1. Integrály s odmocninami

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x$, 2. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$, 3. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\,\mathrm{d}x$, 4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$,

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$, 6. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$, 7. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$,

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}\,\mathrm{d}x$, 9. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$, 10. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$, 11. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$,

12. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$, 13. $\displaystyle\int \frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$, 14. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$, 15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

16. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$, 17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$, 18. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$,

19. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x$

Návody:

1. $\int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$, 2. $\int \frac{2(t^2-t+1)}{(t-2)(2t-1)}\,\mathrm{d}t$, 3. $\int 6\frac{t^6-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$, 4. $\int \frac{-2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 5. $\int \frac{6t^3(t^6-1)}{(t+1)}\,\mathrm{d}t$, 6. $\int \frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)}\,\mathrm{d}t$,

7. $\int \frac{6t^5(t^2+t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t$, 8. $\int \frac{3t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$, 9. $\int \frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$, 10. $\int \frac{6t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}\,\mathrm{d}t$, 11. $\int \frac{2(t^2-1)^2}{(1-2t)^3}\,\mathrm{d}t$,

12. $\int \frac{8t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-t^2(t+2)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$, 13. $\int \frac{16t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-(t^2+2t-1)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$, 14. $\int \frac{t^2+1}{4(t^4+1)}\,\mathrm{d}t$,

15. $\int \frac{-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$, 16. $\int \frac{-4\sqrt{2}t}{(1+t^2)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{t^2+2t-1}{(1-t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$, 17. $\int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$,

18. lze využít vzorec pro a^2-b^2, kde $a=1+\sqrt{x}$ a $b=\sqrt{x+1}$, 19. $\int \frac{2t(t^2-3t+2)}{(3-2t)(3t-4)}\,\mathrm{d}t$

Výsledky:

1. $2\sqrt{x+3}-2\log\bigl(1+\sqrt{x+3}\bigr)$, $x\in(-3,+\infty)$,
2. $\sqrt{x^2+x+1}-x+2\log\bigl|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\bigr|-\frac{1}{2}\log\bigl|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\bigr|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,+\infty)$,
3. $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\log x+6\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$, 4. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$, $x\in(1,3)$,
5. $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-(x+1)+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}$, $x\in(-1,+\infty)$,
6. $\frac{-2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}-\log\bigl(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\bigr)$, $x\in\mathbb{R}$,
7. $\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}+2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\log\bigl(\sqrt[6]{x+1}+1\bigr)$, $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(0,+\infty)$
8. $-\log\left|1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right|+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$,
9. $\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(0,1)$
10. $\log\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, kde $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(0,+\infty)$,
11. $\frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{8}\log\bigl(2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\bigr)$, $x\in\mathbb{R}$
12. $\frac{\operatorname{sgn}x}{2}\left(x(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}}+\log\left|\sqrt{\frac{x-2}{x}}-1\right|-\log\left(\sqrt{\frac{x-2}{x}}+1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x}+\frac{1}{2}\log\bigl|\sqrt{x^2-2x}-x+1\bigr|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(2,+\infty)$,
13. $\operatorname{sgn}(x-1+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1}{2}(x-1)(x-1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}+\log\left|\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}-1\right|-\log\left(\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}+1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}+\log\bigl|\sqrt{x^2-2x-1}-x+1\bigr|$, $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})$ nebo $x\in(1+\sqrt{2},+\infty)$
14. $\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}-1\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}+1\right)$, $x\in(-2,2)$ 15. $-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,1)$
16. $\log\bigl(t+\sqrt{2}-1\bigr)-\log\bigl(t+\sqrt{2}+1\bigr)-2\operatorname{arctg}t$, kde $t=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}-x}{x+1+\sqrt{2}}}$ pro $x\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$, nebo $-\log(1-t)-2\operatorname{arctg}t$, kde $t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$ pro $x\in(-1-\sqrt{2},0)$ a $x\in(0,-1+\sqrt{2})$, lze slepit v 0
17. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\log\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)$, $x\in(1,+\infty)$
18. $\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$, $x\in(0,+\infty)$

