3. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 15 body.

1. Ukažte, že rovnice
$$\cos(xz - 1 + ye^z) = ze^{xy}$$
definuje na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0] = [1, 0, 1]$ jednoznačně funkci $y = y(x, z)$ proměnných (x, z), která splňuje $y(1, 1) = 0$. Nalezněte tečnou nadrovinu k funkci y v bodě $[1, 1]$.
2. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množině
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x + y \ge 1\}.$$
3. Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ b & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$ zjistěte, kdy je matice AB regulární. V těchto případech spočtěte matici $(AB)^{-1}$ a její determinant.
4. V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$