi\big(ace + (ad + bc)v\big) = \left(\begin{smallmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{smallmatrix}\right) = \varphi(ae + bv)\varphi(ce + dv)$, tedy φ je i izomorfismus algeber.

Konečně, je-li $v^2 = e$, pak definujeme $\varphi\colon A \to A_1$ pomocí $\varphi(ae + bv) = \left(\begin{smallmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{smallmatrix}\right)$. Snadno je vidět, že φ je lineární izomorfismus. Dále $\varphi\big((ae + bv)(ce + dv)\big) = \varphi\big(ace + (ad + bc)v + bde\big) = \begin{pmatrix} ac+bd+(ad+bc) & 0 \\ 0 & ac+bd-(ad+bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)(c+d) & 0 \\ 0 & (a-b)(c-d) \end{pmatrix} = \varphi(ae + bv)\varphi(ce + dv)$, tedy φ je i izomorfismus algeber.

(c) je zřejmé.

□

PŘÍKLAD 5. Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $A = C(K)$. Nechť $\mathcal{I}$ značí systém všech uzavřených ideálů v A a $\mathcal{F}$ systém všech neprázdných, uzavřených podmnožin K. Označme

$$F_I = \bigcap \{f^{-1}(0);\ f \in I\}, \quad I \in \mathcal{I}, \qquad \text{a} \qquad I_F = \{f \in A;\ f = 0 \text{ na } F\}, \quad F \in \mathcal{F}.$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) Zobrazení $\Phi\colon \mathcal{I} \to F_I$ je bijekce $\mathcal{I}$ na $\mathcal{F}$.
(b) Pro každý maximální ideál I existuje právě jedno $x \in K$ splňující $I = I_{\{x\}}$.

DŮKAZ. (a) Je-li $F \subset K$ uzavřená neprázdná množina, je zjevně I_F uzavřený ideál. Jelikož $1 \notin I_F$, platí $I_F \neq A$.

Nechť I je uzavřený ideál v A a $F = F_I$. Pak zjevně $I \subset F_I$.

Krok 1. Ukážeme, že každé $g \in C(K)$ splňující $\operatorname{supp} g \cap F = \emptyset$ je v I.

Mějme tedy takové g dáno. Nalezneme otevřenou množinu $U \subset K$ splňující $\operatorname{supp} g \subset U \subset \overline{U} \subset K \setminus F$. Pro každé $x \in \overline{U}$ nalezneme $f_x \in I$ a okolí U_x obsahující x takové, že $f_x \neq 0$ na U_x. Díky kompaktnosti $\overline{U}$

nalezneme $C \subset \overline{U}$ konečnou, pro kterou platí $\overline{U} \subset \bigcup_{x\in C} U_x$. Jelikož pro každé $x \in \overline{U}$ platí $|f_x|^2 = \overline{f_x} f_x \in I$, funkce

$$h = \sum_{x\in C} |f_x|^2$$

též náleží do I. Navíc je $h > 0$ na $\overline{U}$. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \setminus \overline{U}, \\ \frac{g(x)}{h(x)}, & x \in \overline{U}. \end{cases}$$

Jelikož je $\operatorname{supp} g \subset U$ a $h > 0$ na $\overline{U}$, leží f v $C(K)$. Dále máme $g = fh$, a tedy $g \in I$.

Speciálně tak dostáváme, že $F \neq \emptyset$. V opačném případě by totiž $C(K) \subset I$, což je spor.

Krok 2. Nechť $f \in I_F$ je libovolné. Chceme dokázat, že $f \in I$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \neq 0$. Vezměme libovolné $\varepsilon \in (0, \|f\|)$ a položme $L = \{x \in K;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$. Dostali jsme tak neprázdnou, kompaktní podmnožinu K disjunktní s F. Dle Lemmatu FA.15.57 existuje $g \in C(K)$ s hodnotami v $[0,1]$, která splňuje $g = 1$ na L, $g = 0$ na F a $\operatorname{supp} g \cap F = \emptyset$. Pak $\operatorname{supp}(fg) \cap F = \emptyset$, a tedy dle prvního kroku platí $fg \in I$. Jelikož $\|fg - f\| \leq \varepsilon$, dostáváme z uzavřenosti I, že $f \in I$.

Dohromady tedy máme $I = I_F$.

Krok 3. Nechť nyní $F \subset K$ je neprázdná uzavřená množina. Položme $I = I_F$ a $H = \Phi(I)$. Pak pro $x \in F$ a $f \in I$ platí $f(x) = 0$, a tedy $F \subset H$. Abychom ověřili obrácenou inkluzi, vezměme $x \in K \setminus H$ (pokud $F = K$, inkluze $H \subset F$ platí triviálně). Dle Lemmatu FA.15.57 existuje $f \in C(K)$ splňující $f(x) = 1$ a $f = 0$ na F. Pak $f \in I$, ale $f(x) \neq 0$. Tedy $x \notin H$. Proto $F = H$.

Tvrzení (a) je tak dokázáno.

(b) Zjevně pro každé $x \in K$ platí $I_{\{x\}} = \operatorname{Ker} \delta_x$ (Diracova míra). Ideál $I_{\{x\}}$ má tedy kodimenzi 1, a proto je maximální.

Obráceně, je-li I maximální ideál v A, existuje uzavřená neprázdná množina F v K, pro kterou platí $I = I_F$. Pokud by F obsahovala dva různé body, řekněme x a y, ideál $I_{\{x\}}$ by pak byl ideál striktně obsahující I, což by byl spor s maximalitou I. Množina F je proto jednobodová, a důkaz je tak hotov.

□

PŘÍKLAD 6. Nechť $\mathcal{A}$ je Banachova algebra s jednotkou. Řekneme, že $x \in \mathcal{A}$ je topologický dělitel 0, pokud existuje $\{y_n\} \subset \mathcal{A}$, $\|y_n\| = 1$, splňující $\lim xy_n = \lim y_n x = 0$. (a) Každý hraniční bod x množiny invertovatelných prvků $\mathcal{A}$ je topologický dělitel 0.

(b) Komplexní Banachova algebra s jednotkou nemající žádné topologické dělitele 0 kromě 0 je izomorfní $\mathbb{C}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x_n \in \mathcal{A}$ jsou invertovatelné a $x_n \to x$. Položme $y_n = \frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|}$. Pak $\|y_n\| = 1$ a $xy_n = xy_n + x_n y_n - x_n y_n = x_n y_n + (x - x_n) y_n = \frac{e}{\|x_n^{-1}\|} + (x - x_n) y_n \to 0$, neboť $\|x_n^{-1}\| \to +\infty$ dle lemmatu z přednášky.

(b) Označme $G \subset \mathcal{A}$ množinu invertovatelných prvků $\mathcal{A}$. Protože G nemá v $X = \mathcal{A} \setminus \{0\}$ dle předpokladu a tvrzení výše žádné hraniční body, je G uzavřená v X ($\overline{G} = G \cup H(G)$). Totéž platí i o $X \setminus G$. Jsou tedy G i $X \setminus G$ obojetné v X. Protože X je souvislý a $G \neq \emptyset$, je $G = X$. Z Gelfandovy-Mazurovy věty pak plyne, že $\mathcal{A}$ je izomorfní $\mathbb{C}$.

□

PŘÍKLAD 7. Nechť $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ značí grupu se sčítáním modulo n a $A = \ell_1(\mathbb{Z}_n)$ s operací násobení $(x * y)(k) = \sum_{i=0}^{n-1} x(i) y(k-i)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Pak A je komutativní Banachova algebra. Popišme obor hodnot operátoru $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$ z Věty FA.9.16.

ŘEŠENÍ. Algebra A je speciálním příkladem algebry $L_1(G)$, kde je topologická komutativní lokálně kompaktní grupa, viz kapitolu FA.13. Dle Věty FA.13.17 je A komutativní Banachova algebra, přičemž bázový vektor e_0 je její jednotkou. Je snadné ověřit, že zobrazení $i \mapsto e_i$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ je homomorfizmus $\mathbb{Z}_n$ do A, tj. že platí $e_i * e_j = e_{i+j}$.

Uvažujme $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$ dané násobením zleva, tedy $Ix(a) = x * a$, $a \in A$. Je-li e_j bázový vektor, pak dle předchozího máme $Ie_j(e_i) = e_{i+j}$ pro každé $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Tedy vyjádříme-li $Ie_j \in \mathcal{L}(A)$ vzhledem k bázi $\{e_0,\dots,e_{n-1}\}$, obdržíme lineární zobrazení mapující bázi $\{e_0,\dots,e_{n-1}\}$ na $\{e_j,e_{j+1},\dots,e_{n-1},e_0,\dots,e_{j-1}\}$. Tedy reprezentující matice pro zobrazení $Ie_0,\dots,Ie_{n-1}$ jsou postupně permutační matice

$$Ie_0=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&1&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix},\quad Ie_1=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&1\\1&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1&0\end{pmatrix},\quad\cdots\quad Ie_{n-1}=\begin{pmatrix}0&1&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0&1\\1&0&\dots&0&0\end{pmatrix}.$$

Je-li $x=\sum_{j=0}^{n-1}x(i)e_i\in A$, máme reprezentující matici pro Ix dánu jako

$$Ix=\sum_{j=0}^{n-1}x(j)Ie_j=\begin{pmatrix}x(0)&x(n-1)&\dots&x(2)&x(1)\\x(1)&x(0)&\dots&x(3)&x(2)\\x(2)&x(1)&x(0)&\dots&x(3)\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\x(n-1)&x(n-2)&\dots&x(1)&x(0)\end{pmatrix}.$$

□

PŘÍKLAD 8. Nechť $A=\ell_1(\mathbb{Z}_2)$ s operací konvoluce a $a=a_0e_0+a_1e_1$, kde $a_0,a_1\in\mathbb{C}$ a $\{e_0,e_1\}$ je báze A. Pak $a\in A^\times$ právě tehdy, když $a_1^2-a_0^2\neq 0$. V takovém případě pak $a^{-1}=\frac{-a_0}{a_1^2-a_0^2}e_0+\frac{a_1}{a_1^2-a_0^2}e_1$.

DŮKAZ. Je-li $I\colon A\to\mathcal{L}(A)\subset M(2\times 2)$ vnoření z Příkladu 7, můžeme uvažovat prvky A jako matice v $M(2\times 2)$. Pak $Ia=\begin{pmatrix}a_0&a_1\\a_1&a_0\end{pmatrix}$, což je matice invertovatelná v $M(2\times 2)$ právě tehdy, když $a_0^2-a_1^2\neq 0$. Tedy má-li a inverzi v $I(A)$, je $a_0^2-a_1^2\neq 0$.

Nechť tedy je tento výraz nenulový a pro $a=a_0e_0+a_1e_1$ hledejme inverzi tvaru $b=b_0e_0+b_1e_1$. Pak musí platit

$$e_0=a*b=(a_0b_0+a_1b_1)e_0+(a_0b_1+a_1b_0)e_1,$$

což ale znamená, že koeficienty b_0,b_1 splňují soustavu

$$\begin{aligned}a_0b_0+a_1b_1&=1\\a_0b_1+a_1b_0&=0.\end{aligned}$$

Je-li $a_1=0$, je $a_0\neq 0$ a platí $b_0=\frac{1}{a_0}$, $b_1=0$. Pokud $a_1\neq 0$, platí $b_0=\frac{-a_0}{a_1^2-a_0^2}$, $b_1=\frac{a_1}{a_1^2-a_0^2}$.

□

PŘÍKLAD 9. Nechť $M(n\times n)$ značí algebru $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ a I_n je jednotková matice. Najděme všechna řešení rovnice $A^3=I_2$ v $M(2\times 2)$.

ŘEŠENÍ. Pokud $A^3=I_2$, platí dle Tvrzení FA.9.32(c) pro $\lambda\in\sigma(A)$ vztah $\lambda^3\in\sigma(I_2)=\{1\}$. Nechť $A=R^{-1}JR$, kde $R\in M(2\times 2)$ je invertovatelná a J je Jordanova matice A. Pak $\sigma(A)=\sigma(J)$, a tedy

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix},\ (\lambda_1)^3=(\lambda_2)^3=1\quad\text{nebo}\quad J=\begin{pmatrix}\lambda_3&1\\0&\lambda_3\end{pmatrix},\ \text{kde } \lambda_3^3=1.$$

V druhém případě však dostáváme $I_2=A^3=R^{-1}J^3R$, tj. $I_2=RI_2R^{-1}=J_3=\begin{pmatrix}1&3\lambda_3^2\\0&1\end{pmatrix}$, což je spor, neboť $3\lambda_3^2\neq 0$. Pokud $J=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$, kde λ_1,λ_2 jsou třetí odmocniny z 1 a R je libovolná regulární matice, dostáváme $A^3=R^{-1}J^3R=R^{-1}I_2R=I_2$. Tedy řešením úlohy jsou všechny matice A tvaru $A=R^{-1}JR$, kde R invertovatelná a $J=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ pro λ_1,λ_2 třetí odmocniny z 1.

□

PŘÍKLAD 10. Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x\in A$ splňuje $x^2=x$. Nalezněme spektrum x a určeme holomorfní kalkulus pro x.

ŘEŠENÍ. Pokud $x = 0$, máme $\sigma(x) = \{0\}$ a $(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}e$. Tedy pro f holomorfní na okolí $\{0\}$ platí pro vhodný cykl Γ rovnost

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - 0} e \,\mathrm{d}\lambda f(0)e.$$

Podobně, je-li $x = e$, je $\sigma(x) = \{1\}$, $(\lambda e - x)^{-1} = (\lambda - 1)^{-1}e$ a pro funkci f holomorfní na okolí $\{1\}$ platí $f(e) = f(1)e$.

Nechť tedy $x \notin \{0, e\}$. Pak $x \notin \operatorname{span}\{e\}$. Vskutku, pokud $x = \alpha e$, platí $0 = x^2 - x = (\alpha^2 - \alpha)e$, tj. $\alpha^2 - \alpha = 0$. Pak ovšem $x \in \{0, e\}$, což je spor. Dále $\sigma(x) \supset \{0, 1\}$. Vskutku, pokud $0 \notin \sigma(x)$, existuje x^{-1}, a tedy $x = xxx^{-1} = x^2x^{-1} = xx^{-1} = e$, což je spor. A pokud $1 \notin \sigma(x)$, existuje $(e - x)^{-1}$, a tedy $x = x(e - x)(e - x)^{-1} = (x - x^2)(e - x)^{-1} = 0$, co je opět spor.

Předpokládejme tedy, že $\lambda \notin \{0, 1\}$ a hledejme $(\lambda e - x)^{-1}$ ve tvaru $\alpha e + \beta x$ pro vhodná $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pak musí platit rovnost

$$e = (\lambda e - x)(\alpha e + \beta x) = \lambda\alpha e + (\lambda\beta - \alpha - \beta)x,$$

což implikuje $\alpha = \lambda^{-1}$ a $\beta = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda}$. Pak vskutku platí $(\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}e + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}x$. Tedy $\sigma(x) = \{0, 1\}$.

Nechť nyní f je holomorfní na okolí $\{0, 1\}$ a Γ je vhodný cykl. Pak

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right)e + \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - 1}\,\mathrm{d}\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right)x = \\ &= f(0)e + (f(1) - f(0))x. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 11. (a) Nechť $A \in M(n \times n)$. Pak existuje nenulový polynom p splňující $p(A) = 0$.

(b) Nechť $T \in \mathcal{L}(C([0, 1]))$ je definováno jako $Tf(x) = \int_0^x f$, $f \in C([0, 1])$ a $x \in [0, 1]$. Pak $r(T) = 0$ (tedy $\sigma(T) = \{0\}$) a $f(T) \neq 0$ pro každou nenulovou holomorfní funkci f definovanou na okolí $\sigma(T)$.

DŮKAZ. (a) Je-li $A \in M(n \times n)$ a B je její Jordanův tvar, stačí dle Věty FA.9.60 najít nenulový polynom nulující B. Z Příkladu FA.9.62 plyne, že stačí najít pro každou Jordanovu buňku J matice B nenulový polynom p_J nulující J, abychom dostali požadovaný nulující polynom p; stačí pak totiž položit $p = \prod_{J \text{ buňka } B} p_J$. Nechť tedy J je Jordanova buňka, tj. $J \in M(k \times k)$ je tvaru $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$ pro nějaké $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Uvažujme polynom $p_J(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k$. Pak

$$p_J(J) = (J - \lambda_0 I)^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}^k = 0.$$

Tím je hledání příslušného polynomu ukončeno.

(b) Operátor T je zjevně dobře definovaný prvek $\mathcal{L}(C([0, 1]))$, jehož spektrum je $\{0\}$ (vizte Příklad **??**). Též je patrné, že T je prostý. Vskutku, pokud $0 = F(x) = Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [0, 1]$, pak $0 = F'(x) = f(x)$ na $[0, 1]$. Nechť nyní f je holomorfní funkce na otevřeném kruhu $U(0, r) \subset \mathbb{C}$ pro nějaké $r > 0$, která splňuje $f(T) = 0$. Matematickou indukcí dokážeme následující fakt:

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje holomorfní funkce g_n na $U(0, r)$ taková, že $g_n(T) = 0$ a $f(\lambda) = \lambda^n g_n(\lambda)$, $\lambda \in U(0, r)$.

Pro $n = 0$ funkce $g_0 = f$ zjevně vyhovuje naší podmínce. Předpokládejme nyní, že pro $n \in \mathbb{N}_0$ jsme již požadovanou funkci g_n nalezli. Pak z Věty FA.9.60(d) plyne, že $g_n(0) = 0$ (platí totiž $\sigma(0) = \sigma(g_n(T)) = g_n(\sigma(T)) = g_n(\{0\})$. Tedy $g_n(\lambda) = \lambda g_{n+1}(\lambda)$, $\lambda \in U(0, r)$ pro nějakou holomorfní funkci g_{n+1} na $U(0, r)$.

Pak $f(\lambda) = \lambda^n g_n(\lambda) = \lambda^{n+1} g_{n+1}(\lambda)$. Jelikož $0 = g_n(T) = T g_{n+1}(T)$ a operátor T je prostý, máme $g_{n+1}(T) = 0$. Tím je důkaz faktu završen.

Nyní je však již tvrzení (b) dokázáno, neboť 0 je n-násobný kořen f pro každé $n \in \mathbb{N}$. Funkce f je proto nulová.

□

PŘÍKLAD 12. Nechť A je komutativní komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$ a $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfní, kde $\Omega \supset \sigma(x)$ je otevřená množina. Pak existuje $y \in A$ takové, že $\widehat{y} = f \circ \widehat{x}$. Pokud A je polojednoduchá, je y určeno jednoznačně.

DŮKAZ. Položme $y = f(x)$, kde $f(x)$ je prvek definovaný v Definici FA.9.56. Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je libovolný prvek. Dle Rungeovy věty (vizte[R, Věta 13.9.]) existuje posloupnost $\{r_n\}$ racionálních funkcí na $\mathbb{C}$ s póly mimo Ω taková, že $r_n \to f$ lokálně stejnoměrně na Ω. Pišme $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, $n \in \mathbb{N}$, kde p_n, q_n jsou polynomy na $\mathbb{C}$ a q_n nemá nulové body v Ω. Jelikož

$$1 = \varphi(1) = \varphi\left(q_n \frac{1}{q_n}(x)\right) = \varphi(q_n(x))\varphi\left(\frac{1}{q_n}(x)\right)$$

platí $\varphi\left(\frac{1}{q_n}(x)\right) = (\varphi(q_n(x)))^{-1}$. Proto

$$\begin{aligned}\varphi(y) = \varphi(f(x)) &= \lim_{n\to\infty} \varphi\left(r_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n(x))\varphi\left(\frac{1}{q_n}(x)\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n(x))\left(\varphi(q_n(x))\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n(\varphi(x)}{q_n(\varphi(x))} = \lim_{n\to\infty} r_n(\varphi(x)) = f(\varphi(x).\end{aligned}$$

Požadované y je tak nalezeno.

Je-li A polojednoduchá a y_1, y_2 splňují $\widehat{y_i} = h \circ \widehat{x}$, $i = 1, 2$, pak $y_1 - y_2 \in \operatorname{Ker} \Gamma = \{0\}$. Tedy $y_1 = y_2$.

□

PŘÍKLAD 13. (a) Nechť $A = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{C};\ f' \text{ spojitá na } [0,1]\}$ s bodovým násobením a normou $\|f\|_A = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Pak A je komutativní Banachova algebra.

(b) Máme $\Delta(A) = \{\delta_x;\ x \in [0,1]\}$, kde $\delta_x \colon A \to \mathbb{C}$ je definováno pro $x \in [0,1]$ jako $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in A$. Algebra A je tak polojednoduchá.

(c) Nechť $J = \{f \in A;\ f(0) = f'(0) = 0\}$. Pak J je uzavřený ideál, pro který platí, že algebra A/J není polojednoduchá.

DŮKAZ. (a) Prostor A je zjevně komutativní algebra, kde norma $\|\cdot\|_A$ splňuje

$$\begin{aligned}\|fg\|_A = \|fg\|_\infty + \|(fg)'\|_\infty &\le \|f\|_\infty\|g\|_\infty + \|f'\|_\infty\|g\|_\infty + \|f\|_\infty\|g'\|_\infty \le \\ &\le \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)\left(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty\right) = \|f\|_A\|g\|_A.\end{aligned}$$

Pokud $\{f_n\}$ je $\|\cdot\|_A$-cauchyovská posloupnost, pak existují $f, g \in C([0,1])$ takové, že $f_n' \to g$ a $f_n \to f$ stejnoměrně na $[0,1]$. Dle klasické věty z analýzy pak máme $f' = g$, tj. $f \in A$ a $\|f_n - f\|_A = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - g\| \to 0$. Tedy A je Banachova algebra.

(b) Každý element δ_x je zjevně prvkem $\Delta(A)$. Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $\varphi \in \Delta(A)$. Nechť $x = \varphi(Id)$. Pak $x \in [0,1]$, neboť v opačném případě by funkce $(Id - x)^{-1}$ byla v A, takže bychom dostali spor z rovnosti

$$1 = \varphi(1) = \varphi(x - Id)\varphi\left((x - Id)^{-1}\right) = 0.$$

Pak pro každý polynom $p = a_0 1 + a_1 Id + \cdots + a_n (Id)^n$ na $[0,1]$ platí $\varphi(p) = a_0 a_1 x + \cdots + a_n x^n = p(x)$. Tedy $\varphi = \delta_x$ na prostoru polynomů na $[0,1]$. To je však hustý podprostor A. Vskutku, je-li $f \in A$ a $\varepsilon > 0$ dáno, nalezneme polynom $p = a_0 + a_1 Id + \cdots + a_n (Id)^n$ takový, že $\|p - f'\|_\infty < \varepsilon$. Nechť $Q = P + f(0)$, kde $P(y) = \int_0^y p(s)\,\mathrm{d}s = a_0 y + a_1 \frac{y^2}{2} + \cdots + a_n \frac{y^{n+1}}{n+1}$, $y \in [0,1]$. Pak Q je polynom na $[0,1]$ a platí

$$\|f - Q\| = \|f - f(0) - P\|_\infty + \|f' - Q'\|_\infty < 2\varepsilon,$$

neboť pro každé $y \in [0,1]$ máme odhad

$$|f(y) - f(0) - P(y)| = |\int_0^y (f'(s) - p(s))\, \mathrm{d}s| \leq \int_0^1 \|f' - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Ze spojitosti funkcionálů δ_x a φ dostáváme $\varphi = \delta_x$.

Z toho však plyne polojednoduchost A. Je-li totiž $\delta_x(f) = 0$ pro každé $\delta_x \in \Delta(A)$, je $f = 0$ na $[0,1]$.

(c) Množina J je zjevně uzavřený podprostor, neboť $J = \operatorname{Ker} \delta_0 \cap \operatorname{Ker} \delta_0'$, kde $\delta_0'(f) = f'(0)$, $f \in A$ je spojitý funkcionál na A. Dále, je-li $f \in J$ a $g \in A$, pak

$$(fg)(0) = f(0)g(0) = 0 \quad \text{a} \quad (fg)'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 0,$$

tj. J je ideál.

Uvažujme nyní Banachovu algebru A/J. Jelikož pro $f \in A$ platí

$$f = (f - f(0)1 - f'(0)\mathit{Id}) + (f(0)1 + f'(0)\mathit{Id}) \in J \oplus \operatorname{span}\{1, \mathit{Id}\},$$

je A/J dvou dimenzionální algebra s jednotkou $\widehat{1}$. Prvek $\widehat{\mathit{Id}}$ splňuje $(\widehat{\mathit{Id}})^2 = \widehat{\mathit{Id}^2} = 0$. Je-li tedy ψ libovolný prvek $\Delta(A/J)$, máme $0 = \psi(\widehat{\mathit{Id}^2}) = \left(\psi(\widehat{\mathit{Id}})\right)^2$, tedy $\psi(\widehat{\mathit{Id}}) = 0$. Proto $\widehat{\mathit{Id}}$ je v jádru Gelfandovy transformace na A/J.

□

PŘÍKLAD 14. (a) Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x, y \in A$ splňují $x^2 = x$, $y^2 = y$ a $xy = yx$. Pak buďto $x = y$. nebo $\|x - y\| \geq 1$.

(b) Nechť $\mathcal{L}(H)$ je Banachova algebra všech omezených operátorů na alespoň dvoudimenzionálním Hilbertově prostoru H. Nechť různé vektory $e_1, e_2 \in S_H$ splňují $\|e_1 - e_2\| < \varepsilon$. Pak $P_i(x) = \langle x, e_i \rangle e_i$, $x \in H$ jsou různé idempotentní prvky $\mathcal{L}(H)$ splňující $\|P_1 - P_2\| < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$.

DŮKAZ. (a) Pokud jeden z prvků je roven 0, je tvrzení triviální. Nechť tedy jsou x i y nenulové a různé. Pak jsou linárně nezávislé. Vskutku, pokud řekněme $y = cx$ pro $c \in \mathbb{C}$, máme $cx = y = y^2 = c^2x^2 = c^2x$, tj. $c - c^2 = 0$. Tedy $c \in \{0,1\}$, což je však spor s našimi předpoklady.

Krok 1. Uvažujme algebru B generovanou prvky x, y. Uvažujme nejprve případ $xy \in \operatorname{span}\{x, y\}$.

Fakt: Pak $xy \in \{0, x, y\}$.

DŮKAZ FAKTU: Vskutku, uvažujme $xy = ax + by$ pro nějaké skaláry $a, b \in \mathbb{C}$. Pak z rovnosti

$$ax + by = xy = (xy)^2 = (ax + by)^2 = a^2x + b^2y + 2abxy = (a^2 + 2a^2b)x + (b^2 + 2ab^2)$$

a lineární nezávislosti $\{x, y\}$ plyne soustava dvou rovnic

$$a = a^2 + 2a^2b,$$
$$b = b^2 + 2ab^2.$$

Je-li $a = 0$, je $b = b^2$, tj. $\in \{0,1\}$. Ve všech případech je $xy \in \{0, x, y\}$. Analogický výsledek dostáváme pro případ $b = 0$.

Pokud $ab \neq 0$, máme soustavu

$$1 = a + 2ab,$$
$$1 = b + 2ab.$$

Pak $a = b$ a a je řešením rovnice $2a^2 + a - 1 = 0$. Řešením soustavy jsou tak vektory

$$(a,b) = \left(\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})\right) \quad \text{a} \quad (a,b) = \left(\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5})\right). \tag{1}$$

V obou případech však $xy = a(x+y)$ pro $a \in \left\{\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5})\right\}$. Použijeme-li třetí mocninu xy, dostáváme rovnost

$$a(x + y) = xy = (xy)^3 = a^3(x + y)^3 = a^3(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = a^3(x + 6xy + y) =$$
$$= a^3(x + 6a(x + y) + y) = a^3(1 + 6a)(x + y).$$

Tedy a splňuje rovnice

$$0 = 2a^2 + a - 1,$$
$$0 = 6a^3 + a^2 - 1.$$

Jejich odečtením získáme rovnost $0 = 6a^3 - a^2 - a = a(6a^2 - a - 1)$. Jelikož je $a \neq 0$, dostáváme rovnost $0 = 6a^2 - a - 1$. Odečtením rovnice $0 = 2a^2 + a - 1$ získáme vztah $0 = 4a^2 - 2a = 2a(2a - 1)$. Tedy $a \in \{0, \frac{1}{2}\}$, což je ve sporu s informací v(1). Proto $xy \in \{0, x, y\}$.

□

Z právě dokázaného faktu plyne, že $B = \operatorname{span}\{x, y\}$ je algebra a $\{x, y\}$ je báze B. Nechť nejprve $xy = 0$. Pak funkcionál $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$ definovaný jako $\varphi(ax + by) = a$ je multiplikativní. Vskutku,

$$\varphi(a_1x + b_1)\varphi(a_2x + b_2y) = a_1a_2 = \varphi(a_1a_2x + b_1b_2y) = \varphi\left((a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)\right).$$

Tedy $\|x - y\| \geq |\varphi(x - y)| = 1$.

Pokud $xy = x$, položíme $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$ jako $\varphi(ax + by) = b$. Pak

$$\varphi(a_1x + b_1y)\varphi(a_2x + b_2y) = b_1b_2 = \varphi((a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2)x + b_1b_2y) = \varphi\left((a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)\right).$$

Tedy $\varphi \in \Delta(B)$ a jako výše odvodíme $\|x - y\| \geq 1$.

Případ $xy = y$ vyšetříme obdobně.

Krok 2. Nechť tedy $xy \notin \operatorname{span}\{x, y\}$. Pak $B = \operatorname{span}\{x, y, xy\}$ je komutativní Banachova algebra s bází $\{x, y, xy\}$ a $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$ definované jako $\varphi(ax + by + cxy) = a$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ je prvek $\Delta(B)$. Vskutku,

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_1x + b_1y + c_1xy)\varphi(a_2x + b_2y + c_2xy) = a_1a_2 = \\
&= \varphi\left(a_1a_2x + b_1b_2y + (c_1c_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + a_1c_2 + c_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2)xy\right) = \\
&= \varphi\left((a_1x + b_1y + c_1xy)(a_2x + b_2y + c_2xy)\right).
\end{aligned}$$

Jako výše tak máme $\|x - y\| \geq 1$.

(b) Zjevně jsou P_1, P_2 projekce, tedy se jedná o idempotentní prvky. Jejich vzdálenost pak spočteme pomocí odhadu

$$\begin{aligned}
\|(P_1 - P_2)(x)\| &= \|\langle x, e_1\rangle e_1 - \langle x, e_2\rangle e_2\| = \\
&= \|\langle x, e_1 - e_2\rangle(e_1 - e_2) + \langle x, e_1 - e_2\rangle e_2 + \langle x, e_2\rangle(e_1 - e_2) + \langle x, e_2\rangle e_2 - \langle x, e_2\rangle e_2\| \leq \\
&\leq \|e_1 - e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\| + \|e_1 - e_2\| < \varepsilon^2 + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

platného pro každé $x \in B_H$.

□

PŘÍKLAD 15. Nechť A, B jsou komutativní komplexní $B^\star$-algebry a $\Phi\colon A \to B$ je algebraický izomorfizmus. Nechť $\psi\colon \Delta(B) \to \Delta(A)$ je homeomorfizmus daný jako $\psi = (\Phi^\sharp)\restriction_{\Delta(B)}$ (vizte Tvrzení FA.9.79). Nechť $\Gamma_A\colon A \to C_0(\Delta(A))$ a $\Gamma_B\colon B \to C_0(\Delta(B))$ jsou příslušné Gelfandovy transformace a nechť $T\colon C_0(\Delta(A)) \to C_0(\Delta(B))$ je dáno jako $Tf = f \circ \psi$.

(a) Platí $T \circ \Gamma_A = \Gamma_B \circ \Phi$.

(b) Mají-li A, B jednotku a $x \in A$, pak $\sigma(x) = \sigma(\Phi(x))$ a pro $f \in C(\sigma(x))$ platí $\Phi(f(x)) = f(\Phi(x))$.

DŮKAZ. (a) Pro $a \in A$ a $\eta \in \Delta(B)$ máme

$$T(\Gamma_A a)(\eta) = \Gamma_A a(\psi(\eta)) = (\psi(\eta))(a) = (\Phi^\sharp(\eta))(a) = \eta(\Phi(a))$$

a

$$(\Gamma_B\Phi(a))(\eta) = \eta(\Phi(a)).$$

(b) Platnost $\sigma(x) = \sigma(\Phi(x))$ plyne z Důsledku FA.9.30. Máme tedy dokázat, že

$$\Phi(f(x)) = \Phi(\Gamma_A^{-1}(f \circ \Gamma_A x)) = f(\Phi(x)) = \Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B\Phi(x)).$$

Aplikujeme Γ_B na $\Phi(f(x))$ a dostaneme dle (a) vztah

$$\Gamma_B(\Phi(f(x))) = (T \circ \Gamma_A)(\Gamma_A^{-1}(f \circ \Gamma_A x)) = T(f \circ \Gamma_A x) = f \circ \Gamma_A x \circ \psi.$$

Platí však

$$f \circ \Gamma_B \Phi(x) = f \circ (T(\Gamma_A x)) = f \circ \Gamma_A x \circ \psi.$$

Proto platí $\Phi(f(x)) = f(\Phi(x))$.

$\square$

PŘÍKLAD 16. Nechť $\varphi\colon K \to L$ je spojitá surjekce kompaktního Hausdorffova prostoru K na kompaktní Hausdorffův prostor L.

(a) Pro funkci $f \in C(K)$ jsou následující podmínky ekvivalentní:
 (i) Existuje $g \in C(L)$ taková, že $f = g \circ \varphi$.
 (ii) Pro každé $y \in L$ je f konstantní na $\varphi^{-1}(y)$.

(b) Zobrazení $J\colon C(L) \to C(K)$ definované jako $Jg = g \circ \varphi$ je izometrický *-izomorfizmus $C(L)$ do $C(K)$.

DŮKAZ. (a) Implikace (i)⇒(ii) je zřejmá. Obráceně, nechť $f \in C(K)$ splňuje (ii). Pak můžeme položit pro $y \in L$ $g(y) = f(x)$, kde $x \in \varphi^{-1}(y)$ libovolné. Pak zjevně $f = g \circ \varphi$. Zbývá ověřit spojitost g. Avšak pro $F \subset \mathbb{K}$ uzavřenou je množina

$$g^{-1}(F) = \varphi(f^{-1}(F))$$

kompaktní, neboť se jedná a spojitý obraz kompaktu, a tedy je uzavřená. Proto je g spojitá.

Tvrzení (b) je zřejmé.

$\square$

PŘÍKLAD 17. Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $A = C(K, \mathbb{C})$ je Banachova algebra spojitých komplexních funkcí na K. Je-li $f \in A$ a $g \in C(\sigma(f))$, pak $g(f) = g \circ f$.

DŮKAZ. *První důkaz:* Nechť $\Psi(g) = g \circ f$, $g \in C(\sigma(f)) = C(\operatorname{Rng} f)$. Pak $\Psi\colon C(\sigma(f)) \to C(K)$ je spojitý $*$-homomorfismus, pro který platí $\Psi(1) = 1$ a $\Psi(\mathit{Id}) = f$. Tedy $\Psi(g) = g(f)$ dle Věty FA.9.134(e).