2. URČITÉ INTEGRÁLY

1. $\displaystyle\int_0^1 (x+2)^5\,\mathrm{d}x$, 2. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x+2)\cos x\,\mathrm{d}x$, 3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x+a}$, $a \ge 0$, 4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$,

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,\mathrm{d}x$, 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$, 7. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$, 8. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$,

9. $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$, 10. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$, 11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky:

1. $\frac{665}{6}$, 2. $\frac{\pi}{2}\sin 2$, 3. $1 + a\log\frac{1+a}{2+a}$, 4. 0, 5. $\frac{11}{30} + 2\log\frac{5}{6}$, 6. $\log 2$, 7. 4, 8. $\frac{1}{2}\log 3$,
9. $\frac{4}{3}\pi\sqrt{3}$, 10. $\frac{4}{3}\sqrt{2}-2$, 11. $-\frac{3}{4}\pi + \frac{9}{2}\log 2$.

3. VÍCEROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

1. $\int_M x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, M je trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, 2]$;
2. $\int_M e^{-x-y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le y\}$;
3. $\int_M x(y + 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, M je jednotkový kruh;
4. $\int_M \sin(x + 2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, $M = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$;
5. $\int_M xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, M je čtvrtina jednotkového kruhu ležící v prvním kvadrantu;
6. $\int_M xyz^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$;
7. $\int_M 2x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, M je čtyřúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[0, 2]$, $[1, 1]$, $[1, 3]$;
8. $\int_M ye^{-x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, |x - y| \le 1\}$;
9. $\int_M (x^2 y + xy^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, M je trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[1, 2]$;
10. $\int_M \frac{y^2 \sqrt{x}}{1 + x^4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, M je plocha ohraničená parabolou $y^2 = x$.

Výsledky:
1. $\frac{5}{6}$, 2. $\frac{1}{2}$, 3. 0, 4. 2, 5. $\frac{1}{8}$, 6. $\frac{8}{3}$, 7. $\frac{7}{3}$, 8. 2, 9. $\frac{39}{10}$, 10. $\frac{1}{6}\pi\sqrt{2}$.

4. Vektorové prostory

1. Ověřte, že následující množiny spolu s kanonicky definovanými operacemi tvoří vektorové prostory:
$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $C(R)$, $C(\langle 0,1\rangle)$, $M(3\times 2)$, polynomy.

2. Které z následujících podmnožin tvoří vektorové podprostory?
a) $W_1 = \{(r, 2r, -r);\ r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, b) $W_2 = \{(r+s, 2s-r, r+2s);\ r, s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,
c) $\{(s+t, 2s-t+2, t+s);\ s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, d) $\{(rs+s, 2s, r, s);\ r, s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$, e) $W_1 \cap W_2$, f) $W_1 \cup W_2$,
g) {polynomy stupně 2} $\subset \mathcal{P}$, h) $\mathcal{P}_2 =$ {polynomy stupně nejvýše 2} $\subset \mathcal{P}$, i) $\{ax^3 + x + b;\ a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}_3$,
j) $\{p \in \mathcal{P};\ p(0) = 1\} \subset \mathcal{P}$, k) $\{p \in \mathcal{P};\ p(0) = 0\} \subset \mathcal{P}$, l) $\{p \in \mathcal{P};\ p'(0) = 0\} \subset \mathcal{P}$,
m) $\{p \in \mathcal{P};\ 2p(0) - 3p(1) = 0\} \subset \mathcal{P}$, n) $\{p \in \mathcal{P};\ p(1) - 3p(2) = 1\} \subset \mathcal{P}$,
o) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f'(0) + 3f''(1) = 0\} \subset C(\mathbb{R})$,
p) $\{\mathbb{A} \in M(n\times n);\ \mathbb{A}$ regulární$\} \subset M(n\times n)$, q) $\{\mathbb{A} \in M(n\times n);\ \mathbb{A}$ horní trojúhelníková$\} \subset M(n\times n)$,
r) $\{\mathbb{A} \in M(n\times n);\ \det \mathbb{A} = 0\} \subset M(n\times n)$, s) $\{\mathbb{A} \in M(n\times n);$ součet prvků na diagonále $\mathbb{A}$ je $0\} \subset M(n\times n)$.

3. Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:
a) $(1,1,0), (2,1,1), (3,1,2) \in \mathbb{R}^3$, b) $(1,0,-1,1), (2,1,0,1), (1,0,0,-1), (2,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$,
c) $x^2+x+1, x+1, x-3 \in \mathcal{P}_2$, d) $3x^2+2x+1, x^2+x+3, x^2-2x+1 \in \mathcal{P}_2$, e) $x^3+x+1, x^3+2x, x^3+x+2 \in \mathcal{P}_3$,
f) $\sin x, x\sin x, x^2 \sin x \in C(\mathbb{R})$, g) $\sin x, \cos x, \sin 2x \in C(\mathbb{R})$, h) $\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x \in C(\mathbb{R})$.

4. Určete dimenzi a nalezněte nějakou bázi následujících podprostorů:
a) $\mathrm{lin}\{(1,1,1), (1,2,2), (10,11,11)\} \subset \mathbb{R}^3$,
b) $\mathrm{lin}\{(1,1,1,2,2), (-1,-2,-2,-2,2), (19,1,1,1,1), (-1,-3,-3,-2,6)\} \subset \mathbb{R}^5$,
c) $\mathrm{lin}\{x+7, x^2-x-1, x^2+3, x-5\} \subset C(\mathbb{R})$, d) $\mathrm{lin}\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\} \subset C(\mathbb{R})$,
e) $M(2\times 3)$, f) $\{\mathbb{A} \in M(3\times 3);\ \mathbb{A}^T = \mathbb{A}\}$, g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y-2z = 0\}$, h) $\{f \in C^3(\mathbb{R});\ f''' = 0\}$,
i) $\mathbb{C}^2$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Výsledky:
2. a) ano, b) ano, c) ne, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne, h) ano, i) ne,
j) ne, k) ano, l) ano, m) ano, n) ne, o) ano, p) ne, q) ano, r) ne, s) ano.
3. a) ne, b) ano, c) ano, d) ano, e) ano, f) ano, g) ano, h) ano.
4. a) 2, např. $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$ nebo $\{(1,1,1),(1,1,2)\}$, b) 3, $\{(1,1,1,2,2), (-1,-2,-2,-2,2), (19,1,1,1,1)\}$,
c) 3, $\{1, x, x^2\}$, d) 4, e) 6, f) 6, g) 2, $\{(1,-1,0),(1,1,1)\}$, h) 3, $\{1, x, x^2\}$,
i) 4, $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$.

5. Lineární zobrazení

Zjistěte, zda L je lineární zobrazení. Pokud ano, určete $\ker L$ a $\mathrm{Im}\, L$.
1. $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(u,v,w) = (u+v, v+2w)$;
2. $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $L(u,v,w) = (u, u-w, u+v, v)$;
3. $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(u,v,w) = (u^2, u+v, 0)$;
4. $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(u,v,w) = (0,0,0)$;
5. $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $L(u,v,w,z) = (u,u)$;
6. $L\colon C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x) = f(x+1) - f(x)$;
7. $L\colon C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;
8. $L\colon C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x) = f(x^2)$;
9. $L\colon C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x) = f'(x)$;
10. $L\colon C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $L(f) = (f(0), f'(1))$;
11. $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$, $L(p)(x) = p(x) + x^2$;
12. $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$, $L(p)(x) = (x+1)p(x)$

Výsledky:
1. $\{(2w, -2w, w);\ w \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}^2$, 2. $\{(0,0,0)\}, \{(a, c, a+b, b);\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$, 3. ne, 4. $\mathbb{R}^3, \{(0,0,0)\}$,
5. $\{(0, v, w, z);\ v, w, z \in \mathbb{R}\}, \{(a,a);\ a \in \mathbb{R}\}$, 6. $\{f \in \mathbb{C}(\mathbb{R});\ f$ je 1-periodická$\}, C(\mathbb{R})$,
7. $\{f \equiv 0\}, \{g \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R});\ g(0) = 0\}$, 8. $\{f \restriction_{(0,+\infty)} \equiv 0\}, \{g \in \mathbb{C}(\mathbb{R});\ g$ je sudá$\}$,
9. $\{f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R});\ f$ je konstantní$\}, C(\mathbb{R})$, 10. $\{f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R});\ f(0) = f'(1) = 0\}, \mathbb{R}^2$, 11. ne, 12. $\{p \equiv 0\}$,
$\{q \in \mathcal{P}_3;\ q(-1) = 0\}$

