Zkoušková písemka z Matematické analýzy 2, LS 2021-22

Písemka číslo 5, verze 2022

(1)(16 bodů) Nalezněte Taylorův polynom čtvrtého řádu se středem v bodě 0 funkce $\cos(e^x - 1)$ a spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(e^x - 1) - \cos x + ax^3}{x^4}$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(2)(16 bodů) Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccotg} x)^a \, dx$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(3)(16 bodů) Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 - y)$$

na intervalu $(0, \infty)$.

(4)(12 bodů) Dokažte následující tvrzení: Řada reálných čísel $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je absolutně konvergentní právě tehdy, když pro každou omezenou posloupnost reálných čísel $\{b_n\}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x-1) - \cos x + a x^3}{x^4}$$

$\cdot$ $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$

$\cdot$ $\cos(e^x-1) = 1 - \frac{1}{2}(e^x-1)^2 + \frac{1}{24}(e^x-1)^4 + o(x^4) =$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$\Rightarrow$ $T_0^{\cos(e^x-1),4}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$ (+7)

čitatel $= x^3(a - 1/2) - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)$ (+3)

$$\frac{\text{čitatel}}{x^4} = \frac{a - 1/2}{x} - \frac{7}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}$$

Tedy: limita $= \begin{cases} \text{neexistuje} & \dots\ a \neq 1/2 \\ -7/24 & \dots\ a = 1/2 \end{cases}$ (+6)

2) $$\underbrace{\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}} (\operatorname{arccotg} x)^a \, dx}_{f(x)}$$

- f spojitá, kladná na $(1,\infty)$, je třeba vyšetřit v $1, \infty$. +2

- $\underline{1:}$ · $h(x) = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$, pak $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\log x}{x-1} (\operatorname{arccotg} x)^a \xrightarrow[x \to 1_+]{} (\operatorname{arccotg} 1)^a \in (0,\infty)$

  · h konverguje u $1 \Rightarrow f$ konverguje u 1. +1

- $\underline{\infty:}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{1/x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

  Vezmi $h(x) = \frac{\log x}{x^{a+3/2}}$, pak

  $$\frac{f(x)}{h(x)} = \left(\frac{\operatorname{arccotg} x}{1/x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)^{3/2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1 \in (0,\infty)$$

  Pak f má konv. integrál u $\infty \Leftrightarrow h$ má konv. integrál u $\infty \Leftrightarrow a + 3/2 > 1 \Leftrightarrow a > -1/2$

  +1

Tedy $\int_1^\infty f$ konverguje $\Leftrightarrow a > -1/2$

3) $y' = \frac{1}{x}(y^2 - y)$, $x > 0$

(+2)

Pak $I = (0,\infty)$, $J = (-\infty, 0), (0,1), (1,\infty)$, singulární řešení jsou (+2)

$y = 0, y = 1$ na $(0,\infty)$

pro I a J jako výše máme:

po integraci

$$\frac{y'}{y^2-y} = 1/x \Rightarrow \underbrace{\log\left|\frac{y-1}{y}\right|}_{G} = \log|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$ (+3)

Ať $c \in \mathbb{R}$ fix.

Ať $I = (0,\infty)$, $J = (-\infty, 0)$, pak $G(J) = \log((1,\infty)) = (0,\infty)$

Tedy: $\log x + c > 0$

$x > e^{-c}$

Řešení: $1 - 1/y = kx$, $k > 0$ $(k = e^{+c})$

$-1/y = kx - 1$ (+2)

$1/y = 1 - kx$

$y = \frac{1}{1-kx}$, $x \in (1/k, \infty)$

Ať $I = (0,\infty)$, $J = (0,1)$, pak $G(J) = \log((0,\infty)) = \mathbb{R}$

Řešení: $1/y - 1 = kx$, $k > 0$ $(k = e^{c})$

$1/y = kx + 1$ (+2)

$y = \frac{1}{kx+1}$, $x \in (0, \infty)$

Ať $I = (0,\infty)$, $J = (1,\infty)$, pak $G(J) = \log((0,1)) = (-\infty, 0)$

Tedy: $\log x + c < 0$

$x < e^{-c}$

(+2)

Řešení: $1 - 1/y = kx$, $k > 0$

$y = \frac{1}{1-kx}$, $x \in (0, 1/k)$

(+3)

Lepení: nelze, díky limitám v krajních bodech a lokální lipschitzovskosti funkce $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}(y^2 - y)$ v y na $(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

4) "$\Rightarrow$" Ať $\sum a_n$ abs. konverguje a (b_n) omezená. Pak existuje $K \geq 0$

+6 $|b_n| \leq K$ pro $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\sum |a_n b_n| \leq \sum K|a_n| = K \sum |a_n| < \infty$,

tedy $\sum |a_n b_n|$ konverguje absolutně, tedy $\sum a_n b_n$ konverguje

"$\Leftarrow$" Položme $b_n = \operatorname{sgn} a_n$. Pak (b_n) omezená, tedy

+6 $\sum a_n b_n$ konverguje. Ale $\sum a_n b_n = \sum a_n \operatorname{sgn} a_n = \sum |a_n|$.

Tedy $\sum a_n$ konverguje absolutně.