

1. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 15 body.

1. Ukažte, že rovnice

$$uv + xy = 1$$

$$v^2 + x + y^2 = 1$$

definují na nějakém okolí bodu $[0, 0, 1, 1]$ jednoznačně funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ proměnných x, y , které splňují $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$. Nalezněte gradient u a v v bodě $[0, 0]$.

2. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = a$$

$$x + y + az = a^2$$

4. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}).$$