Zkoušková písemka z Matematické analýzy 2, LS 2021-22

Písemka číslo 3, verze 2022

(1)(16 bodů) Rozviňte funkci $\operatorname{arctg}(\sin x)$ do Taylorova polynomu pátého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x) - x\cos(ax)}{x^5}$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(2)(16 bodů) Ukažte, že existuje Riemannův integrál

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}\, dx,$$

a spočtěte jej.

(3)(16 bodů) Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^t}\,.$$

(4)(12 bodů) Dokažte následující tvrzení: Nechť f je spojitá reálná funkce na $\mathbb{R}$ splňující

$$\int_{-c}^{c} f = 0, \quad c \in (0,\infty).$$

Pak f je lichá.

① $\cdot \operatorname{arctg} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + o(y^5)$

$\cdot \operatorname{arctg}(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}(\sin x)^3 + \frac{1}{5}(\sin x)^5 + o(x^5) =$

$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^3 + \frac{1}{5}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^5 + o(x^5)$

$= x + x^3\left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}\right) + x^5\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3}\,3\left(\frac{-1}{3!}\right) + \frac{1}{5}\right) + o(x^5)$

$= x + x^3\left(-\frac{1}{2}\right) + x^5\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + o(x^5)$

$\cdot\ x\cos(ax) = x\left(1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} + o(x^4)\right) =$

$= x - \frac{a^2x^3}{2} + x^5\frac{a^4}{4!} + o(x^5)$

$\cdot\ \frac{\text{čitatel}}{x^5} = \frac{1}{x^5}\left((x-x) + x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}\right) + x^5\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{a^4}{24}\right) + o(x^5)\right)$

$= \frac{a^2-1}{2}\,\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{a^4}{24}\right) + \frac{o(x^5)}{x^5}$

Tedy: $a^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ limita $= \infty$

$a^2 - 1 < 0 \Rightarrow$ limita $= -\infty$

$a^2 = 1 \Rightarrow$ limita $= \frac{1}{5!} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}$

Bodování:
- arctg (sin) ... 7
- x cos (ax) ... 3
- zlomek ... 3
- závěr ... 3

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)} = I$

· integrand je spojitý na $[0,1]$ $\Rightarrow$ existuje Riemannův integrál a rovná se Newtonovu.

· $\sqrt[4]{x}=t$ $\quad\longrightarrow\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2+2t)\,4t^3}{(t^2+1)(t+1)} = 4\int_0^1 \frac{t^4(t+2)}{(t^2+1)(t+1)} =$

$x=t^4$

$dx=4t^3\,dt$

· $t^5+2t^4 \;:\; t^3+t^2+t+1 = t^2+t-2$

$\underline{-t^5-t^4-t^3-t^2}$

$t^4-t^3-t^2$

$\underline{-t^4-t^3-t^2-t}$

$-2t^3-2t^2-t$

$\underline{+2t^3+2t^2+2t+2}$

$t+2$

$$= 4\int_0^1\left(t^2+t-2+\frac{t+2}{(t^2+1)(t+1)}\right) = 4\left[\left(\frac13+\frac12-2\right)+\int_0^1\frac{t+2}{(t^2+1)(t+1)}\right]$$

· $\displaystyle\frac{t+2}{(t^2+1)(t+1)} = \frac{At+B}{t^2+1}+\frac{C}{t+1} = \frac12\left(\frac{3-t}{t^2+1}+\frac{1}{t+1}\right)$

$t+2 = (At+B)(t+1)+C(t^2+1) = t^2(A+C)+t(A+B)+(B+C)$

$\underline{t=-1} \Rightarrow 1 = C\cdot 2 \Rightarrow C = 1/2 \Rightarrow A+C=0 \Rightarrow A=-1/2$

$\Rightarrow A+B=1 \Rightarrow B = 1-A = \frac32$

$$\int_0^1\frac{t+2}{(t^2+1)(t+1)} = \frac12\int_0^1\frac{1}{t+1}+\frac12\int_0^1\frac{3}{1+t^2}-\frac14\int_0^1\frac{2t}{t^2+1} =$$

$$= \frac12\log 2+\frac32\,\frac{\pi}{4}-\frac14\left[\log(t^2+1)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}+\frac{3\pi}{8}-\frac14\log 2$$

