Zkoušková písemka z Matematické analýzy 3, ZS 2022-23

Písemka číslo 2, verze 2023

(1)(16 bodů) Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} y.$$

Napište tvar nějaké fundamentální matice.

(2)(16 bodů) Uvažujte rovnici

$$\cos(x^2 + y) + \sin(xy) = -1.$$

Ukažte, že tato rovnice definuje na jistém okolí bodu π funkci $y \mapsto \varphi(y)$, která splňuje $\varphi(\pi) = 0$.

Ukažte, že φ má v π lokální extrém. Je φ na nějakém okolí bodu π konvexní?

(3)(16 bodů) Nechť $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x = y^2 + 1\}$ a $B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon y = 2x + 3\}$. Nalezněte $\operatorname{dist}(A, B)$.

(4)(12 bodů) Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$.

(a) Dokažte, že $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

(b) Dokažte, že je-li A uzavřená nebo otevřená, je ∂A řídká.

(c) Nalezněte $A \subset \mathbb{R}$, že ∂A není řídká.

1) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda & -2\lambda+4 \\ 0 & -3\lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \cdot 2$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda^2-8\lambda+4 & 8 \\ 0 & -3\lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix} -1/8(\lambda+2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda^2-8\lambda+4 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{8}(\lambda-2)^3 & 0 \end{pmatrix}$$

+4

$$(\lambda^2-8\lambda+4)\left(\frac{-1}{8}\right)(\lambda+2) - 3\lambda+2 = -\frac{1}{8}\left(\lambda^3-8\lambda^2+4\lambda+2\lambda^2-16\lambda+8\right) - 3\lambda+2$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\lambda^3-6\lambda^2-12\lambda+8\right) + \frac{1}{8}\left(-24\lambda+16\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda-8-24\lambda+16\right) = \frac{1}{8}\left(-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8\right) = -\frac{1}{8}(\lambda-2)^3$$

+3

- $y(t) \in \operatorname{span}\{e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}\}$, d.h.: $y(t) = ae^{2t} + bte^{2t} + ct^2e^{2t}$
- $z(t) = -\frac{1}{8}(y'' - 8y' + 4y) =$

$$y' = 2ae^{2t} + be^{2t} + 2bte^{2t} + c2te^{2t} + ct^2 2e^{2t} =$$

$$= e^{2t}\left(ct^2 + t(2c+2b) + (2a+b)\right)$$

$$y'' = 2e^{2t}\left(ct^2 + t(2c+2b) + (2a+b)\right) + e^{2t}(2ct + 2c + 2b) =$$

$$= e^{2t}\left(2ct^2 + t(4c+4b+2c) + (4a+2b+2c+2b)\right)$$

$$= e^{2t}\left(2ct^2 + t(6c+2b) + (4a+4b+2c)\right)$$

1) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} y$

$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda-1 \\ \\ -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & (\lambda-1)^2-1 & -2(\lambda-1)+2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -3(\lambda-1)-1 & -\lambda-5+6 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda & -2\lambda+5 \\ 0 & -3\lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2(\lambda-2) \\ \end{matrix} \frac{1}{-2(\lambda-2)}(-\lambda-2) \sim$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda-1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= -\frac{1}{8}\Big(e^{2t}\big(2ct^2 + t(6c+2b) + (4a+4b+2c)\big)$$

$$- e^{2t}\big(8ct^2 + t(-16c+16b) - (16a+8b)\big)$$

$$+ e^{2t}\big(4a + 4bt + 4ct^2\big)\Big)$$

$$= -\frac{1}{8}e^{2t}\Big(t^2(2c-8c+4c) + t(4b+16c+16b+6c+2b) + \big(4a+16a+8b+4a+4b+2c\big)\Big)$$

