Zkoušková písemka z Matematické analýzy 3, ZS 2022-23

Písemka číslo 1, verze 2023

(1)(16 bodů) Nalezněte maximální řešení soustavy

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot y, \quad \text{pro které platí} \quad y(0,0,0) = (1,2,3).$$

(2)(16 bodů) Uvažujte rovnice

$$\arctan(x^2 + y) + \tan(u + y^2) + v = \frac{\pi}{4},$$
$$\sin(xv) + e^{u+y} = 1.$$

Ukažte, že tyto rovnice definují na jistém okolí bodu $[0,1]$ funkce $[x,y] \mapsto u(x,y)$ a $[x,y] \mapsto v(x,y)$, které splňují $u(0,1) = -1$, $v(0,1) = 0$.

Nechť $H(x,y) = [(u(x,y))^2, \cos(v(x,y))]$. Ukažte, že $H'(0,1)$ existuje a nalezněte její reprezentující matici v tomto bodě.

(3)(16 bodů) Nechť $f(x,y) = x + y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 + y^3 - 2xy < 0, x > 0, y > 0\}$. Nalezněte $\sup f(M)$ a $\inf f(M)$.

(4)(12 bodů) Pro funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označme graf funkce f jako $G(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon y = f(x)\}$.

(a) Dokažte, že je-li f spojitá na $\mathbb{R}$, je $G(f)$ uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$.

(b) Dokažte, že je-li $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ taková, že $G(f)$ je uzavřená množina v $\mathbb{R} \times [0,1]$, je f spojitá.

(c) Nalezněte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nespojitou takovou, že $G(f)$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$.

1) $\tilde{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \tilde{y}$, $\tilde{y}(0,0,0) = (1,2,3)$

λ - Kalkulus:

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda-2 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda+2 \\ \lambda-2 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda-2 & -1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{2}(2-\lambda) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda+2 \\ 0 & 2-\lambda-2 & -4+\frac{1}{2}(2-\lambda)(2+\lambda) \\ 0 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda+2 \\ 0 & -\lambda & -2-\frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda+2 \\ 0 & -\lambda & -2-\frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2}{2}+\lambda-1 \end{pmatrix}$$

+4

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

- $-\frac{z''}{2} + z' - z = 0$

$z'' - 2z' + 2z = 0$

$z(t) = a e^{t} \cos t + b e^{t} \sin t = e^{t}(a \cos t + b \sin t)$, $a, b \in \mathbb{R}$

+3

- $-y' = 2z + \frac{z''}{2} \rightarrow y' = -\frac{z''}{2} - 2z$

$z' = e^{t}(a \cos t + b \sin t) + e^{t}(-a \sin t + b \cos t) =$

$= e^{t}(\cos t\,(a+b) + \sin t\,(b-a))$

$z'' = e^{t}(\cos t\,(a+b) + \sin t\,(b-a)) + e^{t}(-\sin t\,(a+b) + \cos t\,(b-a))$

$= e^{t}(\cos t\,(2b) + \sin t\,(-2a))$

$$y' = -\frac{z''}{2} - 2z = e^t\big(\cos t\,(-b-2a) + \sin t\,(a-2b)\big)$$

$$\Rightarrow y(t) = (-2a-b)\,\frac{e^t}{2}(\cos t + \sin t) + (a-2b)\,\frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + c$$

$$= \frac{e^t}{2}\big[\cos t\,(-2a-b-a+2b) + \sin t\,(-2a-b+a-2b)\big] + c$$

$$= \frac{e^t}{2}\big(\cos t\,(-3a+b) + \sin t\,(-a-3b)\big) + c \qquad (+4)$$

$$\Rightarrow x = -y - \frac{z'}{2} - z = -\frac{e^t}{2}\big(\cos t\,(-3a+b) + \sin t\,(-a-3b)\big) - c$$

$$- \frac{e^t}{2}\big(\cos t\,(a+b) + \sin t\,(b-a)\big)$$

$$- \frac{e^t}{2}\big(\cos t\,(2a) + \sin t\,(2b)\big)$$

$$= -\frac{e^t}{2}\big(\cos t\,(2b) + \sin t\,(-2a)\big) - c$$

$$= -e^t\big((\cos t)\,b + (\sin t)(-a)\big) - c \qquad (+3)$$

Obecné řešení:
$$\begin{pmatrix} -e^t(b\cos t - a\sin t) - c \\ \frac{e^t}{2}\big(\cos t\,(-3a+b) + \sin t\,(-a-3b)\big) + c \\ e^t(a\cos t + b\sin t) \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

