

1. Nalezněte maximální řešení rovnice $y' = y$ procházející bodem $(0, 1)$.
2. Pro diferenciální rovnici $yy' + xy^2 = x$ nalezněte
 - (a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1, 0)$.
3. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
 - (a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1, \frac{1}{2})$,
 - (c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.
4. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
 - (a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(0, 1)$.
5. Nalezněte řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$, které splňuje $y(-2) = -\frac{3}{5}$ a $y(0) = 1$.
6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v \mathbb{R}^2 , kterými prochází právě jedno řešení definované na celém \mathbb{R} .
7. Řešte rovnici $y'(2 - e^x) = -3e^x \tan y \cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = A?$$

NAJDĚTE VŠECHNA MAXIMÁLNÍ ŘEŠENÍ NÁSLEDUJÍCÍCH ROVNIC

8. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ 9. $xy' + y = y^2$ 10. $y' = 10^{x+y}$ 11. $e^{-y}(1 + y') = 1$
12. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0, x \in (-1, 1)$ (*na zbylých intervalech) 13. $y' \sin x = y \ln y, y(\frac{\pi}{2}) = 1$
14. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$ 15. $y - xy' = b(1 + x^2 y'), y(1) = 1 (b \in \mathbb{R})$

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. $y(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. 2. (a) singulární řešení $y_0^1 = 1$ na $\mathbb{R}, y_0^2 = -1$ na $\mathbb{R}; y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}, y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}; y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}, x \in (\sqrt{\log c}, +\infty), y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}, x \in (\sqrt{\log c}, +\infty), y_c^3(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}, x \in (-\infty, -\sqrt{\log c}), y_c^4(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}, x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$ pro $c > 1; y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na \mathbb{R} a $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na \mathbb{R} pro $c < 0$ a $c \in (0, 1)$. (b) Takové řešení neexistuje. 3. (a) $y_0^1 = 0$ na $(0, +\infty), y_0^1 = 0$ na $(-\infty, 0)$; další řešení dána vzorečkem $y_c^j(x) = \frac{x}{1-cx}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = 1, 2, 3$ definována na intervalech: pro $c > 0$ y_c^1 na $(-\infty, 0), y_c^2$ na $(0, \frac{1}{c}), y_c^3$ na $(\frac{1}{c}, +\infty)$; pro $c < 0$ y_c^1 na $(-\infty, \frac{1}{c}), y_c^2$ na $(\frac{1}{c}, 0), y_c^3$ na $(0, +\infty)$. (b) $y_{-1}^3(x) = \frac{x}{1+x}, x \in (0, \infty)$. (c) Omezená jsou y_0^1, y_0^2, y_c^1 pro $c > 0, y_c^3$ pro $c < 0$. 4. (a) $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)), x \in (\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}), y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)), x \in (-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, -\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1})$ pro $c \geq \frac{\pi}{2}; y_c(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)), x \in (-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1})$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)), x \in (-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1})$. 5. Takové řešení neexistuje. Všetchna maximální řešení jsou: $y_s = 0$ na $\mathbb{R}; y_{s,c} = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ (\frac{3}{5}(x - c))^{\frac{5}{3}} & x \in (c, +\infty) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}; y_{c,s} = \begin{cases} 0 & x \in (c, +\infty] \\ (\frac{3}{5}(x - c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R};$

$y_{c,d} = \begin{cases} (\frac{3}{5}(x - c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, d] \\ (\frac{3}{5}(x - d))^{\frac{5}{3}} & x \in (d, +\infty) \end{cases}$ pro $c, d \in \mathbb{R}, c \leq d$. 6. $y_c = \log(\sin x + c), x \in \mathbb{R},$ pro $c > 1;$

