ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 3, ZS 2022-23

PÍSEMKA ČÍSLO 4, VERZE 2023

(1)(16 bodů) (a) Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$y' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 13 \\ -8 & -7 & -21 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} y.$$

(b) Určete všechna řešení soustavy, která mají v $+\infty$ limitu $[0,0,0]$.

(2)(16 bodů) Uvažujte rovnice

$$x^2 + y^5 + u^3 + v = 6$$
$$xy^3 + u^2 + v^2 = 3.$$

Ukažte, že tyto rovnice určují na nějakém okolí bodu $[2,1]$ funkce $(x,y) \mapsto u(x,y)$ a $(x,y) \mapsto v(x,y)$ splňující $u(2,1) = 1$ a $v(2,1) = 0$.

Nechť zobrazení H je definováno jako $H = [H_1, H_2]$, kde $H_1 = u$, $H_2 = v$. Rozhodněte, jestli je H difeomorfizmus na nějakém okolí bodu $[2,1]$. Spočtěte $D_v H_1(2,1)$, je-li $v = (2,1)$.

(3)(16 bodů) Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $f_q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je definována jako

$$f_q(x,y,z) = y^2 + z(y-1) + z^2 + qz(y+1) + q^2 z^2 + x(x+2y).$$

Ukažte, že existuje $q_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro $q > q_0$ nemá f_q lokální extrém.

(4)(12 bodů) Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^2$ jsou disjunktní a neprázdné.

(a) Pokud A uzavřená a B kompaktní, ukažte, že se nabývá vzdálenosti $\operatorname{dist}(A,B)$.

(b) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}^2$ neprázdné disjunktní takové, že $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

(c) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}^2$ neprázdné disjunktní uzavřené takové, že $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

1) $y' = \begin{pmatrix} -8 & -7 & -21 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} y$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-6 & -5 & -13 \\ 8 & \lambda+7 & 21 \\ -2 & -2 & \lambda-6 \end{pmatrix} \overset{\cdot 4 \,/\, \frac{1}{2}(\lambda-6)}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda+1 & \frac{1}{2}(\lambda^2-12\lambda+10) \\ 0 & \lambda-1 & 4\lambda-3 \\ -2 & -2 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

$\ulcorner \frac{1}{2}(\lambda-6)^2 - 13 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 12\lambda + 36 - 26) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 12\lambda + 10)$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2-4\lambda+4) \\ 0 & \lambda-1 & 4\lambda-3 \\ -2 & -2 & \lambda-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & \lambda-1 & 4\lambda-3 \\ -2 & -2 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

+5

$\ulcorner \frac{1}{2}(\lambda^2 - 12\lambda + 10 + 8\lambda - 6) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

$\Rightarrow z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$ +1

$\Rightarrow y' - y = 3z - 4z' = \underline{3ae^{2t}} + 3bte^{2t} - \underline{8ae^{2t}} - \underline{4be^{2t}} - 8bte^{2t}$

$= e^{2t}(-5a - 4b) + te^{2t}(-5b)$

$= e^{2t}(-5bt - 5a - 4b)$

$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow y$ řešení homogenní rovnice je $y = ce^t$

$y_p = e^{2t}(\alpha t + \beta) \Rightarrow y_p' = 2e^{2t}(\alpha t + \beta) + e^{2t}\alpha = e^{2t}(2\alpha t + 2\beta + \alpha)$

$y_p' - y_p = e^{2t}(2\alpha t + 2\beta + \alpha) - e^{2t}(\alpha t + \beta) = e^{2t}(\alpha t + \beta + \alpha)$

$\Rightarrow y_p' - y_p =$ pravá strana $= e^{2t}(-5bt - 5a - 4b)$ dává

$\underline{\alpha = -5b}$ $\quad \beta + \alpha = -5a - 4b$

$\underline{\beta = -5a - 4b + 5b = b - 5a}$

$\Rightarrow y = ce^t + e^{2t}(-5bt + b - 5a)$ +5

$$-2x - 2y + z' - 6z = 0$$

$$x = \frac{z'}{2} - 3z - y = \frac{1}{2}\left(2ae^{2t} + be^{2t} + 2bte^{2t}\right) - 3ae^{2t} - 3bte^{2t}$$

$$- ce^{t} - e^{2t}(-5bt + b - 5a)$$

$$= ae^{2t} + \frac{b}{2}e^{2t} + bte^{2t} - 3ae^{2t} - 3bte^{2t}$$

(+1)

$$- ce^{t} + 5bte^{2t} - be^{2t} + 5ae^{2t}$$

$$= e^{2t}\left(a + \frac{b}{2} - 3a - b + 5a\right) + te^{2t}(b - 3b + 5b) - ce^{t}$$

$$= e^{2t}\left(3a - \frac{b}{2}\right) + te^{2t}(3b) - ce^{t}, \quad t \in \mathbb{R},\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

- $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow c = 0,$ [illegible] $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ (+1)

2) $x^2 + y^5 + u^3 + v = 6$

$xy^3 + u^2 + v^2 = 3$ $\quad [x, y, u, v] = [2, 1, 1, 0]$

$F = [x^2 + y^5 + u^3 + v - 6,\ xy^3 + u^2 + v^2 - 3]$, $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ třídy C^∞, (+1)

$F(2,1,1,0) = (0,0)$ (+1)

$$D_{u,v}F = \begin{pmatrix} 3u^2 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}_{\substack{x\ y\ u\ v \\ [2,1,1,0]}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} -2 \neq 0$$ (+2)

tedy $\exists U \ni [2,1]\ \exists V \ni [1,0] : \forall [x,y] \in U\ \exists! [u,v] \in V : F(x,y,u,v) = (0,0)$ (+1)

