

## 6. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 15 body.

1. Ukažte, že rovnice

$$\arctan(x^2y + x) = \log(x + y)$$

definuje na nějakém okolí bodu  $[x_0, y_0] = [0, 1]$  jednoznačně funkci  $y = f(x)$  proměnné  $x$ , která splňuje  $f(0) = 1$ . Nalezněte derivace  $f'(0)$  a  $f''(0)$ . Lze něco říci o konvexitě funkce  $f$  na nějakém okolí bodu 0?

2. Nalezněte supremum a infimum funkce  $f(x, y, z) = x - y$  na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}.$$

3. Nalezněte hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. V závislosti na parametru  $x \in \mathbb{R}$  vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x - 1)^n \sin \frac{1}{n}.$$