$y_c^k = \log(\sin x + c), x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k + 1)\pi + \arcsin c), k \in \mathbb{Z},$ pro $c \in (-1, 1]; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}$. 7. $y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(b(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$

pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi, \pi)$. 8. $y_c = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}, x \in \mathbb{R},$ pro $c < -\frac{1}{4}; y_{-1/4}^{1,2} = -\sqrt[3]{3} \cdot (x - \frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}, x \in (-\infty, \frac{1}{2});$ nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty); y_c^{1,2,3} = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}, x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c}),$ nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c}),$ nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c}, \infty),$ pro $c > -\frac{1}{4}$. 9. $y_0 = 1, x \in \mathbb{R}; y_\infty = 0, x \in \mathbb{R}; y_c^{1,2} = \frac{1}{1-cx}, x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty),$ pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 10. $y_c = -\log_{10}(c - 10^x), x \in (-\infty, \log_{10} c),$ pro $c > 0$. 11. $y_\infty = 0, x \in \mathbb{R}; y_c^1 = -\log(1 + e^{x-c}), x \in \mathbb{R},$ pro $c \in \mathbb{R}; y_c^2 = -\log(1 - e^{x-c}), x \in (-\infty, -c),$ pro $c \in \mathbb{R}$. 12.

$$y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1, x \in (-1, 1); y_{\frac{\pi}{2}} = 1, x \in (-1, 1); y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$$

$$\text{pro } c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}); y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}, \text{ pro } c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y_{-\frac{\pi}{2}} = -x,$$

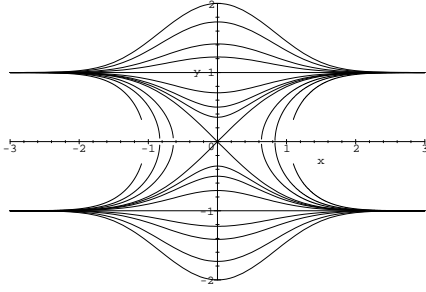
$x \in (-1, 1)$. **13.** $y_0 = 1, x \in \mathbb{R}; y_c^k = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \text{ pro } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0 . **14.** $y_0 = x, x \in \mathbb{R}; y_\infty^{1,2} = -\frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty); y_c^{1,2} = \frac{x+c}{1-cx}, x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1 .

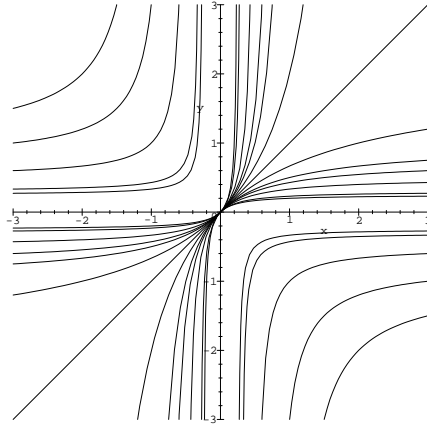
15. Pro $b = 0: y_c = cx, x \in \mathbb{R}, \text{ pro } c \in \mathbb{R}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1 .

Pro $b \neq 0: y_0 = b, x \in \mathbb{R}; y_c^{1,2} = b + \frac{cx}{1+bx}, x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$ nebo $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0 , pokud $b = 1$; neexistuje, pokud $b = -1$; $y_{\frac{1-b}{1+b}}^2$, pokud $b \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

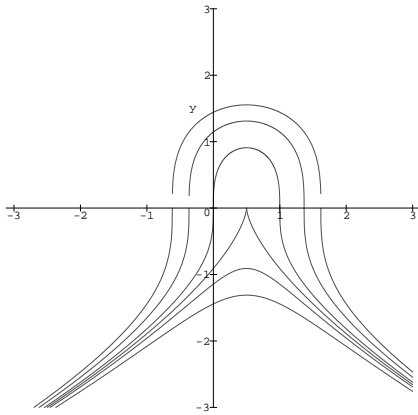
2.



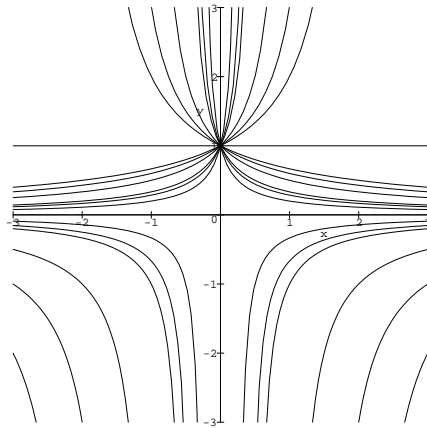
3.



8.