Druhý důkaz: Nechť $f \in A = C(K)$ je dáno. Uvažujme relaci ekvivalence $\sim$ na K definovanou jako $x \sim y$, právě když $f(x) = f(y)$. Pak $\sim$ je uzavřená relace ekvivalence na K, takže $L = K/\sim$ je kompaktní Hausdorffův prostor a kanonické kvocinetové zobrazení $\varphi\colon K \to L$ je spojitá surjekce. Položme $B = \overline{\operatorname{alg}}\{1, f, \overline{f}\}$. Pak $B = J(C(L))$, kde $J\colon C(L) \to C(K)$ je zobrazení z Příkladu 16.

Vskutku, z definice vidíme, že $\{1, f, \overline{f}\} \subset J(C(L))$, takže $B \subset J(C(L))$. Na druhou stranu, nechť $h \in C(L)$ splňuje $f = J(h) = h \circ \varphi$. Pak h odděluje body L, takže dle Stoneovy-Weierstraßovy věty je $\overline{\operatorname{alg}}\{1, h, \overline{h}\} = C(L)$. Je-li tedy $f' = h' \circ \varphi \in J(C(L))$ pro nějakou $h' \in C(L)$, existují funkce $h_n \in \operatorname{alg}\{1, h, \overline{h}\}$ splňující $h_n \to h'$. Pak ovšem $h_n \circ \varphi \in \operatorname{alg}\{1, f, \overline{f}\}$ a konvergují k $h' \circ \varphi$. Tedy $f' \in \overline{\operatorname{alg}}\{1, f, \overline{f}\}$.

Nechť nyní $g \in C(\sigma_A(f)) = C(\operatorname{Rng} f)$. Jelikož $\operatorname{Rng} f = \operatorname{Rng} h$, je g spojitá funkce na $\sigma_{C(L)}(h)$.

Dle Příkladu 15 je $g(f) = g(J(h)) = J(g(h)) = g(h) \circ \varphi$. Stačí tedy nalézti $g(h)$. Z předchozího máme $\overline{\operatorname{alg}}\{1, h, \overline{h}\} = C(L)$, takže $\Delta(\overline{\operatorname{alg}}\{1, h, \overline{h}\}) = \Delta(C(L)) = \{\delta_l;\ l \in L\}$. Gelfandova transformace $\Gamma_{C(L)}\colon C(L) \to C(\Delta(C(L)))$ pak posílá h na funkci $h'\colon \delta_l \mapsto h(l)$, $l \in L$. Dle konstrukce prvku $g(h)$ platí $g(h) = \Gamma^{-1}_{C(L)}(g \circ h')$, což je funkce zobrazující $l \in L$ na $g(h(l))$. Tedy $g(h) = g \circ h$.

Proto $g(f) = g(h) \circ \varphi = g \circ h \circ \varphi = g \circ f$.

$\square$

PŘÍKLAD 18 (logaritmus unitárního prvku). (a) Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou a $x \in A$ je unitární prvek. Pokud $\sigma(x) \neq \mathbb{T}$, existuje samoadjungovaný prvek $y \in A$ splňující $\exp(iy) = x$.

(b) Nechť $A = C(\mathbb{T})$ a $x = \mathit{Id} \in A$. Pak x je unitární prvek A, pro který neexistuje samoadjungovaný $y \in A$ splňující $\exp(iy) = x$ (srovnejte s Příkladem **??**).

DŮKAZ. (a) Nechť x je daný unitární prvek splňující $\sigma(x) \neq \mathbb{T}$.

Krok 1. Předpokládejme nejprve, že $1 \notin \sigma(x)$. Nechť $g\colon \mathbb{C} \setminus ([0, +\infty) \times \{0\}) \to (0, 2\pi)$ značí funkci argumentu komplexního čísla, tj.

$$g(z) = \arg z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus ([0, +\infty) \times \{0\}),$$

kde $\arg z \in (0, 2\pi)$. Pak $g \in C(\sigma(x))$, což znamená, že $y = g(x)$ je dobře definovaný prvek A, který je dle Věty FA.9.134(c) samoadjungovaný (funkce g je reálná). Vzhledem k tomu, že

$$(\exp \circ (ig))(\lambda) = (Id)(z), \quad \lambda \in \sigma(x),$$

dle tvrzení (g) této Věty FA.9.134 dostáváme

$$\exp(iy) = (\exp \circ (ig))(x) = (Id)(x) = x.$$

Krok 2. Pokud nějaké číslo $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ splňuje $\lambda_0 \notin \sigma(x)$, pak je prvek $u = \lambda_0^{-1}x$ též unitární a přitom $1 \notin \sigma(u)$. Dle prvního kroku existuje samoadjungovaný prvek $v \in A$ splňující $\exp(iv) = u$. Označme $t = \arg \lambda_0$. Pak $\lambda_0 = \exp(it)$ a

$$\exp(ite) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ite)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} e = \exp(it)e = \lambda_0 e.$$

Díky Větě FA.9.126(a) pak dostáváme

$$\exp(i(te + v)) = \exp(ite)\exp(iv) = \lambda_0 eu = \lambda_0 u = x.$$

Tedy $te + v$ je hledaný prvek y.

(b) Nechť y je reálná spojitá funkce na $\mathbb{T}$ splňující $\exp(iy(\lambda)) = x(\lambda) = \lambda$ pro každé $\lambda \in \mathbb{T}$. Nechť $\arg\colon \mathbb{T} \to [0, 2\pi)$ značí větev argumentu. Pak $\arg$ je spojitá na $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. Pro funkci y tak máme vzorec $y(\lambda) = \arg(\lambda) + 2k(\lambda)\pi$, kde $k\colon \mathbb{T} \to \mathbb{Z}$ je funkce spojitá na $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ (funkce $\arg$ i y jsou zde totiž spojité). To je však souvislý prostor, a tedy je funkce k konstantní na $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. Nechť $k \in \mathbb{Z}$ je hodnota funkce $k(\lambda)$ pro $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Nyní však dostáváme spor se spojitostí funkce y, neboť $y(\lambda) = \arg(\lambda) + k$, což je funkce nespojitá v 1. Tedy taková reálná spojitá funkce y na $\mathbb{T}$ neexistuje.

□

PŘÍKLAD 19. (a) Nechť $A \in \mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor, je normální. Pak $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(b) Nechť $A \in M(n \times n) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ je normální. Pak existuje polynom p takový, že $p(A) = A^\star$.

(c) Nechť $A \in M(n \times n) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ je normální a $M \subset \mathbb{C}^n$ je A-invariantní podprostor (tj. $A(M) \subset M$). Pak M i $M^\perp$ jsou A i $A^\star$-invariantní.

(d) Nechť $H = \ell_2(\mathbb{Z})$ a $A \in \mathcal{L}(H)$ je posun doprava, tj. $Ax = A\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-1} e_n$, $x \in H$. Pak A je unitární (a tedy normální), prostor $\overline{\operatorname{span}}\{e_n;\ n \geq 0\}$ je A-invariantní, ale není $A^\star$-invariantní.

DŮKAZ. (a) Zjevně $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Obráceně, nechť $x \in \operatorname{Ker} A^k \setminus \operatorname{Ker} A$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Jelikož $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\star$ (Věta FA.10.17(a)), splňuje prostor $\operatorname{Ker} A$ inkluze $A(\operatorname{Ker} A) \subset \operatorname{Ker} A$ a $A^\star(\operatorname{Ker} A) \subset \operatorname{Ker} A$ (tj. $\operatorname{Ker} A$ je A i $A^\star$-invariantní). Obdobné inkluze platí pro $(\operatorname{Ker} A)^\perp$: Vskutku, je-li $y \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ a $z \in \operatorname{Ker} A$, je

$$\langle Ay, z\rangle = \langle y, A^\star z\rangle = \langle y, 0\rangle = 0 \quad \text{a} \quad \langle A^\star y, z\rangle = \langle y, Az\rangle = \langle y, 0\rangle = 0,$$

tedy Ay i $A^\star y$ je prvkem $(\operatorname{Ker} A)^\perp$. Nechť $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in \operatorname{Ker} A$ a $x_2 \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Operátor $A\restriction_{(\operatorname{Ker} A)^\perp}\colon (\operatorname{Ker} A)^\perp \to (\operatorname{Ker} A)^\perp$ je dobře definovaný a zjevně prostý. Proto rovnost $0 = A^k x = A^k x_1 + A^k x_2 = A^k x_2$ implikuje, že $x_2 = 0$. Tedy $x = x_1 \in \operatorname{Ker} A$.

(b) Nechť $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Jelikož $A^\star = f(A)$, kde $f(\lambda) = \overline{\lambda}$, $\lambda \in \sigma(A)$ (vizte Větu FA.9.134(a)), stačí najít polynom p, který splňuje $p(\lambda) = \overline{\lambda}$, $\lambda \in \sigma(A)$. K tomuto účelu postačí položit $p_{j,i}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_j - \lambda_i} - \frac{\lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$, $i \neq j$ v $\{1, \dots, m\}$ a

$$p(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \left(\overline{\lambda_j} \prod_{i \neq j} p_{j,i}(\lambda) \right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

(c) Nechť $M \subset \mathbb{C}^n$ je A-invariantní podprostor. Jelikož $A^\star = p(A)$ pro vhodný polynom p, platí $A^\star(M) = (p(A))(M) \subset M$. Je-li $x \in M^\perp$ a $y \in M$, je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle = 0$, neboť $A^\star y \in M$. Tedy $Ax \in M^\perp$. Podobně odvodíme $\langle A^\star x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0$, z čehož plyne $A^\star x \in M^\perp$.

(d) Jelikož $A^\star$ je posun doleva, snadno vidíme, že $\overline{\operatorname{span}}\{e_n;\ n \geq 0\}$ je A-invariantní, ale není $A^\star$-invariantní.

□

PŘÍKLAD 20. Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou a $u \in A$ je unitární.
(a) Pokud $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, existují polynomy p_n takové, že $\|p_n(u) - u^{-1}\| \to 0$.
(b) Pokud $\sigma(u) = \mathbb{T}$, pro každý polynom p pak platí $\|p(u) - u^{-1}\| \geq 1$.

DŮKAZ. (a) Pokud $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, je doplněk $\sigma(u)$ v Riemannově sféře $\alpha\mathbb{C}$ souvislý. Funkce $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ je holomorfní na nějakém okolí $\sigma(u)$. Dle[R, Věta 13.7] tak existují polynomy p_n takové, že $p_n(\lambda) \to \lambda^{-1}$ stejnoměrně na $\sigma(u)$. Proto $\|p_n(u) - u^{-1}\| \to 0$ dle Věty FA.9.134(a),(b).

(b) Pokud $\sigma(u) = \mathbb{T}$, uvažujme libovolný polynom $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$. Jelikož $u^{-1} = u^\star$, máme

$$u^{-1} - p(u) = u^*(e - (a_0 u + a_1 u^2 + \cdots + a_n u^{n+1})).$$

Nechť $q(\lambda) = 1 - a_0\lambda - a_1\lambda_2 - \cdots - a_n\lambda^{n+1}$. Z identity

$$\|u^\star x\|^2 = \|(u^\star x)^\star (u^\star x)\| = \|x^\star u^\star u x\| = \|x^\star x\| = \|x\|^2$$

odvodíme pomocí normality $q(u)$ (vizte Větu FA.9.115(a))

$$\begin{aligned}\|u^{-1} - p(u)\| = \|u^* q(u)\| = \|q(u)\| = r(q(u)) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(q(u))\} = \\ = \sup\{|q(\lambda)|;\ \lambda \in \sigma(u)\} = \|q\|_{C(\mathbb{T})} = \|q\|_{C(B_\mathbb{C})} \geq |q(0)| = 1.\end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme použili Větu o obrazu spektra FA.9.134(d).)

□

PŘÍKLAD 21. Nechť A je B*-algebra a $t \in A$ je tvaru $t = a + ib$, kde a, b jsou samoadjungované. Pak t je normální právě tehdy, když $ab = ba$.

DŮKAZ. Jelikož $t^\star = a - ib$, přímým výpočtem obdržíme

$$tt^\star = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 + i(ba - ab) \quad \text{a} \quad t^\star t = (a-ib)(a+ib) = a^2 + b^2 + i(ab - ba).$$

Je-li tedy t normální, platí $ba - ab = ab - ba$, tj. $ab = ba$. Obráceně, pokud $ab = ba$, máme $tt^\star = t^\star t$.

□

PŘÍKLAD 22. Nechť A je netriviální normovaná algebra s jednotkou a $x, y \in A$, pak $xy - yx \neq e$.

DŮKAZ. Předpokládejme, že $xy - yx = e$. Dokážeme indukcí, že

$$x^n y - y x^n = n x^{n-1} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vskutku, pro $n = 1$ toto platí z předpokladu. Předpokládáme-li platnost rovnost i pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pro $n + 1$ máme $x^n \neq 0$ a

$$x^{n+1} y - y x^{n+1} = x^n(xy - yx) + (x^n y - y x^n)x = x^n e + n x^{n-1} x = (n+1)x^n.$$

Tedy rovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Pak však máme

$$n\|x^{n-1}\| = \|x^n y - y x^n\| \leq 2\|x^n\|\|y\| \leq 2\|x^{n-1}\|\|x\|\|y\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy $n \leq 2\|x\|\|y\|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tento spor zakončuje důkaz.

□

PŘÍKLAD 23. Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou.
(a) Je-li $x \in A$ samoadjungovaný a $\|x\| \leq 1$, pak $e - x$ je nezáporný.
(b) Každý prvek $x \in A$ lze zapsat jako lineární kombinaci čtyř unitárních prvků.

DŮKAZ. (a) Zřejmě je $e-x$ samoadjungovaný. Jelikož $\sigma(-x)\subset[-1,1]$, je $\sigma(e-x)\subset[0,2]$. Tedy $e-x$ je nezáporný.

(b) Jelikož každý prvek je součtem dvou samoadjungovaných prvků, stačí dokázat, že každý samoadjungovaný prvek je lineární kombinací dvou unitárních. Nechť tedy $x\in A$ je samoadjungovaný. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\|x\|\le 1$. Pak x^2 je nezáporný (Věta 141), takž dle (a) je $e-x^2$ nezáporný. Položme $y=\sqrt{e-x^2}$. Pak

$$x=\frac{1}{2}(x+iy)+\frac{1}{2}(x-iy),$$

kde $x+iy^\star=x-iy$ a $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=e=(x-iy)(x+iy)$. Tedy $x+iy$ a $x-iy$ jsou unitární prvky.

□

PŘÍKLAD 24. Nechť X je komplexní Banachův prostor dimenze alespoň 2, $y^*\in X^*$ a $y\in Y\setminus\{0\}$. Pak pro operátor $Tx=y^*(x)y$, $x\in X$ platí $\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{p}}(T)=\{0,y^*(y)\}$. Je-li f holomorfní funkce na okolí $\sigma(T)$, platí

$$f(T)=\begin{cases} f(0)I+\frac{1}{y^*(y)}\left(f(y^*(y))-f(0)\right)T, & y^*(y)\neq 0,\\ f(0)I+f'(0)T, & y^*(y)=0.\end{cases}$$

DŮKAZ. Jelikož $\operatorname{codim}\operatorname{Ker}y^*=1$, existuje $x\in X\setminus\{0\}$ splňující $y^*(x)=0$. Pak ovšem $x\in\operatorname{Ker}T$ a $0\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Dále vidíme, že vektor y splňuje rovnici $y^*(y)y=Ty$, a tedy $y^*(y)\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Pro $\lambda\notin\{0,y^*(y)\}$ však umíme řešit rovnici $(\lambda I-T)z=x$; vyjde nám

$$(\lambda I-T)^{-1}z=\frac{z}{\lambda}+\frac{y^*(z)y}{\lambda(\lambda-y^*(y))}=\left(\frac{I}{\lambda}+\frac{T}{\lambda(\lambda-y^*(y))}\right)z.$$

Nechť f je holomorfn na okolí $\sigma(T)$ a Γ je vhodný cykl obíhající $\sigma(T)$. Pak z rovnosti

$$\frac{1}{\lambda(\lambda-y^*(y))}=\frac{1}{y^*(y)}\left(\frac{1}{\lambda-y^*(y)}-\frac{1}{\lambda}\right),\quad y^*(y)\neq 0,$$

plyne

$$\begin{aligned} f(T)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\lambda)}{\lambda-0}\,\mathrm{d}\lambda\right)I+\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\lambda)}{\lambda(\lambda-y^*(y))}\right)T=\\ &=\begin{cases} f(0)I+f'(0)T, & y^*(y)=0,\\ f(0)I+\frac{1}{y^*(y)}\left(f(y^*(y))-f(0)\right)T, & y^*(y)\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

□

2. Nezáporné prvky B*-algeber

FAKT 25. *Nechť x je nezáporný prvek Banachovy algebry s involucí a jednotkou. Pak x je invertovatelný právě tehdy, když existuje $\varepsilon>0$ takové, že $x-\varepsilon e$ je nezáporné.*

DŮKAZ. Prvek $x-\varepsilon e$ je samoadjungovaný pro každé $\varepsilon\in\mathbb{R}$ (Tvrzení FA.9.105(a), Fakt FA.9.112(b)). Dále x je invertovatelný, právě když $0\in\rho(x)$, což nastane, právě když $\sigma(x)\subset[\varepsilon,+\infty)$ pro nějaké $\varepsilon>0$ (Věta FA.9.40). Dle Faktu FA.9.32(b) je $\sigma(x-\varepsilon e)=\sigma(x)-\varepsilon$. Odtud již tvrzení snadno plyne.

□

Kapitola 10

Spojité lineární operátory na Hilbertových prostorech

PŘÍKLAD 1. Nechť $T \in \mathcal{F}(H)$ pro nějaký komplexní Hilbertův prostor H, tj. $Tx = \sum_{n=1}^{k} \langle x, a_n \rangle b_n$, $x \in H$, kde $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ jsou prvky H (vizte Větu FA.4.12(a)). Pak $T^\star x = \sum_{n=1}^{k} \langle x, b_n \rangle a_n$, $x \in H$.

DŮKAZ. Označme $Sy = \sum_{n=1}^{k} \langle y, b_n \rangle a_n$. Pro $x, y \in H$ pak máme

$$\langle Tx, y \rangle = \langle \sum_{n=1}^{k} \langle x, a_n \rangle b_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{k} \langle x, a_n \rangle \langle b_n, y \rangle$$

a

$$\langle x, Sy \rangle = \langle x, \sum_{n=1}^{k} \langle y, b_n \rangle a_n \rangle = \sum_{n=1}^{k} \overline{\langle y, b_n \rangle} \langle x, a_n \rangle .$$

Tedy $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ a $S = T^\star$.

□

PŘÍKLAD 2. Nechť $K \in L_2([0,1]^2)$ a $T_K f(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s) \,\mathrm{d}s$ (vizte Příklad FA.4.14). Pak $T_K \in \mathcal{K}(L_2([0,1]))$.

(a) Platí $T^\star f(t) = \int_0^1 \overline{K(s,t)} f(s) \,\mathrm{d}s$, $f \in L_2([0,1])$.

(b) Operátor T je samodajungovaný právě tehdy, když $\overline{K(s,t)} = K(t,s)$ skoro všude, $(t,s) \in [0,1]^2$.

DŮKAZ. (a) Pro operátor T_L definovaný pomoc jádra $L(t,s) = \overline{K(s,t)}$ platí

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t,s) f(s) \,\mathrm{d}s \right) \overline{g(t)} \,\mathrm{d}t = \int_{[0,1]^2} f(s) \overline{g(t)} K(t,s) \,\mathrm{d}(s,t) = \\ &= \int_0^1 f(s) \overline{\int_0^1 \overline{K(t,s)} g(t) \,\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s) \overline{T_L g(s)} \,\mathrm{d}s = \langle f, T_L g \rangle, \qquad f, g \in L_2([0,1]). \end{aligned}$$

(Fubiniova věta lze použít, neboť

$$\int_{[0,1]^2} |f(s) \overline{g(t)} K(t,s)| \,\mathrm{d}(s,t) = \int_0^1 |f| T_{|L|} |g| \,\mathrm{d}\lambda_1 = \langle |f|, T_{|L|} |g| \rangle < +\infty .$$

Poslední nerovnost platí, jelikož $|f|$ i $T_{|L|}|g| \in L_2([0,1])$.) Tedy $T^\star = T_L$.

(b) Je-li $K = L$, je $T^\star = T$ dle (a).

Obráceně, nechť $T^\star = T$, tj. $T_L = T_K$. Pak pro každé prvky $f, g \in L_2([0,1])$ platí

$$\begin{aligned} 0 = \langle (T_K - T_L) f, g \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (K(t,s) - L(t,s)) f(s) \,\mathrm{d}s \right) \overline{g(t)} \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{[0,1]^2} (K(t,s) - L(t,s)) f(s) \overline{g(t)} \,\mathrm{d}(s,t). \end{aligned}$$

Položíme-li $f = \chi_A$ a $g = \chi_B$ pro $A, B \subset [0,1]$ měřitelné, máme $0 = \int_{A \times B} (K - L) \,\mathrm{d}\lambda_2$. Protože je každá otevřená množina v $[0,1]^2$ spočetným sjednocením disujnktních měřitelných obdélníků, platí $\int_G (K - L) \,\mathrm{d}\lambda_2 = 0$ pro každou $G \subset [0,1]^2$ otevřenou. Z regularity λ_2 pak plyne $\int_E (K - L) \,\mathrm{d}\lambda_2 = 0$ pro každou $E \subset [0,1]^2$ měřitelnou. Z toho již dostáváme požadovaný vztah $K = L$ λ_2-skoro všude.

□

PŘÍKLAD 3. Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je unitární operátor. Pak existuje samodajungovaný operátor $S \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $T = \exp(iS)$. ■■■[vysvětlit rozdíl od Příkladu 9.18]

DŮKAZ. Uvažujme spojitou funkci $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danou předpisem $f(t) = e^{i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, a její restrikci $f = h|_{[0,2\pi)}$. Pak f je spojitá bijekce $[0, 2\pi)$ na $\mathbb{T}$. Její inverze $g = f^{-1}\colon \mathbb{T} \to [0, 2\pi)$ je pak bodovou limitou spojitou funkcí, a speciálně je tedy borelovská.

Vskutku, pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujeme funkci

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} t, & \lambda = e^{it}, t \in [0, 2\pi - \frac{1}{n}], \\ 2\pi - \frac{1}{n}, & \lambda = e^{it}, t \in [2\pi - \frac{1}{n}, 2\pi). \end{cases}$$

Tyto funkce jsou zjevně spojité a splňují $g_n \to g$.

Položme nyní $S = g(T) = \Psi(g)$, kde Ψ je zobrazení z Věty **??**. Díky vlastnosti (?) této věty je S samodajungovaný operátor. Dále platí $h \circ g = \mathit{Id}$ na $\mathbb{T}$, a tedy díky Větě **??**(e) máme

$$T = (\mathit{Id})(T) = (h \circ g)(T) = h(g(T)) = h(S) = \exp(iS).$$

Tím je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 4. (a) Najděme spektrální rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Nechť $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ je definován jako $T = A \oplus A \oplus \cdots$, tj. $Tx = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \dots)$, $x \in \ell_2$. Najděme jeho spektrální rozklad.

DŮKAZ. (a) Jelikož $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$, spektrum A je $\{-1, 1\}$. Tedy Jordanův tvar A je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Standardním postupem nalezneme R splňující $A = RJR^{-1}$, vyjde nám $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}R$. Tedy projekce příslušné vlastním číslům spočteme pomocí borelovského kalkulu. Je-li však $f \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(A)) = C(\sigma(A))$, existuje polynom p splňující $p = f$ na $\sigma(A)$. Lze tedy aplikovat Větu FA.9.60(g) a dostáváme

$$P_1 = \chi_{\{1\}}(A) = R\chi_{\{1\}}(J)R^{-1} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$P_{-1} = \chi_{\{-1\}}(A) = R\chi_{\{-1\}}(J)R^{-1} = R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$A = 1P_1 + (-1)P_{-1}$$

je spektrální rozklad A.

(b) Snadno se přesvědčíme, že T je samoadjungovaný a $\sigma(T) = \{-1, 1\}$. Uvažujme $Q_{-1} = P_{-1} \oplus P_{-1} \oplus \cdots$ a $Q_1 = P_1 \oplus P_1 \oplus \cdots$. Pak Q_{-1} je ortogonální projekce.

Vskutku, Q_{-1} je dobře definovaný spojitý operátor na ℓ_2, neboť

$$\|Q_{-1}x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_{-1}\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix}\|_2^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|P_{-1}\|^2 \|\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix}\|_2^2 = \|P_{-1}\|^2\|x\|^2.$$

Zjevně platí $Q_{-1}^2 = P_{-1}^2 \oplus P_{-1}^2 \oplus \cdots = P_{-1} \oplus P_{-1} \oplus \cdots = Q_{-1}$ a $Q_{-1}^\star = P_{-1}^\star \oplus P_{-1}^\star \oplus \cdots = Q_{-1}$.

Podobně ověříme, že Q_1 je ortogonální projekce na ℓ_2 a že platí $Q_{-1} + Q_1 = I$, $T = -1Q_{-1} + 1Q_1$. Tedy $F = \{Q_{-1}, Q_1\}$ tvoří rozklad identity a zbývá ověřit, že $\langle Tx, x \rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}F_{x,x}(\lambda)$ pro každé $x \in \ell_2$.

Platí však

$$\int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}F_{x,x}(\lambda) = -1\langle F(\{-1\})x, x\rangle + 1\langle F(\{1\})x, x\rangle = -1\langle Q_{-1}x, x\rangle + 1\langle Q_1 x, x\rangle =$$

$$= -1\sum_{n=1}^{\infty}\langle P_{-1}\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n}\end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}^2} + 1\sum_{n=1}^{\infty}\langle P_{1}\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n}\end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\langle A\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n}\end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle Tx, x\rangle.$$

Tedy F je hledaný rozklad operátoru T.

□

PŘÍKLAD 5. Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ pro komplexní Hilbertův prostor H. Pak T je kompaktní právě tehdy, když $T^\star T$ je kompaktní.

DŮKAZ. Je-li T kompaktní, je $T^\star T$ kompaktní dle Věty FA.4.12(d).

Obráceně, z Věty FA.**??** plyne, že $T = UA$ pro nějaký unitární operátor $U\colon \overline{\operatorname{Rng} A} \to \overline{\operatorname{Rng} T}$ a nezáporný A. Z konstrukce A však plyne, že $A = \sqrt{T^\star T}$, což je pro kompaktní operátor T též kompaktní operátor (vizte důkaz Věty FA.**??**). Tedy T je také kompaktní.

□

PŘÍKLAD 6. Nechť $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $T = P \oplus P \oplus P \dots \in \mathcal{L}(\ell_2)$, tj.

$$T(\{x_n\}) = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0, x_8, 0 \dots), \quad x = \{x_n\} \in \ell_2.$$

Pak T je nekompaktní operátor splňující $T^2 = 0$.

DŮKAZ. Jelikož $Te_{2n} = e_{2n-1}$, není T kompaktní dle Tvrzení FA.4.9(iii). Rovnost $T^2 = 0$ je pak zřejmá.

□

PŘÍKLAD 7 (spektrální rozklad Fourierovy transformace). Nechť $F\colon L_2(\mu_1) \to L_2(\mu_1)$ je unitární operátor na $L_2(\mu_1)$ daný Větou FA.5.31. Nalezněme jeho spektrální rozklad.

ŘEŠENÍ. *Krok 1.* Uvažujme funkce $\varphi_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \{0, \dots, 3\}$. Pak se jedná o funkce v $\mathscr{S}_1$, a tedy jejich Fourierovu transformaci lze počítat pomocí vzorce FA.**??**. Tvrdíme, že φ_0 splňuje $F\varphi_0 = \varphi_0$.

Vskutku, φ_0 i $\widehat{\varphi_0}$ splňují na $\mathbb{R}$ diferenciální rovnici $y' + xy = 0$. Pro φ_0 je to zřejmé, pro $\widehat{\varphi_0}$ to plyne z věty o záměně derivace a integrálu, neboť platí (pomocí per partes)

$$\widehat{\varphi_0}'(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(t) = (-i)\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x) =$$

$$= (-i)(-it)\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = -t\widehat{\varphi_0}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\left(\frac{\widehat{\varphi_0}}{\varphi_0}\right)' = \frac{1}{\varphi_0^2}\left(-Id\widehat{\varphi_0}\varphi_0 + \widehat{\varphi_0}(Id)\varphi_0\right) = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Funkce $\frac{\widehat{\varphi_0}}{\varphi_0}$ je proto konstantní na $\mathbb{R}$, což však vzhledem k rovnostem $1 = \varphi_0(0) = \widehat{\varphi_0}(0)$ znamená rovnost $\widehat{\varphi_0} = \varphi_0$. Označme $h_1 = \varphi_0$.

Krok 2. Jelikož $\widehat{\varphi_0} = \varphi_0$, máme rovnost $e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x)$, $t \in \mathbb{R}$. Zderivujeme-li tuto rovnici podle t, dostaneme rovnost

$$-te^{-\frac{t^2}{2}} = (-i)\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}}e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

tj. $\varphi_1(t) = i\widehat{\varphi_1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. To ale znamená, že $\widehat{\varphi_1} = -i\varphi_1$. Označme $h_{-i} = \varphi_1$.

Derivujme dále rovnici (1) podle t. Dostáváme tak rovnost

$$-e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} = (-i)(-i)\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x) e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

tj. $\varphi_0 - \varphi_2 = \widehat{\varphi_2}$.

Položme $h = \sum_{i=0}^{2} a_i \varphi_i$, přičemž koeficenty $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ zvolme tak, aby $\widehat{h} = -h$. Tedy musí platit

$$-a_0\varphi_0 - a_1\varphi_1 - a_2\varphi_2 = a_0\varphi_0 + a_1(-i)\varphi_1 + a_2(\varphi_0 - \varphi_2).$$

Volbou $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ obdržíme funkci h_{-1} splňující $\widehat{h_{-1}} = -h_{-1}$.

Zderivujme rovnici (2). Pak

$$3\varphi_1(t) - \varphi_3(t) = te^{-\frac{t^2}{2}} + 2te^{-\frac{t^2}{2}} - t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} = i\int_{\mathbb{R}} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = i\widehat{\varphi_3}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Položme $h = \sum_{i=0}^{3} a_i \varphi_i$, přičemž koeficenty $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$ zvolme tak, aby $\widehat{h} = ih$. Tedy musí platit

$$ia_0\varphi_0 + ia_1\varphi_1 + ia_2\varphi_2 + ia_3\varphi_3 = a_0\varphi_0 + a_1(-i)\varphi_1 + a_2(\varphi_0 - \varphi_2) + a_3(-3i\varphi_1 + i\varphi_3).$$

Volbou $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ obdržíme funkci h_i splňující $\widehat{h_i} = ih_i$.

Krok 3. Jelikož $F^4 = Id$, dle Věty o obrazu spektra FA.9.134(e) je $\sigma(F) \subset \{1, -1, i, -i\}$. Nenulové funkce h_1, h_{-1}, h_i, h_{-i} svědčí o tom, že $\sigma(F) = \sigma_{\mathrm{p}}(F) = \{1, -1, i, -i\}$.

Krok 4. Dle Věty FA.10.63 je tedy $\langle Ff, f\rangle = \int_{\sigma(F)} \lambda\,\mathrm{d}E_{f,f}(\lambda)$, kde $f \in L_2(\mu_1)$. Dále dle Věty FA.10.61(d) je pro každé $\lambda_0 \in \sigma(F)$ projekce P_{λ_0} na $\operatorname{Ker}(\lambda_0 I - F)$ netriviální. Jelikož pro každé $f \in L_2(\mu_1)$ platí $E_{f,f}(\{\lambda_0\}) = \langle E(\{\lambda_0\})f, f\rangle = \langle P_{\lambda_0} f, f\rangle$, máme

$$\langle Ff, f\rangle = \int_{\sigma(F)} \lambda\,\mathrm{d}E_{f,f}(\lambda) = \sum_{k=0}^{3} \int_{i^k} i^k\,\mathrm{d}\langle P_{i^k} f, f\rangle = \langle \sum_{k=0}^{3} i^k P_{i^k} f, f\rangle, \quad f \in L_2(\mu_1),$$

a tedy $F = \sum_{k=0}^{3} i^k P_{i^k}$.

Vyjádřeme nyní jednotlivé projekce pomocí F. Snadno ověříme, že rovnice

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{4}\left(I + F + F^2 + F^3\right) \\ P_{-1} &= \frac{1}{4}\left(I - F + F^2 - F^3\right) \\ P_i &= \frac{1}{4}\left(I - iF - F^2 + iF^3\right) \\ P_{-i} &= \frac{1}{4}\left(I + iF - F^2 - iF^3\right) \end{aligned}$$

definují projekce na $L_2(\mu_1)$. Navíc jsou samoadjungované (to ověříme ze vztahu $F^\star = F^{-1} = F^3$), a tedy ortogonální. Z definujících rovnic nakonec ověříme, že P_{i^k} je vskutku projekce na $\operatorname{Ker}(i^k I - F)$. (Například pro $k = 2$ máme následující rovnosti: Pokud $Ff = -f$, pak $P_{-1}(f) = \frac{1}{4}(f - Ff + F^2 f - F^3 f) = f$; a pokud $P_{-1} f = f$, pak $Ff = \frac{1}{4}(Ff - F^2 f + F^3 f - F^4 f) = -\frac{1}{4}(f - Ff + F^2 f - F^3 f) = -f$.)

Máme tak provedený spektrální rozklad F, totiž

$$F = P_1 + iP_i - P_{-1} - iP_{-i}.$$

□

PŘÍKLAD 8. Nechť H je nenulový komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ normální. Pak existuje prostor (Ω, μ) s mírou mající stejnou vlastnost jako v Příkladu FA.10.65 a unitární operátor $U\colon H \to L_2(\mu)$ takový, že $T = U^\star M_g U$, kde $g \in L_\infty(\mu)$ generuje operátor $M_g \in \mathcal{L}(L_2(\mu))$ z Příkladu FA.10.65.

DŮKAZ. *Krok 1.* Uvažujme rozklad identity E na $\sigma(T)$ příslušný T. Předpokládejme nejprve, že existuje vektor $x \in H$ takový, že prostor $M = \{f(T)x;\ f \in C(\sigma(T))\}$ je hustý v H. Pak uvažujme prostor $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\sigma(T), \mathrm{Bs}(\sigma(T)), E_{x,x})$, což je prostor s konečnou mírou splňující $\overline{C(\sigma(T))}^{L_2(\mu)} = L_2(\mu)$ (vizte

Důsledek FA.**??**). Položme $g(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \Omega$ a $U(f(T)x) = f$, $f \in C(\sigma(T))$. Pak $\|g\|_\infty \leq r(T) = \|T\|$ a U je zjevně linerární zobrazení z M na $C(\sigma(T))$ splňující

$$\|f(T)x\|^2 = \langle f(T)x, f(T)x\rangle = \langle f(T)^\star f(T)x, x\rangle = \langle \overline{f}(T)f(T)x, x\rangle = \langle |f|^2(T)x, x\rangle = \\ = \int_{\sigma(T)} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \|U(f(T)x)\|^2_{L_2(\mu)}.$$

Tedy U je izometrie hustého podprostoru $M \subset H$ na hustý podprostor $L_2(\mu)$. Existuje tak právě jeden izmetrický operátor $U\colon H \to L_2(\mu)$ splňující $U(f(T)x) = f$, $f \in C(\sigma(T))$.