6. Kvadratické formy

Určete definitnost následujících matic:

$$\textbf{1.}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \textbf{2.}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad \textbf{3.}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&2\\1&2&5\end{pmatrix},\quad \textbf{4.}\begin{pmatrix}6&0&3\\0&3&3\\3&3&5\end{pmatrix},\quad \textbf{5.}\begin{pmatrix}7&0&4&2\\0&3&3&2\\4&3&6&3\\2&2&3&2\end{pmatrix}$$

$$\textbf{6.}\begin{pmatrix}2&-3&1&-1\\-3&8&3&0\\1&3&5&-2\\-1&0&-2&1\end{pmatrix},\quad \textbf{7.}\begin{pmatrix}-2&1&1&-1\\1&-7&1&-2\\1&1&-10&0\\-1&-2&0&-2\end{pmatrix},\quad \textbf{8.}\begin{pmatrix}3&4&4&3\\4&6&5&6\\4&5&6&2\\3&6&2&11\end{pmatrix},\quad \textbf{9.}\begin{pmatrix}-3&-4&4&-3\\-4&-6&5&-6\\4&5&-6&2\\-3&-6&2&-11\end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete definitnost následujících matic:

$$\textbf{10.}\begin{pmatrix}337&338&400&398\\338&415&371&399\\400&371&333&343\\398&399&343&a\end{pmatrix},\quad \textbf{11.}\begin{pmatrix}3&3&1&2\\3&4&2&-1\\1&2&3&a\\2&-1&a&13\end{pmatrix}.$$

Výsledky: 1. ID, 2. ID, 3. PSD, 4. PD, 5. PD, 6. ID, 7. ND, 8. PSD, 9. NSD, 10. vždy ID, 11. PD pro $a \in \left(-\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}, -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$, ID pro $a \in \left(-\infty, -\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}\right) \cup \left(-\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}, +\infty\right)$, PSD pro $a = -\frac{7}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{10}$.

7. Vlastní čísla

Najděte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory pro následující matice:

$$\textbf{1.}\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix},\quad \textbf{2.}\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix},\quad \textbf{3.}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\quad \textbf{4.}\begin{pmatrix}1&2\\-2&5\end{pmatrix},\quad \textbf{5.}\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix},\quad \textbf{6.}\begin{pmatrix}-2&1&2\\-4&3&2\\-5&1&5\end{pmatrix}$$

$$\textbf{7.}\begin{pmatrix}5&0&-2\\2&3&-2\\4&0&-1\end{pmatrix},\quad \textbf{8.}\begin{pmatrix}8&-1&-3\\8&1&-4\\7&-1&-2\end{pmatrix},\quad \textbf{9.}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\6&-2&-2\\3&-1&-1\end{pmatrix},\quad \textbf{10.}\begin{pmatrix}2&0&-1\\5&-1&-2\\1&1&-1\end{pmatrix},$$

$$\textbf{11.}\begin{pmatrix}-2&0&-2&3\\-2&1&-1&2\\-2&0&0&2\\-5&0&-3&6\end{pmatrix},\quad \textbf{12.}\begin{pmatrix}-23&21&3&-17\\-40&35&4&-31\\58&-50&-5&47\\-8&6&0&-7\end{pmatrix}.$$

Výsledky (vlastní číslo, násobnost, vlastní vektory):

1. $(1, 1, \{[t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(2, 1, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 2. $(4, 1, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(-1, 1, \{[3t, -2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 3. $(1+i, 1, \{[t, ti];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(1-i, 1, \{[t, -ti];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 4. $(3, 2, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 5. pro $a \neq 0$: $(a, 1, \{[t, -t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(-a, 1, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, pro $a = 0$: $(0, 2, \{[s, t];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$, 6. $(1, 1, \{[t, t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(2, 1, \{[t, 2t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(3, 1, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 7. $(1, 1, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(3, 2, \{[t, s, t];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$, 8. $(1, 1, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(3, 2, \{[t, 2t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 9. $(0, 3, \{[t, 3t - s, s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$, 10. $(0, 3, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 11. $(2, 1, \{[t, t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, $(1, 3, \{[s, t, 0, s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\})$, 12. $(i, 2, \{[3t-(7+i)s, 4t, (-5+i)t-(8+10i)s, 8s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\})$, $(-i, 2, \{[3t+(-7+i)s, 4t, -(5+i)t+(-8+10i)s, 8s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$.