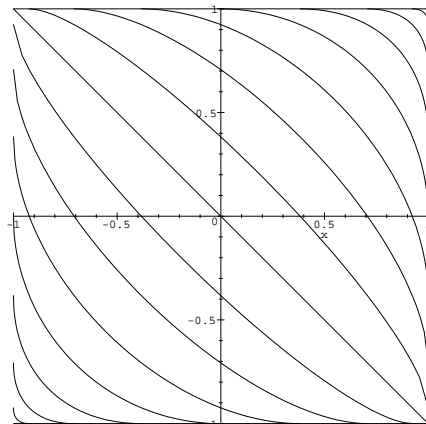
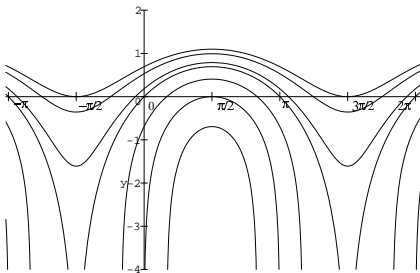


9.



6.

12.



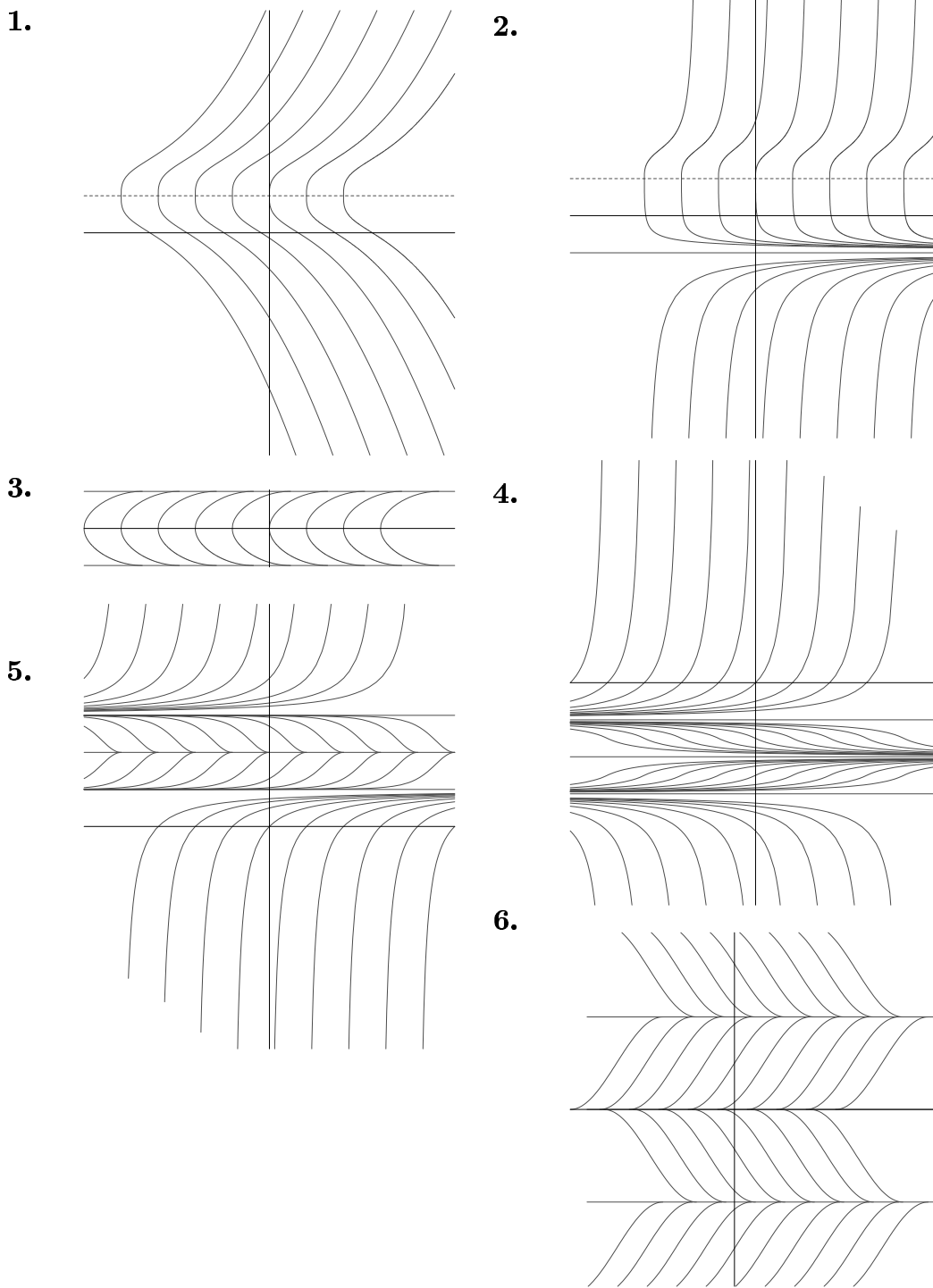
NĚKTERÉ TYPY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC,
KTERÉ LZE PŘEVÉST NA ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