Zbývá ukázat, že $T = U^\star M_g U$, tj. $UT = M_g U$. Nechť $f \in C(\sigma(T))$ je dáno. Pak

$$UT(f(T)x) = U((\mathit{Id})(T)(f(T))x) = U(\mathit{Id}f)(T)x) = \mathit{Id}f = gf = M_g f = M_g U(f(T)x).$$

Tedy $UT = M_g U$ pro $y \in M$. Vzhledem k hustotě M platí vzorec na celém H.

Krok 2. Položme $\mathcal{A} = \{f(T);\ f \in C(\sigma(T))\} \subset \mathcal{L}(H)$. Nechť $M \subset H$ je uzavřený $\mathcal{A}$ -invariantní podprostor (tj. $A(M) \subset M$ pro každé $A \in \mathcal{A}$). Pak i $M^\perp$ je $\mathcal{A}$-invariantní. Vskutku, je-li $x \in M^\perp$ a $A = f(T) \in \mathcal{A}$, máme pro $y \in M$ vztah

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle = \langle x, f(T)^\star y\rangle = \langle x, \overline{f}(T)y\rangle = 0,$$

neboť $\overline{f}(T) \in \mathcal{A}$. Tedy $Ax \in M^\perp$.

Krok 3. Je-li $M \subset H$ uzavřený $\mathcal{A}$-invariantní podprostor, nenulový vektor $x \in M$ nazveme cyklickým, pokud $\{Ax;\ A \in \mathcal{A}\}$ je hustý v M. Nyní ukážeme, že existuje kolekce uzavřených prostorů $\{M_i;\ i \in I\}$ v H s následujícími vlastnostmi:

(a) Každý M_i má cyklický vektor.
(b) Pro $i \neq j$ v I platí $M_i \perp M_j$.
(c) Každý M_i je $\mathcal{A}$-invariantní.
(d) Prostor $\operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$ je hustý v H.

Ke konstrukci takovéto kolekce prostorů použijeme Zornovo lemma. Nechť

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{P};\ \mathcal{P} \text{ je kolekce uzavřených prostorů v } H \text{ splňující (a), (b) a (c)}\}$$

je uspořádaná inkluzí, tj. $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$, pokud $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Snadno se přesvědčíme, že $(\mathcal{M}, \leq)$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu, a tedy existuje maximální prvek $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$. Pak $\mathcal{P}$ je požadovaná kolekce prostorů. Kdyby tomu totiž tak nebylo, nebyl by prostor $M = \overline{\operatorname{span}} \bigcup \mathcal{P}$ roven H. Pak je však M $\mathcal{A}$-invariantní prostor, a tedy $M^\perp$ je netriviální $\mathcal{A}$-invariantní prostor (vizte Krok 2). Nyní stačí vzít $x \in M^\perp \setminus \{0\}$ a položit $N = \overline{\{Ax;\ A \in \mathcal{A}\}} \subset M$. To je $\mathcal{A}$-invariantní prostor s cyklickým vektorem x, který je kolmý na všechny prvky $\mathcal{P}$. Tedy $\mathcal{P} \cup \{N\}$ je prevk $\mathcal{M}$ ostře větší než $\mathcal{P}$. To je však spor s maximalitou $\mathcal{P}$.

Krok 4. Uvažujme kolekci prostorů $\{M_i;\ i \in I\}$ z Kroku 3. Nechť $Y = (\oplus_{i\in I} M_i)_{\ell_2}$, tj.

$$Y = \{\{y_i\} \in \prod_{i\in I} M_i;\ \sum_{i\in I} \|y_i\|^2_{M_i} < +\infty\}.$$

Uvažujme na Y skalární součin definovaný jako

$$\langle (y_i), (z_i)\rangle_Y = \sum_{i\in I} \langle y_i, z_i\rangle_{M_i}, \quad \{y_i\}, \{z_i\} \in Y.$$

To je dobře definovaný skalární součin, jelikož řada na pravé straně lze odhadnout pomocí

$$\sum_{i\in I} |\langle y_i, z_i\rangle_{M_i}| \leq \sum_{i\in I} \|y_i\|_{M_i} \|z_i\|_{M_i} \leq \left(\sum_{i\in I} \|y_i\|^2_{M_i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in I} \|z_i\|^2_{M_i}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Tedy Y je prostor se skalárním součinem.

Nechť P_i jsou ortogonální projekce na M_i a $P_F = \sum_{i\in F} P_i$ pro $F \subset I$ konečnou. Pak P_F je samodajungovaný operátor splňující

$$P_F P_F = \left(\sum_{i\in F} P_i\right)\left(\sum_{j\in F} P_j\right) = \sum_{i,j\in F} P_i P_j = \sum_{i\in F} P_i^2 = \sum_{i\in F} P_i = P_F.$$

(Máme $M_i \perp M_j$ pro $i \neq j$, takže $P_i P_j = P_j P_i = 0$ pro $i \neq j$.) Tedy P_F je ortogonální projekce, jejíž obor hodnot obsahuje $\oplus_{i\in F} M_i$. Zjevně však tento obor hodnot nemůže být větší, takže P_F je ortogonální projekce na $\oplus_{i\in F} M_i$.

Uvažujme operátor $V\colon H \to Y$ definovaný jako $Vx = \{P_i x\}_{i\in I}$. Pak pro $x \in H$ a každou $F \in \mathcal{F}(I)$ platí

$$\sum_{i\in F} \|P_i x\|_{M_i}^2 = \|\sum_{i\in F} P_i x\|_H^2 = \|P_F x\|_H^2 \le \|x\|_H^2.$$

Tedy V je dobře definovaný a $\|Vx\|_Y \le \|x\|_H$. Na druhou stranu, nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $F \in \mathcal{F}(I)$ a prvky $m_i \in M_i$, $i \in F$ takové, že $\|x - \sum_{i\in F} m_i\|^2 < \varepsilon$. Pak dle Věty FA.1.99 platí

$$\|x - P_F x\|^2 \le \|x - \sum_{i\in F} m_i\|^2 < \varepsilon,$$

a tedy máme

$$\|x\|^2 = \|x - P_F x + P_F x\|^2 = \|x - P_F x\|^2 + \|P_F x\|^2 < \varepsilon + \sum +i \in F \|P_i x\|^2.$$

Proto $\|x\|^2 \le \sum_{i\in I} \|P_i x\|^2$. Tedy V je izometrie H do Y.

Nechť nyní $y = \{y_i\} \in Y$ je dáno. Pak řada $\sum_{i\in I} y_i$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovy podmínku FA.**??**. Vskutku, pro $\varepsilon > 0$ zvolíme $F \in \mathcal{F}(I)$ takové, že $\sum_{i\in F'} \|y_i\|^2 < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ disjunktní s F. Pak pro tyto F' dostáváme $\|\sum_{i\in F'} y_i\|^2 = \sum_{i\in F'} \|y_i\|^2 < \varepsilon$. Prvek $x = \sum_{i\in I} y_i \in H$ je tak dobře definován a zřejmě platí $P_i x = y_i$, tj. $Vx = y$. Zobrazení V je proto bijekce, takže speciálně z úplnosti H dostáváme, že Y je Hilbertův prostor.

Krok 5. Nechť $\{M_i;\ i \in I\}$ je kolekce prostorů z Kroku 3. Zvolme $x_i \in M_i$ cyklický vektor pro M_i. Pak pro Hilbertův prostor M_i existuje dle Kroku 1 měřitelný prostor $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$ s konečnou mírou μ_i unitární operátor $U_i\colon M_i \to L_2(\mu_i)$ a funkce $g_i \in L_\infty(\mu_i)$ takové, že $\|g_i\|_\infty \le \|T\|$ a $T\restriction_{M_i} = U_i^* M_{g_i} U_i$.

Nechť Ω je disjunktní sjednocení množin Ω_i a Σ je definováno takto: $S \subset \Omega$ leží v Σ, pokud $S \cap \Omega_i \in \Sigma_i$, $i \in I$. Pak Σ je σ-algebra na Ω. Definujme μ na Σ pomocí formule

$$\mu(S) = \sum_{i\in I} \mu_i(S \cap \Omega_i), \quad S \in \Sigma.$$

Pak μ je dobře definovaná míra na Σ splňující podmínku z Příkladu FA.10.65. Definujme operátor $U\colon Y \to L_2(\mu)$ jako $U\{y_i\}\restriction_{\Omega_i} = U_i y_i$. Pak

$$\|\{y_i\}\|_Y^2 = \sum_{i\in I} \|y_i\|^2 = \sum_{i\in I} \|U_i y_i\|_{L_2(\mu_i)} = \sum_{i\in I} \int_{\Omega_i} |U_i y_i|^2 \,\mathrm{d}\mu_i = \|U\{y_i\}\|_{L_2(\mu)}^2$$

Tedy U je izometrie do. Zjevně však platí, že $\operatorname{Rng} U$ obsahuje všechny funkce $f \in L_2(\mu)$, které jsou nulové mimo $\bigcup_{i\in F} \Omega_i$ pro nějaké $F \in \mathcal{F}(I)$. Takové funkce však tvoří hustý podprostor $L_2(\mu)$, což vzhledem k úplnosti Y znamená, že U je surjektivní. Složením U s V z Kroku 4 obržíme unitární operátor $W\colon H \to L_2(\mu)$. Položme $g \in L_\infty(\mu)$ jako $g\restriction_{\Omega_i} = g_i$.

Nakonec ověřme, že $WT = M_g W$. Nechť $x \in H$ je dáno. V průběhu Kroku 4 jsem ukázali, že $x = \sum_{i\in I} P_i x$. Pak

$$WTx = UVTx = UV\left(\sum_{i\in I} TP_i x\right) UV\left(\sum_{i\in I} T\restriction_{M_i} P_i x\right) = U\left(\{T\restriction_{M_i} P_i x\}\right),$$

což je element $L_2(\mu)$ takový, že na Ω_i je roven $U_i T\restriction_{M_i} P_i x$. Avšak to je rovno $M_{g_i} U_i P_i x = g_i U_i P_i x$ na Ω_i. A z druhé strany máme

$$M_g W x = M_g U V x = M_g U(\{P_i x\}),$$

což je funkce, která na Ω_i je rovna funkci $g_i U_i P_i x$. Tím je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 9. Nechť T je posun doleva na $\ell_2(\mathbb{Z})$, tj. $T(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n+1} e_n$. Pak T je unitární. Najděme jeho spektrální rozklad.

DŮKAZ. Zjevně je $T^\star$ roven posunu doprava, a tedy $TT^\star = T^\star T = I$. Proto je T unitární.

Uvažujme prostor $L_2(\mathbb{T}, \mu)$, kde μ je Lebesgueova míra na kruhu normalizovaná tak, aby $\mu(\mathbb{T}) = 1$. Tedy pro $f \in C(\mathbb{T})$ platí $\int_{\mathbb{T}} f(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix})\, \mathrm{d}x$. Uvažujme systém funkcí $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset C(\mathbb{T})$, kde $u_k(t) = t^k$, $t \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Přímým výpočtem se ověří, že $\{u_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ tvoří ortonormální systém v $L_2(\mu)$. Navíc je tento systém úplný, neboť jeho lineární obal je hustý v $C(\mathbb{T})$ (to plyne z Věty FA.15.59 a pozorování $\overline{Id} = (Id)^{-1}$), a tedy je tento lineární obal hustý v $L_2(\mu)$ ($C(\mathbb{T})$ je husté v $L_2(\mu)$).

Uvažujme operátor $U\colon \ell_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mu)$ definovaný jako $U(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k u_k$. To je izometrická surjekce ℓ_2 na $L_2(\mu)$ (vizte Větu FA.1.118), tedy se jedná o unitární operátor. Nechť $g(t) = t^{-1}$, $t \in \mathbb{T}$. Ukážeme, že $UT = M_g U$, kde $M_g \in \mathcal{L}(L_2(\mu))$ je operátor definovaný v Příkladu FA.10.65.

Nechť tedy $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ je dáno. Pak

$$UTx = UT(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e_k) = U \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{k+1} e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{k+1} u_k$$

a

$$M_g U x = M_g(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k u_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k M_g(u_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k u_{k-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{k+1} u_k.$$

Tedy T je unitárně ekvivalentní s M_g. Dle Příkladu **??** je tedy $\sigma(T) = \sigma(M_g) = \operatorname{ess} \operatorname{Rng} g = \mathbb{T}$. Označme E_{M_g} a E_T spektrální rozklady jednotky příslušné M_g a T. Pak $E_{M_g}(A) f = \chi_{g^{-1}(A)} f = \chi_{A^{-1}} f$, $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{T})$ (zde $A^{-1} = \{t^{-1};\ t \in A\}$). Tedy dle Příkladu **??** pro $E_T(A)$ platí

$$E_T(A)x = U^\star E_{M_g} U x = U^\star(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \chi_{A^{-1}} u_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k U^\star(\chi_{A^{-1}} u_k), \quad A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{T}).$$

Získali jsme tak spektrální rozklad T.

□

PŘÍKLAD 10. Nechť A je nezáporný operátor o normě nejvýše jedna na komplexním Hilbertově prostoru H. Definujme rekurentně operátory $B_n \in \mathcal{L}(H)$ jako $B_0 = 0$ a $B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2)$. Pak $B_n \to \sqrt{A}$.

DŮKAZ. Položme $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ a induktivně definujme $f_n(\lambda)$ jako $f_0 = 0$ a $f_{n+1}(\lambda) = f_n(\lambda) + \frac{1}{2}(\lambda - (f_n(\lambda))^2)$, $\lambda \in \sigma(A) \subset [0, 1]$. Pak f_n jsou spojité funkce na $\sigma(A)$ splňující $0 \le f_0 \le f_1 \le \cdots f_n \le f_{n+1} \le \cdot \le f$. Vskutku, indukcí dokážeme nerovnost $f_n \le f$. Pro $n = 0$ je to jasné. Pokud nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$, pro $n + 1$ máme

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(\lambda) = f_n(\lambda) + \frac{1}{2}(\lambda - f_n^2(\lambda)) \le \sqrt{\lambda} &\Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}(\lambda - f_n^2(\lambda)) \le \sqrt{\lambda} - f_n(\lambda) &\Leftrightarrow \\
(\sqrt{\lambda} - f_n(\lambda))(\sqrt{\lambda} + f_n(\lambda)) \le 2(\sqrt{\lambda} - f_n(\lambda)) &\Leftrightarrow \\
0 \le (\sqrt{\lambda} - f_n(\lambda))(2 - (\sqrt{\lambda} + f_n(\lambda))),&
\end{aligned}$$

což platí díky indukčnímu předpokladu $\sqrt{\lambda} + f_n(\lambda) \le 2\sqrt{\lambda} \le 2$.

Tedy $\{f_n\}$ je neklesjící posloupnost shora omezená funkcí f. Označme $g(\lambda) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda)$, $\lambda \in \sigma(T)$. Z rekurentního vzorce odvodíme limitním přechodem $g = g + \frac{1}{2}(Id - g^2)$, tj. $g = f$. Z Diniho věty o monotńní konvergenci na kompaktu dokonce máme stejnoměrnou konveregenci $\{f_n\}$ k f. Proto

$$B_n = f_n(A) \to f(A) = \sqrt{A}.$$

□

PŘÍKLAD 11. Nechť $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $f \in L_2([0,1])$ a $x \in [0,1]$.

(a) Pak T a $T^\star T$ jsou kompaktní prosté operátory.

(b) Operátor $P = \sqrt{T^\star T}$ je nezáporný kompaktní operátor, pro který existuje unitární operátor $U \in \mathcal{L}(L_2([[0,1]))$ splňující $T = UP$.

(c) Najděme U a P explicitně.

DŮKAZ. (a) Kompaktnost T víme z Příkladu FA.4.14, neboť $Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ pro $k(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le x \le 1, \\ 0, & 0 \le x < y \le 1. \end{cases}$

Je-li $Tf = 0$, máme $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pro skoro všechna $x \in [0,1]$. Funkce Tf je však absolutně spojitá, přičemž je integrálem své derivace. Tedy můžeme rovnost derivovat ve skoro všeh bodech a dostaneme $f(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in [0,1]$. Operátor T je tak prostý.

Adjungovaný operátor $T^\star$ snadno zjistíme z rovnosti pomocí Fubiniovy věty

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\substack{0\le y\le x\\ 0\le x\le 1}} f(y)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 f(y)\overline{\int_y^1 g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}y,$$

tedy $T^\star g(y) = \int_y^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, $y \in [0,1]$, $g \in L_2([0,1])$.

Složením dostáváme

$$\begin{aligned} Qf(t) = T^\star Tf(t) &= \int_t^1 Tf(x)\,\mathrm{d}x = \int_t^1 \left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\substack{t\le x\le 1\\ 0\le y\le x}} f(y)\,\mathrm{d}(x,y) = \\ &= \int_0^t f(y)\left(\int_t^1 1\,\mathrm{d}x\right)dy + \int_t^1 f(y)\left(\int_y^1 1\,\mathrm{d}x\right)dy = \\ &= (1-t)\int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y + \int_t^1 (1-y)f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Pak Q je kompaktní samoadjungovaný operátor, který je prostý. Vskutku, pokud $Qf = 0$, pak $0 = \langle T^\star Tf, f\rangle = \langle Tf, Tf\rangle$, tj. $Tf = 0$, a tedy $f = 0$. Najděme jeho spektrální rozklad. Jelikož $\sigma(Q) \subset [0,\infty)$ a mimo 0 sestává z vlastních čísel, stačí nám řešit rovnici

$$Qf = \lambda f, \quad \lambda \in (0,\infty), f \in L_2([0,1]) \setminus \{0\}. \tag{3}$$

Pišme

$$\lambda f(t) = Qf(t) = (1-t)\int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y + \int_t^1 (1-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

pro nějaké $f \in L_2([0,1])$ nenulové. Pak na pravé straně máme absolutně spojitou funkci (intergujeme funkci z $L_1([0,1])$). Tím pádem i f je absolutně spojitá, což implikuje spojitou diferencovatelnost pravé strany. Iterací tohoto argumentu tak dostáváme, že f je nekonečně diferencovatelná. Dosazením $t = 1$ dostáváme podmínku $f(1) = 0$. Dle předešlého můžeme rovnost zderivovat a obržíme

$$\lambda f'(t) = -\int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y + (1-t)f(t) - f(t)(1-t) = -\int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y.$$

To dává podmínku $f'(0) = 0$ a diferenciální rovnici

$$\lambda f''(t) = -f(t).$$

Pak $f \in \operatorname{span}\{\sin(\lambda^{-\frac12}t), \cos(\lambda^{-\frac12}t)\}$ a musí splňovat okrajové podmínky $0 = f(1) = f'(0)$.

Je-li tedy f tvaru $f(t) = a\sin(\lambda^{-\frac12}t) + b\cos(\lambda^{-\frac12}t)$, je $f'(t) = \lambda^{-\frac12}(a\cos(\lambda^{-\frac12}t) - b\sin(\lambda^{-\frac12}t))$. To znamení, že $0 = f'(0) = \lambda^{-\frac12}a$, tedy $a = 0$. Dále platí $0 = f(1) = b\cos\lambda^{-\frac12}$. Jelikož $f \neq 0$, je $\lambda^{-\frac12} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ pro $m \in \mathbb{Z}$, tj.

$$\lambda_m = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + m\pi)^2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Zjevně stačí uvažovat pouze $m \in \mathbb{N}_0$.

Pak normalizované funkce

$$u_m(t) = \sqrt{2}\cos\pi(\frac{1}{2}+m)t, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

vskutku splňují rovnici (3). Máme totiž

$$\begin{aligned}
Qu_m(t) &= (1-t)\int_0^t u_m(y)\,\mathrm{d}y + \int_t^1 u_m(y)(1-y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^1 u_m(y)\,\mathrm{d}y - t\int_0^t u_m(y)\,\mathrm{d}y - \int_t^1 yu_m(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi(m+\frac{1}{2})}\left(\sin(\pi(m+\frac{1}{2}))\right) - t\frac{\sqrt{2}}{\pi(m+\frac{1}{2})}\sin(\pi(m+\frac{1}{2})t) - \\
&- \left[y\frac{\sqrt{2}}{\pi(m+\frac{1}{2})}\sin(\pi(m+\frac{1}{2})y)\right]_{y=t}^1 + \int_t^1 \frac{\sqrt{2}}{\pi(m+\frac{1}{2})}\sin(\pi(m+\frac{1}{2})y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_t^1 \frac{\sqrt{2}}{\pi(m+\frac{1}{2})}\sin(\pi(m+\frac{1}{2})y)\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{(\pi(m+\frac{1}{2}))^2}\cos(\pi(m+\frac{1}{2})t) = \\
&= \lambda_m u_m(t).
\end{aligned}$$

Dle Věty FA.10.30 je systém $\{u_m;\ m \in \mathbb{N}_0\}$ ortonormální báze prostoru $L_2([0,1])$ a $Qf = \sum_{n=0}^\infty \lambda_m\langle f, u_m\rangle u_m$, $f \in L_2([0,1])$. Dle Příkladu FA.**??** máme $Pf = \sqrt{Q}f = \sum_{m=0}^\infty \sqrt{\lambda_m}\langle f, u_m\rangle u_m$. Jeikož je Q prostý, je prostý i P. Z Věty FA.10.1 je $\overline{\operatorname{Rng} P} = \overline{\operatorname{Rng} P^\star} = (\operatorname{Ker} P)^\perp = \{0\}^\perp = L_2([0,1])$, tj. $\operatorname{Rng} P$ je hustý. Dále $\operatorname{Rng} T$ je hustý v $L_2([0,1])$, neboť obsahuje $\mathscr{D}((0,1))$. Tedy izometrické zobrazení $U\colon \overline{\operatorname{Rng} P} \to \overline{\operatorname{Rng} T}$ definované jako $UPf = Tf$ je unitární operátor $L_2([0,1])$ na $L_2([0,1])$. Jeho předpis získáme pomocí rovnosti

$$Uu_m = (\lambda_m)^{-\frac{1}{2}}U(\sqrt{\lambda_m}u_m) = (\lambda_m)^{-\frac{1}{2}}UPu_m = (\lambda_m)^{-\frac{1}{2}}Tu_m = \sqrt{2}\sin(\pi(m+\frac{1}{2})t).$$

Tedy při označení $v_m(t) = \sqrt{2}\sin(\pi(m+\frac{1}{2})t)$ máme $Uf = U(\sum_{m=0}^\infty\langle f, u_m\rangle u_m) = \sum_{m=0}^\infty \langle f, u_m\rangle v_m$.

□

PŘÍKLAD 12. Nechť $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Najděme nezáporné P a unitární U takové, že $T = UP$. Dále najděme samoadjungovanou matici S splňující $e^{iS} = U$.

DŮKAZ. *Krok 1.* Máme $T^\star = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ a $T^\star T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$. Dále platí $\sigma(\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}) = \{2, 8\}$, přičemž $\operatorname{Ker}(2I - 2T^\star T) = \operatorname{span}\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\}$ a $\operatorname{Ker}(8I - 2T^\star T) = \operatorname{span}\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\}$. Ortogonální projekce na vlastní vektor příslušný číslu 2 je tak rovna

$$P_2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-y\\ y-x\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

pro vlastní číslo 8 máme příslušnou projekci danou formulí

$$P_8\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\ x+y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Tedy

$$2T^\star T = 2P_2 + 8P_8 = 2\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) + 8\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Krok 2. Položme nyní $P = \sqrt{T^\star T}$, tj.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \sqrt{8}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Nyní hledáme unitární matici U splňující

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = UP = U\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešením této rovnice je matice $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tím je nalezen polární rozklad T.

Hledejme nyní samoadjungovanou matici S splňující $e^{iS} = U$. Vlastní čísla U jsou $\sigma(U) = \{i, -i\}$, takže Jordanova matice U má tvar $J_U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Dále nalezneme regulární matici R splňující $U = R^{-1}J_U R$, vyjde nám $R = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ a $R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Jelikož je $\log z$ holomorfní funkce na okolí $\sigma(U)$, můžeme počítat

$$S = R^{-1}\left(\frac{1}{i}\log J_U\right)R = R^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tím je hledaná matice nalezena.

□

PŘÍKLAD 13. Nechť $Tf(x) = f(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(\mathbb{R}, \lambda_1)$. Nalezněme spektrální rozklad T.

ŘEŠENÍ. Pro $m \in \mathbb{Z}$ uvažujme ztotožnění $L_2((m, m+1))$ s prostorem $L_2(\mathbb{T}, \frac{\lambda_1}{2\pi})$ pomocí vzorce $U_m f(t) = f(x)$, kde $x \in (m, m+1)$ splňuje $e^{2\pi i x} = t$. Tedy $\int_{(m,m+1)} |f|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |U_m f(t)|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$. Nechť $U\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ je definováno jako

$$Uf(t_1, t_2) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} t_1^m U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2), \quad f \in L_2(\mathbb{R}), (t_1, t_2) \in \mathbb{T}\times\mathbb{T}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\|Uf\|_{L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})} &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} |Uf(t_1,t_2)|^2 \,\mathrm{d}(\lambda_1\times\lambda_1)(t_1,t_2) = \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} t_1^m U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2)\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{t_1^k U_k(f\restriction_{(k,k+1)})(t_2)}\right) \mathrm{d}(\lambda_1\times\lambda_1)(t_1,t_2) = \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \left(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2)\overline{U_k(f\restriction_{(k,k+1)})(t_2)}t_1^m t_1^{-k}\right) \mathrm{d}(\lambda_1\times\lambda_1)(t_1,t_2) = \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{T}} U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2)\overline{U_k(f\restriction_{(k,k+1)})(t_2)}\left(\int_{\mathbb{T}} t_1^{m-k}\,\mathrm{d}\lambda_1(t_1)\right)\mathrm{d}\lambda_1(t_2) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{T}} |U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2)|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1(t_2) = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{(m,m+1)} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

(Prohození sumy a integrálu je možné, neboť

$$\begin{aligned}
&|\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2)\overline{U_k(f\restriction_{(k,k+1)})(t_2)}t_1^m t_1^{-k}| \le \sum_{m,k\in\mathbb{Z}} |U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2)||U_k(f\restriction_{(k,k+1)})(t_2)| \le \\
&\le \sum_{m,k\in\mathbb{Z}\cap[-N,N]} \|f\|^2_\infty = N^2\|f\|^2_\infty < +\infty,
\end{aligned}$$

kde $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňuje $\operatorname{supp} f \subset (-N+1, N-1)$.) Zobrazení U lze tak rozšířit na izometrii $L_2(\mathbb{R})$ do $L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$. Pro $m, k \in \mathbb{Z}$ platí $Uf(t_1,t_2) = t_1^m t_2^k$, pokud $f(x) = \begin{cases} e^{2\pi i k x}, & x \in (m, m+1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$ Tedy

$\operatorname{Rng} U \supset \operatorname{span}\{(t_1,t_2) \mapsto t_1^m t_2^k;\ m,k \in \mathbb{Z}\}$. Jelikož je pravá strana dle Věty FA.15.59 hustá v $C(\mathbb{T}\times\mathbb{T},\mathbb{C})$, je tento lineární obal hustý v $L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$. Proto je U izometrie na.

Nechť $g \in L_\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ je definována jako $g(t_1,t_2) = t_1$ a $M_g \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T}))$ je operátor násobení funkcí z Příkladu FA.10.65. Ověříme, že $T = U^\star M_g U$, tj. $UT = M_g U$. Nechť $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ je dána. Pak

$$\begin{aligned} UTf(t_1,t_2) &= UT\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f\restriction_{(m,m+1)}\chi_{(m,m+1)}\right)(t_1,t_2) = \\ &= U\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} (x \mapsto f(x-1)\chi_{(m,m+1)}(x))\right)(t_1,t_2) = \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} t_1^m U_{m-1}(f\restriction_{(m-1,m)})(t_2), \end{aligned}$$

zatímco

$$\begin{aligned} M_g U f(t_1,t_2) &= g(t_1,t_2)\sum_{m\in\mathbb{Z}} t_1^m U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} t_1^{m+1} U_m(f\restriction_{(m,m+1)})(t_2) = \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} t_1^m U_{m-1}(f\restriction_{(m-1,m)})(t_2). \end{aligned}$$

Tím je platnost vzorce $T = U^\star M_g U$ ověřena.

Pro operátor M_g však spektrální rozklad díky Příkladu FA.10.65 známe. Totiž $\sigma(T) = \sigma(M_g) = \operatorname{ess}\operatorname{Rng} g = \mathbb{T}$ a pro $A \subset \mathbb{T}$ platí $E_{M_g}(A)f = \chi_{g^{-1}(A)}f$, $f \in L_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$. Tedy

$$E_T(A)f = U^\star E_{M_g}(A)U, \quad A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{T}).$$

Tím je příklad dořešen.

$\square$

Kapitola 11

Lokálně konvexní topologie a slabá kompaktnost

1. Konvexní množiny

PŘÍKLAD 1. Nechť K je metrizovatelná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního Hausdorffova prostoru. Dokažte, že pak $\operatorname{ext} K$ je G_δ podmnožina K.

ŘEŠENÍ. Nechť ρ je metrika generující topologii na K. Označme

$$F_n = \{(x,y) \in K \times K;\ \rho(x,y) \geq \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dostáváme tak kompaktní množiny v $K \times K$, které pro zobrazení $\varphi\colon K \times K \to K$ definované jako $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$ splňují

$$K \setminus \operatorname{ext} K = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(F_n).$$

Na pravé straně však máme F_σ množinu, takže $\operatorname{ext} K$ je množina typu G_δ.

□

PŘÍKLAD 2. (a) Nechť K je slabě kompaktní konvexní podmnožina Banachova prostoru X. Dokažte, že pak $K = \overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} K}^{\|\cdot\|}$.

(b) Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Dokažte, že pak $B_X = \overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{\|\cdot\|}$.

ŘEŠENÍ. (a) Dle Krejnovy-Milmanovy věty platí $K = \overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} K}^{\sigma(X,X^*)}$. Mazurova věta však díky konvexitě $\operatorname{conv} \operatorname{ext} K$ dává $K = \overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} K}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} K}^{\|\cdot\|}$.

(b) V reflexivním prostoru je B_X slabě kompaktní, stačí tak použít (a).

□

PŘÍKLAD 3. Nechť H je Hibertův prostor. Dokažte, že pak $\operatorname{ext} B_H = S_H$.

ŘEŠENÍ. Zjevně platí $\operatorname{ext} B_H \subset S_H$. Pokud $x \in S_H$ a $x = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, kde $y_1, y_2 \in B_H$, pak z rovnoběžníkového pravidla máme

$$4 = \|2x\|^2 = \|y_1 + y_2\|^2 = 2\left(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\right) - \|y_1 - y_2\|^2 \leq 4 - \|y_1 - y_2\|^2.$$

Tedy $\|y_1 - y_2\| = 0$, takže $y_1 = y_2 = x$. Proto je $x \in \operatorname{ext} B_H$.

□

PŘÍKLAD 4. Nechť (Ω, μ) je měřitelný prostor s nenulovou mírou a $X = L_\infty(\mu)$.

(a) Dokažte, že platí $\operatorname{ext} B_X = \{f \in X;\ |f(t)| = 1\ \mu\text{-skoro všude}\}$.

(b) Dokažte, že platí $\overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{\|\cdot\|} = B_X$.

ŘEŠENÍ. (a) Pokud $f \in X$ splňuje $|f(t)| = 1$ μ-skoro všude a $f = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ pro $g_1, g_2 \in B_X$, pak označíme $A = \{t \in \Omega;\ |f(t)| = 1, f(t) = \frac{1}{2}(g_1(t) + g_2(t))\}$. Pak $\mu(\Omega \setminus A) = 0$. Jelikož $\operatorname{ext} B_{\mathbb{K}} = \{s \in B_{\mathbb{K}};\ |s| = 1\}$, pro $t \in A$ dostáváme

$$f(t) = g_1(t) = g_2(t), \quad t \in A.$$

Tedy $f = g_1 = g_2$ a $f \in \operatorname{ext} B_X$.

Obráceně, nechť množina $\{t \in \Omega;\ |f(t)| < 1\}$ má kladnou míru. Ze σ-aditivity μ tak existuje $\varepsilon \in (0,1)$ takové, že $A = \{t \in \Omega;\ |f(t)| \le 1 - 2\varepsilon\}$ má kladnou míru. Položme

$$g_1(t) = \begin{cases} f(t) + \varepsilon, & t \in A, \\ f(t), & t \in \Omega \setminus A, \end{cases} \quad \text{a} \quad g_1(t) = \begin{cases} f(t) - \varepsilon, & t \in A, \\ f(t), & t \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Pak $g_1, g_2 \in B_X$ jsou různé funkce splňující $f = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$. Tedy $f \notin \operatorname{ext} B_X$.

(b) Nechť $f \in B_X$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak existuje jednoduchá funkce $g \in B_X$ splňující $\|f - g\| < \varepsilon$. Vskutku, nechť $\{a_1, \dots, a_n\}$ je $\frac{\varepsilon}{2}$-síť pro $B_{\mathbb{K}}$. Položíme $B_j = f^{-1}(B(a_j, \varepsilon))$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a tyto množiny zdisjunktníme, tj. definujeme $A_1 = B_1$ a $A_j = B_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$, $j \in \{2, \dots, n\}$. Nyní položíme $g = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ a obržíme tak požadovanou funkci.

Uvažujme nyní vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in B_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)}$. Dle Věty FA.11.5 existuje konvexní kombinace $\sum_{l=1}^m \alpha^l e^l$, jež se rovná a a kde $e^1, \dots, e^m \in \operatorname{ext} B_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)} = \operatorname{ext} B_{\ell_\infty(n, \mathbb{K})}$. Dle (a) jsou všechny souřadnice e^l rovny v absolutní hodnotě 1. Položíme-li tak

$$g^l(t) = e^l(j), \quad t \in A_j, j \in \{1, \dots, n\}, \quad l \in \{1, \dots, m\},$$

dostaneme dle (a) prvky $\operatorname{ext} B_X$. Ty však splňují $\sum_{l=1}^m \alpha^l g^l = g$. Vskutku, je-li $t \in A_j$, platí

$$\sum_{l=1}^m \alpha^l g^l(t) = \sum_{l=1}^m \alpha^l e^l(j) = a_j = g(t).$$

Tím je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 5. Nechť Γ je množina a $X = \ell_1(\Gamma)$.

(a) Dokažte, že platí $\operatorname{ext} B_X = \{t e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma, t \in S_{\mathbb{K}}\}$.

(b) Dokažte, že platí $\overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{\|\cdot\|} = B_X$.

ŘEŠENÍ. (a) Je-li $x = t e_\gamma$ pro nějaké $t \in S_{\mathbb{K}}$ a $\gamma \in \Gamma$, uvažujme $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, kde $x_1, x_2 \in B_X$. Pak v bodě γ platí $t = x(\gamma) = \frac{1}{2}(x_1(\gamma) + x_2(\gamma))$, přičemž čísla $x_j(\gamma)$ jsou obsažena v $B_{\mathbb{K}}$. Protože $t \in \operatorname{ext} B_{\mathbb{K}}$, musí platit $t = x_1(\gamma) = x_2(\gamma)$. Tím pádem však máme $x_1 = x_2 = x$.