$+4$

$$= -\frac{1}{8}e^{2t}\big(t^2(-2c) + t(22b+22c) + (24a+10b+2c)\big)$$

$$x = -2z + y' - y =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{2t}\big(t^2(-2c) + t(22b+22c) + (24a+10b+2c)\big)$$

$$+ e^{2t}\big(ct^2 + t(2c+2b) + (2a+b)\big) \qquad +3$$

$$- e^{2t}\big(ct^2 + tb + a\big)$$

Za (a,b,c) dosadíme e^1, e^2, e^3 a máme fundamentální matici:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{2t}(24) - e^{2t}\cdot 1 & -\frac{1}{4}e^{2t}(22t+10) + e^{2t}(t+1) & -\frac{1}{4}e^{2t}(-2t^2+22t+2) + e^{2t}(2t) \\ e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t} \\ -\frac{1}{8}e^{2t}(24) & -\frac{1}{8}e^{2t}(t\cdot 22+10) & -\frac{1}{8}e^{2t}(-2t^2+22t+2) \end{pmatrix}$$

$+2$

2) Ať $F(y,x) = \cos(x^2+y) + \sin(xy) + 1$, pak $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Dále máme bod $[\tilde{y},\tilde{x}] = [\pi, 0]$. Pak

(+1)

· $F(\tilde{y},\tilde{x}) = \cos(0^2+\pi) + \sin(0\pi) + 1 = \cos\pi + 1 = 0$

· $\frac{\partial F}{\partial x}(\pi, 0) = \left[-(\sin(x^2+y))2x + (\cos(xy))y\right]_{[\pi,0]} =$

(+2)

$= -\sin(0^2+\pi)2\cdot 0 + \cos(0\pi)\pi = \pi \neq 0$

$\Rightarrow$ existuje $U \ni \pi$, $V \ni 0$ okolí, že pro $y \in U$ existuje právě jedno (+1)

$x \in V$ splňující $F(y,x) = 0$. Pak $x = \varphi(y)$ je funkce třídy $C^\infty(U)$. (+1)

· Funkce φ splňuje rovnici

$$\cos(\varphi^2(y) + y) + \sin(\varphi(y)y) = -1 \quad \text{na } U.$$

derivace

$\Rightarrow -\sin(\varphi^2+y)(2\varphi\varphi'+1) + \cos(\varphi y)(\varphi' y + \varphi) = 0$

$[y,x] = [\pi,0]$: $-\sin(0+\pi)(2\cdot 0\cdot\varphi'(\pi)+1) + \cos(0\cdot\pi)(\varphi'(\pi)\pi + 0) = 0$

$$+\pi\varphi'(\pi) = 0$$

$$\varphi'(\pi) = 0 \quad (+4)$$

druhá derivace

$\Rightarrow -\cos(\varphi^2+y)(2\varphi\varphi'+1)^2 - \sin(\varphi^2+y)(2(\varphi')^2 + 2\varphi\varphi'')$

$- \sin(\varphi y)(\varphi' y + \varphi)^2 + \cos(\varphi y)(\varphi'' y + \varphi' + \varphi') = 0$

$[y,x] = [\pi,0]$: $-\cos(0+\pi)(1)^2 - \sin(0+\pi)(2\cdot 0^2 + 2\cdot 0\cdot\varphi''(\pi))$

$- \sin(0)(0\cdot\pi + 0)^2 + \cos(0)(\varphi''(\pi)\pi + 2\cdot 0) = 0$

$\Rightarrow 1 + \varphi''(\pi)\pi = 0$ (+5)

$$\varphi''(\pi) = -1/\pi$$

Tedy: $\varphi(\pi) = 0$, $\varphi'(\pi) = 0$, $\varphi''(\pi) = -1/\pi \Rightarrow$ ze spojitosti druhé derivace

φ máme, že φ je na jistém okolí π striktně konkávní. (+2)

Tedy φ má v π ostré lokální maximum.

3) $A = \{x = y^2+1\}$ $B = \{y = 2x+3\}$

Tedy máme body : $[y^2+1, y]$, $y \in \mathbb{R}$

$[x, 2x+3]$, $x \in \mathbb{R}$

Minimalizujeme vzdálenost, tedy $\operatorname{dist}^2(a,b)$:

· $f(x,y) = (y^2+1-x)^2 + (y-2x-3)^2$ ~~Xhledat~~, hledáme minimum. pro $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

· $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y^2+1-x)(-1) + 2(y-2x-3)(-2) \\ 2(y^2+1-x)2y + 2(y-2x-3)(\cdot 1) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $(y^2+1-x)(-1) - 2(y-2x-3) = 0$ (+3)

$$\underline{2(y^2+1-x)2y + 2(y-2x-3) = 0}$$

$(y^2+1-x)(4y-1) = 0$

I. $y^2+1-x = 0 \Rightarrow y = 2x+3 \Rightarrow 1-x+(2x+3)^2 = 0$

$4x^2+5x+10 = 0$

(+2) $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot4\cdot10}}{8}$ nemá řešení