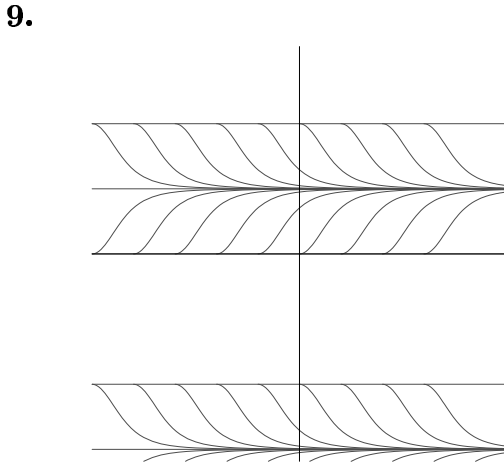
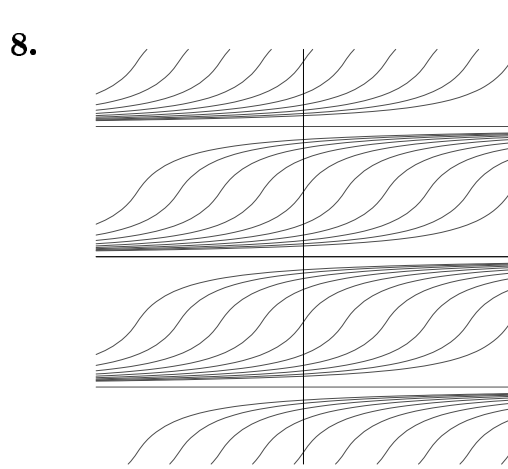
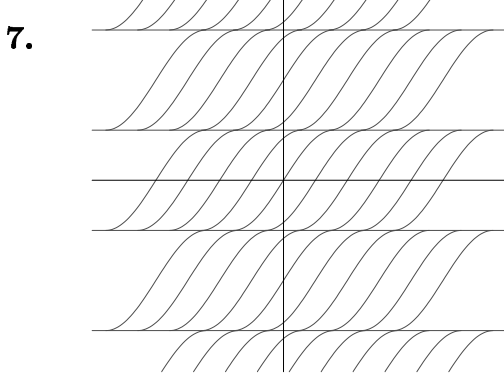
1. $y' = \cos(x - y)$ 2. $y' = \sin(x + y)$ 3. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ 4. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 5. $xy' = y \log \frac{y}{x}$
 6. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ 7. $y^2 + x^2 y' = x y y'$ 8. $x y' - y = \sqrt{y^2 + x^2}$ 9. $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$ 10. $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$
 11. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ 12. $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. substituce $y = x - z$. 2. substituce $y = z - x$. 3.-8. substituce $y = xz$. 9.-11. substitucí $x = t + a$, $y = z + b$ pro vhodná a, b převést na předchozí typ. 12. substitucí $y^2 = z$ převést na předchozí typ.

KVALITATIVNÍ ANALÝZA ŘEŠENÍ AUTONOMNÍCH ROVNIC
NAČRTNĚTE GRAF ŘEŠENÍ, ANIŽ EXPLICITNĚ VYŘEŠÍTE ROVNICI

1. $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$ 2. $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$ 3. $y' = \frac{1}{y} \sqrt{1-y^2}$ 4. $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$
 5. $y' = (y-1)^2 \sqrt[3]{y-2}(y-3)$ 6. $y' = \sqrt[3]{\sin y}$ 7. $y' = \sqrt{|\cos y|}$ 8. $y' = \sin^2 y$
 9. $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$





LINEÁRNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

1. $y' = \frac{2y}{x}$ 2. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ 3. $y' = \frac{y}{x} - 1$ 4. $y'x = y + x^2$ 5. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
 6. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ 7. $xy' + y = \log x + 1$ 8. $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ ($a \in \mathbb{R}$)
 9. $(2x+1)y' + y = x$ 10. $y' - y \operatorname{tg} x = \cot g x$ 11. $y' + y \cos x = \sin 2x$ 12. $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. 2. $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. 3. $y = -x \log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.
 4. $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. 5. $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.
 6. $y = -\frac{\cos 2x}{2 \cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. 7. $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.
 8. Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \left(\frac{1}{|a|} \log \frac{1+\sin \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{1-\sin \operatorname{arctg} \frac{x}{a}} + c \right)$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. 9. $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.
 10. $y = 1 + \frac{1}{2 \cos x} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. 11. $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. 12. $y = x^2e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

LINEÁRNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ 2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ 3. $y'' - 6y' + 13y = 0$ 4. $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$
 5. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 6. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}$ 7. $y'' + y = \operatorname{tg} x$ 8. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$
 9. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 10. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ 11. $y'' - 2y' + 5y = \cos x$ 12. $y''' + y'' = x$
 13. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$ 14. $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$ 15. $4y''' + y' = 3e^x + 2 \sin \frac{x}{2}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $y = ce^{-2x} + dx e^{-2x}$ **2.** $y = ce^x + de^{2x}$ **3.** $y = e^{3x}(c \cos 2x + d \sin 2x)$
4. $y = a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x + cx \cos \sqrt{3}x + dx \sin \sqrt{3}x$ **5.** $y = e^x(1 + e^{2x}) \operatorname{arctg} e^x + ce^x + de^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ **6.** $y = e^x \cdot \left(c + dx - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$, $x \in \mathbb{R}$ **7.** $y = -\cos x \log \frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c \cos x + d \sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **8.** $y = e^x \cdot (c + dx + \sqrt{4-x^2} + x \arcsin \frac{x}{2})$, $x \in (-2, 2)$ **9.** $y = -e^x \arcsin e^x - e^{2x} \operatorname{arctgh} \sqrt{1-e^{2x}} + ce^x + de^{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$ **10.** $y = \frac{1}{5}e^{4x} + ce^{-x} + de^{3x}$ **11.** $y = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + e^x(c \cos x + d \sin x)$ **12.** $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + a + bx + ce^{-x}$
13. $y = (\frac{x}{6} - \frac{5}{36})e^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{-x} + ce^{2x}$ **14.** $y = -\frac{1}{20} \sin 2x - \frac{3}{20} \cos 2x - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + ce^{-x} + de^{-2x}$ **15.** $y = \frac{3}{5}e^x - x \sin \frac{x}{2} + a + b \cos \frac{x}{2} + c \sin \frac{x}{2}$

LINEÁRNÍ ROVNICE - SNIŽOVÁNÍ ŘÁDU, VARIACE KONSTANT

1. $y'' - \frac{xy'}{x^2+1} + \frac{y}{x^2+1} = 0$ **2.** $y'' - x^2y' + (x^2-1)y = 0$ **3.** $y'' - \frac{2y}{x^2} = 5$ **4.** $y'' - \frac{1+x^2}{x}y' + 2y = 0$
5. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = x^3$ **6.** $y'' + \frac{1-x^2}{x}y' + \frac{y}{\log x} = 0$ **7.** $y'' + \frac{y}{x^2 \log x} = 0$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** FS tvoří $y_1 = x$ (lze uhodnout) a $y_2 = x \log(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$ (na \mathbb{R}). **2.** FS tvoří $y_1 = e^x$ (lze uhodnout) a $y_2 = e^x \int_0^x e^{\frac{1}{3}t(t^2-6)} dt$ (na \mathbb{R}). **3.** FS tvoří $y_1 = x^2$ a $y_2 = \frac{1}{x}$ (uhodnout lze kterékoliv z těchto dvou řešení), partikulární řešení je např. $y_0 = \frac{5}{3}x^2 \log|x|$ (z variace konstant vyjde $\frac{5}{3}x^2 \log|x| - \frac{5}{9}x^2$, přitom $-\frac{5}{9}x^2$ je řešením homogenní rovnice). Vše na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$. **4.** FS tvoří $y_1 = x^2$ (lze uhodnout) a $y_2 = x^2 \int_1^x \frac{1}{t^3} e^{t^2/2} dt$ (na $(0, +\infty)$; na $(-\infty, 0)$ ve vzorci pro y_2 bude \int_{-1}^x). **5.** FS tvoří $y_1 = x$ a $y_2 = x^5$, partikulární řešení je např. $y_0 = \frac{1}{4}x^5 \log|x|$. Vše na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$. **6.** FS tvoří $y_1 \log x$ (lze uhodnout) a $y_2 = \log x \int_2^x \frac{e^{t^2/2}}{t \log^2 t} dt$ (na $(1, +\infty)$; na $(0, 1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$). **7.** FS tvoří $y_1 = \log x$ (lze uhodnout) a $y_2 = \int_2^x \frac{1}{\log^2 t} dt$ (na $(1, +\infty)$; na $(0, 1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$).