Nechť nyní $x \in \operatorname{ext} B_X$. Ukážeme, že $\operatorname{supp} x$ je jednobodový. Vskutku, pokud by $\operatorname{supp} x \supset \{\gamma_1, \gamma_2\}$, pišme $x(\gamma_j) = r_j e^{it_j}$, $j \in \{1, 2\}$. Pak $r_j \in (0,1)$ a tedy existuje $\eta > 0$ taková, že $r_j \pm \eta \in (0,1)$, $j = \{1, 2\}$. Položme

$$x_1(\gamma) = \begin{cases} (r_1 + \eta) e^{it_1}, & \gamma = \gamma_1, \\ (r_2 - \eta) e^{it_2}, & \gamma = \gamma_2, \\ x(\gamma), & \text{pro jiné } \gamma \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(\gamma) = \begin{cases} (r_1 - \eta) e^{it_1}, & \gamma = \gamma_1, \\ (r_2 + \eta) e^{it_2}, & \gamma = \gamma_2, \\ x(\gamma), & \text{pro jiné } \gamma. \end{cases}$$

Pak

$$\|x_1\| = (r_1 + \eta) + (r_2 - \eta) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}} |x(\gamma)| = |x(\gamma_1)| + |x(\gamma_2)| + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}} |x(\gamma)| = \|x\| \le 1$$

a podobně $\|x_2\| \le 1$. Navíc $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, takže $x \notin \operatorname{ext} B_X$. Proto $\operatorname{supp} x = \{\gamma\}$ je jednobodový. Zřejmě však $1 = \|x\| = |x(\gamma)|$, takže položíme-li $t = x(\gamma)$, obdržíme $x = t e_\gamma$.

(b) Nechť $x \in B_X$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Zjevně můžeme předpokládat, že $x \neq 0$ (jinak totiž $0 = \frac{1}{2}(e_\gamma - e_\gamma) \in \operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X$). Pišme $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma e^{it_\gamma} e_\gamma$. Nalezneme $F \subset \Gamma$ konečnou takovou, že $r = \sum_{\gamma \in F} r_\gamma > 0$ a $\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus F} |x(\gamma)| < \varepsilon$. Pak $r > 1 - \varepsilon$. Pokud $r = 1$, položme $y = \sum_{\gamma \in F} r_\gamma (e^{it_\gamma} e_\gamma)$. Pokud $r < 1$, zvolíme $\gamma' \in \Gamma \setminus F$ a položíme $y = \sum_{\gamma \in F} r_\gamma (e^{it_\gamma} e_\gamma) + (1 - r) e_{\gamma'}$. V obou případech dostaneme prvek $\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X$, který splňuje

$$\|x - y\| \le \begin{cases} 0, & r = 1, \\ \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus F} |x(\gamma)| + (1 - r) \le 2\varepsilon, & r < 1. \end{cases}$$

□

PŘÍKLAD 6. Nechť K je kompaktní Hausdoffův topologický prostor a $X = C(K)$.

(a) Dokažte, že pak $\operatorname{ext} B_X = \{f \in X;\ |f(t)| = 1 \text{ pro každé } t \in K\}$.

(b) Dokažte, že pokud $K = [0,1]$ a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, je $\overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{\|\cdot\|} = \{c;\ |c| \le 1, c \in \mathbb{R}\}$.

ŘEŠENÍ. (a) Pokud $|f(t)| = 1$ pro každé $t \in K$ a $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, pak $f(t) = \frac{1}{2}(f_1(t) + f_2(t))$ pro každé $t \in K$. Jelikož $f_1(t), f_2(t) \in B_{\mathbb{K}}$ a $\operatorname{ext} B_{\mathbb{K}} = S_{\mathbb{K}}$, máme pro každé $t \in K$ rovnost $f(t) = f_1(t) = f_2(t)$. Tedy $f \in \operatorname{ext} B_X$.

Nechť nyní pro $f \in B_X$ existuje $t \in K$ takové, že $|f(t)| < 1$. Pak existuje $\eta > 0$ a otevřená množina $U \subset K$ obsahující t taková, že $|f(s)| < 1 - \eta$ pro $s \in U$. Zkonstruujeme spojitou funkci $h\colon K \to [0, \eta]$ splňující $h(t) = \eta$ a $h = 0$ na $K \setminus U$. Položíme $f_1 = f + h$ a $f_2 = f - h$. Pak $f_1, f_2 \in B_X$ jsou různé a přitom $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Tedy $f \notin \operatorname{ext} B_X$.

(b) Jelikož $K = [0,1]$ je souvislý a $\operatorname{ext} B_{\mathbb{R}} = \{-1, 1\}$, dle (a) platí $\operatorname{ext} B_X = \{-1, 1\}$. Odtud již tvrzení (b) okamžitě plyne.

□

PŘÍKLAD 7. Nechť K je kompaktní Hausdoffův topologický prostor a $X = (C(K))^* = M(K)$.

(a) Dokažte, že pak $\operatorname{ext} B_X = \{t\delta_x;\ x \in K, t \in S_{\mathbb{K}}\}$.

(b) Dokažte, že platí $\overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{w^*} = B_X$ a

$$\overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{\|\cdot\|} = \{\mu \in B_X;\ \text{existuje } S \subset K \text{ spočetná, že } |\mu|(K \setminus S) = 0\}.$$

ŘEŠENÍ. (a) Pokud $\mu = t\delta_x$ pro nějaké $t \in S_{\mathbb{K}}$ a pokud $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ pro $\mu_1, \mu_2 \in B_X$, pak

$$t = \mu(\{x\}) = \frac{1}{2}(\mu_1(\{x\}) + \mu_2(\{x\}),$$

přičemž $\mu_1(\{x\}), \mu_2(\{x\}) \in B_{\mathbb{K}}$. Jelikož $\operatorname{ext} B_{\mathbb{K}} = S_{\mathbb{K}}$, platí $\mu_1(\{x\}) = \mu_2(\{x\}) = t$. Protože však $\mu_1, \mu_2 \in B_X$, platí $\mu_1 = \mu_2 = \mu = t\delta_x$.

Obráceně, nechť $\mu \in \operatorname{ext} B_X$. Jelikož $\operatorname{ext} B_X \subset S_X$, dostáváme, že $|\mu|$ je extremální bod $M^1(K)$. Vskutku, máme $|\mu|(K) = \|\mu\|(K) = 1$, a tedy $|\mu| \in M^1(K)$. Pokud $|\mu| = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, kde $\mu_1, \mu_2 \in M^1(K)$, pomocí [R, Věta 6.12] nalezneme borelovskou funkci h na K takovou, že $\operatorname{Rng} h \subset \{t \in \mathbb{K}; |t| = 1\}$ a přitom $\mathrm{d}\mu = h\,\mathrm{d}|\mu|$. Pak $\mu = h|\mu| = \frac{1}{2}(h\mu_1 + h\mu_2)$, takže $h\mu_1 = h\mu_2$. Přenásobením této rovnosti funkcí $\overline{h}$ dostaneme $\mu_1 = \mu_2$. Proto je $|\mu| \in \operatorname{ext} M^1(K)$.

Dle Příkladu 21 pak $|\mu| = \delta_x$ pro nějaké $x \in K$. Tím pádem však $\mu = t\delta_x$, kde $t = \mu(\{x\})$.

(b) Rovnost $\overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{w^*} = B_X$ plyne přímo z Krejnovy-Milmanovy věty, neboť B_X je w^*-kompaktní konvexní podmnožina $M(K)$.

Pro důkaz druhé rovnosti položme

$$M = \{\mu \in B_X;\ \text{existuje } S \subset K \text{ spočetná, že } |\mu|(K \setminus S) = 0\}.$$

Pak M je konvexní a obsahuje $\operatorname{ext} B_X$. Navíc je M normově uzavřená. Vskutku, pokud $\{\mu_n\} \subset M$ konverguje v normě k $\mu \in B_X$, nechť S_n jsou spočetné množiny v K splňující $|\mu_n|(K \setminus S_n) = 0$. Položme $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Pak nerovnost

$$|\mu|(K \setminus S) \le |\mu - \mu_n|(K \setminus S) + |\mu_n|(K \setminus S) \le \|\mu - \mu_n\| + 0$$

dává $|\mu|(K \setminus S) = 0$. Tedy $\mu \in M$.

Proto $\overline{\operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X}^{\|\cdot\|} \subset M$. Na druhou stranu, máme-li $\mu \in M$ a $S = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset K$ je spočetná taková, že $|\mu|(K \setminus S) = 0$, můžeme psát $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\})\delta_{x_n}$. Nechť $\mu(\{x_n\}) = r_n e^{it_n}$ pro $r_n \in [0,1]$ a $t_n \in [0, 2\pi)$. Nyní stačí použít metodu důkazu Příkladu 5.

Pro $\varepsilon > 0$ nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $r = \sum_{n=1}^{k} r_n > 1 - \varepsilon$. Pokud $r = 1$, je $\mu \in \operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X$. Jinak vybereme $x \in K \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ a položíme $\nu = \sum_{n=1}^{k} r_n e^{it_n}\delta_{x_n} + (1 - r)\delta_x \in \operatorname{conv} \operatorname{ext} B_X$. Pak

$$\|\mu - \nu\| \le \|\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu\{x_n\}\delta_{x_n}\| + (1 - r)\|\delta_x\| \le 2\varepsilon.$$

□

PŘÍKLAD 8. Nechť $X = L_1([0,1])$. Dokažte, že pak $\operatorname{ext} B_X = \emptyset$.

ŘEŠENÍ. Nechť $f \in S_X$ libovolná je dána. Položme $F(x) = \int_0^x |f| \, d\lambda$, $x \in [0,1]$. Pak F je neklesající spojitá funkce, $F(0) = 0$ a $F(1) = \int_0^1 |f| \, d\lambda = \|f\| = 1$. Nechť $y \in (0,1)$ splňuje $F(y) = \frac{1}{2}$. Položme $f_1 = 2f\chi_{[0,y)}$ a $f_2 = 2f\chi_{[y,1]}$. Pak

$$\|f_1\| = 2\int_0^y |f| = 1 = 2\int_y^1 |f| = \|f_2\|, \quad f_1 \neq f_2 \quad \text{a} \quad f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

Tedy $f \notin \operatorname{ext} B_X$.

□

PŘÍKLAD 9. Ukažte, že v $\mathbb{R}^3$ existuje kompaktní konvexní množina K, pro kterou $\operatorname{ext} K$ není F_σ množina.

ŘEŠENÍ. Uvažujme spočetnou hustou množinu $D = \{q_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v intervalu $[0, 2\pi]$ a funkci $f\colon [0, 2\pi] \to [0,1]$ definovanou jako

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & t = q_n, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť

$$L = \{(\cos t, \sin t, z) \in \mathbb{R}^3;\ t \in [0, 2\pi], |z| \leq f(t)\} \quad \text{a} \quad K = \operatorname{conv} L.$$

Pak K je kompaktní konvexní množina. To bud plynout z Důsledku FA.11.8, pokud dokážeme, že L je kompaktní množina.

Zjevně je L omezená. Ukážeme, že je uzavřená. Nechť tedy prvky $x^k = (\cos t_k, \sin t_k, z_k)$, kde $t_k \in [0, 2\pi]$ a $|z_k| \leq f(t_k)$, konvergují k $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Díky kompaktnosti $[0, 2\pi]$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $t_n \to t \in [0, 2\pi]$. Pak $x_1 = \cos t$ a $x_2 = \sin t$. Snadno se přesvědčíme, že funkce f splňuje podmínku $f(t) \geq \limsup_{k\to\infty} f(t_k)$. Z toho však plyne

$$|x_3| = \lim_{k\to\infty} |z_k| \leq \limsup_{k\to\infty} f(t_k) \leq f(t),$$

takže $x = (\cos t, \sin t, x_3) \in L$.

Označíme $C = \{(\cos t, \sin t, 0);\ t \in [0, 2\pi]\} \subset K$. Pak

$$C \cap \operatorname{ext} K = \{(\cos t, \sin t, 0);\ t \in [0, 2\pi] \setminus D\} \quad \text{a} \quad C \setminus \operatorname{ext} K = \{(\cos t, \sin t, 0);\ t \in D\}. \tag{1}$$

Vskutku, pro $t = q_n \in D$ je bod $(\cos q_n, \sin q_n, 0)$ středem úsečky o krajních bodech $(\cos q_n, \sin q_n, \frac{1}{n})$ a $(\cos q_n, \sin q_n, -\frac{1}{n})$, takže $(\cos q_n, \sin q_n, 0) \notin \operatorname{ext} K$.

Pokud $t \in [0, 2\pi] \setminus D$, definujeme funkci $h((x_1, x_2, x_3)) = x_1 \cos t + x_2 \sin t$. To je spojitá afinní funkce na K, která splňuje $h((\cos t, \sin t, 0)) = 1$ a $h(L \setminus (\cos t, \sin t, 0)) < 1$. Proto i $h(K \setminus (\cos t, \sin t, 0)) < 1$ (protože pokud máme $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in K$ a $h(x) = 1$, kde $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ splňují $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ nutně platí $h(x_i) = 1$ a tedy dle předchozího máme $x_i = (\cos t, \sin t, 0)$, takže vidíme že $x = (\cos t, \sin t, 0)$). Z Věty FA.11.16 nyní plyne, že $(\cos t, \sin t, 0)$ je extremální bod K.

Z formule (1) nyní plyne, že $\operatorname{ext} K$ není F_σ množina. Vskutku, kdyby tomu tak bylo, jsou dle Příkladu 1 množiny $C \cap \operatorname{ext} K$ a $C \setminus \operatorname{ext} K$ dvě husté disjunktní G_δ množiny v úplném metrickém prostoru C, což je spor s Baireovou větou.

□

2. Svazy vektorových topologií

PŘÍKLAD 10. Nechť X je vektorový prostor, $M \subset X^\sharp$ je podprostor oddělující body X a $\mu(X, M)$ Mackeyova topologie. Dokažte, že pokud je $\mu(X, M)$ metrizovatelná, pak M lze pokrýt posloupností absolutně konvexních $\sigma(M, \varepsilon(X))$-kompaktních množin v M (zde $\varepsilon \colon X \to M^\sharp$ je kanonické vnoření).

ŘEŠENÍ. Nechť $\mu(X, M)$ je metrizovatelná topologie. Pak $M = (X, \mu(X, M))^*$ a existuje spočetná báze okolí 0, řekněme $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\{U_n\}$ je nerostoucí posloupnost. Dle Věty FA.6.115 jsou množiny $U_n^\circ = \{m^* \in M;\ |m^*(x)| \le 1, x \in U_n\}$ $\sigma(M, \varepsilon(X))$-kompaktní a dle Tvrzení FA.6.109 jsou absolutně konvexní. Navíc $M = \bigcup_{n=1}^\infty U_n^\circ$. Vskutku, je-li $m^* \in M = (X, \mu(X, M))^*$ dáno, pak hledáme $n \in \mathbb{N}$ splňující $m^* \in U_n^\circ$. Kdyby takové n neexistovalo, našli bychom vektory $x_n \in U_n$ splňující $|m^*(x_n)| > 1$, $n \in N$. Pak ale $x_n \to 0$ v $\mu(X, M)$, ale přitom $m^*(x_n) \nrightarrow 0$, což nelze.

□

PŘÍKLAD 11. Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Uvažujme na $(X, \tau)^*$ topologii β stejnoměrné konvergence na omezených množinách X, tj. topologii generovanou pseudonormami $p_B(f) = \sup_{x \in B}|f(x)|$, $B \subset X$ omezená. Dokažte, že platí následující.

(a) Topologie β se nezmění v případě, kdy na X uvažujeme lokálně konvexní topologii τ' splňující $(X, \tau')^* = (X, \tau)^*$.
(b) Je-li $(X, \tau) = (X, \|\cdot\|)$ normovaný prostor, je β normová topologie na X^*.
(c) Je-li X normovaný prostor, pak $(X^*, \beta)^* = \varepsilon(X)$ právě tehdy, když X je reflexivní.

ŘEŠENÍ. (a) Stačí ukázat, že τ-omezené množiny splývají s τ'-omezenými množinami. Avšak podle Věty FA.6.94 platí pro $B \subset X$ ekvivalence

$$\begin{aligned} B \text{ je } \tau\text{-omezená} &\Leftrightarrow B \text{ je } (X, \sigma(X, (X, \tau)^*))\text{-omezená} \Leftrightarrow B \text{ je } (X, \sigma(X, (X, \tau')^*))\text{-omezená} \\ &\Leftrightarrow B \text{ je } \tau'\text{-omezená.} \end{aligned}$$

(b) Nechť $\tau_{\|\cdot\|}$ značí normovou topologii na X^*. Ukážeme, že $\tau_{\|\cdot\|}$-okolí 0 splývají s β-okolími 0. Nechť tedy $U = U(0, r)$ je normové okolí 0. Pak

$$U = \{f \in X^*;\ \sup_{x \in B_X}|f(x)| < r\} = \{f \in X^*;\ p_{B_X}(f) < r\}.$$

kde p_{B_X} je pseudonorma generovaná omezenou množinou B_X. Tedy $U \in \beta$.

Obráceně, je-li U okolí 0 v topologii β, dle definice existuje $\varepsilon > 0$ a omezené množiny $B_1, \dots, B_n \subset X$ splňující

$$\{f \in X^*;\ p_{B_i}(f) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\} \subset U.$$

Nechť $r > 0$ splňuje $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset B(0, r)$. Pak koule $U(0, \frac{\varepsilon}{r}) \subset \{f \in X^*;\ p_{B_i}(f) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$. Vskutku, je-li $f \in U(0, \frac{\varepsilon}{r})$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ dáno, pak

$$\sup_{x \in B_i}|f(x)| \le \sup_{x \in B(0,r)}|f(x)| = r \sup_{x \in B(0,1)}|f(x)| \le r\|f\| < r\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon.$$

Tedy U je normové okolí 0.

(c) Je-li X reflexivní, je $(X^*, \beta)^* = (X^*, \|\cdot\|)^* = X^{**} = \varepsilon(X)$ dle definice reflexivity. Obráceně, pokud $\varepsilon(X) = (X^*, \beta)^* = (X^*, \|\cdot\|)^* = X^{**}$, je X reflexivní z definice.

□

PŘÍKLAD 12. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a $\mathcal{B}$ je neprázdný systém omezených množin v X. Nechť τ je topologie na X^* generovaná kolekcí pseudonorem $\{p_B;\ B \in \mathcal{B}\}$, kde $p_B(f) = \sup_{x \in B}|f(x)|$. Dokažte, že pak

$$(X^*, \tau)^* = \operatorname{span} \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(X^{**}, X^*)}.$$

ŘEŠENÍ. Nechť $B \in \mathcal{B}$ a $F \in \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(X^{**},X^*)}$ je dáno. Ukážeme, že $|F| \leq p_B$ na X^*, z čehož τ-spojitost F plyne. K tomuto účelu stačí ukázat, že pokud pro nějaké $f \in X^*$ platí $p_B(f) \leq 1$, pak i $|F(f)| \leq 1$. Předpokládejme tedy, že tomu tak není, tj. že existuje $f \in X^*$ splňující $p_B(f) \leq 1$ a $|F(f)| > 1$. Protože ale platí z Věty o bipoláře FA.6.110

$$F \in \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(X^{**},X^*)} = ((\varepsilon(B))_\circ)^\circ$$

a $f \in (\varepsilon(B))_\circ$, je $|F(f)| \leq 1$. To je však ve sporu s naším předpokladem. Proto platí $|F| \leq p_B$ jak jsem chtěli. Tím jsem ověřili inkluzi $\operatorname{span} \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subset (X^*, \tau)^*$.

Nechť nyní $F \in (X^*, \tau)^*$ je dáno. Pak $F^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0,1))$ je τ-kolí 0, takže existují $\varepsilon > 0$ a množiny $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ takové, že platí

$$U_{p_{B_1},\dots,p_{B_n},\varepsilon} = \{f \in X^*;\ p_{B_i}(f) \leq \varepsilon, i = 1, \dots, n\} \subset U_{|F|,1} = F^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0,1))$$

Stejně jako v Tvrzení FA.11.28 nalezneme $F_1, \dots, F_n \in (X^*)^\sharp$ splňující $F = F_1 + \cdots + F_n$ a $|F_i| \leq 1$ na $U_{p_{B_i},\varepsilon}$, $i = 1, \dots, n$. Tedy $|\varepsilon F_i| \leq 1$ na $U_{p_{B_i},1}$, takže jako výše odvodíme pomocí věty o bipoláře $\varepsilon F_i \in \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B_i)}^{\sigma(X^{**},X^*)}$. Tedy $F \in \operatorname{span} \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(X^{**},X^*)}$.

□

PŘÍKLAD 13. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a $\mathcal{B}$ je systém všech spočetných omezených množin v X. Nechť τ je topologie na X^* generovaná systémem $\mathcal{B}$ jako v Příkladu 12. Dokažte, že pak platí následující.

(a) Platí $\overline{\varepsilon(X)}^{\|\cdot\|} \subset (X^*, \tau)^* \subset X^{**}$.
(b) Pokud X je separabilní, je τ normová topologie na X^*.
(c) Pokud X je neseparabilní, je τ ostře slabší než normová topologie.
(d) Pokud $X = c_0(\Gamma)$, kde Γ je nespočetná, pak $(X^*, \tau)^* = \{z \in \ell_\infty(\Gamma);\ \operatorname{supp} z \text{ je spočetný }\}$.

ŘEŠENÍ. (a) Je-li $\{x_n\} \subset X$ posloupnost splňující $\varepsilon(x_n) \to x^{**} \in X^{**}$, pak pro omezenou spočetnou množinu $B = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$ dle Příkladu 12 platí

$$x^{**} \in \overline{\varepsilon(B)}^{\|\cdot\|} \subset \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subset (X^*, \tau)^*.$$

Tedy $\overline{\varepsilon(X)}^{\|\cdot\|} \subset (X^*, \tau)^*$. Dle Příkladu 12 však také máme $(X^*, \tau)^* \subset X^{**}$.

(b) Je-li X separabilní, je každá omezená množina $B \subset X$ separabilní, takže lze nalézt spočetnou $C_B \subset B$ splňující $B \subset \overline{C_B}$. Pak $p_B = p_{C_B}$ na X^* díky hustotě C_B v B, takže je topologie β stejnoměrné konvergence na omezených množinách stejná jako topologie τ stejnoměrné konvergence na spočetných omezených množinách. Dle Příkladu 11(b) je však β normová topologie.

(c) Uvažujme $U = U(0,1)$ v X^*. Pak U je normové okolí 0, které není τ-okolí 0. Vskutku, kdyby tomu tak bylo, existují $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $U_{p_{B_1},\dots,p_{B_n},\varepsilon} \subset U$. Nechť $Y = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{i=1}^n B_i} \subset X$. Pak Y je separabilní prostor, takže $Y \neq X$. Dle oddělovací věty existuje $f \in X^*$ nenulový splňující $f = 0$ na Y. Uvažujme $t > 0$ takové, že $\|tf\| > 1$. Pak $tf \in U_{p_{B_1},\dots,p_{B_n},\varepsilon}$, ale $tf \notin U$. Tento spor ukazuje, že U není τ-okolí 0.

(d) Máme $X^* = \ell_1(\Gamma)$ a $X^{**} = \ell_\infty(\Gamma)$. Nechť $z \in \ell_\infty(\Gamma)$ je prvkem $(X^*, \tau)^*$. Dle Příkladu 12 existuje $B \in \mathcal{B}$ splňující $z \in \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(\ell_\infty(\Gamma),\ell_1(\Gamma))}$. Jelikož je B separabilní, existuje $C \subset B$ spočetná hustá v B. Pak $\Gamma' = \bigcup_{c\in C_B} \operatorname{supp} c$ je spočetná podmnožina Γ, a vzhledem k hustotě C_B v B platí pro každé $x \in B$ vztah $\operatorname{supp} x \subset \Gamma'$. Jelikož $z \in \overline{\operatorname{aconv} \varepsilon(B)}^{\sigma(\ell_\infty(\Gamma),\ell_1(\Gamma))}$ a prvky $\operatorname{aconv} \varepsilon(B)$ mají též nosič v Γ', je nosič z také v Γ' (w^*-konvergence totiž implikuje bodovou konvergenci).

Nechť nyní $z \in \ell_\infty(\Gamma)$ má spočetný nosič $\Gamma' \subset \Gamma$. Pišme $\Gamma' = \{\gamma_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ a uvažujme prvky $z_k = z\chi_{\{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}} \in c_0(\Gamma)$. Pak $B = \{z_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ je spočetná omezená množina a $z_k \to z$ bodově. Jelikož však bodová topologie splývá na koulích v $\ell_\infty(\Gamma)$ s topologií w^* (bodová topologie je slabší než w^* a je Hausdorffova, takže závěr plyne z Věty FA.6.115), konverguje $\{z_k\}$ k z i v topologii w^*. Dle Příkladu 12 je tak $z \in (X^*, \tau)^*$.

□

PŘÍKLAD 14. Nechť $X = c_0$ s topologií τ_p bodové konvergence na $\mathbb{N}$. Dokažte následující tvrzení.

(a) Platí $M = (X, \tau_\mathrm{p})^* = c_{00}$ v následujícím smyslu: Každý spojitý funkcionál $f \in (X, \tau_\mathrm{p})^*$ je jednoznačně určen prvkem $y \in c_{00}$ tak, že $f(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$, $x \in X$.
(b) Platí $\sigma(X, M) = \tau_\mathrm{p} = \mu(X, M)$.

ŘEŠENÍ. (a) Topologie τ_p na X je generována pseudonormami $p_n(x) = |x(n)|$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy je τ_p na c_0 metrizovatelná. Zjevně každý prvek c_{00} generuje spojitý funkcionál na (X, τ_p). Je-li nyní $f \in (X, \tau_\mathrm{p})^*$, existuje $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $U_{p_{n_1}, \dots, p_{n_k}, \varepsilon} \subset U_{|f|,1}$. Jako v Tvrzení FA.11.28 nalezneme $f_i \in X^\sharp$ takové, že $f = f_1 + \cdots + f_n$ a $|f_i| \le 1$ na $U_{p_{n_i}, \varepsilon}$. Z Lemmatu FA.6.80 odvodíme, že $f_i(x) = c_{n_i} x(n_i)$, $x \in X$ pro nějaké $c_{n_i} \in \mathbb{K}$. Tedy prvek $y = \sum_{i=1}^k c_{n_i} e_{n_i} \in c_{00}$ reprezentuje f ve výše uvedeném smyslu.
(b) Dle Důsledku FA.11.33 platí $\tau_\mathrm{p} = \mu(X, M)$. Z definice je $\sigma(X, M) \subset \tau_\mathrm{p}$, z popisu M však zjevně plyne $\tau_\mathrm{p} \subset \sigma(X, M)$.

□

PŘÍKLAD 15. Nechť $X = c_{00}(\Gamma)$ s topologií τ_p bodové konvergence na Γ, kde Γ je nekonečná. Dokažte následující tvrzení.

(a) Nechť $A \subset X$ je τ_p-kompaktní konvexní množina. Pak $\operatorname{span} A$ má konečnou dimenzi.
(b) Existuje τ_p-kompaktní množina $A \subset X$, jejíž lineární obal má nekonečnou dimenzi.
(c) Existuje τ_p-kompaktní množina $A \subset X$ taková, že $\overline{\operatorname{conv} A}^{\tau_\mathrm{p}}$ není kompaktní.

ŘEŠENÍ. (a) Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $0 \in A$. Nechť $\operatorname{span} A$ nemá konečnou dimenzi. Pak induktivně nalezneme $x_n \in A$ a $\gamma_n \in \Gamma$ takové, že $x_n(\gamma_n) \neq 0$ a $x_k(\gamma_n) = 0$ kdykoliv $k < n$.

Nejprve vybereme libovolné $x_1 \in A$ nenulové a k němu nalezneme $\gamma_1 \in \Gamma$ splňující $x_1(\gamma_1) \neq 0$. V obecném $n+1$-kroku uvážíme $\Gamma' = \bigcup_{i=1}^n \operatorname{supp} x_i$. Jelikož $\operatorname{span} A$ má nekonečnou dimenzi, existuje $x_{n+1} \in A$ splňující $\operatorname{supp} x_{n+1} \not\subset \Gamma'$. Nechť $\gamma_{n+1} \in \Gamma \setminus \Gamma'$ je vybráno tak, aby $x_{n+1}(\gamma_{n+1}) \neq 0$.

Máme-li konstrukci zdárně za sebou, induktivně nalezneme čísla $\alpha_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ splňující

- $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \le 1$,
- suma $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$ konverguje v normě v $c_0(\Gamma)$,
- pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $\sum_{n=m+1}^\infty \alpha_n |x_n(\gamma_m)| < \alpha_m |x_m(\gamma_m)|$.

Nyní položíme $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n \in c_0(\Gamma)$ a $z_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n \in A$, $m \in \mathbb{N}$ (připomeňme, že $0 \in A$). Pak $z_m \to x$ v normě, a tedy i v topologii τ_p. K dokončení důkazu nyní stačí ukázat, že $x \notin c_{00}(\Gamma)$. (Množina A pak není τ_p-kompaktní, neboť jediný τ_p-hromadný bod posloupnosti $\{z_m\}$ je x.)

Nechť $m \in \mathbb{N}$ je libovolné. Pak $x(\gamma_m) \neq 0$, neboť z volby koeficientů a konstrukce prvků x_n plyne

$$x(\gamma_m) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n(\gamma_m) = \alpha_m x_m(\gamma_m) + \sum_{n=m+1}^\infty \alpha_n x_n(\gamma_m) \neq 0.$$

Tedy x nemá konečný nosič.
(b) Zvolme prostou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ a uvažujme $A = \{0\} \cup \{e_{\gamma_n};\ n \in \mathbb{N}\}$. Jelikož $e_{\gamma_n} \to 0$ v τ_p, je A τ_p-kompaktní. Zjevně však $\operatorname{span} A$ není konečnědimenzionální.
(c) Pro důkaz stačí uvažovat množinu A z bodu (b).

□

PŘÍKLAD 16. Nechť $X = c_{00}(\Gamma)$ s topologií τ_p bodové konvergence na Γ, kde Γ je nekonečná. Dokažte následující tvrzení.

(a) Platí $M = (X, \tau_\mathrm{p})^* = c_{00}(\Gamma)$ v následujícím smyslu: Každý element $f \in (X, \tau_\mathrm{p})^*$ je jednoznačně určen prvkem $y \in c_{00}(\Gamma)$ tak, že $f(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x(\gamma) y(\gamma)$, $x \in X$.
(b) Platí $\sigma(X, M) = \tau_\mathrm{p} = \mu(X, M)$.

ŘEŠENÍ. (a) Zjevně každý prvek $c_{00}(\Gamma)$ generuje spojitý funkcionál na X. Pro důkaz obrácené inkluze stačí postupovat stejně jako v Příkladu 14.

(b) Rovnost $\sigma(X,M)=\tau_{\mathrm{p}}$ je zjevná (podobně jako v Příkladu 14). Nyní chceme ukázat, že net $\{x_i\}\subset X$ konverguje v τ_{p} k x, právě když $x_i\to x$ v $\mu(X,M)$. Zjevně platí, že konvergence netu v $\mu(X,M)$ implikuje konvergenci v původní topologii τ_{p}.

Pokud $x_i\to x$ bodově a pseudonorma p je jedna z generujících pseudonorem pro topologii $\mu(X,M)$ z Věty FA.11.35, tj. p je tvaru $p=p_K$, kde $K\subset M$ je $\sigma(M,\varepsilon(X))$-kompaktní absolutně konvexní. Jelikož $\sigma(M,\varepsilon(X))$ je topologie τ_{p} na M, dle Příkladu 15 je dimenze lineárního obalu K konečná. Tedy existuje konečná $\Gamma'\subset\Gamma$ taková, že $\operatorname{supp} y\subset\Gamma$ pro každé $y\in K$. Jelikož je Γ' konečná, platí $\|x_i\restriction_{\Gamma'}-x\restriction_{\Gamma'}\|_{c_0(\Gamma')}\to 0$. Množina K je však τ_{p}-omezená, a tedy (z konečnosti Γ') i $\|\cdot\|_{\ell_1(\Gamma')}$-omezená. Proto

$$p_K(x_i-x)=\sup_{f\in K}|f(x_i-x)|\leq\left(\sup_{f\in K}\|f\|_{\ell_1(\Gamma')}\right)\|x_i\restriction_{\Gamma'}-x\restriction_{\Gamma'}\|_{c_0(\Gamma')}\to 0.$$

Tedy $x_i\to x$ v Mackeyově topologii.

□

PŘÍKLAD 17. Nechť $X=\ell_1(\Gamma)$ s topologií τ_{p} bodové konvergence na Γ. Dokažte následující tvrzení.

(a) Platí $M=(X,\tau_{\mathrm{p}})^*=c_{00}(\Gamma)$ v následujícím smyslu: Každý element $f\in(X,\tau_{\mathrm{p}})^*$ je jednoznačně určen prvkem $y\in c_{00}(\Gamma)$ tak, že $f(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}x(\gamma)y(\gamma)$, $x\in X$.
(b) Množiny omezené v $\sigma(M,\varepsilon(X))$ jsou právě množiny omezené v normě $\ell_\infty(\Gamma)$.
(c) Topologie $\sigma(M,\varepsilon(X))$ je na omezených množinách v $\ell_\infty(\Gamma)$ rovna topologii bodové konvergence.
(d) Platí $\sigma(X,M)=\tau_{\mathrm{p}}=\mu(X,M)$.

ŘEŠENÍ. (a) Stačí postupovat obdobně jako v Příkladu 14.

(b) Je-li $B\subset M$ omezená v normě prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$, je zjevně omezená i v topologii $\sigma(M,\varepsilon(X))$. Vskutku, je-li $x\in X$ dáno, je

$$\sup_{y\in B}|\varepsilon(x)(y)|=\sup_{y\in B}|y(x)|\leq\|x\|\cdot\sup_{y\in B}\|y\|_{\ell_\infty(\Gamma)}<+\infty.$$

Obráceně, je-li $B\subset M\subset X^*=\ell_\infty(\Gamma)$ $\sigma(M,\varepsilon(X))$-omezená, jedná se o w^*-omezenou podmnožinu $\ell_\infty(\Gamma)$, kde w^*-topologie je topologie $\sigma(\ell_\infty(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$. Z Tvrzení FA.6.97 plyne normová omezenost B v prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$.

(c) Je-li $B\subset M$ $\sigma(M,\varepsilon(X))$-omezená, je dle (b) omezená v normě prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$. Množinu B tak lze obsáhnout nějakou uzavřenou koulí C prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$. Ta je však w^*-kompaktní dle Věty FA.6.115. Topologie τ_{p} na C je pak slabší než w^* a je Hausdorffova, tedy $w^*=\tau_{\mathrm{p}}$ na C, a proto i na B.

(d) Rovnost $\sigma(X,M)=\tau_{\mathrm{p}}$ platí díky popisu z (a) (obdobně jako v Příkladu 14). Rovnost $\tau_{\mathrm{p}}=\mu(X,M)$ pak plyne z popisu τ_{p}-kompaktních absolutně konvexních množin v $M=c_{00}(\Gamma)$ z Příkladu 15, stačí postupovat analogicky jako v Příkladu 16.

□

3. Topologie w_{b}^*

PŘÍKLAD 18. Nechť $X=\ell_p$, $p\in[1,\infty)$ a $X^*=\ell_q$, kde q je sdružený exponent k p. Nechť $\{a_n\}\subset\mathbb{K}$ je posloupnost nenulových čísel. Nechť e_n^*, $n\in\mathbb{N}$ značí bázové vektory v X^*. Dokažte, že platí následující.

(a) Platí $a_ne_n^*\xrightarrow{w^*}0$ právě tehdy, když $\{a_n\}$ je omezená posloupnost.
(b) Platí $0\in\overline{\{a_ne_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}}^{w_{\mathrm{b}}^*}$, právě když $\liminf_{n\to\infty}|a_n|<+\infty$.
(c) Platí $0\in\overline{\{a_ne_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}}^{w^*}$, právě když $\{\frac{1}{a_n}\}\notin X$.
(d) Existuje spočetná w^*-hustá množina v X^*, která je w_{b}^*-uzavřená.