Máme tak funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy $C^\infty(U)$. (+1)

6

$$\begin{aligned} x^2 + y^5 + u^3 + v &= 6 \\ xy^3 + u^2 + v^2 &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{d_x} \begin{aligned} 2x + 3u^2 u_x + v_x &= 0 \\ y^3 + 2u u_x + 2v v_x &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{dosadíme}}$$

$$\to \begin{aligned} 4 + 3u_x + v_x &= 0 \\ 1 + 2u_x + 0 &= 0 \end{aligned} \to \begin{aligned} 2u_x &= -1 \\ u_x &= -1/2 \end{aligned} \to v_x = -4 - 3u_x = -4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$ (+3)

$$\xrightarrow{d_y} \begin{aligned} 5y^4 + 3u^2 u_y + v_y &= 0 \\ x3y^2 + 2u u_y + 2v v_y &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{dosadíme}} \begin{aligned} 5 + 3u_y + v_y &= 0 \\ 6 + 2u_y + 0 &= 0 \end{aligned}$$ (+3)

$\to u_y = -3$, $v_y = -5 - 3u_y = -5 + 9 = 4$

6

$$H'(2,1) = \begin{pmatrix} -1/2 & -3 \\ -5/2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} -1/2 \cdot 4 - 3 \cdot \frac{5}{2} = -2 - \frac{15}{2} \neq 0$$ (+2)

$\Rightarrow H$ je na nějakém okolí $[2,1]$ difeomorfismus

$\cdot\ D_v H_1(2,1) = \langle (-1/2, -3), (2,1) \rangle = -1 - 3 = -4$ (+2)

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - 2(1-5t) - 4t\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + 6t\right)$$

$$\cancel{\left(\frac{5}{2}, -5, 1\right)} \quad \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(c_2 t e^{2t}\right)' = c_2 e^{2t}(2t+1)$$

3) $f_q = y^2 + z(y-1) + z^2 + qz(y+1) + q^2z^2 + x(x+2y)$

$Df_q = \left(2x+2y,\ 2y + z + qz + 2x,\ y-1+2z+q(y+1)+2q^2z\right)$ (+3)

$Df_q = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow z + qz = 0 \begin{cases} \nearrow z = 0 \\ \searrow q = -1 \end{cases}$ zajímá nás pro q [illegible]

$\rightarrow y - 1 + q(y+1) = 0 \quad \rightarrow x = \frac{q-1}{q+1}$

$y(1+q) + q - 1 = 0$

$y = \frac{1-q}{1+q}$

$\Rightarrow \left[\frac{q-1}{q+1}, \frac{1-q}{1+q}, 0\right]$ (+4)

$$f_q'' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1+q \\ 0 & 1+q & 2+2q^2 \end{pmatrix} -$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+q \\ 0 & 1+q & 2+2q^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+q \\ 0 & 1+q & 2+2q^2 \end{pmatrix} +$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+q & 2q^2+q+3 \\ 0 & \overset{1+q}{\cancel{2q^2+q+3}} & 2+2q^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2q^2+2q+4 & 2q^2+q+3 \\ 0 & 2q^2+q+3 & 2+2q^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2q^2+2q+4 & 2q^2+q+3 \\ 2q^2+q+3 & 2+2q^2 \end{pmatrix} \Big\downarrow \; -\frac{1}{2q^2+2q+4}\,(2q^2+q+3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2q^2+2q+4 & 2q^2+q+3 \\ 0 & 2+2q^2-\dfrac{(2q^2+q+3)^2}{2q^2+2q+4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2q^2+2q+4 & 0 \\ 0 & -\dfrac{q^2+2q+1}{2q^2+2q+4} \end{pmatrix}$$

$$\Big[(2+2q^2)(2q^2+2q+4)-(2q^2+q+3)^2 =$$

$$= \Big(\cancel{4q^2}+\underline{4q}+8+\cancel{4q^4}+\cancel{4q^3}+\cancel{8q^2}-\cancel{4q^4}-\cancel{2q^3}-\cancel{6q^2}-\cancel{2q^3}-\cancel{q^2}-\underline{3q}$$
$$-\cancel{6q^2}-\underline{3q}-9\Big)$$

$$= -q^2-2q-1\Big]$$

Máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2q^2+2q+4 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{q^2+2q+1}{2q^2+2q+4} \end{pmatrix},$$

tedy

+9

matice indefinitní. Tedy

pro q dostatečně velká

v příslušných bodech není extrém.

5) a) Ať $(a_n) \subset A$, $(b_n) \subset B$, že $\rho(a_n, b_n) \to \text{dist}(A, B) = d$

Ať $b_{n_k} \to b \in B$ (z kptnosti). Pak

$\rho(a_{n_k}, 0) \le \rho(a_{n_k}, b_{n_k}) + \rho(b_{n_k}, b) + \rho(b, 0)$, přičemž

pravá strana konverguje, tedy levá strana omezená.

(+5) Ať $a_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} a \in \mathbb{R}^2$ (z omezenosti). Pak $a \in A$ z uzavřenosti

a $d = \lim_{l\to\infty} \rho(a_{n_{k_l}}, b_{n_{k_l}}) = \rho(a, b)$. Tedy

vzdálenost se nabývá.

(+3)

b) $A = (0,1) \times \{0\}$; $B = (1,2) \times \{0\}$

(+5)

c) $A = \{(x, 1/x);\ x > 0\}$ $B = [0, \infty) \times \{0\}$