· $I = 4\left[-\frac76+\frac{3\pi}{8}+\frac{\log 2}{4}\right] = \frac{3\pi}{2}-\frac{14}{3}+\log 2$

Bodování:

- spojitost -- 1
- $4/x = \varepsilon$ -- 2
- dělení -- 5
- rozklad -- 4
- integrace -- 4
- závěr -- 1

(3) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^t}$

- $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1, 2\} \Rightarrow F.S. = \{e^t, e^{2t}\}$

- Varian konstant: $y = ce^t + de^{2t}$

$$y' = \underbrace{c'e^t + d'e^{2t}}_{=0} + ce^t + 2de^{2t} = ce^t + 2de^{2t}$$

$$y'' = c'e^t + 2d'e^{2t} + ce^t + 4de^{2t}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^t(c - 3c + 2c) + e^{2t}(4d - 6d + 2d) + c'e^t + 2d'e^{2t}$$

$$= c'e^t + 2d'e^{2t}$$

$\Rightarrow c'e^t + d'e^{2t} = 0 \Rightarrow d'e^{2t} = \frac{1}{1+e^t} \Rightarrow d' = \frac{1}{(1+e^t)e^{2t}}$

$c'e^t + 2d'e^{2t} = \frac{1}{1+e^t} \Rightarrow c' = -d'e^t = -\frac{1}{(1+e^t)e^t}$

- $-c = +\int \frac{1}{e^t(1+e^t)} \rightsquigarrow \int \frac{1}{y(1+y)} \cdot \frac{1}{y} = \int \left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right) =$

$e^t = y$

$t = \log y$

$dt = \frac{1}{y}\,dy$

$$\frac{1}{y^2(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y+1}$$

$$1 = Ay(y+1) + B(y+1) + Cy^2$$

$y = 0 \Rightarrow B = 1$

$y = -1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow A = -1$

$= \log(y+1) - \frac{1}{y} - \log y \Rightarrow -c = \log(1+e^t) - e^{-t} - t$

$c = t + e^{-t} - \log(1+e^t)$

- $d = \int \frac{1}{(1+e^t)e^{2t}} \rightsquigarrow \int \frac{1}{(1+y)y^2} \cdot \frac{1}{y} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{1+y}\right) =$

$e^t = y$

$t = \log y$

$dt = \frac{1}{y} dy$

$$\frac{1}{y^3(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y^3} + \frac{D}{1+y}$$

$$1 = Ay^2(1+y) + B(y)(1+y) + C(1+y) + Dy^3$$

$$= y^3(A+D) + y^2(B+A) + y(B+C) + C$$

$\Rightarrow C = 1 \Rightarrow B = -1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow D = -1$

$= \log y + \frac{1}{y} + \frac{-1}{2} y^{-2} - \log(1+y)$

$\Rightarrow d = t + e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \log(1+e^t)$

řešení: $y = ce^t + de^{2t} + (t + e^{-t} - \log(1+e^t))e^t$
$+ (t + e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \log(1+e^t))e^{2t}$, $c, d \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

~~$= ce^t + de^{2t} +$~~

Bodování:
- F. S. ... 2
- sestavení soustavy ... 3
- vyjádření c', d' ... 2
- spočtení c ... 4
- spočtení d ... 4
- závěr ... 1

(5) Položme $F(x) = \int_0^x f$, $x \in \mathbb{R}$. Pak z věty víme, že

$F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Z předpokladu máme pro $x > 0$

rovnost $0 = \int_{-x}^{x} f = \int_{-x}^{0} f + \int_0^x f = \int_0^x f - \int_0^{-x} f =$

$= F(x) - F(-x)$. Tedy $F(x) = F(-x)$, $x \in (0, \infty)$.

Po zderivování máme $f(x) = F'(x) = (F(-x))' = F'(-x)(-1) = f(-x)(-1)$

pro $x > 0$. Tedy $f(x) = -f(-x)$, $x > 0$.

Ze spojitosti f platí $f(0) = \lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} (-f(-x)) =$

$= - \lim_{y \to 0_-} f(y) = -f(0)$.

Tedy pro každé $x \geq 0$ platí $f(x) = -f(-x)$. Tedy f lichá.

Bodování: 12 bodů