ŘEŠENÍ. (a) Nechť $\{a_n\}$ je omezená a $x\in X$ je dáno. Pak $a_ne_n^*(x)=a_nx(n)\to 0$, a tedy $a_ne_n^*\to 0$ ve w^*-topologii.

Pokud $\{a_ne_n^*\}$ konverguje k 0 ve w^*-topologii, je dle Tvrzení FA.6.97 normově omezená. Jelikož $\|a_ne_n^*\|=|a_n|$, je posloupnost $\{a_n\}$ omezená.

(b) Nechť $\liminf_{n\to\infty}|a_n| < M < +\infty$. Chceme ukázat, že každé w_{b}^*-okolí 0 obsahuje nějaký prvek $a_n e_n^*$. Nechť tedy $K_1,\dots,K_m$ jsou množiny v X sestávající z posloupnosti prvků konvergující v normě k 0 a $U_{p_{K_1},\dots,p_{K_m},\varepsilon}$ je dané w_{b}^*-kolí 0. Jelikož posloupnosti v množinách $K_1,\dots,K_m$ kovergují k 0, existuje konečná množina $F\subset K_1\cup\dots\cup K_m$ taková, že $\|x\|<\frac{\varepsilon}{M}$ pro $x\in K_1\cup\dots\cup K_m\setminus F$. Nechť $n_0\in\mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby $|x(n)|<\frac{\varepsilon}{M}$ pro $x\in F$ a $n\ge n_0$. Nyní uvažujme $n\in\mathbb{N}$ splňující $n\ge n_0$ a $|a_n|<M$. Pak pro $x\in K_1\cup\dots\cup K_m$ platí

$$|a_n e_n^*(x)| = |a_n||x(n)| \begin{cases} \le |a_n|\|x\| < M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon, & x\in K_1\cup\dots\cup K_m\setminus F,\\ < |a_n|\frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon, & x\in F,\end{cases}$$

takže $a_n e_n^*\in U_{p_{K_1},\dots,p_{K_m},\varepsilon}$. Tedy $0\in\overline{\{a_n e_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}}^{w_{\mathrm{b}}^*}$.

Nechť $\liminf_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$. Pak množina $K=\{\frac{1}{a_n}e_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ sestává z posloupnosti konvergující v normě k nule, takže pseudonorma p_K je generující pro topologii w_{b}^*. Množina $U_{p_K,1}$ neobsahuje žádný vektor z množiny $\{a_n e_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}$, neboť

$$p_K(a_n e_n^*) \ge |a_n e_n^*(\tfrac{1}{a_n}e_n)| = 1.$$

Proto $0\notin\overline{\{a_n e_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}}^{w_{\mathrm{b}}^*}$.

(c) Pokud $x=\{\frac{1}{a_n}\}\in X$, w^*-okolí $U_{p_x,1}$ neobsahuje žádný z vektorů $\{a_n e_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}$, neboť

$$|a_n e_n^*(x)| = a_n\frac{1}{a_n}e_n^*(e_n) = 1.$$

Obráceně, nechť $x=\{\frac{1}{a_n}\}\notin X$ a U je w^*-okolí 0. Pak existují prvky $x_1,\dots,x_n\in X$ a $\varepsilon>0$ splňující $U_{p_{x_1},\dots,p_{x_n},\varepsilon}\subset U$. Pak je množina

$$M=\{m\in\mathbb{N};\ |a_m x_i(m)|<\varepsilon, i=1,\dots,n\}$$

nekonečná. Vskutku, kdyby byla konečná, existuje $m_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $m\ge m_0$ existuje $i_m\in\{1,\dots,n\}$ splňující $|a_m x_{i_m}(m)|\ge\varepsilon$. Pak pro každé $m\ge m_0$ platí odhad

$$\frac{1}{|a_m|}\le\frac{1}{\varepsilon}\left(|x_1(m)|+\dots+|x_n(m)|\right),$$

což ale implikuje $x\in X$, tj. spor. Proto je M nekonečná, takže existuje $m\in\mathbb{N}$ splňující $a_m e_m^*\in U_{p_{x_1},\dots,p_{x_n},\varepsilon}$.

(d) Jelikož X je separabilní, je X^* w^*-separabilní. Vskutku, nechť $\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ je spočetná normově hustá množina v B_X a $C=\{x_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}\subset B_{X^*}$ splňuje $|x_n^*(x_n)|\ge\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$. Pak $\overline{\operatorname{span} C}^{w^*}=X^*$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existuje dle Hahnovy-Banachovy věty $x\in S_X$, které leží v $C_\perp$. Nechť $n\in\mathbb{N}$ je zvoleno tak, že $\|x_n-x\|<\frac{1}{4}$. Pak nerovnosti

$$\frac{1}{2}\le|x_n^*(x_n)|\le|x_n^*(x_n)-x_n^*(x)|+|x_n^*(x)|\le\|x_n^*\|\|x_n-x\|+0\le 1\cdot\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

dávají spor.

Nechť tedy $\{x_n^*;\ n\in\mathbb{N}\}$ je w^*-hustá množina v X^* a $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel konvergující do $+\infty$ taková, že $\{\frac{1}{a_n}\}\notin X$. Položme

$$D=\{x_n^*+a_k e_k^*;\ n,k\in\mathbb{N}, \|x_n^*+a_k e_k^*\|>n\}.$$

Pak D je spočetná množina, jež je w^*-hustá. K tomu stačí ověřit, že každé x_n^* leží ve w^*-uzávěru D. Z (c) však plyne, že $0\in\overline{\{a_k e_k^*;\ k\ge k_0\}}^{w^*}$ pro každé $k_0\in\mathbb{N}$. Nechť tedy U je w^*-okolí x_n^*. Pak existuje V, w^*-okolí 0 takové, že $x_n^*+V\subset U$. Jelikož $a_k\to+\infty$, liší se množina $\{x_n^*+a_k e_k^*;\ k\in\mathbb{N}\}$ od množiny $\{x_n^*+a_k e_k^*;\ \|x_n^*+a_k e_k^*\|>n\}$ pouze v konečně mnoha elementech. Dle (c) tak existuje $k\in\mathbb{N}$ splňující $\|x_n^*+a_k e_k^*\|>n$ takové, že $a_k e_k^*\in V$. Tedy $x_n^*+a_k e_k^*\in x_n^*+V\subset U$, takže $x_n^*\in\overline{D}^{w^*}$.

Dále D je w_{b}^*-uzavřená, neboť pro každé $n_0\in\mathbb{N}$ je množina $D\cap n_0 B_{X^*}$ konečná. Vskutku, platí

$$\{(n,k)\in\mathbb{N}^2;\ x_n^*+a_k e_k^*\in D\cap n_0 B_{X^*}\}\subset\{(n,k)\in\{1,\dots,n_0\}\times\mathbb{N};\ \|x_n^*+a_k e_k^*\|\le n_0\},$$

přičemž poslední množina je konečná díky faktu $a_k \to +\infty$. Z tohoto faktu již konečnost množiny $D \cap n_0 B_{X^*}$ plyne.

$\square$

PŘÍKLAD 19. Nechť $X = c_0$, a $X^* = \ell_1$. Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ je posloupnost nenulových čísel. Nechť e_n^*, $n \in \mathbb{N}$ značí bázové vektory v X^*. Dokažte, že platí následující.

(a) $a_n e_n^* \overset{w^*}{\to} 0$ právě tehdy, když $\{a_n\}$ je omezená posloupnost.
(b) Platí

$$0 \in \overline{\{a_n e_n^*;\ n \in \mathbb{N}\}}^{w_{\mathrm{b}}^*} \Leftrightarrow 0 \in \overline{\{a_n e_n^*;\ n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} |a_n| < +\infty.$$

ŘEŠENÍ. (a) Důkaz je analogický důkazu Příkladu 18(a).
(b) Je-li $0 \in \overline{\{a_n e_n^*;\ n \in \mathbb{N}\}}^{w_{\mathrm{b}}^*}$, platí $0 \in \overline{\{a_n e_n^*;\ n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$, neboť topologie w_{b}^* je jemnější než w^*.

Pokud $0 \in \overline{\{a_n e_n^*;\ n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$, pak $\liminf_{n\to\infty} |a_n| < +\infty$, neboť v opačném případě je $x = \{\frac{1}{a_n}\} \in c_0$ a w^*-okolí $U_{x,\frac{1}{2}} = \{y \in \ell_1;\ |\sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)| < \frac{1}{2}\}$ neprotíná množinu $\{a_n e_n^*;\ n \in \mathbb{N}\}$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $|\sum_{k=1}^{\infty} x(k) a_n e_n(k)| = |a_n x(n)| = 1$.

Pokud $\liminf_{n\to\infty} |a_n| < M < +\infty$, chceme ukázat, že každé w_{b}^*-okolí 0 obsahuje nějaký prvek $a_n e_n^*$. Nechť tedy $K_1, \dots, K_m$ jsou množiny v X sestávající z posloupnosti prvků konvergující v normě k 0 a $U_{p_{K_1},\dots,p_{K_m},\varepsilon}$ je dané w_{b}^*-kolí 0. Jelikož posloupnosti v množinách $K_1, \dots, K_m$ kovergují k 0, existuje konečná množina $F \subset K_1 \cup \dots \cup K_m$ taková, že $\|x\| < \frac{\varepsilon}{M}$ pro $x \in K_1 \cup \dots \cup K_m \setminus F$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, že $|x(n)| < \frac{\varepsilon}{M}$ pro $x \in F$ a $n \geq n_0$. Nyní uvažujme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$ a $|a_n| < M$. Pak pro $x \in K_1 \cup \dots \cup K_m$ platí

$$|a_n e_n^*(x)| = |a_n||x(n)| \begin{cases} \leq |a_n|\|x\| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, & x \in K_1 \cup \dots \cup K_m \setminus F, \\ < |a_n|\frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon, & x \in F, \end{cases}$$

takže $a_n e_n^* \in U_{p_{K_1},\dots,p_{K_m},\varepsilon}$. Tedy $0 \in \overline{\{a_n e_n^*;\ n \in \mathbb{N}\}}^{w_{\mathrm{b}}^*}$.

$\square$

PŘÍKLAD 20. Nechť X je nekonečněrozměrný normovaný lineární prostor. Dokažte následující.

(a) Na X^* je topologie w_{b}^* je striktně silnější než w^*.
(b) Je-li X separabilní, existuje spočetná $C \subset X^*$ taková, že $0 \in \overline{C}^{w^*} \setminus \overline{C}^{w_{\mathrm{b}}^*}$.

ŘEŠENÍ. (a) Pomocí Rieszova lematu FA.1.63 zkonstruujeme lineárně nezávislou množinu vektorů $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset S_X$. Pak $K = \{\frac{x_n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ je množina sestávající z posloupnosti konvergující k 0, takže množina

$$V = \{f \in X^*;\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(\tfrac{x_n}{n})| \leq 1\} \supset U_{p_K,1}$$

je w_{b}^*-okolí 0.

Množina V však není w^*-okolí 0. Je-li totiž U libovolné w^*-okolí 0, existují $y_1, \dots, y_m \in X$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $U_{p_{y_1},\dots,p_{y_m},\varepsilon} \subset U$. Pak ovšem $U_{p_{y_1},\dots,p_{y_m},\varepsilon} \not\subset V$. Vskutku, kdyby tomu tak bylo, pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí , že funcionál ε_{x_n} je omezený na $\bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} y_i$, tedy je tam nulový. To by ale znamenalo, že všechny vektory x_n leží v lineárním obalu množiny $\{y_1, \dots, y_m\}$, což je vzhledem k jejich lineární nezávislosti nemožné. Proto V není w^*-okolí 0.
(b) Uvažujme množinu V z bodu (a). Jelikož 0 není w^*-vnitřním bodem V, platí $0 \in \overline{X^* \setminus V}^{w^*}$. Jelikož je

$$X^* \setminus V = \{f \in X^*;\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| > n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \in X^*;\ |f(x_n)| > n\}$$

w^*-otevřená množina a X^* je w^*-separabilní (vizte Příklad 18(d)), je množina $X^* \setminus V$ w^*-separabilní. Vyberme $C \subset X^* \setminus V$ spočetnou w^*-hustou množinu. Pak C je hledaná množina.

$\square$

PŘÍKLAD 21. Nechť X je separabilní Banachův prostor a $A \subset X^*$. Dokažte, že pak

$$\bigcup_{r>0} \overline{A \cap rB_{X^*}}^{w^*} = \{f \in X^*;\ \text{existuje } \{f_n\} \subset A \text{ taková, že } f_n \xrightarrow{w^*} f\}.$$

ŘEŠENÍ. Je-li $\{f_n\} \subset A$ posloupnost w^*-konvergující k $f \in X^*$, jedná se o normově omezenou posloupnost díky Tvrzení FA.6.97. Tedy existuje $r > 0$, že $\{f_n\} \subset A \cap rB_{X^*}$.

Pokud $f \in \overline{A \cap rB_{X^*}}^{w^*}$ pro nějaké $r > 0$, využijeme metrizovatelnosti topologického prostoru (rB_{X^*}, w^*) k nalezení posloupnosti $\{f_n\} \subset A \cap rB_{X^*}$, která w^*-konverguje k f.

□

4. Slabá kompaktnost

PŘÍKLAD 22. Dokažte následující tvrzení.

(a) Prostor $\beta\mathbb{N}$ je kompaktní, ne však sekvenciálně kompaktní.
(b) Prostor $\beta\mathbb{N} \setminus \{x\}$, kde $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, je spočetně kompaktní, ale ne kompaktní.
(c) Nalezněte příklad relativně spočetně kompaktní množiny, jejíž uzávěr není spočetně kompaktní.

ŘEŠENÍ. (a) a (b) jsou známé příklady, vizte [**?**, Example 3.10.18].

(c) Nechť $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, kde $\{\Gamma_n\}$ je disjunktní posloupnost nespočetných množin, a

$$E = \left\{ f\colon \Gamma \to \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N}\colon\ \operatorname{supp} f \cap \bigcup_{m=n}^{\infty} \Gamma_m \text{ je spočetný} \right\}.$$

(Zde $\operatorname{supp} f = \{\gamma \in \Gamma;\ f(\gamma) \neq 0\}$.) Uvažujme na E lokálne konvexní topologii danou pseudonormami $f \mapsto |f(\gamma)|$, $\gamma \in \Gamma$, tj. topologii bodové konvergence. Pak je množina

$$A = \{f \in E;\ \operatorname{supp} f \text{ spočetný}, \|f\|_\infty \leq 1\}$$

sekvenciálně kompaktní. Uvažujeme-li totiž posloupnost $\{f_n\}$ v A, existuje spočetná $\Gamma' \subset \Gamma$ taková, že $f_n = 0$ na $\Gamma \setminus \Gamma'$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\{f_n\}$ lze uvažovat jako posloupnost v kompaktním metrizovatelném prostoru $[-1, 1]^{\Gamma'}$, a proto z ní lze vybrat bodově konvergentní podposloupnost. Její limita bude zřejmě prvkem A.

Na druhou stranu, uzávěr $\overline{A}^E$ v E není spočetně kompaktní, neboť

$$\overline{A}^E = \{f \in E;\ \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

A tato množina obsahuje posloupnost $\{f_n\} = \{\chi_{\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i}\}$, což je posloupnost konvergující bodově k funkci χ_Γ. Tedy $\{f_n\}$ nemá hromadný bod v E a $\overline{A}^E$ není spočetně kompaktní.

□

PŘÍKLAD 23 (Kaplansky). Nechť K je takový topologický prostor, že K^n je Lindelöfův pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pak $(C(K), \tau_\mathrm{p})$ má spočetnou těsnost, tj. pro každou $A \subset (C(K), \tau_\mathrm{p})$ a $f \in \overline{A}$ existuje spočetná $C \subset A$ splňující $f \in \overline{C}$.

ŘEŠENÍ. Nechť $f \in \overline{A}$ je dáno. Nechť $m, k \in \mathbb{N}$ jsou pevné. Pro každou k-tici $F^k = (x_1, \dots, x_k) \in K^k$ uvažujme τ_p-okolí f definované jako $\{g \in C(K);\ |g(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{m}, i = 1, \dots, k\}$. Nechť $f_{m,F^k} \in A$ leží v tomto okolí. Pak $V_{m,F^k} = \{x \in K;\ |f_{m,F^k}(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}$ je otevřená množina v K obsahující prvky F^k, a tedy $\underbrace{V_{m,F^k} \times \cdots \times V_{m,F^k}}_{k\text{-krát}}$ je okolí F^k v K^k. Díky Lindelöfově vlastnosti K^k existuje spočetná $\mathcal{F} \subset K^k$ taková, že

$$K^k \subset \bigcup \{V_{m,F^k} \times \cdots \times V_{m,F^k};\ F^k \in \mathcal{F}\}.$$

Položme

$$C = \{f_{m,F^k};\ m, k \in \mathbb{N}, F^k \in \mathcal{F}\}.$$

Pak $C \subset A$ je spočetná a $f \in \overline{C}$. Vskutku, nechť $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ a $(y_1, \dots, y_k) \in K^k$ jsou dány. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{m} < \varepsilon$ a $F^k \in \mathcal{F}$ takovou, že $(y_1, \dots, y_k) \in V_{m,F^k} \times \dots \times V_{m,F^k}$. Pak máme

$$|f_{m,F^k}(y_i) - f(y_i)| < \frac{1}{m} < \varepsilon, \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

a tedy $f \in \overline{C}$.

□

PŘÍKLAD 24. Nechť K je kompaktní Hausdorfův prostor a $A \subset (C(K), \tau_{\mathrm{p}})$ je kompaktní a separabilní. Dokažte, že pak A je metrizovatelná.

ŘEŠENÍ. Nechť $D = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset A$ je spočetná hustá a $\varphi\colon K \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ je definováno jako $\varphi(x) = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $L = \varphi(K)$ je metrizovatelný kompakt a $J\colon C(L) \to C(K)$ definované jako $Jg = g \circ \varphi$ je izometrický *-izomorfizmus $C(L)$ do $C(K)$ (Příklad 9.16), který je navíc $\tau_{\mathrm{p}} - \tau_{\mathrm{p}}$ homeomorfizmus. Vskutku, net $\{g_i\} \subset C(L)$ konverguje ke $g \in C(L)$ v topologii τ_{p}, právě když $g_i(y) \to g(y)$, $y \in L$, což je ekvivalentní s tím, že $g_i(\varphi(x)) \to g(\varphi(x))$, $x \in K$.

Dále platí, že $A \subset J(C(L))$. Vskutku, dle Příkladu 9.16(a) stačí ověřit, že každá $f \in A$ je konstantní na vzorech $\varphi^{-1}(y)$, $y \in L$. Nechť tedy $x, x' \in K$ splňují $\varphi(x) = \varphi(x')$, tj. $f_n(x) = f_n(x')$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak z hustoty D plyne $f(x) = f(x')$, a tedy $f \in J(C(L))$. Množina $A' = J^{-1}(A) \subset C(L)$ je pak τ_{p}-kompaktní. Jelikož je L metrizovatelný kompakt, je separabilní, takže obsahuje spočetnou hustou množinu $C = \{l_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset L$. Uvažujme na A' topologii τ_C-bodové konvergence na C, tj. topologii generovanou pseudonormami $g \mapsto |g(l_n)|$, $g \in A'$, $n \in \mathbb{N}$. Topologie τ_C na A' je metrizovatelná a je slabší než τ_{p}. Tedy na kompaktu A' platí rovnost $\tau_C = \tau_{\mathrm{p}}$, a tedy je τ_{p} na A' metrizovatelná. Tím pádem je metrizovatelná i množina A.

□

PŘÍKLAD 25. Nechť $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. Dokažte, že pak K je kompaktní (a tedy slabě kompaktní) množina v $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ taková, že $\overline{\operatorname{aconv}} K$ není slabě kompaktní.

ŘEŠENÍ. Zjevně vektory $x_n = \frac{1}{n} e_n$ splňují $x_n \to 0$, takže K je kompaktní množina. Uvažujme prvky $y_k \in \operatorname{aconv} K$, $k \in \mathbb{N}$ definované jako

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,\ \dots\ ,\ y_k = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}x_{k-1} + \frac{1}{2^{k-1}}x_k,\ \dots .$$

Pak žádná podposloupnost $\{y_k\}$ nemá slabou limitu v c_{00}. Vskutku, pro $y \in c_{00}$ máme $\operatorname{supp} y \subset \{1, \dots, n-1\}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak ale pro každé $k > n$ platí

$$y_k(n) = \frac{1}{2^n n},$$

takže pro každou podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ máme $\lim_{k\to\infty} y_{n_k}(n) \neq y(n) = 0$, tj. y není slabá limita podposloupnosti $\{y_k\}$. Dle Eberleinovy-Šmuljanovy věty tak dostáváme, že $\overline{\operatorname{aconv}} K$ není slabě kompaktní.

□

V závěru této kapitoly se budeme věnovat andělským prostorům.

PŘÍKLAD 26 (Andělské prostory). Nechť X je Hausdorffův topologický úplně regulární prostor. Řekneme, že X je andělský, pokud pro každou $A \subset X$ relativně spočetně kompaktní množinu platí

(1) A je relativně kompaktní;
(2) pro každé $x \in \overline{A}$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ v A konvergující k x.

Dokažte následující tvrzení.

(a) Každý metrizovatelný prostor je andělský.
(b) Je-li X andělský, pro $A \subset X$ platí následující:
  (i) A kompaktní $\Leftrightarrow$ A spočetně kompaktní $\Leftrightarrow$ A sekvenciálně kompaktní.
  (ii) A relativně kompaktní $\Leftrightarrow$ A relativně spočetně kompaktní $\Leftrightarrow$ A relativně sekvenciálně kompaktní.

ŘEŠENÍ. (a) Vizte [**?**, Theorem 4.1.17].

(b) *Krok 1.* Nejprve ukážeme, že je-li A kompaktní, je i sekvenciálně kompaktní. Vskutku, nechť $\{x_n\} \subset A$ je daná posloupnost. Pokud se nějaké x_m opakuje v posloupnosti $\{x_n\}$ nekonečně krát, z $\{x_n\}$ lze zjevně vybrat konvergentní podposloupnost. Bez újmy na obecnosti lze tak předpokládat, že posloupnost $\{x_n\}$ je prostá, tj. žádný prvek se v ní neopakuje. Pak z kompaktnosti A dostáváme, že $B = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je relativně spočetně kompaktní a nalezneme hromadný bod $x \in A$ posloupnosti $\{x_n\}$. Pokud $x = x_m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, je $x \in \overline{\{x_n;\ n > m\}}$, což díky vlastnosti (2) znamená existenci posloupnosti $\{y_k\} \subset \{x_n;\ n > m\}$ konvergující k x. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n_k \in \mathbb{N}$ větší jak m takové, že $k = n_k$, tj. $y_k = x_{n_k}$. Jelikož $x \notin \{x_n;\ n > m\}$, lze dalším výběrem zařídit, že posloupnost $\{n_k\}$ je rostoucí. Našli jsme tak v případě $x \in B$ vybranou konvergentní podposloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k $x \in A$. Pokud $x \notin B$, opět z vlastnosti (2) existuje posloupnost $\{y_k\} \subset \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ konvergující k x. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $k = n_k$, tj. $y_k = x_{n_k}$. Jelikož $x \notin \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, lze dalším výběrem zařídit, že posloupnost $\{n_k\}$ je rostoucí, a stejně jako v prvním případě jsme nalzeli konvergentní podposloupnost pro posloupnost $\{x_n\}$. Množina A je tak sekvenciálně kompaktní.

Krok 2. Nyní odvodíme, že spočetně kompaktní množina $A \subset X$ je kompaktní. Dle vlastnosti (1) víme, že A je relativně kompaktní, tj. $\overline{A}$ je kompaktní. Nechť $x \in \overline{A}$ je dáno. Dle (2) existuje posloupnost $\{x_n\}$ v A konvergující k x. Jelikož A je spočetně kompaktní, existuje $y \in A$ hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$. Pak ale $x = y \in A$, a tedy $\overline{A} = A$ je kompaktní.

Nyní již můžeme zdůvodnit všechny požadované implikace:

- A relativně spočetně kompaktní $\overset{\text{dle (1)}}{\Rightarrow}$ A relativně kompaktní $\overset{\text{dle Kroku 1}}{\Rightarrow}$ A relativně sekvenciálně kompaktní $\overset{\text{zjevně}}{\Rightarrow}$ A relativně spočetně kompaktní;
- A spočetně kompaktní $\overset{\text{dle Kroku 2}}{\Rightarrow}$ A kompaktní $\overset{\text{dle Kroku 1}}{\Rightarrow}$ A sekvenciálně kompaktní $\overset{\text{zjevně}}{\Rightarrow}$ A spočetně kompaktní.

□

PŘÍKLAD 27. Dokažte následující tvrzení.

(a) Je-li K spočetně kompaktní Hausdorffův topologický prostor, je $(C(K), \tau_{\mathrm{p}})$ andělský.
(b) Je-li X Banachův prostor, je (X, w) andělský.

ŘEŠENÍ. (a) Nechť $A \subset (C(K), \tau_{\mathrm{p}})$ je relativně spočetně kompaktní. Dle Věty FA.14.20 je A relativně kompaktní a pro každou $f \in \overline{A}$ existuje podle Věty FA.14.21 posloupnost $\{f_n\} \subset A$ taková, že $f_n \to f$. Tedy A splňuje (1) i (2) v Příkladu 26.

(b) Dle Tvrzení FA.14.19 je zobrazení $\Phi : (X, w) \to (C((B_{X^*}, w^*)), \tau_{\mathrm{p}})$ definované předpisem $\Phi(x) = \varepsilon_x\restriction_{B_{X^*}}$ lineární izomorfizmus do. Z (a) tak plyne andělskost (X, w).

□

PŘÍKLAD 28 (Andělské lemma). Nechť X, Y jsou Hausdorffovy úplně regulární prostory takové, že existuje spojité prosté zobrazení $\varphi\colon X \to Y$. Nechť $A \subset X$ je relativně spočetně kompaktní a každá $B \subset \varphi(A)$ splňuje
$$\overline{B} = \{y \in Y;\ \text{existuje } \{y_n\} \subset B \text{ splňující } y_n \to y\}.$$
Dokažte, že pak $\varphi(\overline{A})$ je uzavřená v Y a $\varphi\colon \overline{A} \to \varphi(\overline{A})$ je homeomorfismus.

ŘEŠENÍ. Nejprve si uvědomíme, že můžeme předpokládat vztahy $X = \overline{A}$ a $Y = \overline{\varphi(A)}$.

Krok 1. Dále víme, že posloupnost v topologickém Hausdorffově prostoru konverguje k x, právě když každá její podposloupnost má x jako hromadný bod.

Krok 2. Pokud $\{x_n\}$ je posloupnost v A, $y \in \overline{\varphi(A)}$ a $\varphi(x_n) \to y$, pak $y \in \varphi(\overline{A})$ a $x_n \to \varphi^{-1}(y)$.

Vskutku, vezměme dle prvního kroku libovolnou podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$. Pak $\{x_{n_k}\}$ má hromadný bod $x \in \overline{A}$, a tedy je $\varphi(x)$ hromadný bod $\{\varphi(x_{n_k})\}$. Ale $\varphi(x_{n_k}) \to y$, a proto $y = \varphi(x) \in \varphi(\overline{A})$. Krok 1 nyní dává $x_n \to \varphi^{-1}(y)$.

Krok 3. Je-li $D \subset A$, pak
$$\varphi(\overline{D}) \subset \overline{\varphi(D)} = \{y \in Y;\ \text{existuje } \{x_n\} \subset D \text{ splňující } \varphi(x_n) \to y\} \subset \varphi(\overline{D}),$$

kde poslední inkluze platí díky Kroku 2.

Krok 4. Nechť nyní $C \subset \overline{A}$ je libovolná uzavřená množina. Chceme ukázat, že $\varphi(C)$ je též uzavřená.

K tomuto účelu si povšimneme, že z regularity X plyne rovnost $C = \bigcap\{\overline{U};\ C \subset U, U \text{ otevřená}\}$. Jelikož náš předpoklad říká $\overline{A} = X$, platí pro každou otevřenou $U \subset X$ vztah $\overline{U \cap A} = \overline{U}$. Dle Kroku 3 a prostotě φ tak dostáváme, že

$$\begin{aligned}\varphi(C) &= \bigcap\{\varphi(\overline{U});\ C \subset U, U \text{ otevřená}\} = \bigcap\{\varphi(\overline{U \cap A});\ C \subset U, U \text{ otevřená}\} = \\ &= \bigcap\{\overline{\varphi(U \cap A)},;\ C \subset U, U \text{ otevřená}\}\end{aligned}$$

je uzavřená. Zobrazení $\varphi\colon \overline{A} \to \varphi(\overline{A})$ je tak homeomorfismus.

□

PŘÍKLAD 29. Dokažte následující tvrzení.

(a) Nechť $\varphi\colon X \to Y$ je spojité prosté zobrazení úplně regulárního Hausdorffova prostoru X do andělského prostoru Y. Pak X je andělský.

(b) Podprostor andělského prostoru je andělský.

ŘEŠENÍ. Stačí použít Andělské lemma 28.

□

PŘÍKLAD 30. Nechť K je Hausdorffův topologický prostor, který spočetným sjednocením kompaktních množin. Pak $(C(K), \tau_{\mathrm{p}})$ je andělský.

ŘEŠENÍ. (a) Předpokládejme nejprve, že $K = \coprod_{n=1}^{\infty} K_n$ je disjunktním sjednocením kompaktních prostorů K_n. Nechť $A \subset (C(K), \tau_{\mathrm{p}})$ je relativně spočetně kompaktní. Pak pro každé $x \in K$ existuje $\gamma_x > 0$ takové, že $\{f(x);\ f \in A\} \subset B_{\mathbb{K}}(0, \gamma_x)$ (v opačném případě by totiž existovala posloupnost (f_n) v A splňující $|f_n(x)| \to \infty$, a tedy (f_n) by nemohla mít τ_p-konvergentní podnet). Tedy $A \subset \prod_{x \in K} B_{\mathbb{K}}(0, \gamma_x)$, takže k důkazu relativní kompaktnosti A stačí dokázat, že $\overline{A} \subset C(K)$. To však plyne z VětyFA.14.21.

Vskutku, nechť $f \in \overline{A}$ je dáno. Chceme ukázat, že $f \in C(K)$. Vzhledem ke struktuře K stačí ukázat, že $f\restriction_{K_n} \in C(K_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To však plyne z Věty FA.14.21, neboť množina $A_n = \{g\restriction_{K_n};\ g \in A\}$ je relativně spočetně kompaktní v $C(K_n)$ a $f\restriction_{K_n} \in \overline{A_n}$.

Množina A je tak relativně kompaktní. Uvažujme libovolné $f \in \overline{A}$. Jelikož je K^n σ-kompaktní prostor pro každé $n \in \mathbb{N}$, je libovolná mocnina K Lindelöfova. Dle Příkladu 23 existuje $D \subset A$ spočetná splňující $f \in \overline{D}$. Pak $\overline{D}$ je separabilní kompakt. Naším cílem je nyní ukázat, že $\overline{D}$ je metrizovatelný.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme $\varphi_n\colon K_n \to \mathbb{K}^D$ definované jako $\varphi_n(x) = \{d(x)\}_{d \in D}$. Pak $L_n = \varphi(K_n)$ je metrizovatelný kompakt, a tedy v něm existuje spočetná hustá množina B_n. Nechť $C_n \subset K_n$ je spočetná množina splňující $\varphi_n(C_n) = B_n$ a $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Pak topologie τ_C bodové konvergence na C je metrizovatelná topologie na $\overline{D}$ slabší než τ_{p}, a tedy splývá s τ_{p}.

Vskutku, je třeba dokázat, že pokud $f, g \in \overline{D}$ splňují $f = g$ na C, pak $f = g$ na K. Uvažujme tedy libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak dle Příkladu 9.16 existují funkce $f_n, g_n \in C(L_n)$ splňující $f\restriction_{K_n} = f_n \circ \varphi_n$ a $g\restriction_{K_n} = g_n \circ \varphi_n$. Pak ovšem $f_n = g_n$ na B_n, což znamená $f_n = g_n$ na L_n. Tedy $f\restriction_{K_n} = g\restriction_{K_n}$, což dává $f = g$.

Množina $(\overline{D}, \tau_{\mathrm{p}})$ je tak metrizovatelná, a proto existuje posloupnost $\{f_n\} \subset D \subset A$ splňující $f_n \to f$. Prostor $(C(K), \tau_{\mathrm{p}})$ je tak andělský.

(b) Nechť nyní $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, kde $\{K_n\}$ je posloupnost kompaktů. Uvažujme prostor $L = \coprod_{n=1}^{\infty} K_n$, tj. disjunktní sjednocení prostorů K_n. Uvažujme zobrazení $\varphi\colon (C(K), \tau_{\mathrm{p}}) \to (C(L), \tau_{\mathrm{p}})$ definované jako $\varphi(f)(y) = f(y)$, kde $y \in K_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $f \in C(K)$. Pak φ je spojité prosté zobrazení, což dle Příkladu 28 a části (a) znamená, že $(C(K), \tau_{\mathrm{p}})$ je andělský.

□

PŘÍKLAD 31. Nechť X je metrizovatelný lokálně konvexní prostor. Pak (X, w) je andělský.

ŘEŠENÍ. Nechť $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná báze okolí nuly v X. Pak poláry $\{U_n^\circ;\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří posloupnost w^*-kompaktních množin, které pokrývají X^* (Věta FA.6.33). Tedy $(C(X^*), \tau_{\mathrm{p}})$ je andělský prostor dle Příkladu 30. Jelikož $(X, w) \subset (C(X^*), \tau_{\mathrm{p}})$ pomocí kanonického vnoření, je (X, w) andělský dle Příkladu 29.

□

Kapitola 12

Neomezené lineární operátory

1. Uzavřené operátory s spektrum

PŘÍKLAD 1. Nechť $H = \ell_2$ a $e = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in H$. Nechť $\operatorname{Dom} T = c_{00} + \operatorname{span} e$ a $T(x + ce) = ce$, $x + ce \in \operatorname{Dom} T$. Pak T je hustě definovaný a nemá uzavřené rozšíření.

DŮKAZ. Jelikož $c_{00} \subset \operatorname{Dom} T$, je T hustě definovaný. Uvažujme prvky $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in c_{00}$. Pak $x_n \to e$ a $Tx_n = 0$. Tedy $(e, 0) \in \overline{\operatorname{graf} T}$. Avšak také $(e, e) \in \operatorname{graf} T$, takže T nelze uzavřít.

□

PŘÍKLAD 2. Nechť $H = L_2(\mathbb{R})$ a $g \in H \setminus \{0\}$. Nechť $\operatorname{Dom} T = L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ a $Tf = \left(\int_{\mathbb{R}} f\right) g$. Pak $\operatorname{Dom} T^\star = \{g\}^\perp$, tj. $\operatorname{Dom} T^\star$ není hustý v H.