$\tilde{y}(0,0,0) = (1,2,3)$: $\underline{3 = a}$, neboť $z(0) = 3$ $\qquad (+2)$

$2 = y(0) \Rightarrow \frac{1}{2}(-9+b) + c = 2$ $\qquad b + c = -1 \Rightarrow b = -1-c$

$1 = x(0) \Rightarrow -b - c = 1$ $\qquad -9 + b + 2c = 4$

$-9 - 1 - c + 2c = 4$

$\underline{c = 14}$

$\underline{b = -15}$

Teď:
$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} -e^t(-15\cos t - 3\sin t) - 14 \\ \frac{e^t}{2}\big(\cos t\,(-24) + \sin t\,(42)\big) + 14 \\ e^t(3\cos t - 15\sin t) \end{pmatrix}$$

2) AE. $F(x,y,u,v) = \left(\operatorname{arctg}(x^2+y) + \operatorname{tg}(u+y^2) + v - \pi/4,\ \sin(xv) + e^{u+y} - 1\right)$

· bod je $a = [0,1,-1,0]$. (+1)

Pak · $F(a) = 0$ · $F \in C^\infty(B(a,r))$ pro nějaké $r > 0$.

$$D_{u,v}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(u+y^2)} \cdot 1 & 1 \\ e^{u+y} & x \cdot \cos(xv) \end{pmatrix} \quad (+1)$$

$$\Rightarrow D_{u,v}F(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{determinant je nenulový} \quad (+1)$$

(+1)

$\Rightarrow$ existuje okolí $U \ni [0,1]$, $V \ni [-1,0]$, že $\forall \alpha \in U\ \exists!\beta \in V: F(\alpha,\beta) = 0$

Pak $[x,y] \mapsto [u(x,y), v(x,y)]$ jsou hledané funkce, jsou třídy $C^\infty(U)$. (+1)

$H(x,y) = [(u(x,y))^2, \cos(v(x,y))]$ je na U třídy C^∞, tedy $H'([0,1])$ existuje. (+1) Platí:

$$H'(x,y) = \begin{pmatrix} 2u(x,y)\, u_x(x,y) & 2u(x,y)\, u_y \\ -(\sin v(x,y))\, v_x(x,y) & -\sin(v(x,y))\, v_y(x,y) \end{pmatrix} \quad (+1)$$

· hledáme u_x, u_y, v_x, v_y v $[0,1]$:

Derivace rovnic podle x:

$$\frac{1}{1+(x^2+y)^2}\,2x + \frac{1}{\cos^2(u+y^2)}\,u_x + v_x = 0$$

$$\cos(vx)(\cancel{v} + x v_x) + e^{u+y}(u_x) = 0$$

(+4)

Dosadíme bod $[\overset{x}{0}, \overset{y}{1}, \overset{u}{-1}, \overset{v}{0}]$: $\quad u_x + v_x = 0$

$$u_x = 0$$

$\Rightarrow u_x(0,1) = v_x(0,1) = 0$

Derivace podle y:

$$\frac{1}{1+(x^2+y)^2}\cdot 1 + \frac{1}{\cos^2(u+y^2)}(u_y + 2y) + v_y = 0$$

$$(\cos(xv))(x v_y) + e^{u+y}(u_y + 1) = 0$$

(+4)

Dosadíme $[0,1,-1,0]$: $\quad \frac{1}{2} + 1(u_y + 2) + v_y = 0$

$$u_y + 1 = 0$$

$\Rightarrow u_y = -1 \Rightarrow v_y = -\frac{3}{2}$

$H'(0,1)$ má reprezentující matici:

(+1)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\cdot(-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3+y^3-2xy<0,\ x>0,\ y>0\}$, $f(x,y) = x+y \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

· $y=x \Rightarrow 0 > x^3+\cancel{y}^3-2x^2 = 2x^3-2x^2 = 2x^2(x-1)$ dáva, že

$D = \{[x,x] : x \in (0,1)\} \subset M$, teda $M \neq \emptyset$ (+1)

$F = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3+y^3-2xy \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

· F uzavretá ✓ $\overline{M} \subset F$ ✓

· F ohraničená: $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $r \geq 0$, $\alpha \in [0, \pi/2]$

$\Big\}\Rightarrow f$ nadobúda na F extrémy (+1)

