Zkoušková písemka z Matematické analýzy 3, ZS 2022-23

Písemka číslo 3, verze 2023

(1)(16 bodů) Nalezněte maximální řešení soustavy

$$5z' - 2y' + 4z - y = e^{-t}$$
$$z' + 8z - 3y = 5e^{-t}.$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 3$ a $z(0) = 2$.

(2)(16 bodů) Uvažujte zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako

$$F(x, y) = [(|x| + |y|)\log(1 + x^2 + y^2), \operatorname{sgn}(x + y)\sqrt{x^2 + y^2}].$$

(a) Zjistěte, zda existuje derivace $F'(1, 1)$, a v případě, že ano, spočtěte ji.
(b) Zjistěte, zda existuje derivace $F_1'(0, 0)$, a v případě, že ano, spočtěte ji.
(c) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0, 0)$, pokud existuje.

(3)(16 bodů) Nalezněte $\sup f(M)$ a $\inf f(M)$, kde $f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 - x + y - y^2)$ a $M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$.

(4)(12 bodů) Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
(a) Nechť splňuje $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ na $\mathbb{R}^2$. Dokažte, že je pak f konstantní.
(b) Nalezněte neprázdnou otevřenou množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ a nekonstantní funkci f na A, která splňuje $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ na A.

1) $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-t}$

$z' + 8z - 3y = 5e^{-t}$ $\quad \big\uparrow -5$

$-2y' - 36z + 14y = -24e^{-t}$ $\quad +3$

$$\left.\begin{aligned} y' + 18z - 7y &= 12e^{-t} \\ z' + 8z - 3y &= 5e^{-t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 7 & -18 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12e^{-t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 7 & +18 & 12e^{-t} \\ -3 & \lambda + 8 & 5e^{-t} \end{array}\right) \begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{1}{3}(\lambda - 7) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{3}(\lambda-7)(\lambda+8)+18 & 12e^{-t} - \frac{40}{3}e^{-t} \\ -3 & \lambda + 8 & 5e^{-t} \end{array}\right) \sim$$

$\frac{1}{3}(\lambda - 7)(5e^{-t}) = \frac{5}{3}(-e^{-t} - 7e^{-t}) = -\frac{40}{3}e^{-t}$

$\frac{1}{3}\left((\lambda-7)(\lambda+8) + 54\right) = \frac{1}{3}\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 & -4e^{-t} \\ -3 & \lambda + 8 & 5e^{-t} \end{array}\right) \quad +4$$

$z'' + z' - 2z = -4e^{-t}$ $\qquad z(t) \in$ F.S. $\{e^{t}, e^{-2t}\}$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ $\qquad +1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

partikulární řešení hledáme jako $z(t) = a e^{-t}$

$z' = -a e^{-t}$ $\quad z'' = a e^{-t}$

$\Rightarrow z'' + z' - 2z = a e^{-t} - a e^{-t} - 2a e^{-t} = -2a e^{-t} \overset{?}{=} -4 e^{-t}$

$a = 2$ (+4)

$\Rightarrow z(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-2t} + 2 e^{-t}$

$y(t) = \frac{1}{-3}(5e^{-t} - z' - 8z) = -\frac{1}{3}\left(\underline{5e^{-t}} - \underline{\alpha e^{t}} + 2\beta e^{-2t} + \underline{2e^{-t}} - \underline{8\alpha e^{t}} - 8\beta e^{-2t} - \underline{16 e^{-t}} \right)$

$= -\frac{1}{3}\left(-9 e^{-t} - 9\alpha e^{t} - 6\beta e^{-2t}\right) = 3e^{-t} + 3\alpha e^{t} + 2\beta e^{-2t}$ (+2)

$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = 3 + 3\alpha + 2\beta \Rightarrow 3\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$z(0) = 2 \quad\quad 2 = 2 + \alpha + \beta \quad\quad \alpha + \beta = 0$

(+2)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

2) $F(x,y) = [(|x|+|y|)\log(1+x^2+y^2),\ \operatorname{sgn}(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]$

a) Na okolí $[1,1]$ platí rovnost

$$F_1(x,y) = [(x+y)\log(1+x^2+y^2),\ \sqrt{x^2+y^2}],$$

(+1)

tedy F je C^1 na okolí $[1,1]$, proto platí na okolí $[1,1]$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \log(1+x^2+y^2) + (x+y)\dfrac{1}{1+x^2+y^2}2x & \log(1+x^2+y^2) + (x+y)\dfrac{1}{1+x^2+y^2}2y \\ \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

