Zkoušková písemka z Matematické analýzy 1, ZS 2021-22

Písemka číslo 2, verze 25.1.2022

(1)(14 bodů) Spočtěte limitu (pokud existuje) posloupnosti $\{a_n\}$ zadané rekurentně jako $a_1 = \frac{\pi}{2}$ a $a_{n+1} = \sin a_n$, $n \in \mathbb{N}$. (Návod: Dokažte, že funkce $f(x) = x - \sin x$ je kladná na $(0, \frac{\pi}{2}]$.)

(2)(14 bodů) Spočtěte jednostranné derivace a derivace funkce f ve všech bodech, kde existují, pokud

$$f(x) = \arccos\left(\frac{|2x|}{1+x^2}\right) .$$

(3)(20 bodů) Uvažujme reálnou funkci f danou jako

$$f(x) = \log\left(x + \frac{1}{x}\right) .$$

- Nalezněte definiční obor funkce f.
- Zjistěte intervaly monotonie a obor hodnot funkce f.
- Spočtěte druhou derivaci f všude, kde existuje.
- Nalezněte inflexní body funkce f.
- Nalezněte asymptotu funkce f v nekonečnu, pokud existuje.
- Načrtněte graf funkce f.

(4)(12 bodů) (a) Dokažte, že existuje funkce $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ taková, že existuje vlastní limita $\lim_{x\to 0_+} f'(x)$, existuje $f'_+(0)$ a neplatí rovnost $f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} f'(x)$.

(b) Dokažte, že existuje funkce $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ taková, že existuje derivace $f'_+(0)$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (0,1)$ a neexistuje $\lim_{x\to 0_+} f'(x)$.

II. 1.

- Ať $f(x) = x - \sin x$, $x \in [0, \infty)$. Pak $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

  Tedy f roste na $[0, \frac{\pi}{2}]$, tedy $f(x) > 0$, tedy $x > \sin x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

- Dále $a_n \in [0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$. Dk. indukcí: · $a_1 = \pi/2 \in [0, \pi/2]$.

  · $a_n \in [0, \pi/2] \Rightarrow a_{n+1} = \sin a_n \in [0, 1] \subset [0, \pi/2]$.

- $\{a_n\}$ klesá: $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$ z prvního a druhého bodu.

- Ať $a = \lim a_n$, pak $a \in [0, \pi/2]$. Platí $a_{n+1} = \sin a_n$, tedy ze spojitosti sinu máme $a = \sin a$. Dle prvního kroku je jediný kořen funkce f na $[0, \pi/2]$ hodnota 0. Tedy $\underline{a = 0}$.

...... ~~+5~~ +4

<u>Bodování</u>

- $f > 0$ na $(0, \pi/2]$
- $\{a_n\}$ dobře definovaná s hodnotami v $[0, \pi/2]$ ... +4

  .... +3
- $\{a_n\}$ monotónní ..... +3
- Výpočet $\lim a_n$

II. 2.

$f(x) = \arccos \frac{|2x|}{1+x^2}$, kde $g(x) = \frac{|2x|}{1+x^2}$, pak g vude spojitá,

Platí: $$g'(x) \begin{cases} = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(2(1+x^2) - 2x\,2x\right) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, & x>0 \\[2ex] = \frac{-2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} & \end{cases}$$

$$g'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} g'(x) = 2, \quad g'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} g'(x) = -2 \Rightarrow g'(0) \text{ neexistuje}$$

Tedy g nabývá maxima v 1 a $g(1) = 1$, tedy $g(\mathbb{R}) = [0,1]$, tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Dále $g(x) \in (0,1)$ pro $x \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$ a f spojitá.

$$f'(x) \begin{cases} = \frac{-1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\[2ex] \quad = \frac{(-2)(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{\underbrace{1+x^4+2x^2-4x^2}_{(1+x^2)^2}}} = \frac{(-2)(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}, & x>0,\ x\neq 1 \\[2ex] \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}, & x<0,\ x\neq -1 \end{cases}$$

- $f'_-(-1) = \lim_{x\to -1_-} f'(x) = \frac{2}{2}\cdot(-1) = -1$

$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1_+} f'(x) = \frac{2}{2}\cdot 1 = +1$

$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} f'(x) = 2$

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} f'(x) = -2$

$f'_-(1) = \lim_{x\to 1_-} f'(x) = -1$

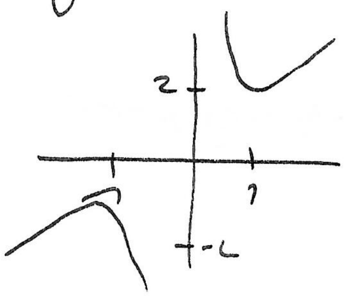
$f'_+(1) = \lim_{x\to 1_+} f'(x) = 1$

Bodování:
- $D(f)$, spojitost ... 4
- f' pro $x \notin \{-1,0,1\}$ ... ~~6~~ 5
- f' v $\{-1,0,1\}$ ... ~~6~~ 5

II. 3.

$f(x) = \log(x + 1/x)$, kde $g(x) = x + 1/x$, $x \neq 0$. Pak g spojitá mimo 0.

a) $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, tedy g má v -1 lok. max., v 1 lok. minimum.



Tedy $g((0,\infty)) = [2,\infty)$, protože $D(f) = (0,\infty)$.