DŮKAZ. Zobrazení $f \in \operatorname{Dom} T \mapsto \langle Tf, h\rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} f\right) \langle g, h\rangle$ je spojité na $\operatorname{Dom} T$ právě tehdy, když $\langle g, h\rangle = 0$. Vskutku, lineární forma $\phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f$ není na $\operatorname{Dom} T$ spojitá. Kdyby byla, existuje $\varphi \in H$ splňující $\int_{\mathbb{R}} f = \phi(f) = \langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\overline{\varphi}$, $f \in \operatorname{Dom} T$. Pak však snadno dostaneme $\overline{\varphi} = 1$, což je spor.

□

PŘÍKLAD 3. Nechť T je uzavřený operátor v H. Pak pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ uzavřený podprostor.

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\} \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ konverguje k $x \in H$. Pak $Tx_n = \lambda x_n \to \lambda x$, takže $(x_n, Tx_n) \to (x, \lambda x)$. Z uzavřenosti T pak plyne $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx = \lambda x$.

□

PŘÍKLAD 4. Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v H. Pak $\sigma(T^\star) = \{\overline{\lambda};\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

DŮKAZ. Mějme $\lambda \in \rho(T)$, přičemž chceme ukázat $\overline{\lambda} \in \rho(T^\star)$. Nechť $A = (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, pak

$$(\lambda I - T)A = I \quad \text{a} \quad A(\lambda I - T) \subset I.$$

Dle Tvrzení FA.12.27 tak máme

$$A^\star(\overline{\lambda} I - T^\star) = A^\star(\lambda I - T^\star) \subset (\lambda I - T)A^\star = I^\star = I \quad \text{a} \quad (\overline{\lambda} I - T^\star)A^\star = I.$$

Operátor $A^\star$ je tak spojitá inverze k $\overline{\lambda} I - T^\star$, takže $\overline{\lambda} \in \rho(T^\star)$.

Je-li nyní $\lambda \in \rho(T^\star)$, pak dle předchozího je $\overline{\lambda} \in \rho(T^{\star\star}) = \rho(\overline{T}) = \rho(T)$.

□

PŘÍKLAD 5. Ukažme, že existuje hustě definovaný operátor T v $H = \ell_2$ takový, že $\operatorname{Dom} T^\star = \{0\}$.

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\}$ je hustá množina v ℓ_2 a $T\colon \operatorname{span}\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \to H$ je definováno jako $T(\sum_{n=1}^k c_n e_n = \sum_{n=1}^k c_n x_n$. Pak $\operatorname{graf} T$ je hustý v $H \times H$. Vskutku, nechť $(a, b) \perp \operatorname{graf} T$, tedy $0 = \langle (a, b), (x, Tx)\rangle_{H \times H}$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$. Pak

$$0 = \langle a, e_n\rangle + \langle b, x_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy nerovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle b, x_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|a\|^2 < +\infty$$

dává $\langle b, x_n \rangle \to 0$. Nechť $x \in H$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $|\langle b, x_n \rangle| < \varepsilon$. Nechť $n \geq n_0$ splňuje $\|x - x_n\| < \varepsilon$. Pak

$$|\langle b, x \rangle| \leq |\langle b, x - x_n \rangle| + |\langle b, x_n \rangle| \leq \|b\|\varepsilon + \varepsilon.$$

Tedy $b \in H^\perp = \{0\}$, což zároveň dává $a = 0$. tedy $\operatorname{graf} T$ je hustý v $H \times H$.

Z Tvrzení FA.12.62 nyní plyne, že $\operatorname{graf} T^\star = \{(0,0)\}$.

□

PŘÍKLAD 6. Nechť T je hustě definovaný operátor v komplexním Hilbertově prostoru H, který splňuje $\langle Tx, x \rangle = 0$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$. Pak T je nulový.

DŮKAZ. Pro $x, y \in \operatorname{Dom} T$ máme z polarizační identity

$$\langle Tx, y \rangle = \frac{1}{4}\big(\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + i\langle T(x+iy), x+iy \rangle - i\langle T(x-iy), x-iy \rangle\big) = 0,$$

což vzhledem k hustotě $\operatorname{Dom} T$ implikuje $Tx = 0$ pro $x \in \operatorname{Dom} T$.

□

PŘÍKLAD 7. Nechť T je hustě definovaný uzavřený symetrický operátor v H, pro který existuje $a \in \rho(T) \cap \mathbb{R}$. Pak T je samoadjungovaný.

DŮKAZ. Jelikož je $\rho(T)$ otevřená množina (Věta FA.12.21), existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $a - \varepsilon i, a + \varepsilon i \in \rho(T)$. Dle Důsledku FA.12.40 je T samoadjungovaný.

□

PŘÍKLAD 8. Nechť T je uzavřený operátor v Hilbertově prostoru H a $\langle x, y \rangle_T = \langle x, y \rangle_H + \langle Tx, Ty \rangle_H$, $x, y \in \operatorname{Dom} T$. Pak $(\operatorname{Dom} T, \langle \cdot, \cdot \rangle_T)$ je Hilbertův prostor.

DŮKAZ. Zjevně je daná struktura vektorový prostor se skalárním součinem. Zkoumejme její úplnost. Nechť tedy $\{x_n\} \subset \operatorname{Dom} T$ je $\|\cdot\|_T$-cauchyovská posloupnost. Pak $\{x_n\}$ i $\{Tx_n\}$ jsou cauchyovské v H, takže $x_n \to x$ a $Tx_n \to y$ pro nějakou dvojici $(x, y) \in H \times H$. Z uzavřenosti T však plyne $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx = y$. Pak ovšem $x_n \to x$ v $\|\cdot\|_T$, a tedy $\operatorname{Dom} T$ je úplný Hlibertův prostor.

□

PŘÍKLAD 9. Uvažujme rovnici $f - f'' = g$, kde $g \in H = L_2([0,1])$ je dáno. Hledejme řešení této rovnice $f \in \mathrm{AC}([0,1])$ takové, že $f' \in \mathrm{AC}([0,1])$ a $f'' \in H$, které navíc splňuje jednu z následujících podmínek:

(a) $f(0) = f(1) = 0$,
(b) $f'(0) = f'(1) = 0$,
(c) $f(0) = f(1)$ a $f'(0) = f'(1)$.

Pak pro každou volbu okrajových podmínek existuje právě jedno řešení.

DŮKAZ. Nechť $I = [0,1]$. Uvažujme operátory T_1, T_2, T_3 z Příkladu FA.12.41. Dle Věty FA.12.64 je operátor $I + T_k^\star T_k$ invertovatelný, $k = 1, 2, 3$. Tedy pro $k = 1$ máme $T_1^\star = T_3$, takže $I + T_3 T_1$ je invertovatelný. Pro $g \in H$ tak existuje právě jedno

$$f \in \operatorname{Dom} T_3 T_1 = \{h \in AC(I);\ h' \in \operatorname{Dom} T_3\} = \{h, h' \in AC(I), h'' \in H;\ h'(0) = h'(1) = 0\}$$

splňující $(I + T_3 T_2) f = f - f'' = g$. Tím pádem máme řešení pro (b).

Podobně pro $k = 2$ máme $\operatorname{Dom} T_2^\star T_2 = \operatorname{Dom} T_2 T_2 = \{h, h' \in AC(I), h'' \in H;\ h(0) = h(1), h'(0) = h'(1)\}$, takže Věta FA.12.64 dává řešení pro podmínku (c).

Pro $k = 3$ pak máme $\operatorname{Dom} T_3^\star T_3 = \operatorname{Dom} T_1 T_3 = \{h, h' \in AC(I), h'' \in H;\ h(0) = h(1)\}$, což dává řešení pro případ (a).

□

PŘÍKLAD 10. Nechť $H = L_2(\mu_1)$ a $\operatorname{Dom} T = \{f \in H \cap \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R});\ f' \in H\}$ a $Tf = if'$ Pak $T^\star = T$.

DŮKAZ. *Krok 1.* Nejprve dokážeme, že $f \in \operatorname{Dom} T$ je v $C_0(\mathbb{R})$. Nechť F značí Fourierovu transformaci na $L_1(\mu_1)$ a P značí Plancherelovu transformaci na $L_2(\mu_1)$. Pak $Pf' \in H$, $Pf \in H$, takže distribuce $\Lambda_{Pf'}, \Lambda_{Pf}$ jsou temperované. Máme tak

$$\Lambda_{Pf'} = \widehat{\Lambda_{f'}} = (iId)\widehat{\Lambda_f} = (iId)\Lambda_{Pf} = \Lambda_{(iId)Pf}.$$

Tedy $Pf' = iIdPf$, takže $iIdPf \in H$. Pak $Pf\restriction_{(-1,1)} \in L_1((-1,1))$ a

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} |Pf| \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \frac{|IdPf|}{|Id|} \,\mathrm{d}\mu_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} |IdPf|^2 \,\mathrm{d}\mu_1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \frac{1}{Id^2} \,\mathrm{d}\mu_1\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Proto dostáváme $Pf \in L_1(\mu_1)$, takže $PPf = FPf \in C_0(\mathbb{R})$. Ale $PP\varphi = FF\varphi = \tilde{\varphi}$ pro $\varphi \in \mathscr{S}_1$, takže i $PPf = \tilde{f} \in C_0(\mathbb{R})$, což znamená, že $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Krok 2. Nechť $f, g \in \operatorname{Dom} T$. Pak

$$\langle Tf, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} if'\overline{g} \,\mathrm{d}\mu_1 = i\left([f\overline{g}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f\overline{g'} \,\mathrm{d}\mu_1\right) = \int_{\mathbb{R}} f\overline{ig'} = \langle f, Tg\rangle.$$

tedy $\operatorname{Dom} T \subset \operatorname{Dom} T^\star$ a $T \subset T^\star$.

Nechť $g \in \operatorname{Dom} T^\star$ je dáno a $h = T^\star g \in H$. Položme $H(x) = \int_0^x h \,\mathrm{d}\lambda_1$. Pak pro $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ máme

$$\int_{\mathbb{R}} if'\overline{g} \,\mathrm{d}\mu_1 = \langle Tf, g\rangle = \langle f, T^\star g\rangle = \langle f, h\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\overline{h} \,\mathrm{d}\mu_1 = -\int_{\mathbb{R}} f'\overline{H} \,\mathrm{d}\mu_1,$$

neboli

$$\int_{\mathbb{R}} f'\left(\overline{H - ig}\right) = 0, \quad f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Tedy distribuce $\Lambda_{\overline{H-ig}}$ má distributivní derivaci nulovou, tedy existuje $c \in \mathbb{C}$ splňující $H - ig = c$. Dostáváme tak $g \in H \cap \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ a $g' \in H$, tj. $g \in \operatorname{Dom} T$. Proto $T^\star = T$.

□

PŘÍKLAD 11. Ukažme, že pro $g \in L_2(\mu_1)$ má rovnice $f - f'' = g$ právě jedno řešení f splňující $f \in L_2(\mu_1)$, $f, f' \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ a $f', f'' \in L_2(\mu_1)$.

DŮKAZ. Uvažujme operátor T z Příkladu 10. Dle Věty FA.12.64 je operátor $I + T^\star T = I + TT$ invertovatelný. To nám však přímo dává jednoznačné řešení naší úlohy.

□

PŘÍKLAD 12. Nechť $H = L_2(I)$, $I = [0,1]$, $\operatorname{Dom} T = \mathscr{D}((0,1))$ a $Tf = -f''$. Pak T je hustě definovaný symetrický operátor nezáporný na $\operatorname{Dom} T$, jehož uzávěr není samoadjungovaný.

DŮKAZ. Jelikož T je symetrický a hustě definovaný, $T \subset T^\star$, takže T lze uzavřít. Nechť $(f,g) \in \overline{\operatorname{graf} T}$. Pak existuje posloupnost $\{f_n\} \subset \mathscr{D}((0,1))$ splňující $f_n \to f$ a $-f_n'' \to g$ v H. Bez újmy naobecnosti můžeme předpokládat, že $f_n \to f$ skoro všude. Z odhadu

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| = |\int_0^x (f_n'' - f_m'')| \leq \|f_n'' - f_m''\|_H, \quad x \in I$$

vidíme, že $\{f_n'\}$ konvergují stejnoměrně k nějaké $h \in C(I)$. Položme $G(x) = \int_0^x (-g)$, $x \in I$. Pak $G \in \mathrm{AC}(I)$ a platí

$$|h(x) - G(x)| \leq |h(x) - f_n'(x)| + |\int_0^x (f_n'' + g)| \leq \|h - f_n'\|_\infty + \|f_n'' - (-g)\|_H, \quad x \in I.$$

Tedy $h = G$ je v $\mathrm{AC}(I)$ a $h' = G' = -g \in H$. Ze stejnoměrné konveregence $\{f_n'\}$ dostáváme stejnoměrnou konveregenci $\{f_n\}$ k f, takže vztahy $f_n(0) = f_n(1) = f_n'(0) = f_n'(1)$ implikují

$$f(0) = f(1) = 0 = f'(0) = f'(1).$$

Tedy

$$\operatorname{Dom} \overline{T} = \{f \in H;\ f, f' \in \mathrm{AC}(I), f'' \in H, f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\}$$

a $\overline{T}f = -f''$, $f \in \operatorname{Dom} \overline{T}$.

Uvažujme nyní $g \in \{f \in H;\ f, f' \in \mathrm{AC}(I), f'' \in H\}$. Pak pro každé $f \in \operatorname{Dom} \overline{T}$ platí

$$\langle \overline{T} f, g\rangle = \int_0^1 -f''\overline{g} = \int_0^1 f\overline{-g''} = \langle f, -g''\rangle.$$

Tedy $g \in \operatorname{Dom} \overline{T}^\star$, což znamená, že $\overline{T}$ není samoadjungovaný.

□

PŘÍKLAD 13. Nechť $U\colon H_1 \to H_2$ je unitární zobrazení mezi komplexními Hilbertovými prostory a T_i jsou operátory v H_i splňující $T_1 = U^{-1}T_2U$. Pak T_1 má vlastnost (V), právě když T_2 má vlastnost (V), přičemž (V) je být hustě definovaný, uzavřený, mít stejné spektrum, mít stejné bodové spektrum, samoadjungovanost, nezápornost, normalita, symetričnost, maximální symetričnost.

Dále $T_1^\star = U^{-1}T_2^\star U$ a $\overline{T_1} = U^{-1}\overline{T_2}U$, pokud operátory lze uzavřít. Pokud T_2 je normální a E_2 je jeho ortogonální rozklad identity, je $E_1(B) = U^{-1}E_2(B)U$, $B \in \mathrm{Bs}(\mathbb{C})$ ortogonální rozklad identity příslušný T_1.

DŮKAZ. Budeme dokazovat, že T_1 dědí vlastnosti po T_2, což vzhledem k symetrii situace postačí. Rovnost $T_1 = U^{-1}T_2U$ znamená, že $\operatorname{Dom} T_1 = U^{-1}(\operatorname{Dom} T_2)$ a $\operatorname{Rng} T_1 = U^{-1}(\operatorname{Rng} T_2)$. Tedy hustota definičního oboru se dědí.

Je-li T_2 uzavřený a $x_n \to x$, $T_1x_n \to y$, kde $\{x_n\} \subset \operatorname{Dom} T_1$, pak $Ux_n \to Ux$ a $T_2Ux_n = UT_1x_n \to Uy$. Tedy $Ux \in \operatorname{Dom} T_2$ a $T_2Ux = Uy$. Proto $T_1x = U^{-1}T_2Ux = y$ a T_1 je uzavřený.

Zjevně vlastní vektor $y \in H_2$ pro $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T_2)$ dává vektor $U^{-1}y$ splňující $T_1U^{-1}y = U^{-1}T_2y = U^{-1}(\lambda y) = \lambda U^{-1}y$, tedy $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(()T_1)$. Podobně, je-li $\lambda I - T_2$ invertovatelné, pak pro $S = (\lambda I_{H_2} - T_2)^{-1}$ platí, že $U^{-1}SU$ je spojitá inverze k $\lambda I_{H_1} - T_1$. Vskutku,

$$(\lambda I_{H_1} - T_1)U^{-1}SU = U^{-1}(\lambda I_{H_2} - T_2)UU^{-1}SU = U^{-1}U = I_{H_1}$$

a

$$U^{-1}SU(\lambda I_{H_1} - T_1) \subset I_{H_1}.$$

Tedy $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.

Nyní ukážeme, že $T_1^\star = U^{-1}T_2^\star U$. Nechť $y \in \operatorname{Dom} T_1^\star$, tj. $x \mapsto \langle T_1x, y\rangle$ je spojité na $\operatorname{Dom} T_1$. Pak

$$z \mapsto \langle T_2z, Uy\rangle = \langle UT_1U^{-1}z, Uy\rangle = \langle T_1U^{-1}z, y\rangle = \langle U^{-1}z, T_1^\star y\rangle = \langle z, UT_1^\star y\rangle$$

je spojité na $\operatorname{Dom} T_2$. Tedy $Uy \in \operatorname{Dom} T_2^\star$ a platí $T_2^\star(Uy) = UT_1^\star y$. Tedy $T_1^\star \subset U^{-1}T_2^\star U$. Ze symetrie máme i opačnou inkluzi.

Okamžitě tak dostáváme přenos samoadjungovanosti a normality. Dále platí

$$\langle T_1x, x\rangle = \langle U^{-1}T_2Ux, x\rangle = \langle T_2Ux, Ux\rangle,$$

takže nezápornost T_2 se přenese na T_1. Podobně z rovnosti

$$\langle T_1x, y\rangle = \langle T_2Ux, U_y\rangle = \langle Ux, T_2Uy\rangle = \langle x, U^{-1}T_2Uy\rangle = \langle x, T_1y\rangle, \quad x, y \in \operatorname{Dom} T_1$$

vidíme, že symetrie T_2 dává symetrii T_1. Výrok o maximální symetrii pak plyne z předešlých úvah.

Přenos uzávěru operátoru je zcela analogický důkazu přenosu uzavřenosti.

Nechť nyní T_2 je normální a E_2 je jeho rozklad identity. Pak snadno zjistíme, že E_1 je též rozklad identity a pro $x, y \in \operatorname{Dom} T_1$ platí

$$(E_2)_{Ux,Uy}(B) = \langle E_2(B)x, y\rangle = \langle UE_1(B)U^{-1}Ux, Uy\rangle = \langle E_1(B)x, y\rangle = (E_1)_{x,y}(B), \quad B \in \mathrm{Bs}(\mathbb{C}),$$

takže

$$\langle T_1x, y\rangle = \langle T_2Ux, Uy\rangle = \int_{\mathbb{C}} Id\, \mathrm{d}(E_2)_{Ux,Uy} = \int_{\mathbb{C}} Id\, \mathrm{d}(E_1)_{x,y}.$$

Tedy E_1 je rozklad identity T_1.

□

PŘÍKLAD 14. Nechť $H = L_2(\mu_1)$,

(a) Je-li $\operatorname{Dom} T = \{f \in H \cap \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), ;\ f' \in H\}$ a $Tf = if'$, pak T je unitárně ekvivalentní s operátorem M_{-Id} v H, který je definován jako $M_{Id}f = -Idf$ pro $f \in \operatorname{Dom} M_{Id} = \{f \in H;\ -Idf \in H\}$.

(b) Nechť $S = T^2$, tj. $\operatorname{Dom} S = \{f \in H;\ f, f' \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap H, f'' \in H\}$ a $Sf = -f''$. Pak S je unitárně ekvivalentní s operátorem M_{Id^2}. Tedy $\sigma(S) = [0, \infty)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(S) = \emptyset$.

DŮKAZ. (a) *Krok 1.* Nechť $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $f \in \operatorname{Dom} T$. Pak $(f * h)' = f' * h$. Vskutku, označme $F(x) = \int_0^x f' * h$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_{\mathbb{R}} h(t) f'(y - t) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\int_0^x f'(y - t) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t =$$
$$\int_R h(t) f(x - t) \, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} h(t) f(0 - t) \, \mathrm{d}t = (f * h)(x) - (f * h)(0).$$

(Fubiniova věta lze použít, neboť pro $g = |f'|$ máme díky Hölderově nerovnosti odhad

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| \left(\int_0^x g(y - t) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t \leq \|g\|_{L_2(\mathbb{R})} \sqrt{|x|} \int_{\mathbb{R}} |h| < +\infty.)$$

Tedy

$$(f * h)'(x) = (F(x) + (f * h)(0))' = F'(x) = (f' * h)(x).$$

Krok 2. Nejprve si rozmyslíme, že $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ je grafově hustý podprostor $\operatorname{Dom} T$ i $\operatorname{Dom} M_{-Id}$, tj. pro každé $f \in \operatorname{Dom} T$ existují $\{f_n\} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňující $f_n \to f$ v H a $f_n' \to f'$ v H. Podobně existují pro $g \in \operatorname{Dom} M_{-Id}$ funkce $\{g_n\} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ takové, že $g_n \to g$ v H a $-Idg_n \to -Idg$ v H.

Uvažujme nejprve $f \in \operatorname{Dom} T$. Nechť $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ je regularizační jádro pro $L_1(\mu_1)$ a $h_n(x) = nh(nx)$, $x \in \mathbb{R}$. Dle Věty FA.5.13(b) funkce $f_n = f * h_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ splňují $f_n \to f$ v H a $f_n' = f' * h_n \to f'$ v H. Pro dané $\varepsilon > 0$ tak existuje$g \in C^\infty(\mathbb{R})$ taková, že $\|g - f\|_H^2 + \|g' - f'\|_H^2 < \varepsilon$. Nechť $R > 0$ splňuje $\int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} (|g|^2 + |g'|^2) \, \mathrm{d}\mu_1 < \varepsilon^2$. Nalezneme funkci $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňující $\eta(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $\eta = 1$ $(-R, R)$ a $|\eta'| \leq 1$.

Tu zkonstruujeme takto. Nechť $d\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ je 1-lipschitzovská funkce s kompaktním nosičem, která splňuje $d = 1$ na $(-2R, 2R)$. Pak funkce $d_n = d * h_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňují pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ náš požadavek, neboť odhad na derivaci získáme pomocí Kroku 1 jako $|d_n'| = |d' * h_n| \leq |d'| * h_n \leq 1$. (Funkce d je absolutně spojitá, $|d'| \leq 1$ skoro všude a $\operatorname{supp} d$ je kompaktní.)

Uvažujme funkci $u = \eta g \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} |g - u|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(1 - \eta)|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} |g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 < \varepsilon^2$$

a

$$\int_{\mathbb{R}} |g' - u'|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_R |g' - g'\eta - \eta' g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |g'(1 - \eta)|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 + \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} |g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 \right) \leq$$
$$\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} |g'|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 + \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} |g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 \right) < 2\varepsilon^2.$$

Tedy u je funkce splňující

$$\|u - f\|_H + \|u' - f'\|_H \leq \|u - g\|_H + \|g - f\|_H + \|u' - g'\|_H + \|g' - f'\|_H \leq \varepsilon + \varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon.$$

Nyní odovodíme podobnou aproximaci pro $f \in \operatorname{Dom} M_{-Id}$. Pak $f \in H$ a $|Id|^2 |f|^2 \in H$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak nalezneme $R > 1$ takové, že $\int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} (|f|^2 + |Idf|^2) \, \mathrm{d}\mu_1 < \varepsilon^2$. Nechť $g \in \mathscr{D}((-R, R))$ splňuje $\int_{-R}^R |f - g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 < \frac{\varepsilon^2}{R^2}$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} |f|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 + \int_{(-R,R)} |f - g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 < \varepsilon^2 + \varepsilon^2$$

a

$$\int_{\mathbb{R}} |Id(f - g)|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} |Idf|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 + \int_{(-R,R)} R^2 |f - g|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 < \varepsilon^2 + \varepsilon^2.$$

Tím je požadovaná funkce nalezena.

Krok 3. Nechť $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $U\colon L_2(\mu_1) \to L_2(\mu_1)$ je unitární operátor daný Plancherelovou větou FA.5.31. Pak $Uf \in \mathscr{S}_1 \subset \operatorname{Dom} M_{-\mathit{Id}}$ a

$$UTf = U(if') = iUf' = i\widehat{f'} = ii(\mathit{Id})\widehat{f} = -\mathit{Id}Uf = M_{-\mathit{Id}}Uf.$$

Tedy $Tf = U^{-1}M_{-\mathit{Id}}Uf$.

Nechť nyní $f \in \operatorname{Dom} T$. Pak zvolíme $f_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňující $f_n \to f$ a $Tf_n \to Tf$ v H. Pak $Uf_n \in \mathscr{S}_1 \subset \operatorname{Dom} M_{-\mathit{Id}}$ a

$$UTf = \lim_{n\to\infty} UTf_n = \lim_{n\to\infty} M_{-\mathit{Id}}Uf_n.$$

Tedy $Uf_n \to U_f$ a $M_{-\mathit{Id}}Uf_n \to UTf$, což díky uzavřenosti $M_{-\mathit{Id}}$ dává $Uf \in M_{-\mathit{Id}}$ a $M_{-\mathit{Id}}Uf = UTf$.

Je-li $f \in \operatorname{Dom} M_{-\mathit{Id}}$, nechť $f_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňují $f_n \to f$ a $M_{-\mathit{Id}}f_n \to M_{-Id}f$ v H. Pak $U^{-1}f_n \in \mathscr{S}_1 \subset \operatorname{Dom} T$ a

$$U^{-1}M_{-\mathit{Id}}f = \lim_{n\to\infty} U^{-1}M_{-\mathit{Id}}f_n = \lim_{n\to\infty} TU^{-1}f_n.$$

Tedy $U^{-1}f_n \to U^{-1}f$, což z uzavřenosti T implikuje $U^{-1}f \in \operatorname{Dom} T$ a $TU^{-1}f = U^{-1}M_{-\mathit{Id}}f$. Tím je důkaz (a) dokončen.

(b) Přímočaře se ověří, že Plancherelova transformace U poslouží k unitární ekvivalenci $S = T \circ T$ a $M_{\mathit{Id}^2} = M_{-\mathit{Id}} \circ M_{-\mathit{Id}}$. Z toho pak plyne informace o $\sigma(S)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(S)$.

□

PŘÍKLAD 15. Uvažujme úlohu $-f'' = g$, kde $g \in H = L_2([0,1])$ a f hledáme v prostoru $\{h \in H \cap \mathrm{AC}([0,1]);\ h' \in \mathrm{AC}([0,1]), h'' \in H, h'(0) = h'(1) = 0\}$. Pak úloha má řešení právě tehdy, když $g \in \{1\}^\perp$. V tom případě pak existuje právě jedno řešení f splňující $f \in \{1\}^\perp$.

DŮKAZ. Pro $g \in H$ označme f dvakrát zintegrovanou funkci g, tj. $f(x) = \int_0^x \left(\int_0^y -g(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}y$, $x \in [0,1]$. Pak $f, f' \in \mathrm{AC}([0,1])$, $f'' = -g \in H$ a $f'(0) = \int_0^0 -g = 0$. Pokud $g \in \{1\}^\perp$, pak $f'(1) = \int_0^1 -g = 0$ a nalezli jsme požadované řešení. Obráceně, pokud máme řešení f, pak $\int_0^1 -g = \int_0^1 f'' = f'(1) - f'(0) = 0$, tj. $g \in \{1\}^\perp$.

Pokud od funkce f odečteme $\int_0^1 f$, je funkce $f - \int_0^1 f$ řešením naší úlohy a přitom je kolmá na 1.

Mějme nyní dvě řešení f_1, f_2 naší úlohy splňující $f_1, f_2 \in \{1\}^\perp$. Pak $(f_1-f_2)'' = 0$, a tedy $(f_1-f_2)(x) = ax+b$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{C}$. Protože $0 = (f_1-f_2)'(0) = a$, je $f_1 - f_2 = b$. Jelikož však $0 = \int_0^1 (f_1 - f_2) = b$, jsou si řešení f_1, f_2 rovna.

□

PŘÍKLAD 16. Nechť $H = \ell_2$ a $\operatorname{Dom} T = \{x \in H;\ \{nx_n\} \in \ell_2, \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$ a $Tx = \{nx_n\}$.

(a) Operátor T je hustě definovaný a uzavřený.
(b) Určeme $\sigma(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a $T^\star$.

DŮKAZ. (a) Nechť M_{Id} značí multiplikátor na $\operatorname{Dom} M_{\mathit{Id}} = \{x \in H;\ \{nx_n\} \in H\} \subset H$. Pak $T = M_{\mathit{Id}}$ na $\operatorname{Dom} T$. Nechť $x \in \operatorname{Dom} M_{\mathit{Id}}$. Pak

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n| = \sum_{n=1}^\infty |nx_n|\frac{1}{n} \le \|\{nx_n\}\|_H \|\{n^{-1}\}\|_H^2 < +\infty,$$

takže $\operatorname{Dom} T$ je dobře definovaný podprostor H. Je navíc hustý, neboť máme-li $x = (x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \in c_{00}$, položme $s = \sum_{n=1}^k x_n$ a $y_m = (x_1, \dots, x_k, \underbrace{-\frac{s}{m}, \dots, -\frac{s}{m}}_{m-\text{krát}}, 0, 0, \dots)$. Pak $y_m \in \operatorname{Dom} T$ a

$$\|x - y_m\|_{\ell_2}^2 = m|\frac{s}{m}|^2 = \frac{|s|^2}{m}.$$

Tedy $\operatorname{Dom} T$ je hustý v c_{00}, a tedy i v H.

Ukažme nyní uzavřenost T. Nechť $\{x^k\} \subset \operatorname{Dom} T$ a $x, y \in H$ splňují $x^k \to x$ a $Tx^k \to y$. Vzhledem k uzavřenosti M_{Id} máme $x \in \operatorname{Dom} M_{Id}$ a $M_{Id}x = y$. Zbývá jen ověřit $x \in \operatorname{Dom} T$. To však plyne z odhadu

$$|\sum_{n=1}^{\infty} x_n| = |\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_n^k)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|nx_n - nx_n^k|\frac{1}{n} \leq \|nx_n - nx_n^k\|_H \|\{n^{-1}\}\|_H \to 0.$$

(b) Nechť $y = (1, 0, 0, \dots)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pak rovnice $(\lambda I - T)x = y$, $x \in \operatorname{Dom} T$ nemá řešení, neboť jediný vektor připadající do úvahy je $x = (\frac{1}{\lambda - 1}, 0, 0, \dots)$ a ten nesplňuje podmínku $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$. Tedy $\mathbb{C} \setminus \{1\} \subset \sigma(T)$, což dává $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

Pro určení $T^\star$ definujeme $L\colon \operatorname{Dom} L \to \mathbb{C}$ jako $Ly = \lim_{n\to\infty} ny_n$, kde $\operatorname{Dom} L = \{y \in H;\ \lim_{n\to\infty} ny_n \in \mathbb{C}\}$. Pak

$$\operatorname{Dom} T^\star = \{y \in \operatorname{Dom} L;\ \{ny_n - Ly\} \in H\} \quad \text{a} \quad T^\star y = \{ny_n - Ly\}.$$

Vskutku, je-li $z \in \{y \in \operatorname{Dom} L;\ \{ny_n - Ly\} \in H\}$, pak pro $x \in \operatorname{Dom} T$ máme

$$\langle Tx, z\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n\overline{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{(nz_n - Lz)}.$$

Tedy $z \in \operatorname{Dom} T^\star$ a $T^\star z = \{nz_n - Lz\}$.

Obráceně, je-li $z \in \operatorname{Dom} T^\star$ a $y = T^\star z \in H$, pak pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ platí

$$\langle Tx, z\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n\overline{z_n} = \langle x, T^\star z\rangle = \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}.$$

Dosadíme za x vektor $e_1 - e_n$ a dostaneme

$$\overline{z_1} - n\overline{z_n} = \overline{y_1} - \overline{y_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

neboli

$$nz_n = z_1 - y_1 + y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $Lz = \lim_{n\to\infty} nz_n = z_1 - y_1 \in \mathbb{C}$ a $\{nz_n - Lz\} = \{y_n\} \in H$. Tedy $z \in \{y \in \operatorname{Dom} L;\ \{ny_n - Ly\} \in H\}$.

□

PŘÍKLAD 17. Nechť $H = L_2([0, \infty))$, $\operatorname{Dom} T_1 = \{f \in H;\ f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty)), f' \in H\}$ a $\operatorname{Dom} T_2 = \{f \in \operatorname{Dom} T_1;\ f(0) = 0\}$. Nechť $T_k f = if'$, $k = 1, 2$ na svých definičních oborech.

(a) Operátory T_1, T_2 jsou hustě definované a uzavřené.
(b) Platí $T_2^\star = T_1$.
(c) Platí $\sigma_{\mathrm{p}}(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda < 0\}$ a $\sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$.
(d) Platí $\sigma_{\mathrm{p}}(T_2) = \emptyset$ a $\sigma(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$.

DŮKAZ. (a) Jelikož $\mathscr{D}((0, +\infty)) \subset \operatorname{Dom} T_1 \subset \operatorname{Dom} T_2$, jsou oba operátory hustě definované. Nechť $\{f_n\} \subset \operatorname{Dom} T_1$ splňují $f_n \to f$ a $Tf_n \to g$ pro nějakou $g \in H$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f_n \to f$ skoro všude. Vybereme $x_0 \in [0, +\infty)$ splňující $f_n(x_0) \to f(x_0)$ a položíme $G(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{g}{i}$, $x \in [0, +\infty)$. Pak $G \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty))$ a pro $n, m \in \mathbb{N}$ a $R > x_0$ platí

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_0) - (f_m(x) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\
&\leq |\int_{x_0}^{x} |f_n' - f_m'|| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\
&\leq \sqrt{\int_0^R |f_n' - f_m'|^2}\sqrt{\int_0^R 1^2} + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\
&\leq \sqrt{R}\|f_n' - f_m'\| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|, \quad x \in [0, R].
\end{aligned}$$

Tedy $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $[0,+\infty)$, což implikuje spojitost f. Dále platí pro $R > x_0$ a $x \in [0,R]$ vztah

$$|f(x)-G(x)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)-\int_{x_0}^{x}\frac{g}{i}| \leq$$
$$\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|+|\int_{x_0}^{x}(f_n'-\frac{g}{i})| \leq$$
$$\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|+\sqrt{R}\|if_n'-g\|_H.$$

Tedy $f = G \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ a $f' = G' = \frac{g}{i}$, tj. $T_1 f = g$. Proto je T_1 uzavřený. Podobně bychom dokázali uzavřenost T_2.

(b) Ukážeme, že $f \in \mathrm{Dom}\, T_1$ splňuje $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Platí totiž $g = f\overline{f} = |f|^2 \in L_1([0,+\infty))$ a $g' = f'\overline{f}+f\overline{f'} = 2\,\mathrm{Re}(f'\overline{f} \in L_1([0,+\infty))$ z Hölderovy nerovnosti. Dle Lemmatu FA.5.22 je $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, a tedy i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Nechť nyní $g \in \mathrm{Dom}\, T_1$ a $f \in \mathrm{Dom}\, T_2$. Pak

$$\langle T_2 f, g\rangle = \int_0^{+\infty} if'\overline{g} = [if\overline{g}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f\overline{ig'} = \langle f, T_1 g\rangle.$$

Tedy $g \in \mathrm{Dom}\, T_2^\star$ a $T_2^\star g = T_1 g$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $g \in \mathrm{Dom}\, T_2^\star$ a označme $h = T_2^\star g$. Nechť $H(x) = \int_0^x \frac{h}{i}$, $x \in [0,+\infty)$. Pak $H \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ a pro $f \in \mathscr{D}((0,+\infty))$ platí

$$\int_0^{+\infty} if'\overline{g} = \langle T_2 f, g\rangle = \langle f, T_2^\star g\rangle = \langle f, h\rangle = \int_0^{+\infty} f\overline{h} = \int_0^{+\infty} f'\overline{H},$$

tj.

$$\int_0^{+\infty} f'(\overline{H+ig}) = 0, \quad f \in \mathscr{D}((0,+\infty)).$$

Jelikož $g, H \in L_1^{\mathrm{loc}}((0,+\infty))$, je distribuce $\Lambda_{\overline{H+ig}} \in (\mathscr{D}((0,+\infty))^*$ dobře definovaná a dle předešlé rovnosti je její distributivní derivace rovná 0. To ale znamená, že existuje $c \in \mathbb{C}$ splňující $H + ig = c$. Tedy $g = \frac{c-H}{i} \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ a $g' = -\frac{h}{i} \in H$. Proto je $g \in \mathrm{Dom}\, T_1$ a $T_2^\star g = T_1 g = ig'$.