EULEROVY ROVNICE

1. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$ **2.** $x^2y'' + xy' + y = x$ **3.** $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$ **5.** $x^3y''' + xy' - y = 0$ **6.** $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' - 6xy' + 12y = x^2$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $ax^3 + bx^7$ **2.** $\frac{1}{2}x + a \cos \log|x| + b \sin \log|x|$ **3.** $x \log^2|x| + ax + bx \log|x|$ **4.** $x^3 + x + x \log|x| + ax + bx^2$ **5.** $ax + bx \log|x| + cx \log^2|x|$ **6.** $\frac{1}{4}x^2 \log|x| + ax^2 + \frac{b}{x^2} + c|x|^{\sqrt{3}} + \frac{d}{|x|^{\sqrt{3}}}$

EXAKTNÍ ROVNICE, BERNOULLIHO ROVNICE

1. $2xyy' + y^2 = 0$ **2.** $(x+2y)y' + y + 3x^2 = 0$ **3.** $3xy^2y' + 2x + y^3 = 0$
4. $4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x + (x^4e^{x+y} + 2y)y' = 0$, $y(0) = 1$.
5. $2x \sin y + y^3e^x + (x^2 \cos y + 3y^2e^x)y' = 0$ **6.** $\frac{1}{2}y^2 + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$
7. $1 + (1+xy)e^{xy} + (1+x^2e^{xy})y' = 0$ **8.** $2x \cos y + 3x^2y + (x^3 - x^2 \sin y - y)y' = 0$, $y(0) = 2$
9. $3x^2 + 4xy + (2y + 2x^2)y' = 0$, $y(0) = 1$ **10.** $3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$, $y(2) = 1$
11. $ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x + (xe^{xy} \cos 2x - 3)y' = 0$, $y(0) = 0$
12. $xy' + y = y^2 \log x$ **13.** $y' + 2xy = 2x^3y^3$ **14.** $y' + \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$. **15.** $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$
16. $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ **17.** $x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$

VÝSLEDKY A NÁVODY. (Výsledky jsou uvedeny bez definičních oborů – v některých případech je tvar definičního oboru zřejmý, jindy nelze jednoduše explicitně vyjádřit.) 1. $xy^2 = c$ 2. $xy + y^2 + x^3 = c$ 3. $xy^3 + x^2 = c$ 4. $x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2 = 1$ 5. $x^2 \sin y + y^3 e^x = c$ 6. $\frac{1}{2}y^2 e^x + ye^{2x} = c$ (integrační faktor e^x) 7. $x + y + e^{xy} = c$ 8. $x^3 y + x^2 \cos y - \frac{1}{2}y^2 = 2$ 9. $x^3 + y^2 + 2x^2 y^2 = 1$ 10. $x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = 10$ (integrační faktor x) 11. $e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 = 1$ 12. $y(x) = \frac{1}{1+\log x+cx}$ 13. $y^2 = -\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2} + 2ce^{-x^2}}$ 14. $y(x) = \frac{1}{-1+3e^{1-\frac{1}{x}}}$, $x \in (\frac{1}{1+\log 3}, +\infty)$ 15. $y^3 = x^3 + cx^2$ 16. $y^4 = \sqrt{x+1} + c\sqrt{|x|}$ 17. $\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x} + 2e^{2x} \int \frac{e^{-2x}}{x} dx$