$g((-\infty,0)) = (-\infty,-2]$

b) Víme: f rostoucí, g klesá na $(0,1]$, roste na $[1,\infty)$, tedy f klesá na $(0,1]$, roste na $[1,\infty)$. Tedy ze spojitosti f máme $f((0,\infty)) = [\log 2, \infty)$, neboť $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$.

c) $f'(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{x^3+x}$, $x > 0$.

$$f''(x) = \frac{1}{(x^3+x)^2}\left(2x(x^3+x) - (x^2-1)(3x^2+1)\right)$$

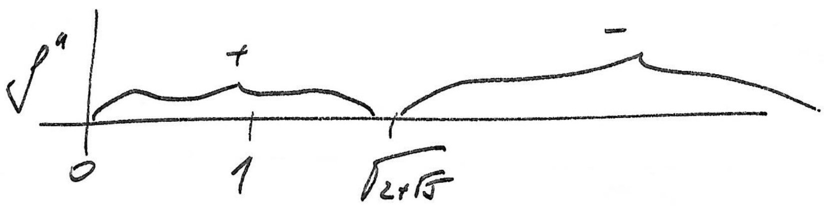
$$= \frac{1}{(x^3+x)^2}\left(2x^4+2x^2-3x^4-x^2+3x^2+1\right)$$

$$= \frac{1}{(x^3+x)^2}\left(-x^4+4x^2+1\right) = \frac{-1}{(x^3+x)^2}\left(x^4-4x^2-1\right)$$

$$y^2-4y-1=0 \iff y_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2} = 2\pm\sqrt{5}$$

$x > 0 \Rightarrow$ ~~$x_{1,2}$~~ $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$

Pak f''



d) Tedy: f konvexní na $(0, \sqrt{2+\sqrt{5}})$, konkávní na $(\sqrt{2+\sqrt{5}}, \infty)$

v $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ je inflexe.

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+\frac{1}{x})}{x} = 0$, neboť

$$0 \le \frac{\log(x+1/x)}{x} \le \frac{\log(x+1)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

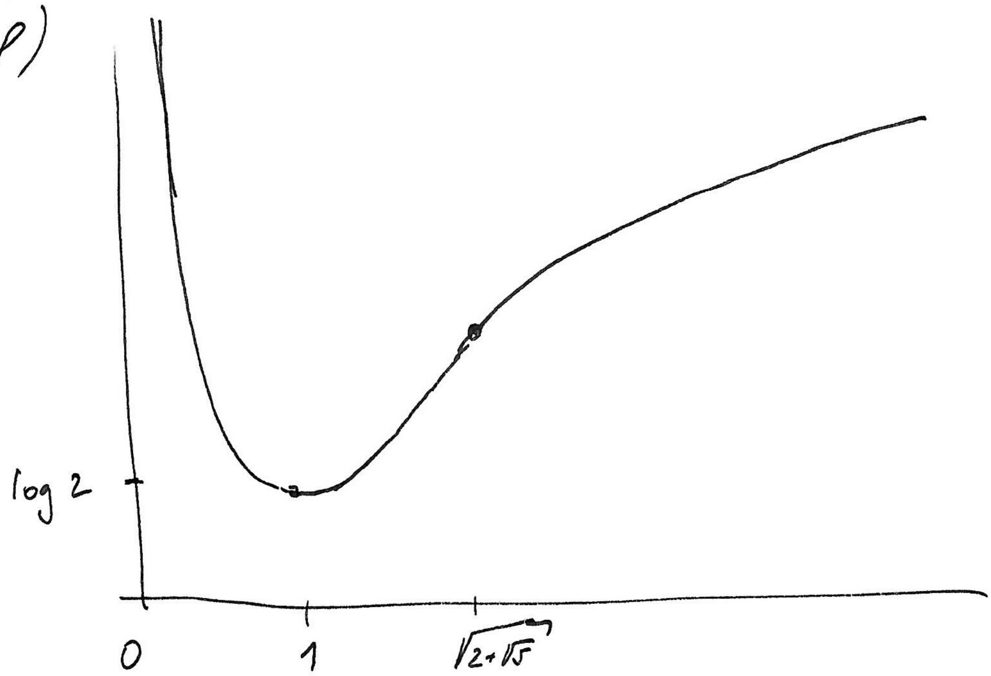
pro velká x.

Ale $\lim_{x\to\infty} f(x) - 0x = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, tedy asymptota neexistuje.

Bodování:

- $D(f)$, spojitost f ... +3
- limity v 0, ∞ ... +1
- f', monotonie, $R(f)$ ... +1+2+1
- f'' ... +3
- inflexe ... +3
- asymptota ... +3
- graf ... +3

f)



II. 4

a) Uvažujme $f(x) = \begin{cases} 1 \dots x \in (0,1) \\ 0 \dots x = 0 \end{cases}$. Pak

$f'(x) = 0,\ x \in (0,1)$, tedy $\lim\limits_{x \to 0_+} f'(x) = 0$.

Ale $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{f(x) - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Tedy $f'_+(0) \neq \lim\limits_{x \to 0_+} f'(x)$.

b) Ať $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0 \quad \dots \quad x = 0 \end{cases}$

Pak: $\cdot\ f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0_+} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$\cdot\ f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},\ x \in (0,1)$

Pak $\lim\limits_{x \to 0_+} f'(x)$ neexistuje, neboť pro:

- $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ platí $f'(x_n) = 2x_n \sin \frac{1}{x_n} - \underbrace{\cos \frac{1}{x_n}}_{=0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
- $y_n = \dfrac{1}{\pi + 2n\pi}$ platí $f'(y_n) = 2y_n \sin \frac{1}{y_n} - \underbrace{\cos \frac{1}{y_n}}_{-1} \to 1$

Tedy z Heineho $\lim\limits_{x \to 0_+} f'(x)$ neexistuje.

<u>Dohodování:</u> a) .... .. +4

b) funkce ... +4

zdůvodnění ... +4