(c) Pro určení bodového spektra řešíme rovnici $\lambda f - if' = 0$, kde $f \in \mathrm{Dom}\, T_1$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Jejím řešením je funkce $f(t) = ce^{\frac{\lambda}{i}t} = ce^{-i\lambda t}$. Pokud $c \neq 0$, je $f \in \mathrm{Dom}\, T_1$, právě když $\mathrm{Re}(-i\lambda) = \mathrm{Im}\,\lambda < 0$. Tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,\lambda < 0\}$.

Nechť nyní $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ je spolu s pravou stranou $g \in H$ dáno a řešíme rovnici $\lambda f - if' = g$. Pišme $\lambda = a + ib$, tj. $\mathrm{Im}\,\lambda = b > 0$. Naši rovnici přepíšeme do tvaru $i\lambda f + f' = ig$ a Přenásobíme ji integračním faktorem $e^{i\lambda t}$ a obdržíme $(e^{i\lambda t}f(t))' = ig(t)e^{i\lambda t}$, takže řešení je tvaru

$$f(x) = e^{-i\lambda x}\left(c + i\int_0^x g(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right), \quad x \in [0,+\infty).$$

Funkce $g(t)$ a $e^{i\lambda t}$ jsou v H, takže $g(t)e^{i\lambda t} \in L_1([0,+\infty))$. Jelikož $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, musí být $c = -i\int_0^{+\infty} g(t)e^{i\lambda t}$. Tedy

$$f(x) = ie^{-i\lambda x}\left(\int_0^x g(t)e^{i\lambda t} - \int_0^{+\infty} g(t)e^{i\lambda t}\right) = -ie^{-i\lambda x}\int_x^{+\infty} g(t)e^{i\lambda t}.$$

Zbývá ověřit, že $f, f' \in H$. Jelikož však $f' = ig - i\lambda f$, stačí dokázat $f \in H$. Máme však

$$|f(x)|^2 \leq e^{2bx}\left(\int_x^{+\infty} |g(t)|e^{-\frac{b}{2}t}e^{-\frac{b}{2}t}\,\mathrm{d}t\right) \leq$$
$$\leq e^{2bx}\int_x^{+\infty} |g(t)|^2 e^{-bt}\int_x^{+\infty} e^{-bt} =$$
$$= \frac{1}{b}e^{bx}\int_x^{+\infty} |g(t)|^2 e^{-bt},$$

takže
$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} e^{-bt} |g(t)|^2 \left(\int_0^t e^{bx} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{b^2} \int_0^{+\infty} |g(t)|^2 (1 - e^{-bt}) \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{b^2} \|g\|_H^2 < +\infty.$$
Tedy $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda > 0\} \subset \rho(T_1)$. V kombinaci se předešlým výsledkem tak dostáváme $\sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$.

(d) Pro určení $\sigma_{\mathrm{p}}(T_2)$ řešíme rovnici $\lambda f - if' = 0$, $f \in \operatorname{Dom} T_2$. Jediným kandidátem na řešení je funkce $f(t) = ce^{-i\lambda t}$, která však vzhledem k počáteční podmínce musí být nulová. Tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T_2) = \emptyset$.

Pro $\lambda \in \mathbb{C}$ a $g \in H$ nyní řešíme rovnici $\lambda f - if' = g$. Jako výše obržíme řešení ve tvaru
$$f(x) = e^{-i\lambda x} \left(c + i \int_0^x g(t) e^{i\lambda t} \,\mathrm{d}t \right), \quad x \in [0, +\infty).$$
Jelikož $f(0) = 0$, máme $f(x) = e^{-i\lambda x} i \int_0^x g(t) e^{i\lambda t} \,\mathrm{d}t$. Pokud $\lambda = a + ib$ a $\operatorname{Re}(-i\lambda) = \operatorname{Im} \lambda = b < 0$, $f \in H$. Vskutku, máme
$$|f(x)|^2 \left(\int_0^x e^{\frac{b}{2}(x-t)} e^{\frac{b}{2}(x-t)} |g(t)| \right)^2 \leq$$
$$\leq \left(\int_0^x e^{b(x-t)} \,\mathrm{d}t \right) \left(\int_0^x e^{b(x-t)} |(g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)$$
$$\leq \frac{1}{-b} \int_0^x e^{b(x-t)} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t,$$
takže
$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{-b} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x e^{b(x-t)} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{-b} \int_0^{+\infty} |g(t)|^2 \left(\int_t^{+\infty} e^{b(x-t)} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{(-b)^2} \int_0^{+\infty} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty.$$
Tedy $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda < 0\} \subset \rho(T_2)$.

Pokud $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ splňuje $\operatorname{Im} \lambda = b \geq 0$, uvažujme funkci $g = \chi_{(0,c)}$, kde $c \in (0, +\infty)$ je zvoleno tak, aby $e^{i\lambda c} - 1 \neq 0$. Pak pro $x \geq c$ je řešení tvaru
$$f(x) = ie^{-i\lambda x} \int_0^c e^{i\lambda t} \,\mathrm{d}t = ie^{-i\lambda x} \left[\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_{t=0}^c = \frac{e^{-i\lambda x}}{\lambda} \left(e^{i\lambda c} - 1 \right).$$
To však zjevně není prvek H. Proto $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\} \subset \sigma(T_2)$. Tedy $\sigma(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$.

□

2. Cayleyova transformace

PŘÍKLAD 18. Nechť T je symetrický uzavřený operátor v komplexním Hilbertově prostoru H.

(1) Pokud $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ splňuje $\mu \in \rho(T)$, je T hustě definovaný.
(2) Pokud $\mu \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Im} \mu > 0$ leží v $\rho(T)$, je $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda > 0\} \subset \rho(T)$.
(3) Pokud $\mu \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Im} \mu < 0$ leží v $\rho(T)$, je $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda < 0\} \subset \rho(T)$.
(4) Pokud T není maximálně symetrický, je $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in (\operatorname{Dom} T)^\perp$. Pak existuje $y \in \operatorname{Dom} T$ splňující $(\lambda I - T)y = x$. Pak máme
$$0 = \langle x, y \rangle = \langle (\lambda I - T)y, y \rangle = \lambda \|y\|^2 - \langle Ty, y \rangle.$$

Tedy

$$0 = \operatorname{Im}\big(\lambda\|y\|^2 - \langle Ty, y\rangle\big) = \operatorname{Im}(\lambda\|y\|^2),$$

takže y, a potažmo x jsou nulové. Proto $\overline{\operatorname{Dom} T} = H$.

(b) Nechť $R(\mu) = (\mu I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ existuje pro $\mu \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Im}\mu > 0$. Dle důkazu Lemmatu FA.12.38(c) máme $\|R(\mu)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Im}\mu}$. Jelikož

$$(\lambda I - T)R(\mu) = (\mu I - T + (\lambda - \mu)I)R(\mu) = I + (\lambda - \mu)R(\mu).$$

Pokud $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\operatorname{Im}\mu}$, je $I + (\lambda - \mu)R(\mu)$ invertovatelný operátor. Označme $S = (I + (\lambda - \mu)R(\mu))^{-1}$. Pak máme, že $\lambda I - T$ je surjektivní. Vskutku, je-li $y \in H$ dáno, element $x = R(\mu)S^{-1}y$ splňuje $(\lambda I - T)x = (\lambda I - T)R(\mu)S^{-1}y = SS^{-1}y = y$. Dle Lemmatu FA.12.38(c) je tak $\lambda \in \rho(T)$.

Obdrželi jsme tak informaci, že $\rho(T)$ obsauje s každým prvkem μ s imaginární částí větší než nula otevřený kruh o středu μ a polomětu $\frac{1}{\operatorname{Im}\mu}$. Odtud ale snadno indukcí dostaneme, že celá polopřímka $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ leží v $\rho(T)$. Opětovnou aplikací pozorování pak odvodíme, že celá horní polorovina leží v $\rho(T)$.

(c) Je zcela analogické (b).

(d) Předpokládejme, že $\lambda \in \rho(T)$. Pokud $\lambda \in \mathbb{R}$, je T samoadjungovaný dle Příkladu 7 (T je hustě definován dle (a) a otevřenosti $\rho(T)$), a tedy maximálně symetrický (Tvrzení FA.12.35). To je ovšem spor.

Pokud $\lambda \in \rho(T)$ splňuje $\operatorname{Im}\lambda > 0$, je $i \in \rho(T)$ dle (b). Pak však index defektu $n_-(T) = 0$, takže T je maximálně symetrický dle Věty FA.12.48 a máme opět spor. Podobně odvodíme spor pro případ $\lambda \in \rho(T)$ s $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Tedy $\rho(T) = \emptyset$.

□

PŘÍKLAD 19. Nechť H je prostor všech holomorfních funkcí $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ na otevřeném jednotkovém kruhu v $\mathbb{C}$, které splňují $\|f\|_H^2 = \sum -n = 0^{\infty}|c_n|^2 < +\infty$.

(a) Se skalárním součinem $\langle f, g\rangle_H = \langle \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n\rangle_H = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{d_n}$ je H Hilbertův prostor, který je izometrický ℓ_2 pomocí zobrazení $I\colon \ell_2 \to H$ definovaného jako $I\{c_n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in U(0,1)$.

(b) Operátor $Uf(z) = zf(z)$ je Cayleyovou transformací uzavřeného symetrického operátoru T, který je vyjádřen vzorcem $Tf(z) = i\frac{1+z}{1-z}f(z)$. Indexy defektu T jsou 0 a 1.

(c) Operátor $Uf(z) = zf(z^2)$ je Cayleyovou transformací uzavřeného symetrického operátoru T, který má indexy defektu 0 a ∞.

DŮKAZ. (a) Zjevně je $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ skalární součin na H (koeficienty $\{c_n\}$ jsou nulové právě tehdy, když $f = 0$). Dále je $I\colon \ell_2 \to H$ dobře definované, neboť pro $\{c_n\} \in \ell_2$ dává odhad

$$|\sum_{n=0}^{k} c_n z^n - \sum_{n=0}^{j} c_n z^n| \leq \sum_{n=k+1}^{j} |c_n||z^n| \leq \left(\sum_{n=k+1}^{j} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=k+1}^{j} q^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad k < j, |z| \leq q < 1,$$

lokálně stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ na $U(0,1)$. Tedy I je dobře definované zobrazení, které je evidentně surjetivní izometrie ℓ_2 na H. Tedy H je Hilbertův prostor.

(b) Operátor U je izometrie H do H, která splňuje $\operatorname{Ker}(I - U) = \{0\}$. (Vskutku, rovnice $f(z) = zf(z)$ je splněna pouze pro $f = 0$.) Operátor U je tak Cayleyovou transformací uzavřeného symetrického operátoru T, jehož vyjádření obdržíme ze vzorce

$$Tf = i(I + U)(I - U)^{-1}f = i\frac{1+z}{1-z}f(z), \quad f \in H.$$

Počítáme-li indexy defektu T, zajímají nás $\operatorname{Rng}(T + iI)$ a $\operatorname{Rng}(T - iI)$. První operátor je však surjektivní, neboť pro každé $g \in H$ je $f(z) = \frac{1-z}{2i}g(z)$ řešením rovnice $(T + iI)f = g$. Druhý operátor má $g \in \operatorname{Rng}(T - iI)$ právě tehdy, když $(T - iI)^{-1}g(z) = \frac{1-z}{2iz}g(z) \in H$. To však nastane, právě když $g(z) = 0$, neboli když $g \in \{1\}^{\perp}$. Tím jsme ověřili tvrzení pro indexy defektu T.

(c) Operátor $Uf(z) = zf(z^2)$ v souřadnicích zobrazuje $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots)$ na $(0, c_0, 0, c_1, 0, c_2, \dots)$. Z toho vidíme, že $I - U$ je prostý, takže je Cayleyovou transformací uzavřeného symetrického operátoru T. Jelikož $\operatorname{Dom} U = H$ a $\operatorname{codim} \operatorname{Rng} U = \infty$, je tvrzení o indexech defektu T ověřeno.

□

PŘÍKLAD 20. Nechť $I = [0,1]$, $H = L_2(I)$ a $\alpha \in \mathbb{T}$. Nechť

$$\operatorname{Dom} T_2 = \{f \in \mathrm{AC}(I);\ f' \in H, f(0) = \alpha f(1)\}, \operatorname{Dom} T_3 = \{f \in \mathrm{AC}(I);\ f' \in H, f(0) = f(1) = 0\}.$$

přičemž $T_k f = if'$, $f \in \operatorname{Dom} T_k$, $k = 2,3$ (vizte Příklad FA.12.41). Pak T_2 je samoadjungovaný a T_3 je symetrický uzavřený hustě definovaný. Určeme Cayleovu transformaci T_2 a T_3.

DŮKAZ. Jelikož je T_2 samoadjungovaný, je $\operatorname{Rng}(T_2 + iI) = H$. Operátor $(T_2 + iI)^{-1}$ určíme pomocí řešení rovnice $if' + if = g$, kde $g \in H$ je dáno. Pak

$$f(x) = ce^{-x} - ie^{-x} \int_0^x g(t)e^t \, \mathrm{d}t, \quad x \in I,$$

kde konstantu $c \in \mathbb{C}$ určíme z okrajové podmínky $f(0) = \alpha f(1)$. Vyjde nám

$$c = \frac{-i\alpha e^{-1} \int_0^1 g(t)e^t \, \mathrm{d}t}{1 - e^{-1}\alpha}.$$

Pak proi $x \in I$ máme

$$\mathcal{C}(T_2)(g)(x) = ((T_2 - iI)(T_2 + iI)^{-1} g)(x) = ((T_2 - iI)f)(x) = -2ice^{-x} - 2e^{-x} \int_0^x g(t)e^t \, \mathrm{d}t + g(x).$$

Při výpočtu Cayleyovy transformace T_3 budeme postupovat obdobně. Operátor T_3 je však pouze symetrický, takže musíme určit $\operatorname{Rng}(T_3 + iI)$. Jako výše řešíme rovnici $if' + if = g$, kde $g \in H$ je dáno a $f \in \operatorname{Dom} T_3$ hledáme. Vyjde nám opět

$$f(x) = ce^{-x} - ie^{-x} \int_0^x g(t)e^t \, \mathrm{d}t,$$

přičemž podmínka $f(0) = 0$ implikuje $c = 0$. Pak podmínka $f(1) = 0$ říká, že $\int_0^1 g(t)e^t \, \mathrm{d}t = 0$, tj. $g \in \{e^t\}^\perp$. Proto $\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T_3) = \operatorname{Rng}(T_3 + iI) = \{e^t\}^\perp$. Pro tato g pak máme

$$\mathcal{C}(T_3)(g)(x) = ((T_3 - iI)(T_3 + iI)^{-1} g)(x) = ((T_3 - iI)f)(x) = -2e^{-x} \int_0^x g(t)e^t \, \mathrm{d}t + g(x), \quad x \in I.$$

□

PŘÍKLAD 21. Nechť $H = L_2([0, +\infty))$, $\operatorname{Dom} T = \{f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty)) \cap H;\ f' \in H, f(0) = 0\}$ a $Tf = if'$, $f \in \operatorname{Dom} T$ (vizte Příklad 17). Pak T je symetrický uzavřený hustě definovaný. Určeme Cayleovu transformaci T.

DŮKAZ. Dle Příkladu 17 je T uzavřený hustě definovaný a symetrický. Navíc je $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$. Proto je operátor $T + iI = -((-iI) - T)$ invertovatelný. Řešením rovnice $if' + if = g$ s podmínkou $f \in \operatorname{Dom} T$ dostaneme

$$f(x) = -ie^{-x} \int_0^x g(t)e^t \, \mathrm{d}t, \quad x \in [0, +\infty).$$

Pak

$$(\mathcal{C}(T)g)(x) = ((T - iI)(T + iI)^{-1} g)(x) = (T - iI)f(x) = -2e^{-x} \int_0^x g(t)e^t \, \mathrm{d}t + g(x), \quad x \in [0, +\infty).$$

□

3. Samoadjungované operátory

PŘÍKLAD 22. Nechť T je samoadjungovaný operátor v komplexním Hilbertově prostoru H.

(a) Pak následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) T je nezáporný, tj. pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ platí $\langle Tx, x\rangle \geq 0$.

(ii) Platí $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

(b) Je-li T nezáporný, pak existuje právě jeden nezáporný samoadjungovaný S splňující $S^2 = T$.

DŮKAZ. (a)(i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $\lambda > 0$. Pak

$$\lambda\|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle \leq \langle (T+\lambda I)x, x\rangle \leq \|(T+\lambda I)x\|\|x\|, \quad x \in \operatorname{Dom} T.$$

Tedy $T+\lambda I$ je prostý. Dále platí $\overline{\operatorname{Rng}(T+\lambda I)} = (\operatorname{Ker}(T+\lambda I))^\perp = \{0\}^\perp = H$. Nechť $\{y_n\} \in \operatorname{Rng}(T+\lambda I)$ konverguje k $y \in H$. Pak $y_n = (T+\lambda I)x_n$ pro nějaké $x_n \in \operatorname{Dom} T$. Jelikož $\lambda\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|$, konverguje $\{x_n\}$ k nějakému $x \in H$. Pak ovšem $(x_n, (T+\lambda I)x_n) \to (x, y)$, takže $x \in \operatorname{Dom} T$ a $(T+\lambda I)x = y$. Tedy $\operatorname{Rng}(T+\lambda I) = H$. Proto $-\lambda \in \rho(T)$, takže $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť E je ortogonální rozklad identity na $\sigma(T)$, tj. $T = \int_{\sigma(T)} Id \,\mathrm{d}E$. Pak pro $x \in \operatorname{Dom} T$ máme

$$\langle Tx, x\rangle = \int_{[0,\infty)} Id \,\mathrm{d}E_{x,x} \geq 0.$$

(b) Vezměme ortogonální rozklad identity E příslušný T a uvažujme funkci $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0, \infty)$. Pak $S = \int f \,\mathrm{d}E$ splňuje

$$S^2 \subset \int f^2 \,\mathrm{d}E = \int Id \,\mathrm{d}E = T,$$

přičemž $\operatorname{Dom} S^2 = \operatorname{Dom} S \cap \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T$ (Vskutku, pokud $\int |\lambda|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < +\infty$, pak také $\int |\lambda| \,\mathrm{d}E_{x,x} < +\infty$.) Tedy $S^2 = T$. Navíc máme $S = \int Id \,\mathrm{d}F$, kde $F = f(E)$.

Nechť R je nezáporná samoadjungovaná operátor splňující $R^2 = T$. Nechť F' je jeho ortogonální rozklad identity. Položme $E' = g(F')$, kde $g(t) = t^2$, $t \in [0, \infty)$. Pak

$$T = R^2 = \int g \,\mathrm{d}F' = \int Id \,\mathrm{d}g(F') = \int Id \,\mathrm{d}E'.$$

Vzhledem k jednoznačnosti rozkladu E platí $E = E'$. Pak ovšem $F' = g^{-1}(E') = f(E') = f(E) = F$. Tedy $R = S$.

$\square$

PŘÍKLAD 23. Nechť T je hustě definovaný nezáporný syemtrický operátor v Hilbertově prostoru H.

(a) Nechť S je nezáporné samoadjungované rozšíření T dané Větou FA.12.71. Uvažujme $\operatorname{Dom} S^{\frac12}$ spolu se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle_{S^{\frac12}}$ daným jako

$$\langle x, y\rangle_{S^{\frac12}} = \langle x, y\rangle_H + \langle S^{\frac12}x, S^{\frac12}y\rangle_H, \quad x, y \in \operatorname{Dom} S^{\frac12}.$$

Pak $\operatorname{Dom} T \subset \operatorname{Dom} S^{\frac12}$ a je to hustý podprostor $(\operatorname{Dom} S^{\frac12}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{S^{\frac12}})$.

(b) Nechť R je samoadjungovaný nezáporný operátor v H rozšiřující T, který splňuje, že $\operatorname{Dom} T$ je $\|\cdot\|_{R^{\frac12}}$-hustý v $\operatorname{Dom} R^{\frac12}$. Pak $R = S$.

DŮKAZ. (a) Máme $\operatorname{Dom} T \subset \operatorname{Dom} S \subset \operatorname{Dom} S^{\frac12}$. Nechť $\operatorname{Dom} S^{\frac12} \setminus \overline{\operatorname{Dom} T}^{\langle\cdot,\cdot\rangle_{S^{\frac12}}} \neq \emptyset$. Jelikož je $(\operatorname{Dom} S^{\frac12}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{S^{\frac12}})$ Hilbertův prostor, lze pak najít jednotkový vektor $x \in \operatorname{Dom} S^{\frac12}$ splňující $0 = \langle x, y\rangle_{S^{\frac12}}$, $y \in \operatorname{Dom} T$. Pak však platí

$$0 = \langle x, y\rangle_{S^{\frac12}} = \langle x, y\rangle_H + \langle S^{\frac12}x, S^{\frac12}y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H + \langle Sx, y\rangle, \quad y \in \operatorname{Dom} S^{\frac12},$$

což vzhledem k hustotě $\operatorname{Dom} S^{\frac12}$ implikuje $Sx = -x$. tedy $-1 \in \sigma(S)$, což je spor s nezáporností S.

(b) Pro $x, y \in \operatorname{Dom} T$ máme

$$\langle x, y\rangle_{S^{\frac12}} = \langle x, y\rangle_H + \langle S^{\frac12}x, S^{\frac12}y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H + \langle Sx, y\rangle = \langle x, y\rangle_H + \langle Tx, y\rangle = \cdots = \langle x, y\rangle_{R^{\frac12}}.$$

Nechť $s \in \operatorname{Dom} S^{\frac{1}{2}}$. Pak existuje $\{x_n\} \subset \operatorname{Dom} T$ konvergující k s v normě $\|\cdot\|_{S^{\frac{1}{2}}}$. Pak tedy máme $x_n \to s$ a $S^{\frac{1}{2}} x_n \to S^{\frac{1}{2}} s$ v H. Dle předchozího je ovšem posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská i v normě $\|\cdot\|_{R^{\frac{1}{2}}}$. Tedy existuje $r \in \operatorname{Dom} R^{\frac{1}{2}}$ takové, že $x_n \to r$ a $R^{\frac{1}{2}} x_n \to R^{\frac{1}{2}} r$ v H. Tedy $r = s$ a $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$nevím , jak dokončit důkaz

$\square$

PŘÍKLAD 24. Nechť T je samoadjungovaný operátor v komplexním Hilbertově prostoru H a E je jeho rozklad jednotky na $\sigma(T)$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ uvažujme operátor $E_\lambda = E_{\sigma(T)\cap(-\infty,\lambda]}$. Pak se systému

$$\{E_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$$

říká spektrální rozklad T. Pak platí následující tvrzení.

(a) Operátory E_λ mají následující vlastnosti.
(a1) Každý operátor E_λ je ortogonální projekce na H.
(a2) Pro každé $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ platí $E_\mu E_\nu = E_\nu E_\mu = E_{\min\{\mu,\nu\}}$.
(a3) Platí $\lim_{\mu\to\lambda_+} E_\mu x = E_\lambda x$, $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(a4) Platí $\lim_{\mu\to\infty} E_\mu x = x$ a $\lim_{\mu\to-\infty} E_\mu x = 0$, $x \in H$.
(b) Platí následující výroky o číslu $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.
(b1) Číslo λ_0 leží v $\sigma_p(T)$, právě když existuje $x \in H$ splňující $\lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x \neq E_{\lambda_0} x$.
(b2) Pokud číslo λ_0 leží v $\sigma_p(T)$, pak $E(\{\lambda_0\}) = E_{\lambda_0} - E_\mu$ je ortogonální projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$.
(b3) Číslo λ_0 leží v $\rho(T)$ právě tehdy, když funkce $\lambda \mapsto E_\lambda$ je konstantní na nějakém okolí λ_0.

DŮKAZ. Nechť E je rozklad jednotky na $\sigma(T)$ příslušný T. Během důkazu budeme pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ psát pouze $E(A)$ místo $E(A \cap \sigma(T))$.

Tvrzení (a1) a (a2) plynou z definice.

(a3) Pokud $\mu > \lambda$ a $x \in H$, máme

$$\|E_\mu x - E_\lambda x\|^2 = \|E((\lambda,\mu])x\|^2 = \langle E((\lambda,\mu])x, x\rangle = E_{x,x}((\lambda,\mu]).$$

Jelikož poslední člen konverguje k 0 pro μ jdoucí k λ zprava, platí

$$\lim_{\mu\to\lambda_+} E_\mu x = E_\lambda x.$$

(a4) Jako výše máme

$$\|x - E_\mu x\|^2 = \|(I - E((-\infty,\mu]))\,x\|^2 = \|E((\mu,\infty))x\|^2 = E_{x,x}\left((\mu,\infty)\right),$$

což je výraz konvergující k 0 pro μ jdoucí do nekonečna.

Podobně

$$\|E_\mu x\|^2 = \|E((-\infty,\mu])x\|^2 = E_{x,x}((-\infty,\mu])$$

konverguje k 0 pro μ jdoucí do $-\infty$.

(b) Nejprve si povšimneme, že $\lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x$ existuje vždy. To plyne z odhadu

$$\|E((-\infty,\lambda_0))x - E_\lambda x\|^2 = \|E((\lambda,\lambda_0))x\|^2 = E_{x,x}\left((\lambda,\lambda_0)\right)$$

platného pro každé $\lambda < \lambda_0$. Z něho totiž plyne, že

$$\lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x = E((-\infty,\lambda_0))x.$$

Proto též máme

$$E_{\lambda_0} x = E((-\infty,\lambda_0])x = E((-\infty,\lambda_0))x + E(\{\lambda_0\})x = \lim_{\lambda\to\lambda_{0-}} E_\lambda x + E(\{\lambda_0\})x, \quad x \in H. \tag{1}$$

(b1) Nechť $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. Již víme, že $\operatorname{Rng} E(\{\lambda_0\}) = \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$.

Nyní snadno ověříme (b1) a (b2). Pokud $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, pak pro $x \in \operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$ nenulové je $E(\{\lambda_0\})x = x \neq 0$, což ale dle (1) znamená, že v (b1) neplatí na pravé straně rovnost.

Na druhou stranu, pokud v (b1) neplatí na pravé straně rovnost, tak díky (1) víme nenulovost $E(\{\lambda_0\})$. To však znamená nenulovost $\operatorname{Ker}(\lambda_0 I - T)$.

(b3) Nechť λ_0 leží v $\rho(T)$. Pak existuje interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ takový, že $\lambda_0 \subset (a,b) \subset [a,b] \subset \rho(T)$. Pak ovšem

$$E_a = E(\sigma(T) \cap (-\infty, a]) = E_\lambda = E(\sigma(T) \cap (-\infty, \lambda]) = E_b = E(\sigma(T) \cap (-\infty, b]), \quad \lambda \in (a,b),$$

tj. funkce $\lambda \mapsto E_\lambda$ je konstantní na (a,b).

Předpokládejme nyní, že $E_b = E_a$ pro nějaký interval (a,b) takový, že $a < \lambda_0 < b$. Pak $E((a,b]) = 0$. Položíme $f(t) = (\lambda_0 - t)^{-1} \chi_{\mathbb{R} \setminus (a,b]}(t)$, $t \in \sigma(T)$. Pak

$$g(t)(\lambda_0 - t) = \chi_{\mathbb{R} \setminus (a,b]} = (\lambda_0 - t) g(t), \quad t \in \sigma(T).$$

Pak máme

$$\left(\int_{\sigma(T)} g \,\mathrm{d}E \right) \left(\int_{\sigma(T)} (\lambda_0 - Id) \,\mathrm{d}E \right) \subset \int_{\sigma(T)} g(\lambda_0 - Id) \,\mathrm{d}E = \int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R} \setminus (a,b]} \,\mathrm{d}E = \int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R}} \,\mathrm{d}E = I,$$

přičemž

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom} \left(\int_{\sigma(T)} \mathrm{d}E \right) \left(\int_{\sigma(T)} \lambda_0 - Id) \,\mathrm{d}E \right) &\subset \mathrm{Dom} \left(\int_{\sigma(T)} g \,\mathrm{d}E \right) \cap \mathrm{Dom} \left(\int_{\sigma(T)} g(\lambda_0 - Id) \,\mathrm{d}E \right) \\ &= H \cap \mathrm{Dom}(\lambda_0 I - T) = \mathrm{Dom}\, T \end{aligned}$$

Tedy

$$\left(\int_{\sigma(T)} \mathrm{d}Eg \right) (\lambda_0 I - T) \subset I.$$

Podobně máme

$$I = \left(\int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R}} \,\mathrm{d}E \right) = \int_{\sigma(T)} \chi_{\mathbb{R} \setminus (a,b]} \,\mathrm{d}E = (\lambda_0 I - T) \left(\int_{\sigma(T)} g \,\mathrm{d}E \right).$$

Tedy je operátor $\int_{\sigma(T)} g \,\mathrm{d}E$ inverzí operátoru $\lambda_0 I - T$.

□

PŘÍKLAD 25. Nechť $I = [0,1]$ a $H = L_2(I)$.

(a) Nechť $\mathrm{Dom}\, A = \{f \in H;\ f, f' \in \mathrm{AC}(I), f'' \in H, f(0) = f(1) = 0\}$ a $Af = -f''$. Pak A je nezáporný samoadjungovaný operátor. Najděme jeho spektrální rozklad a $A^{\frac{1}{2}}$, přičemž $\mathrm{Dom}\, A^{\frac{1}{2}} = \{f \in H;\ f \in \mathrm{AC}(I), f' \in H, f(0) = f(1) = 0\}$.

(b) Nechť $\mathrm{Dom}\, B = \{f \in H;\ f, f' \in \mathrm{AC}(I), f'' \in H, f'(0) = f'(1) = 0\}$ a $Bf = -f''$. Pak B je nezáporný samoadjungovaný operátor. Najděme jeho spektrální rozklad a $B^{\frac{1}{2}}$, přičemž $\mathrm{Dom}\, B^{\frac{1}{2}} = \{f \in H;\ f \in \mathrm{AC}(I), f' \in H\}$.

DŮKAZ. (a) Jelikož $A = T_3^\star T_3$, kde T_3 je operátor z Příkladu FA.12.41, je A samoadjungovaný dle Věty FA.12.64. Navíc je A dle Příkladu 22 nezáporný, neboť pro $f \in \mathrm{Dom}\, A$ platí

$$\langle Af, f \rangle = \int_0^1 -f'' \overline{f} = [-f' \overline{f}] + \int_0^1 f' \overline{f'} = \int_0^1 |f'|^2 \geq 0.$$

Uvažujme tedy $\lambda \in [0, +\infty)$ a řešme úlohu $-f'' = Af = \lambda f$. Pak $f \in \mathrm{span}\{\cos(\sqrt{\lambda} t), \sin(\sqrt{\lambda} t)\}$, tj. $f(t) = a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t)$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{C}$. Avšak okrajové podmínky na operátor A dávají $0 = f(0) = a$ a $0 = f(1) = b \sin \sqrt{\lambda}$. Tedy $\lambda = k^2 \pi^2$, $k \in \mathbb{N}$ a příslušné vlastní jednotkové vektory jsou $e_k = \sqrt{2} \sin(k \pi t)$, $k \in \mathbb{N}$.

Položme $\mu \in \mathrm{Bf}(\mathbb{N})$ jako $\mu(k) = k^2 \pi^2$, $k \in \mathbb{N}$ a nechť M_μ je multiplikátor na ℓ_2 daný jako $M_\mu x = \mu(k) x(k) = k^2 \pi^2 x(k)$ pro ta $x \in \ell_2$, že $M_\mu x \in \ell_2$. Ukážeme, že zobrazení $U \colon H \to \ell_2$ zobrazující $f \in H$ na $\{\langle f, e_k \rangle\}_{k=1}^\infty$ je unitární a platí $A = U^{-1} M_\mu U$. Především si uvědomme, že $\{ek\}$ je ortonormální báze prostoru H.

Vskutku, $\{e_k\}$ je zjevně ortonormální systém. Je-li $f \in H$ kolmá na $\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, uvažujme funkci $\tilde{f} = \begin{cases} -f(-x), & x \in (-1,0), \\ f(x), & x \in (0,1). \end{cases}$ Jelikož je systém $\{\frac{1}{2}\} \cup \{\cos(k\pi t), \sin(k\pi t);\ k \in \mathbb{N}\}$ ortonormální bází

$L_2((-1,1))$, lze rozvinout $\tilde{f}$ podle této báze. Avšak funkce $\tilde{f}$ je lichá, takže všechny koeficienty vzhledem k $\{\frac{1}{2}\} \cup \{\cos(k\pi t), ;\ k \in \mathbb{N}\}$ jsou nulové. Dle předpokladu jsou však nulové i koeficienty vzhledem k systému $\{\sin(k\pi t);\ k \in \mathbb{N}\}$. Tedy $\tilde{f}$ a potažmo i f jsou nulové. Proto je $\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ báze v H a U je unitární operátor.

Nechť nyní $f \in \operatorname{Dom} A$. Ukážeme, že $UAf = M_\mu Uf$. Máme totiž pro $k \in \mathbb{N}$ vztahy

$$(UAf)(k) = \langle Af, e_k\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 -f''\sin(k\pi t) = \sqrt{2}\left([-f'(t)\sin(k\pi t)]_{t=0}^1 + k\pi\int_0^1 f'\cos(k\pi t)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left([f(t)\cos(k\pi t)]_{t=0}^1 + (k\pi)^2\int_0^1 f\sin(k\pi t)\right) = (k\pi)^2\langle f, e_k\rangle = (M_\mu Uf)(k)$$

Nechť nyní $x \in \operatorname{Dom} M_\mu$, tj. $\mu x \in \ell_2$. Položme $f(t) = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k(t) = U^{-1}x$. Pak $f(0) = f(1) = 0$. Dále je $f \in \operatorname{Dom} A$. Vskutku, pro $g = \sum_{k=1}^\infty x_k(\pi k)^2 e_k = U^{-1}M_\mu x \in H$ totiž máme následující informace. Funkce $f_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ konvergují k f a funkce $g_n = \sum_{k=1}^n x_k(\pi k)^2 e_k$ konvergují k g, Navíc $Af_n = -f_n'' = g_n$. Z uzavřenosti A tak plyne $f \in \operatorname{Dom} A$ a $Af = g$. Tedy dostáváme $AU^{-1}x = U^{-1}M_\mu x$, což v kombinaci s předešlým odstavcem dává rovnost $A = U^{-1}M_\mu U$.