8. Taylorův polynom

1. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě a pro následující funkce:

a) arctg, $k = 3$, $a = 1$

b) tg, $k = 3$, $a = \frac{\pi}{4}$

c) $\exp$, $k = 5$, $a = 2$

2. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě 0 (pokud není řečeno jinak) pro následující funkce:

a) $\sin \cdot \cos$, $k = 4$

b) tg, $k = 5$

c) e^{x^2}, $k = 6$

d) $\cos(x^3 - 1)$, $k = 3$, v bodě 1

e) $x^7 \sin(x^2)$, $k = 10$

f) $\cos(\sin x)$, $k = 5$

g) $\sin(\sin x)$, $k = 6$

h) $\sin(1 - \cos x)$, $k = 4$

i) $\log(\cos x)$, $k = 6$

3. Spočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\big(\cos(\sin x) - 1\big) + \frac{1}{2}x^2}{x^2 \sin^2 x}$

4. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby příslušná limita byla konečná a různá od 0 a spočtěte tuto limitu:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$

Výsledky:

1. a) $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3$ b) $1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3$
c) $e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{24}e^2(x-2)^4 + \frac{1}{120}e^2(x-2)^5$

2. a) $x - \frac{2}{3}x^3$ b) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ c) $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$ d) $1 - \frac{9}{2}(x-1)^2 - 9(x-1)^3$
e) x^9 f) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$ g) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$ h) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$ i) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$

3. a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{12}$ c) 0 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{3}$ g) $\frac{1}{6}$ h) $\frac{5}{24}$

4. a) 1 $(n = 2)$ b) $\frac{e}{2}$ $(n = 1)$ c) $\frac{1}{3}$ $(n = 4)$ d) $\frac{1}{30}$ $(n = 7)$

9. Lokální extrémy funkcí více proměnných

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí:

1. $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,
2. $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$,
3. $(1 + e^y)\cos x - ye^y$,
4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz$,
5. $e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$,
6. $x^2 + y^2 + x - 2xy$,
7. $(x - 2y)e^{xy}$,
8. $x^2 + xy + y^2 - 4\log x - 10\log y$,
9. $(x^2 - xy - z^2)e^{xy}$,
10. $x + y + 4\sin x \sin y$,
11. $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,
12. $x^3 + y^2 + 12xy$,
13. $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$

Výsledky:

1. $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ ostrá lokální minima, $[0, 0]$ sedlový bod, 2. $[5, 2]$ ostré lokální minimum, 3. $[2k\pi, 0]$ ostré lokální maximum, $[(2k + 1)\pi, -2]$ sedlový bod, $k \in \mathbb{Z}$, 4. $[0, 0, 0]$ sedlový bod, $[2, 2, 2]$ ostré lokální minimum,
5. $[0, 0]$ ostré lokální minimum, $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$ sedlový bod, 6. nemá kritické body, 7. $[-1, \frac{1}{2}]$ a $[1, -\frac{1}{2}]$ sedlové body,
8. $[1, 2]$ ostré lokální minimum, 9. $[0, 0, 0]$ a $[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0]$ sedlové body, 10. $[\frac{7}{12}\pi + l\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi + l\pi - k\frac{\pi}{2}]$ ostré lokální maximum pro k sudé, sedlový bod pro k liché, $[\frac{11}{12}\pi + l\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{11}{12}\pi + l\pi - k\frac{\pi}{2}]$ ostré lokální minimum pro k liché, sedlový bod pro k sudé, 11. $[0, 0]$ ostré lokální minimum, $[x, y]$ splňující $x^2 + y^2 = 1$ lokální maximum
12. $[24, -144]$ ostré lokální minimum, $[0, 0]$ sedlový bod, 13. $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ ostrá lokální minima, $[0, 0]$ sedlový bod