5. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 15 body.

1. Ukažte, že rovnice
$$x^2 + y^3 + z^4 = 3$$
$$\sin(\pi x) + y^4 + z = 2$$
definují na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$ jednoznačně funkce $x = x(z)$ a $y = y(z)$ proměnné z, které splňují $x(1) = y(1) = 1$. Nalezněte derivaci $x'(1)$.
2. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x, y) = x(y + z)$ na množině
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$
3. Nalezněte matici X typu 2 krát 2, která řeší rovnici
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$
4. V závislosti na parametru $p \geq 0$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}(\sqrt{n^p + 1} - \sqrt{n^p - 1}).$$