Nyní již vidíme, že $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(M_\mu) = \sigma(M_\mu) = \{(k\pi)^2;\ k \in \mathbb{N}\}$ a operátor $A^{\frac{1}{2}}$ je dán jako

$$A^{\frac{1}{2}}f = U^{-1}M_{\sqrt{\mu}}Uf, \quad f \in \operatorname{Dom} A.$$

Zbývá ověřit, že $\operatorname{Dom} A^{\frac{1}{2}} = U(\{f \in H;\ f \in \mathrm{AC}(I), f' \in H, f(0) = f(1) = 0\})$. Uvažujme $f \in \operatorname{Dom} A^{\frac{1}{2}} = U^{-1}\operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$. Pak existuje $x \in \operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$ splňující $f = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$. Pak $f(0) = f(1) = 0$. Označme $f_k(t) = \sqrt{2}\cos(k\pi t)$, $t \in I$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak $\{f_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ tvoří ortonormální systém v H. Nechť $g = \sum_{k=1}^\infty x_k\pi k\cos(\pi kt) = \sum_{k=1}^\infty x_k\pi k f_k$. Pak $\|\sum_{k=n}^m x_k\pi k f_k\|^2 = \sum_{k=n}^m |x_k\pi k|^2$, $n < m$, takže $\sum_{k=1}^\infty x_k\pi k f_k$ konverguje v H, a g je tak dobře definováno. Označme ještě částečné součty $f_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ a $g_n = \sum_{k=1}^n x_k\pi k f_k$. Pak $f_n' = g_n$, $f_n \to f$ a $g_n \to g$. Z uzavřenosti operátoru derivace plyne $f \in \mathrm{AC}(I)$ a $f' = g \in H$. Tedy $f \in \{h \in H;\ h \in \mathrm{AC}(I), h' \in H, h(0) = h(1) = 0\}$.

Nechť nyní $f \in \{h \in H;\ h \in \mathrm{AC}(I), h' \in H, h(0) = h(1) = 0\}$. Chceme ukázat, že $Uf \in \operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$. Máme však pro $k \in \mathbb{N}$ rovnosti

$$Uf(k) = \langle f, e_k\rangle = \int_0^1 f\overline{e_k} = -\frac{1}{\pi k}[f\overline{f_k}]_{t=0}^1 + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 f'(t)\sqrt{2}\cos(\pi kt).$$

Tedy

$$(\pi k)Uf(k) = \langle f', f_k\rangle, \quad k \in \mathbb{N},$$

což implikuje

$$\sum_{k=1}^\infty |\pi kUf(k)|^2 \le \sum_{k=1}^\infty |\langle f', f_k\rangle|^2 < +\infty.$$

Tedy $Uf \in \operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$, což jsme chtěli dokázat.

(b) Uvažujme operátor $Bf = -f''$ pro $f \in \{h \in H;\ h, h' \in \mathrm{AC}(I), h'' \in H, h'(0) = h'(1) = 0\}$. Pak $B = T_1^\star T_1$, kde T_1 je operátor z Příkladu FA.12.41. Dle Věty FA.12.64 je tak B samoadjungovaný. Jelikož pro $f \in \operatorname{Dom} B$ platí

$$\langle Bf, f\rangle = \int_0^1 -f''\overline{f} = [-f'\overline{f}] + \int_0^1 f'\overline{f'} = \langle f', f'\rangle \ge 0,$$

je B nezáporný.

Nalezněme $\sigma(B)$. Jelikož $\sigma(B) \subset [0, +\infty)$, stačí uvažovat $\lambda \in [0, +\infty)$. Nechť tedy $\lambda \ge 0$ je dáno a řešíme rovnici $Bf = \lambda f$, $f \in \operatorname{Dom} B$. Pak $-f'' = \lambda f$, a tedy $f(t) = a\cos\sqrt{\lambda}t + b\sin\sqrt{\lambda}t$. Vzhledem k podmínce $f \in \operatorname{Dom} f$ musí platit

$$-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}1 + b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}1 = f'(1) = 0 = f'(0) = -a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}0 + b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}0 = b\sqrt{\lambda},$$

takže $b = 0$ a $\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tedy $\{(k\pi)^2;\ k \in \mathbb{N}_0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ s normalizovanými vlastními vektory $f_0 = \frac{1}{2}$ a $f_k = \sqrt{2}\cos(\pi kt)$, $k \in N$. Jako výše odvodíme, že systém $\{f_k;\ k \in \mathbb{N}_0\}$ je ortonormlní báze H.

Opět uvažujme unitární operátor $U\colon H \to \ell_2(\mathbb{N}_0)$ definovaný jako $Uf = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=0}^{\infty}$ a multiplikátor M_μ daný prvkem $\mu \in \mathrm{Bf}(\mathbb{N}_0)$, kde $\mu(k) = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Nechť nyní $f \in \operatorname{Dom} B$. Ukážeme, že $UBf = M_\mu Uf$. Máme totiž pro $k \in \mathbb{N}$ vztahy

$$\begin{aligned}(UBf)(k) &= \langle Bf, f_k\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 (-f''\cos(k\pi t)) = \\ &= \sqrt{2}\left([-f'(t)\cos(k\pi t)]_{t=0}^1 + k\pi\int_0^1 f'\sin(k\pi t)\right) = \\ &= \sqrt{2}\left([f(t)\sin(k\pi t)]_{t=0}^1 + (k\pi)^2\int_0^1 f\cos(k\pi t)\right) = (k\pi)^2\langle f, f_k\rangle = (M_\mu Uf)(k)\end{aligned}$$

a pro $k = 0$ podobně obdržíme

$$(UBf)(0) = \langle Bf, f_0\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 -f'' = -\frac{1}{2}(f'(1) - f'(0)) = 0 = (0\pi)^2\langle f, f_0\rangle = (M_\mu Uf)(0).$$

Nechť nyní $x \in \operatorname{Dom} M_\mu$, tj. $\mu x \in \ell_2$. Položme $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k(t) = U^{-1}x$. Pak je $f \in \operatorname{Dom} B$. Vskutku, pro $g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\pi k)^2 f_k = U^{-1}M_\mu x \in H$ totiž máme následující informace. Funkce $f_n = \sum_{k=0}^{n} x_k f_k$ konvergují k f a funkce $g_n = \sum_{k=0}^{n} x_k(\pi k)^2 f_k$ konvergují k g, Navíc $Bf_n = -f_n'' = g_n$. Z uzavřenosti B tak plyne $f \in \operatorname{Dom} B$ a $Bf = g$. Navíc nám vyjde

$$f' = -\sum_{k=0}^{\infty} x_k(\pi k)e_k = -\sum_{k=1}^{\infty} x_k(\pi k)e_k,$$

takže $f'(0) = f'(1) = 0$. Tedy $U^{-1}x \in \operatorname{Dom} B$ a dostáváme $BU^{-1}x = U^{-1}M_\mu x$, což v kombinaci s předešlým odstavcem dává rovnost $B = U^{-1}M_\mu U$.

Jako výše tak máme $\sigma(B) = \sigma_{\mathrm{p}}(B) = \sigma_{\mathrm{p}}(M_\mu) = \sigma(M_\mu) = \{(k\pi)^2;\ k \in \mathbb{N}_0\}$ a operátor $B^{\frac{1}{2}}$ je dán jako

$$B^{\frac{1}{2}}f = U^{-1}M_{\sqrt{\mu}}Uf, \quad f \in \operatorname{Dom} B.$$

Zbývá ověřit, že $\operatorname{Dom} B^{\frac{1}{2}} = U(\{f \in H;\ f \in \mathrm{AC}(I), f' \in H\})$. Uvažujme $f \in \operatorname{Dom} B^{\frac{1}{2}} = U^{-1}\operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$. Pak existuje $x \in \operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$ splňující $f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f_k$. Nechť $g = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\pi k\sin(\pi k t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\pi k e_k$. Pak $\|\sum_{k=n}^{m} x_k\pi k e_k\|^2 = \sum_{k=n}^{m}|x_k\pi k|^2$, $n < m$, takže $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\pi k e_k$ konverguje v H, a g je tak dobře definováno. Označme ještě částečné součty $f_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ a $g_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\pi k f_k$. Pak $f_n' = g_n$, $f_n \to f$ a $g_n \to g$. Z uzavřenosti operátoru derivace plyne $f \in \mathrm{AC}(I)$ a $f' = g \in H$. Tedy $f \in \{h \in H;\ h \in \mathrm{AC}(I), h' \in H\}$.

Nechť nyní $f \in \{h \in H;\ h \in \mathrm{AC}(I), h' \in H\}$. Chceme ukázat, že $Uf \in \operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$. Máme však pro $k \in \mathbb{N}$ rovnosti

$$Uf(k) = \langle f, f_k\rangle = \int_0^1 f\overline{f_k} = \frac{1}{\pi k}[f\overline{e_k}]_{t=0}^1 - \frac{1}{\pi k}\int_0^1 f'(t)\sqrt{2}\sin(\pi k t).$$

Tedy

$$(\pi k)Uf(k) = -\langle f', e_k\rangle, \quad k \in \mathbb{N},$$

což dává

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\pi k Uf(k)|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}|\langle f', e_k\rangle|^2 < +\infty.$$

Tedy $Uf \in \operatorname{Dom} M_{\sqrt{\mu}}$, což jsme chtěli dokázat.

$\square$

4. Normální operátory

PŘÍKLAD 26. Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v Hilbertově prostoru H splňující $T^\star T \subset TT^\star$. Pak T je normální.

DŮKAZ. Dle Věty FA.12.64 je $T^\star T$ samoadjungovaný operátor v H. Podobně $TT^\star = T^{\star\star}T^\star$ je samoadjungovaný. Máme-li však dva samoadjunogované operátory $A \subset B$, pak $B = B^\star \subset A^\star = A$, tedy jsou si rovny.

□

PŘÍKLAD 27. Nechť T je hustě definovaný operátor v komplexním Hilbertově prostoru H. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(i) T je uzavřený a $T^\star T = TT^\star$.
(ii) $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^\star$ a $\|Tx\| = \|T^\star x\|$ pro $x \in \operatorname{Dom} T$.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Máme $\operatorname{Dom} T^\star T = \operatorname{Dom} TT^\star$, což jsou dle Věty FA.12.64 samoadjungované operátory takové, že graf $T^\star T$ je hustý v grafu T a graf $TT^\star$ je hustý v grafu $T^\star$. Pro $x \in \operatorname{Dom} T^\star T$ máme

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^\star Tx, x\rangle = \langle TT^\star x, x\rangle = \langle T^\star x, T^\star x\rangle = \|T^\star x\|^2.$$

Nechť $x \in \operatorname{Dom} T$ je dáno. Pak existuje posloupnost $\{x_n\} \subset \operatorname{Dom} T^\star T$ splňující $x_n \to x$ a $Tx_n \to Tx$. Pak rovnost $\|T^\star x_n - T^\star x_m\| = \|Tx_n - Tx_m\|$ ukazuje, že $T^\star x_n \to z$ pro nějaké $z \in H$. Z uzavřenosti $T^\star$ máme $x \in \operatorname{Dom} T^\star$ a $T^\star x = z$. Proto $\operatorname{Dom} T \subset \operatorname{Dom} T^\star$ a $\|T^\star x\| = \lim_{n\to\infty}\|T^\star x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|Tx_n\| = \|Tx\|$.

Je-li $x \in \operatorname{Dom} T^\star$, nalezneme posloupnost $\{x_n\} \subset \operatorname{Dom} TT^\star$ splňující $x_n \to x$ a $T^\star x_n \to T^\star x$. Jako výše pak odvodíme existenci $z \in H$ splňujícího $Tx_n \to z$. Z uzavřenosti T máme $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx = z$. Proto $\operatorname{Dom} T^\star \subset \operatorname{Dom} T$.

(ii)⇒(i) Nejprve ověříme, že T je uzavřený. Nechť tedy $x_n \to x$ a $Tx_n \to y$ pro nějakou $\{x_n\} \subset \operatorname{Dom} T$. Pak rovnost $\|T^\star x_n - T^\star x_m\| = \|Tx_n - Tx_m\|$, $n, m \in \mathbb{N}$ ukazuje, že $\{T^\star x_n\}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní. Z uzavřenosti $T^\star$ však máme $x \in \operatorname{Dom} T^\star = \operatorname{Dom} T$ a $T^\star x_n \to T^\star x$. Pak rovnost $\|Tx_n - Tx\| = \|T^\star x_n - T^\star x\|$ dává $Tx_n \to Tx$. Proto $y = Tx$ a T je uzavřený.

Z polarizační identity máme rovnost

$$\langle Tx, Ty\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|Tx + i^k Ty\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|T^\star x + i^k T^\star y\|^2 = \langle T^\star x, T^\star y\rangle, \quad x, y \in \operatorname{Dom} T.$$

Ukážeme, že $\operatorname{Dom} T^\star T \subset \operatorname{Dom} TT^\star$. Nechť tedy $x \in \operatorname{Dom}(T^\star T)$ je dáno. Pak $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx \in \operatorname{Dom} T^\star$. Zobrazení $y \mapsto \langle Ty, Tx\rangle$ je tak spojité na $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^\star$, takž i zobrazení $y \mapsto \langle T^\star y, T^\star x\rangle$ je spojité na $\operatorname{Dom} T^\star$. Proto $T^\star x \in \operatorname{Dom} T^{\star\star} = \operatorname{Dom} T$. Tedy $x \in \operatorname{Dom} TT^\star$.

Pro $x \in \operatorname{Dom} T^\star T$ a $y \in \operatorname{Dom} T$ pak máme $\langle T^\star Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle T^\star x, T^\star y\rangle = \langle TT^\star x, y\rangle$, tj.

$$0 = \langle T^\star Tx - TT^\star x, y\rangle, \quad y \in \operatorname{Dom} T.$$

tedy $T^\star Tx = TT^\star x$ a $T^\star T \subset TT^\star$. Dle Příkladu 26 je T normální.

□

PŘÍKLAD 28. Nechť E je ortogonální rozklad jednotky v komplexním Hilbertově prostoru H a $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou borelovské. Pak platí následující tvrzení.

(a) Pokud $g \in L_\infty(E)$, pak $\left(\int g \,\mathrm{d}E\right)(\operatorname{Dom} \int f \,\mathrm{d}E) \subset \operatorname{Dom} \int f \,\mathrm{d}E$.
(b) Platí $\int f \,\mathrm{d}E = \int g \,\mathrm{d}E$ právě tehdy, když $f = g$ E-skoro všude.

DŮKAZ. (a) Podle Věty FA.12.54(b) je $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(fg)$. Nechť $x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)$. Pak $\int |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < +\infty$, takže též $\int |fg|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < +\infty$. Tedy $x \in \operatorname{Dom} \Phi(fg) = \operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g)$, takže $\Phi(g)x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)$.

(b) Pokud $N = \{t \in \mathbb{C};\ f(t) \neq g(t)\}$ je E-nulová, pak i všechny míry $E_{x,y}$ měří tuto množinu 0. Tedy rovnost

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{\mathbb{C}} |g|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}, \quad x \in H$$

dává rovnost definičních oborů operátorů $\int f\,\mathrm{d}E$ a $\int g\,\mathrm{d}E$. Jelikož

$$\langle(\int f\,\mathrm{d}E)x,y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f\,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\mathbb{C}} g\,\mathrm{d}E_{x,y} = \langle(\int g\,\mathrm{d}E)x,y\rangle, \quad x,y\in \mathrm{Dom}(\int f\,\mathrm{d}E),$$

hustota $\mathrm{Dom}(\int f\,\mathrm{d}E)$ implikuje rovnost $(\int f\,\mathrm{d}E)x = (\int g\,\mathrm{d}E)x$, $x\in\mathrm{Dom}(\int f\,\mathrm{d}E)$.

Nechť nyní $\int f\,\mathrm{d}E = \int g\,\mathrm{d}E$ a $N_n = \{t\in\mathbb{C};\ \frac{1}{n}\le |f(t)-g(t)|, |f(t)|+|g(t)|\le n\}$, kde $n\in\mathbb{N}$. Pokud $E(N_n)\neq 0$, lze vybrat $x\in\mathrm{Rng}\,E(N_\eta)\cap S_H$. Z důkazu Věty FA.12.52 a Věty FA.12.54(a) plyne, že

$$x\in\mathrm{Dom}\int f\,\mathrm{d}E\cap\mathrm{Dom}\int g\,\mathrm{d}E = \mathrm{Dom}\in f\,\mathrm{d}E = \mathrm{Dom}(\int f\,\mathrm{d}E - \int g\,\mathrm{d}E)\subset\mathrm{Dom}(\int (f-g)\,\mathrm{d}E).$$

Pak ovšem máme

$$\begin{aligned}0 &= \|(\int f\,\mathrm{d}E - \int g\,\mathrm{d}E)x\|^2 = \|(\int (f-g)\,\mathrm{d}E)x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f-g|^2\,\mathrm{d}E_{x,x}\ge\\ &\ge \int_{N_n} |f-g|^2\,\mathrm{d}E_{x,x}\ge \frac{1}{n^2}E_{x,x}(N_n) = \frac{1}{n^2}\langle E(N_n)x,x\rangle = \frac{1}{n^2}\langle x,x\rangle = \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

tedy zřejmý spor. Proto $E(N_n)=0$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Avšak $\bigcup_{n=1}^\infty N_n = \{t\in\mathbb{C};\ f(t)\neq g(t)\}$, takže $f=g$ E-skoro všude.

□

PŘÍKLAD 29. Nechť T je normální operátor v komplexním Hilbertově prostoru H. Pak existuje nezáporný samoadjungovaný P v H a unitární $U\in\mathcal{L}(H)$ splňující $T=UP=PU$. Navíc platí $\mathrm{Dom}\,P=\mathrm{Dom}\,T$.

DŮKAZ. Nechť E je ortogonální rozklad identity příslušný T, tj. $T=\int_{\sigma(T)} \mathit{Id}\,\mathrm{d}E$. Položme $f(t)=|t|$ a $g(t)=\begin{cases}\frac{t}{|t|}, & t\neq 0,\\ 1, & t=0.\end{cases}$. Pak $fg=gf=\mathit{Id}$ na $\sigma(T)$, f je reálná nezáporná a g má hodnoty v $\mathbb{T}$. Proto je $P=\int f\,\mathrm{d}E$ nezáporný samoadjungovaný operátor a $U=\int g\,\mathrm{d}E$ je unitární. Jelikož

$$\mathrm{Dom}\,UP = \mathrm{Dom}\,P\cap\mathrm{Dom}(\int gf\,\mathrm{d}E) = \mathrm{Dom}\,P = \{x\in H;\ \int |\mathit{Id}|^2\,\mathrm{d}E_{x,x}<+\infty\} = \mathrm{Dom}\,T$$

a

$$\mathrm{Dom}\,PU = \mathrm{Dom}\,U\cap\mathrm{Dom}(\int fg\,\mathrm{d}E) = \mathrm{Dom}(\int fg\,\mathrm{d}E) = \mathrm{Dom}(\int \mathit{Id}\,\mathrm{d}E) = \mathrm{Dom}\,T,$$

máme

$$UP = PU = T.$$

□

PŘÍKLAD 30. Nechť T je normální operátor v komplexním Hilbertově prostoru H. Pak existuje prostor (Ω,μ) s mírou mající stejnou vlastnost jako v Příkladu FA.10.65 a unitární operátor $U\colon H\to L_2(\mu)$ takový, že $T=U^\star M_g U$, kde $g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ je μ-měřitelná a M_g je multiplikátor z Příkladu FA.12.69.

DŮKAZ. Uvažujme omezenou transformaci $B=\mathcal{B}(T)$, což je omezený normální operátor na H (vizte Větu FA.12.67. Ten je unitárně ekvivalentní s operátorem M_h definovaným na prostoru $L_2(\mu)$, kde (Ω,μ) má stejnou vlastnost jako v Příkladu FA.10.65. Nechť U je ona unitární ekvivalence mezi B a M_h. Jelikož $\|B\|\le 1$, je $\mathrm{ess}\,\mathrm{Rng}\,h\subset B(0,1)\subset\mathbb{C}$. Navíc však víme, že $I-B^\star B=(I+T^\star T)^{-1}$, a tedy $I-B^\star B$ je prostý. Proto je i operátor $M_{1-\overline{h}h}$ odpovídající $I-B^\star B$ prostý, takže $(1-|h|^2)>0$ μ-skoro všude. Můžeme tak definovat funkci μ-měřitelnou funkci $g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ jako

$$g(\lambda)=\frac{h(\lambda)}{(1-|h(\lambda)|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pak T je pomocí U ekvivalentní s M_g. Vskutku, označme $S=U^{-1}M_gU$. Pak S je normální operátor v H a jeho omezená transformace $\mathcal{B}(S)$ je rovna

$$\mathcal{B}(S)=U^{-1}\mathcal{B}(M_g)U=U^{-1}M_hU=\mathcal{B}(T),$$

takže $S = T$ dle Věty FA.12.67(b).

$\square$

PŘÍKLAD 31. Nechť $H = \ell_2(\mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $\mu\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Uvažujme operátor

$$Tx = T\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{\mu(n+k)x(n+k)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad x \in \operatorname{Dom} T = \{y \in H;\ \{\mu(n+k)y(n+k)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in H\}.$$

Označme dále M_μ multiplikátor na H daný funkcí μ a $Ux = U\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{x(n+k)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(a) Operátor T je uzavřený hustě definovaný, $T = UM_\mu$ a U je unitární operátor.
(b) Platí $T^\star = M_{\overline{\mu}}U^{-1}$.
(c) T je normální, právě když $|\mu(n+k)| = |\mu(n)|$, $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. (a) Zjevně je U unitární operátor s inverzí $U^\star\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = U^{-1}\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{x(n-k)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a M_μ je uzavřený hustě definovaný operátor. Dle Tvrzení FA.12.16(b) je $T = UM_\mu$ uzavřený a hustě definovaný, neboť $c_{00} \subset \operatorname{Dom} T$.

(b) Rovnost $T^\star = M_{\overline{\mu}}U^\star$ plyne z Tvrzení FA.12.27(c).

(c) Máme $T^\star T = M_{\overline{\mu}}U^\star UM_\mu = M_{\overline{\mu}}M_\mu = M_{|\mu|^2}$ a $TT^\star = UM_\mu M_{\overline{\mu}}U^\star = UM_{|\mu|^2}U^\star$. Tedy T je normální, právě když $M_{|\mu|^2} = UM_{|\mu|^2}U^\star$. To je však splněno právě tehdy, když $M_{|\mu|^2}U = UM_{|\mu|^2}$, neboli když $|\mu(n+k)|^2 = |\mu(n)|^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

5. Esenciálně samoadjungované operátory

PŘÍKLAD 32. Nechť T je symetrický operátor, který lze uzavřít. Pak $\overline{T}$ je též symetrický.

DŮKAZ. Nechť $x, y \in \operatorname{Dom} \overline{T}$. z definice $\overline{T}$ existují posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \operatorname{Dom} T$ takové, že $(x_n, Tx_n) \to (x, \overline{T}x)$ a $(y_n, Ty_n) \to (y, \overline{T}y)$. Pak ovšem máme

$$\langle \overline{T}x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y_n\rangle = \langle x_n, Ty_n\rangle = \langle x, \overline{T}y\rangle.$$

Tedy $\overline{T}$ je symetrický.

$\square$

PŘÍKLAD 33. Nechť T je symetrický operátor v komplexním Hilbertově prostoru H.

(a) Pak $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset \mathbb{R}$.
(b) Pokud je T nezáporný na $\operatorname{Dom} T$, je $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset [0, +\infty)$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in \operatorname{Dom} T \setminus \{0\}$ splňuje $Tx = \lambda x$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Tedy $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

(b) Podobně jako výše máme

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \geq 0,$$

tedy $\lambda \geq 0$.

$\square$

PŘÍKLAD 34. Nechť T je hustě definovaný operátor v H, který lze uzavřít. Pak $T^\star = \overline{T}^\star$.

DŮKAZ. Dle Tvrzení FA.12.62 je $\operatorname{graf} T^\star = (V(\operatorname{graf} T))^\perp$, kde V je unitární zobrazení z Lemmatu FA.12.61. Pro důkaz příkladu tak stačí ukázat, že $\operatorname{graf} \overline{T}^\star = (V(\operatorname{graf} T))^\perp$. Máme však z předchozího $\operatorname{graf} \overline{T}^\star = (V(\operatorname{graf} \overline{T}))^\perp$. Stačí tak ověřit $(V(\operatorname{graf} \overline{T}))^\perp = (V(\operatorname{graf} T))^\perp$. Je-li však $(a, b) \in (V(\operatorname{graf} T))^\perp$ a $(-\overline{T}x, x) \in V(\operatorname{graf} \overline{T})$ pro nějaké $x \in \operatorname{Dom} \overline{T}$, existuje posloupnost $\{x_n\}$ v $\operatorname{Dom} T$ splňující $(x_n, Tx_n) \to (x, \overline{T}x)$. Pak ale

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle (a, b), (-Tx_n, x_n)\rangle_{H\times H} = \langle (a, b), (-\overline{T}x, x)\rangle_{H\times H}.$$

Tedy $(V(\operatorname{graf}\overline{T}))^\perp \supset (V(\operatorname{graf}T))^\perp$. Jelikož druhá inkluze je triviální, je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 35. Nechť T je hustě definovaný symetrický operátor v komplexním Hilbertově prostoru H. Pak T lze uzavřít.

DŮKAZ. Pro $x, y \in \operatorname{Dom} T$ máme $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, takže $y \in \operatorname{Dom} T^\star$ a $T^\star y = Ty$. Tedy $T \subset T^\star$, což díky uzavřenosti $T^\star$ dává, že T lze uzavřít.

□

PŘÍKLAD 36. Operátor T v Hilbertově prostoru se nazývá esenciálně samoadjungovaný, pokud je hustě definovaný, symetrický a má jednoznačné samoadjungované rozšíření.

Hustě definovaný operátor T je esenciálně samoadjungovaný, právě když $\overline{T}$ je samoadjungovaný.

DŮKAZ. Nechť S je jednoznačné samoadjungované rozšíření T. Pak T lze symetricky uzavřít a $T \subset \overline{T} \subset S$. Pak Cayleyovy transformace těchto operátorů splňují $\mathcal{C}(\overline{T}) \subset \mathcal{C}(S)$ a $\mathcal{C}(T)$ nemá jiné unitární rozšíření než $\mathcal{C}(S)$. Tedy indexy defektu $\overline{T}$ musí být nulové, v opačném případě by totiž existovalo nekonečně mnoho unitárních rozšíření $\mathcal{C}(T)$. Dle Věty FA.12.48 je $\overline{T}$ samoadjungovaný.

Předpokládejme nyní, že $\overline{T}$ je samoadjungovaný a S je samoadjungovaný operátor splňující $T \subset S$. Pak $T \subset \overline{T} \subset S$, z čehož plyne $S = S^\star \subset \overline{T}^\star = \overline{T}$. tedy $S = \overline{T}$ je jediné samoadjungované rozšíření T.

□

PŘÍKLAD 37. Nechť T je hustě definovaný symetrický operátor v H. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) T je esenciálně samoadjungovaný.
(ii) Platí $\operatorname{Ker}(T^\star + iI) = \operatorname{Ker}(T^\star - iI) = \{0\}$.
(iii) Prostory $\operatorname{Rng}(T + iI)$ a $\operatorname{Rng}(T - iI)$ jsou husté v H.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Operátor $\overline{T}$ je samoadjungovaný dle Příkladu 36, takže dostáváme $\operatorname{Ker}(\overline{T}^\star + iI) = \operatorname{Ker}(\overline{T} - iI^\star) = (\operatorname{Rng}(\overline{T} - iI))^\perp = H^\perp = \{0\}$. (Číslo $i \in \rho(\overline{T})$ dle Důsledku FA.12.40.) Jelikož $T^\star = \overline{T}^\star$, máme i $\operatorname{Ker}(T^\star + iI) = \{0\}$. Podobně obržíme vztah pro $\operatorname{Ker}(T - iI)$.

(ii)⇒(iii) Máme vztah $\overline{\operatorname{Rng}(T + iI)} = (\operatorname{Ker} T + iI^\star)^\perp = (\operatorname{Ker}(T^\star - iI))^\perp = \{0\}^\perp = H$. A podobně ověříme hustotu $\operatorname{Rng}(T - iI)$.

(iii)⇒(i) Operátor $\overline{T}$ je uzavřený a symetrický. Dle (iii) platí $\overline{\operatorname{Rng}(\overline{T} + iI)} \supset \overline{\operatorname{Rng}(T + iI)} = H$, což však dle Lemmatu FA.12.38(c) implikuje $\operatorname{Rng}(\overline{T} + iI) = H$. Podobně obržíme $\operatorname{Rng}(\overline{T} - iI) = H$, takže $\overline{T}$ je samoadjungovaný dle Důsledku FA.12.40. Proto je T esenciálně samoadjungovaný.

□

PŘÍKLAD 38. Nechť $I = [0,1]$, $H = L_2(I)$, $\operatorname{Dom} A = \{f \in C^\infty(I);\ f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1), k \in \mathbb{N}_0\}$ a $Af = -f''$. Pak A je esenciálně samoadjungovaný operátor, $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \{4k^2\pi^2;\ k \in \mathbb{N}_0\}$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ a $\dim \operatorname{Ker}(A - (2\pi k)^2 I) = 2$, $k \in \mathbb{N}$. Dále A je nezáporný a Fridrichsovo rozšíření A je $\overline{A}$.

DŮKAZ. Jelikož $\mathscr{D}((0,1)) \subset \operatorname{Dom} A$, je A hustě definovaný. Též pro $f, g \in \operatorname{Dom} A$ výpočet

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -f''\overline{g} = [-f'\overline{g}]_0^1 + \int_0^1 f'\overline{g'} = [f\overline{g'}]_0^1 - \int_0^1 f\overline{g''} = \langle f, Ag\rangle$$

implikuje symetričnost A a nezápornost A. Vyzkoumejme nyní strukturu $\sigma_{\mathrm{p}}(()A)$. Dle Příkladu 33 stačí zkoumat $\lambda \in [0, +\infty)$. Řešíme tedy rovnici $Af = -f'' = \lambda f$ pro $\lambda \geq 0$. Pokud $\lambda = 0$, máme jediné řešení $f = 1$. Jinka pro nenulové λ platí $f(t) = a\cos\sqrt{\lambda}t + b\sin\sqrt{\lambda}t$ pro Nějaké $a, b \in \mathbb{C}$. Vzhledem k okrajovým podmínkám musí platit

$$\begin{aligned} a = f(0) = f(1) &= a\cos\sqrt{\lambda} + b\sin\sqrt{\lambda}, \\ \sqrt{\lambda}b = f'(0) = f'(1) &= \sqrt{\lambda}(-a\sin\sqrt{\lambda} + b\cos\sqrt{\lambda}). \end{aligned}$$

V druhé rovnici zkrátíme $\sqrt{\lambda}$ a přenásobíme ji b, první rovnici přenásobíme a a obě sečteme. Dostaneme

$$a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)\cos\sqrt{\lambda}.$$

Tedy $\lambda = (2k\pi)^2$, $k \geq 1$. Dohromady tak máme $\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \{(2k\pi)^2;\ k \in \mathbb{N}_0\}$ s vlastními vektory $\{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(2k\pi t), \sqrt{2}\sin(2k\pi t);\ k \in \mathbb{N}\}$. To je ovšem ortonormální báze v H.

Abychom ověřili esenciální samoadjungovanost A, stačí dle Příkladu 37 ověřit, že $\operatorname{Rng}(A \pm iI)$ je hustý v H. Dle předchozího nám stačí verifikovat, že

$$\operatorname{Rng}(A \pm iI) \supset \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(2k\pi t), \sqrt{2}\sin(2k\pi t);\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Uvažujme tedy vlastní vektor $\cos(2k\pi t)$. Pak funkce $\frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2 - i}$ splňuje $Af - if = \cos(2k\pi t)$. Podobně bychom ověřili inkluzi i pro ostatní vlastní vektory a pro $A + iI$. Tedy A je esenciálně samoadjungovaný.

$\square$

PŘÍKLAD 39. Nechť $H = L_2(\mu_d)$, $\operatorname{Dom} A = \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a $Af = -\triangle f = -\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 f$. Pak A je esenciálně samoadjungovaný a nezáporný na $\operatorname{Dom} A$. Navíc je $\overline{A}$ unitárně ekvivalentní s multiplikátorem $M_{x \mapsto \|x\|^2}$ na H a $\sigma(\overline{A}) = [0, +\infty)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(\overline{A}) = \emptyset$.

DŮKAZ. Operátor A je zjevně hustě definovaný. Z rovnosti

$$\langle Af, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} -\triangle f \overline{g}\,\mathrm{d}\mu_d = \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_i} f \overline{\partial_{x_i} g}\,\mathrm{d}\mu_d = \langle f, Ag\rangle, \quad f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$$

vidíme jak symetrii A, tak jeho nezápornost na $\operatorname{Dom} A$.

Nechť P je Plancherelova transformace H na H. Pak rovnost $P(\partial_{x_i} f) = ix_i Pf$, $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dává vztah

$$PAf(x) = P(-\triangle f)(x) = \|x\|^2 Pf(x), \quad f \in \operatorname{Dom} A.$$

Ukážeme, že $\operatorname{Rng}(A - iI)$ je hustý v H. Nechť tedy $g \in (\operatorname{Rng}(A - iI))^{\perp}$ je dáno. Pak

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (A - iI)f, g\rangle = \langle P(A - iI)f, Pg\rangle = \langle (\|x\|^2 - i)Pf, Pg\rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 - i)Pf(x)\overline{Pg(x)}\,\mathrm{d}\mu_d(x), \quad f \in \operatorname{Dom} A. \end{aligned}$$

Jelikož je $U(\operatorname{Dom} A)$ hustý podprostor H, je funkce $(\|x\|^2 - i)\overline{Pg(x)}$ nulová. To vzhledem k nenulovosti $\|x\|^2 - i$ implikuje $Pg = 0$, a potažmo i $g = 0$. Podobně bychom ukázali, že $\operatorname{Rng}(A + iI)$ je hustý v H. Tedy A je esenciálně samoadjungovaný dle Příkladu 37

Z rovnosti $PAf(x) = P(-\triangle f)(x) = \|x\|^2 Pf(x) = M_{\|x\|^2} Pf(x)$ vidíme, že A je unitárně ekvivalentní s operátorem $M_{\|x\|^2}$ definovaným na $U(\operatorname{Dom} A)$. Jelikož je A esenciálně samoadjungovaný, je i $M_{\|x\|^2}$ na $U(\operatorname{Dom} A)$ esenciálně samoadjungovaný. Operátor $M_{\|x\|^2}$ definovaný na $\operatorname{Dom} M_{\|x\|^2} = \{f \in H;\ \|x\|^2 f \in H\}$ je samoadjungované rozšíření $M_{\|x\|^2}$ z $U(\operatorname{Dom} A)$, a tedy je to jeho uzávěr (vizte Příklad 35). Proto operátor $\overline{A}$ s definičním oborem $U^{-1}\operatorname{Dom} M_{\|x\|^2}$ je jednoznačné rozšíření A, kter je unitárně ekvivalentní pomocí P s operátorem $M_{\|x\|^2}$. Z toho dostáváme $\sigma(\overline{A}) = \sigma(M_{\|x\|^2}) = [0, +\infty)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(\overline{A}) = \sigma_{\mathrm{p}}(M_{\|x\|^2}) = \emptyset$.

$\square$

Literatura

[F2] D.H. Fremlin, *Measure theory, Broad foundations*, .
[F4] D.H. Fremlin, *Measure theory, Topological measure spaces*,
[J] Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1984.
[R] Walter Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003.
[Z] Luděk Zajíček, *Vybrané partie z matematické analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2003.