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

1. $z' + y = 0$, $z' - y' = 3z + y$ 2. $z' = -z + y + e^x$, $y' = z - y + e^x$ 3. $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}$, $z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ 4. $z' + 3z + y = 0$, $y' - z + y = 0$, $y(0) = z(0) = 1$ 5. $z' = y - 7z$, $y' + 2z + 5y = 0$ 6. $z' = 2y - 5z + e^x$, $y' = z - 6y + e^{-2x}$ 7. $z'' + y' + z = e^x$, $z' + y'' = 1$ 8. $u' = w + v - u$, $v' = w + u - v$, $w' = u + v + w$, ($u(0) = 1$, $v(0) = w(0) = 0$) 9. $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$, ($u(0) = -1$, $v(0) = 1$, $w(0) = 0$)

ŘEŠTE SOUSTAVY $y' = Ay + b(x)$, KDE

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$. 11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$. 12. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 17. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ 18. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. $z = \frac{3B-A}{4}e^x + \frac{A+B}{4}e^{-3x}$, $y = \frac{A-3B}{4}e^x + \frac{3A+3B}{4}e^{-3x}$ 2. $z = e^x + de^{-2x} + c$, $y = e^x - de^{-2x} + c$ 3. $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ 4. $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}$, $y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$, $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ 5. $z = (c-d)e^{-6x} \sin x + de^{-6x} \cos x$, $y = ce^{-6x} \cos x + (c-2d)e^{-6x} \sin x$ 6. $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{3}(c+d)e^{-4x} - \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + \frac{1}{3}(c+d)e^{-4x} + \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$ 7. $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ 8. $u = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{a-b}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{b-a}{2}e^{-2x}$, $w = \frac{c-a-b}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{3}e^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ 9. $u = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{b+c-2a}{3}e^{-x}$, $v = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+c-2b}{3}e^{-x}$, $w = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+b-2c}{3}e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$ 10. $y = (\frac{x-3}{4} + e^{2x}(bx+c), -\frac{3}{4} + e^{2x}(2bx+b+2c), -\frac{2x^2+x+2}{4} + e^{2x}(bx+a+c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. 11. $y = (e^{-x}(-1+6c+6bx), e^{-x}(15a+2bx+b+2c), e^{-x}(a+2bx+2c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. 12. $y = (6be^{-x} + 6ce^x, 10ae^{-x} + (3a+9c)e^x, 3be^{-x} + (6a+3c)e^x)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. 13. $y = (-\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x - 2a \cdot e^{3x}, \frac{73}{500} \cos x + \frac{89}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (ax^2 + bx + c), -\frac{43}{500} \cos x - \frac{49}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (-ax^2 - (2a+b)x - 4a - b - c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. 14. $y = ((a+3b)e^x \sin x + (3a-b)e^x \cos x, (2a+b)e^x \sin x + (a-2b)e^x \cos x + ce^{4x}, (2b-a)e^x \sin x + (2a+b)e^x \cos x + ce^{4x})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. 15. $y = (e^x(bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(4b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d), e^x(a+bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(2b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d))$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 16. $y = (e^{2x}(cx+d), e^{2x}(cx-c+d), e^{2x}(ax+b), e^{2x}((a+c)x - \frac{1}{3}a + b + d))$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 17. $y = (cx+d, (3c-\frac{5}{2}a)x + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, ax+b, \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 18. $y = (e^x(a \cos x + b \sin x) + c \cos x + d \sin x, \frac{1}{2}e^x((a+b) \cos x + (b-a) \sin x) + c \cos x + d \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x) + (c-d) \cos x + (c+d) \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x))$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

PRO NÁSLEDUJÍCÍ SOUSTAVY NAJDETE STACIONÁRNÍ ŘEŠENÍ A ROZHODNĚTE O JEJICH STABILITĚ

1. $z' = z - z^2 - 2zy$, $y' = 2y - 2y^2 - 3zy$. 2. $z' = -\beta zy + \mu$, $y' = \beta zy - \gamma y$. 3. $u' = au - buw$, $v' = -cv + dwv$, $w' = w + u^2 + v^2$. 4. $u' = -u - uv^2$, $v' = -v - u^2v$, $w' = 1 - w + u^2$. 5. $y' = z \sin \pi y$, $z' = zy^2 - z$. 6. $u' = u - v^2$, $v' = u^2 - v$, $w' = e^w - u$. 7. $z' = z - z^3 - zy^2$, $y' = 2y - y^5 - yz^4$. 8. $z' = \operatorname{tg}(z+y)$, $y' = z + z^3$ 9. $z' = e^y - z$, $y' = e^z - y$.