$\Rightarrow r^3\cos^3\alpha + r^3\sin^3\alpha - 2r^2\sin\alpha\cos\alpha \leq 0$ (+2)

$r \leq \underbrace{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}}_{\varphi(\alpha)} \Rightarrow \varphi \in C([0,\pi/2]) \Rightarrow$ hodnota r je ohraničená

· $F_1 = \{x^3+y^3-2xy<0,\ x>0,\ y>0\} = M \Rightarrow \nabla f = (1,1) \Rightarrow$ extrém nie na M (M otvorená) (+1)

$F_2 = \{x^3+y^3-2xy<0,\ x=0,\ y>0\} = \emptyset$

$F_3 = \{x^3+y^3-2xy<0,\ x>0,\ y=0\} = \emptyset$

$F_4 = \{x^3+y^3-2xy=0,\ x>0,\ y>0\}$

$F_5 = \{x^3+y^3-2xy=0,\ x=0,\ y=0\} = \{[0,0]\}$ (+1)

· F_4: $g(x,y) = x^3+y^3-2xy$, $f(x,y) = x+y$

I.: $\nabla g = (3x^2-2y,\ 3y^2-2x) = 0 \iff 3x^2 = 2y$, $y = \frac{3}{2}x^2$ $\Rightarrow 3\cdot\frac{9}{4}x^4 - 2x = 0$

$x\left(\frac{27}{4}x^3-2\right) = 0$

(+2) $\Rightarrow$ $x=0 \Rightarrow y=0$ nie v F_4

$x^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow x = \frac{2}{3},\ y = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\frac{4}{9} = 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \neq 0$

$\Rightarrow$ teda body prvého druhu nie sú

II.: $1 + \lambda(3x^2-2y) = 0$

$1 + \lambda(3y^2-2x) = 0$

$x^3+y^3-2xy = 0$

$\lambda[3y^2-3x^2-2x+2y] = 0$

$\lambda[3(y-x)(y+x)-2(y-x)] = 0$

$\lambda(y-x)(3(y+x)-2) = 0$

$\nearrow$ $3(y+x)+2=0$, $y>0, x>0$ -- nemá řešení

$\searrow$ $y=x \Rightarrow x^3+x^3-2x^2=0 \Rightarrow x=1, y=1$ (+1)

$2x^2(x-1)=0$

Tedy $\max f(F) = f([1,1]) = 2$, $\min f(F) = f([0,0]) = 0$ (+1)

Protože $[1,1] \in \bar{D} \subset \bar{M}$, je $2 = f([1,1]) \leq \sup f(\bar{M}) \leq \max f(F) = 2$

$[0,0] \in \bar{D} \subset \bar{M}$ $\cdot$ $0 = f([0,0]) \geq \inf f(\bar{M}) \geq \inf f(F) = 0$.

(+3)

Tedy $2 = \sup f(M)$, $0 = \inf f(M)$.

4) a) Ať $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá.

Ať $\{[x_n, f(x_n)]\} \subset G(f)$ konverguje k $[x,y] \in \mathbb{R}^2$. Pak $x_n \to x$ z Heineovy věty víme $f(x_n) \to f(x)$. Tedy $y = f(x)$ a $f(x_n) \to y$.

(+4)

$[x,y] = [x, f(x)] \in G(f)$. Tedy $G(f)$ uzavřená množina.

b) Pokud ex. $x_0 \in \mathbb{R}$, že $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, z Heineovy věty existuje $\eta > 0$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, že $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \eta$. Jelikož $f(x_n) \subset [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, lze vybrat $(n_k) \subset \mathbb{N}$ rostoucí, že $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = y$. Pak $x_{n_k} \to x_0$, tj. $f(x_{n_k}) \to y$, $f(x_0) \neq y$

(+5)

$[x_{n_k}, f(x_{n_k})] \in G(f)$, $[x_{n_k}, f(x_{n_k})] \to [x_0, y]$ a $[x_0, y] \notin G(f)$.

Tedy $G(f)$ není uzavřený.

c) Ať $f(x) = \begin{cases} 1/x & .. \ x \neq 0 \\ 0 & .. \ x = 0 \end{cases}$. Pokud $[x_n, 1/x_n] \to [x,y]$, pak $x \neq 0$ z aritmetiky limit. Tedy $x_n \to x$, $1/x_n \to 1/x$, tj. $y = 1/x$ a $[x,y] \in G(f)$.

(+3)

Tedy $G(f)$ uzavřený.