II. $y = 1/4$, $x = y^2+1 = \frac{1}{16}+1 = \frac{17}{16}$ $\Rightarrow$ $a = [\frac{17}{16}, 1/4] \in A$

· $(\frac{1}{16}+1-x)(-1) - 2(1/4-2x-3) = 0$

$x - \frac{17}{16} - 1/2 + 4x + 6 = 0$ (+4)

$5x = \frac{17}{16} + \frac{2}{2} - 6 = \dfrac{17+8-96}{16} = -\dfrac{71}{16}$

$x = -\dfrac{71}{80}$ $y = 2x+3 = -\dfrac{71}{40} + 3 = \dfrac{-71+120}{40} = \dfrac{49}{40}$

$b = [-\frac{71}{80}, \frac{49}{40}]$

Označme $d = \operatorname{dist}(a,b) = \sqrt{\left(\frac{17}{16}+\frac{71}{80}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{49}{40}\right)^2}$

• $\lim_{|x|,|y|\to\infty} f(x,y) = \infty$; $(y^2+1-x)^2 + (y-(2x+3))^2 =$

$= y^4 + (1-x)^2 + 2y^2(1-x) + y^2 + (2x+3)^2 - 2y(2x+3)$

$= y^4 + x^2 - 2x + 1 + 2y^2 - 2y^2x + y^2 + 4x^2 + 9 + 12x - 4yx - 6y$

$= y^4 + 3y^2 + 5x^2 + 10x + 10 - 2y^2x - 4yx - 6y \geq$

$\Big[\ ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ $\qquad yx \leq \frac{1}{2}(y^2+x^2)$

$y^2x \leq \frac{1}{2}(y^4+x^2)$ $\qquad 4yx \leq 2y^2 + 2x^2$

$2y^2x \leq y^4 + x^2$ $\qquad -4yx \geq -2y^2 - 2x^2 \ \Big]$

$-2y^2x \geq -y^4 - x^2$

+4

$\geq \cancel{y^4} + 3y^2 + 5x^2 + 10x + 10 - 6y \cancel{- y^4} - x^2 - 2y^2 - 2x^2$

$= y^2 + 2x^2 + 10x - 6y + 10 \geq (y^2 - 6y) + (2x^2 + 10x) \xrightarrow[|x|,|y|\to\infty]{} \infty$

• Ať $R > 0$, že pro $|x| \geq R$, $|y| \geq R$ platí $f(x,y) > d^2$, a to uvnitř $[-R,R] \times [-R,R]$, a to uvnitř

Pak f nabývá minima na $[-R,R]\times[-R,R]$. Tedy musí platit $Df = 0$ v kritickém bodě (na hranici je $f > d^2$). Tedy musí platit $Df = 0$ v bijetím bodě množiny $(-R,R)\times(-R,R)$ a ten je pouze jeden. Tedy v tomto bodě nabývá f minima. Proto se vzdálenost A, B nabývá.

+3

4) a) Ať $A \subset (X, \rho)$. Pak

$\cancel{\ }$ $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

+3 $\quad \partial(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{(X \setminus (X \setminus A))} = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}$ $\Bigg\} \Rightarrow \partial A = \partial(X \setminus A)$

b) Pokud dokážeme, že ∂F je řídká pro F uzavřenou, máme pro U otevřenou (pak $\partial U \overset{a)}{=} \partial(X \setminus U)$ řídká.

Tedy stačí ověřit řídkost pro F uzavřenou.

+5 Pak ale $\partial F = \overline{F} \cap \overline{(X \setminus F)} \subset \overline{F} = F$ a ∂F uzavřená množina.

Pokud $B(x,r) \subset \partial F$ pro nějaké $x \in X$ a $r > 0$, pak $B(x,r) \subset \partial F \subset F$, tedy $x \in \operatorname{Int} F$, což je spor s $x \in \partial F$.

Tedy ∂F neobsahuje žádnou kouli, je řídká.

c) Ať $A = \mathbb{Q}$, pak $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

+4