(+3)

Tedy
$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} \log 3 + 2\cdot\dfrac{2}{1+2} & \log 3 + \dfrac{2\cdot 2}{1+2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
(+1)

b) Máme $F_1(x,y) = (|x|+|y|)\log(1+x^2+y^2)$. Pak

- $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F_1(x,0)-F_1(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\log(1+x^2)}{x} = 0$ (+3)
- $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{F_1(0,y)-F_1(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{|y|\log(1+y^2)}{y} = 0$

kandidát na $F_1'(0,0)$ je vektor $(0,0)$. Počítejme:

$$\lim_{(x,y)\to 0}\left|\frac{F_1(x,y)-F_1(0,0)-(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \lim\left|\frac{(|x|+|y|)\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq$$

(+4)

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}|\log(1+x^2+y^2)|\cdot\sqrt{2} = 0$$ tedy $F_1'(0,0) = (0,0)$

c) $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{F_2(0,y)-F_2(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sgn}(y)\sqrt{y^2}-0}{y} =$

$= \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{y} = 1$ (+4)

3) Počítáme $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2 - x + y - y^2)$

$[x,y,z] \in [-1,1] \times [-1,1] \times \mathbb{R}$.

Mějme $g(x,y) = x^2 - x + y - y^2$, $[x,y] \in [-1,1]^2$

Pak: • $\nabla g = (2x-1, 1-2y) = 0 \iff [x,y] = [1/2, 1/2]$ (+2)

• hranice: • $y=1$, $x \in [-1,1]$: $h(x) = x^2 - x \Rightarrow h'(x) = 2x-1$

$\Rightarrow [1/2, 1], [-1,1], [1,1]$

• $y=-1$, $x \in [-1,1]$: $h(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow h'(x) = 2x-1$

$\Rightarrow [1/2, -1], [-1,-1], [1,-1]$

• $x=1$, $y \in [-1,1]$: $h(x) = y - y^2 \Rightarrow h'(x) = 1-2y$ (+6)

$\Rightarrow [1, 1/2], [1,-1], [1,1]$

• $x=-1$, $y \in [-1,1]$: $h(x) = 2 + y - y^2 \Rightarrow h'(x) = 1-2y$

$\Rightarrow [-1, 1/2], [-1,1], [-1,-1]$

bod		hodnota
$[-1,1]$	..	2
$[-1,-1]$	..	$2 + (-1) - (1) = 0$
$[1,-1]$	..	-2
$[1,1]$	...	0
$[1/2, 1]$	..	$1/4 - 1/2 = -1/4$
$[1/2, -1]$	..	$1/4 - 1/2 - 1 - 1 = -2 - 1/4 = -\frac{9}{4}$
$[1, 1/2]$	..	$1/2 - 1/4 = 1/4$
$[-1, 1/2]$	..	$2 + 1/2 - 1/4 = 2 + 1/4 = \frac{9}{4}$
$[1/2, 1/2]$	..	$1/4 - 1/2 + 1/2 - 1/4 = 0$

$\Rightarrow \max g([-1,1]^2) = 9/4$

$\min g([-1,1]^2) = -9/4$

(+4)

Protože $f(x,y,z) = e^{-z^2} g(x,y)$ splňuje $e^{-z^2} \in (0,1]$, $[x,y,z] \in [-1,1]^2 \times \mathbb{R}$, pak

tedy

$$-\frac{9}{4} \le -\frac{9}{4} e^{-z^2} \le f(x,y,z) \le e^{-z^2} \cdot \frac{9}{4} \le \frac{9}{4},$$ (+4)

tedy: $\sup f(M) = \frac{9}{4}$

$\inf f(M) = -\frac{9}{4}$

5) a) Ať $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ na $\mathbb{R}^2$. Pak vezmeme $b \in \mathbb{R}^2$, $a = 0$.

Pak dle lemmatu 12.3. existují $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^2$, že

+7

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi^1)(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi^2)(b_2 - a_2) =$$
$$= 0.$$

Tedy $f(b) = f(a)$. Proto f konstantní.

b) Ať $A = B(0,1) \cup B(10,1)$ a $f = \begin{cases} 0 & \text{.. na } B(0,1) \\ 1 & \text{.. na } B(10,1). \end{cases}$

+5

Pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ na A, f není konstantní.