

1. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1. Řešte následující nerovnice v \mathbf{R} :

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 2) \geq 0, \quad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

2. Nakreslete graf funkce $f(x) = \left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right|$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Řešte rovnice v \mathbf{R} :

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2 \sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x).$$

4. Dokažte následující vztahy:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+3+\dots+n)^2.$$

5. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbf{R}$ platí $|a+b| \leq |a|+|b|$ a $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

6. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ dokažte, že platí $n \leq 2^n$.

7. Pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 3$, dokažte, že platí $n^2 \leq 2^n$.

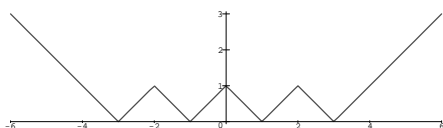
8. Vyjádřete funkce $\cos 5x$ a $\sin 5x$ pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

9. Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}$ sečtěte výraz $\sin x + \dots + \sin nx$.

VÝSLEDKY A NÁVODY

1. $(4, 6)$; $\langle \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), 1 \rangle \cup (2, \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}))$; $(-6, -3) \cup (\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}), \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}))$

2. Obrázek grafu



3. 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 3. rovnice: $4/3$ 4. Použijte matematickou indukci. 5. První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první. 8. Použijte Moivreovu větu nebo součtové vzorce. Výsledek: $\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$ a $\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$. 9. Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:

$$\frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(x/2)} \quad \text{pro } x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Pokud $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pak je součet roven nule.