VEKTOROVÉ PROSTORY

1. Zjistěte, které z následujících podmnožin jsou podprostory $\mathbf{R}^3$.

- $W_1 = \{(r, 2r, 3r);\ r \in \mathbf{R}\}$,
- $W_2 = \{(2s + t, s - t, 3s + t);\ s, t \in \mathbf{R}\}$,
- $W_1 \cup W_2$,
- $W_1 \cap W_2$,
- $W_3 = \{(r + 2s + t, 2r + s - t, 3r + 3s + t);\ r,\ s,\ t \in \mathbf{R}\}$.

2. Zjistěte, zda následující množiny polynomů (s obvyklou definicí sčítání a násobení reálným číslem) tvoří vektorový prostor:

- Všechny polynomy p, pro které $p(0) = 1$.
- Všechny polynomy p, pro které $p(0) = 0$.
- Všechny polynomy p, pro které $p'(0) = 0$.
- Všechny polynomy p, pro které $2p(0) - 3p(1) = 0$.

3. Zjistěte, zda následující vektory vektorového prostoru $\mathcal{C}(I)$ všech spojitých funkcí na otevřeném neprázdném intervalu I jsou lineárně nezávislé:

- $\sin x$, $x \sin x$, $x^2 \sin x$,
- $3x^2 + 2x + 1$, $x^2 + x + 3$, $x^2 - 2x + 1$,
- $P_1(x)e^{\lambda_1 x}$, …, $P_n(x)e^{\lambda_n x}$, kde λ_1, …, λ_n jsou navzájem různá reálná čísla a P_1, …, P_n jsou nenulové polynomy.

4. Rozhodněte, zda množina U tvoří vektorový podprostor prostoru $M(n \times n)$.

- $U = \{A \in M(n \times n);\ A \text{ je regulární matice}\}$
- $U = \{A \in M(n \times n);\ A \text{ je horní trojúhelníková matice}\}$
- $U = \{A \in M(n \times n);\ \det A = 0\}$
- $U = \{A \in M(n \times n);\ \text{součet prvků na diagonále matice } A \text{ je roven nule}\}$

5. Nechť $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$. Ukažte, že množina funkcí

$$\{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ a_n f^{(n)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in \mathbf{R}\}$$

tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

6. Určete dimenzi a naleznětete nějakou bázi vektorového prostoru V, kde

- $V = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1, 1, 1], [1, 2, 2], [10, 11, 11]\} \subset \mathbf{R}^3$.
- $V = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1, 1, 1, 2, 2], [-1, -2, -2, -2, 2], [19, 1, 1, 1, 1], [-1, -3, -3, -2, 6]\} \subset \mathbf{R}^5$.
- $V = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{x + 7, x^2 - x - 1, x^2 + 3, x - 5\} \subset \mathcal{C}(\mathbf{R})$.
- $V = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\} \subset \mathcal{C}(\mathbf{R})$.
- $V = \mathbf{C}^2$ jako vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.
- $V = M(2 \times 3)$.
- $V = \{\mathbb{A} \in M(3 \times 3);\ \mathbb{A}^T = \mathbb{A}\}$.
- $V = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{R}^3;\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
- $V = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbf{R}^4;\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$.
- $V = \{f \in \mathbf{C}(\mathbf{R});\ f \text{ má všude pátou derivaci a } f^{(5)} = 0 \text{ na } \mathbf{R}\}$.

VÝSLEDKY A NÁVODY

6.

- $\dim V = 2$, báze je například $\{[1, 1, 1], [0, 1, 1]\}$ (nebo též $\{[1, 1, 1], [1, 2, 2]\}$).
- $\dim V = 3$, báze je například $\{[1, 1, 1, 2, 2], [0, -1, -1, 0, 4], [0, 0, 0, 37, 109]\}$.
- $\dim V = 3$, báze je například $\{1, x, x^2\}$.
- $\dim V = 4$, množina ze zadání je báze.
- $\dim V = 4$, báze je například $\{[1, 0], [i, 0], [0, 1], [0, i]\}$.
- $\dim V = 6$, bázi tvoří například šestice matic, které mají na jednom místě 1 a na ostatních 0.

- $\dim V = 6$, bázi tvoří například
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
- $\dim V = 2$, báze je například $\{[1, 0, 1], [0, 1, 1]\}$.
- $\dim V = 1$, báze je například $\{[0, -1, 1, 1]\}$.
- $\dim V = 5$, báze je například $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.