# Zkoušková písemka z Matematické analýzy 3, ZS 2022-23

## Písemka číslo 5, verze 2023

(1)(16 bodů) (a) Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$x' = -4x - 4y + 2e^{2t}$$
$$y' = 6x + 6y + 2t.$$

(b) Nalezněte maximální řešení splňující $x(0) = 1$ a $y(0) = 0$.

(2)(16 bodů) Uvažujte funkci $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy $C^1$. Nechť $u(0,0) = 1$, $\nabla u(0,0) = (1,2)$. Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je definována jako

$$F(x,y) = [\sin x \cdot u(x,y), u(x,xy), u(x+y,y)].$$

Nechť $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má v bodě $(0,1,1)$ reprezentující matici pro $G'(0,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť $H = G \circ F$. Ukažte, že $H'(0,0)$ existuje a nalezněte její reprezentující matici. Spočtěte $D_v H_1(0,0)$, kde $H_1$ je první složka $H$ a $v = (1,1)$.

(3)(16 bodů) Nalezněte normu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kde norma matice $A$ je definována jako

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|\colon \|x\| \leq 1\}.$$

(4)(12 bodů) Nechť $(X,\rho)$ je neprázdný metrický prostor.

(a) Nechť $F_1, \dots, F_n$ jsou kompaktní množiny v $X$. Dokažte, že $\bigcup_{i=1}^n F_i$ je kompaktní.

(b) Nechť $\{F_i\colon i \in I\}$, kde $I$ je neprázdná množina, jsou kompaktní množiny v $X$. Dokažte, že $\bigcap_{i\in I} F_i$ je kompaktní.

(c) Pokud $X$ je kompaktní, ukažte, že existují body $x, y \in X$ splňující $\operatorname{diam} X = \rho(x,y)$.

1) $x' = -4x - 4y + 2e^{2t}$

$y' = 6x + 6y + 2t$

$$(\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda+4 & +4 & 2e^{2t} \\ -6 & \lambda-6 & 2t \end{array}\right) \xleftarrow{\frac{1}{6}(\lambda+4)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{6}(\lambda^2-2\lambda) & \frac{1}{6}(2+8t)+2e^{2t} \\ -6 & \lambda-6 & 2t \end{array}\right)$$

$\frac{1}{6}(\lambda+4)(\lambda-6)+4 = \frac{1}{6}(\lambda^2-2\lambda-24+24) = \frac{1}{6}(\lambda^2-2\lambda)$

$\frac{1}{6}(\lambda+4)(2t)+2e^{2t} = \frac{1}{6}(2+8t)+2e^{2t}$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda^2-2\lambda & 2+8t+12e^{2t} \\ -6 & \lambda-6 & 2t \end{array}\right)$$

+5

$y'' - 2y' = 0$ $\quad$ F.S. $= \{e^{2t}, 1\}$ $\quad$ +2

$\lambda^2 - 2\lambda = 0$ $\quad$ $y_p = \overset{at+bt^2}{(a+bt)t} + cte^{2t}$

$\lambda(\lambda-2) = 0$ $\quad$ $y_p' = a + 2bt + ce^{2t} + 2cte^{2t}$

$y_p'' = 2b + 2ce^{2t} + 2ce^{2t} + 4cte^{2t}$

$y_p'' - 2y_p' = 2b + \cancel{2ce^{2t}} + 2ce^{2t} + \cancel{4cte^{2t}} - 2a - 4bt - \cancel{2ce^{2t}} - \cancel{4cte^{2t}}$

$= 2b - 2a - 4bt + 2ce^{2t} = 2 + 8t + 12e^{2t}$

$\Rightarrow 2c = 12$ $\quad$ $-4b = 8$ $\quad$ $-4 - 2a = 2$

$\underline{c = 6}$ $\quad$ $\underline{b = -2}$ $\quad$ $-2a = 6$

$\underline{a = -3}$ $\quad$ +4

$\Rightarrow y_p = (-3-2t)t + 6te^{2t}$

$\Rightarrow y = ae^{2t} + b - (-\cancel{3}\, 2t^2) + 6te^{2t}$

$$-6x + (y' - 6y) = 2t$$

$$6x = y' - 6y - 2t = -2t - 6\left[(-3t - 2t^2) + 6te^{2t} + ae^{2t} + b\right]$$

$$+\left[2ae^{2t} + 6e^{2t} + 12te^{2t} - 3 - 4t\right]$$

$$x = \frac{1}{6}(-2t) - \left((-3t - 2t^2) + 6te^{2t} + ae^{2t} + b\right) \qquad +3$$

$$+ \frac{1}{6}\left(2ae^{2t} + 6e^{2t} + 12te^{2t} - 3 - 4t\right)$$

---

$$x(0) = a + b + \frac{1}{6}(2a + 6 - 3) = 1$$

$$= 0$$

$$y(0) = a + b$$

$$\underline{b = -a} \Rightarrow \frac{1}{6}(2a + 3) = 1$$

$$2a + 3 = 6$$

$$2a = 3 \qquad +2$$

$$\underline{a = 3/2} \qquad \underline{b = -3/2}$$

$$x = -\frac{t}{3} + 3t + 2t^2 - 6te^{2t} - 3/2\, e^{2t} + 3/2$$

$$+ \frac{1}{6}\left(3e^{2t} + 6e^{2t} + 12te^{2t} - 3 - 4t\right)$$

$$y = (-3t - 2t^2) + 6te^{2t} + \frac{3}{2}e^{2t} - 3/2$$

2) $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $C^1$, $u(0,0) = 1$, $u'(0,0) = (1,2)$

$F(x,y) = [\sin x \, u(x,y), u(x,xy), u(x+y,y)]$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$G'(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$F'$ existuje na $\mathbb{R}^2$, neboť $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ +1

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cdot u + \sin x \cdot u_1 , & \sin x \cdot u_2 \\ u_1(x,xy) \cdot 1 + u_2(x,xy) \cdot y , & u_1(x,xy) \cdot 0 + u_2(x,xy) x \\ u_1(x+y,y) 1 + u_2(x+y,y) 0 , & u_1(x+y,y) \cdot 1 + u_2(x+y,y) \cdot 1 \end{pmatrix}$$ +6

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$ +3

$H = G \circ F \Rightarrow H'(0,0) = G'(F(0,0)) \circ F'(0,0) = G'(0,1,1) \circ F'(0,0)$ +2

$$\text{tedy } H'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$ +2

Tedy $H_1'(0,0) = (6,9)$, $D_v H_1(0,0) = \langle (6,9), (1,1) \rangle = 6 + 9 = 15$ +2

3) $f(x,y,z) = (x-y)^2 + y^2 + z^2 = \|A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\|^2$

$= x^2+y^2+z^2+y^2-2xy$

Hledáme sup $f$ pro $x^2+y^2+z^2 \le 1$, max se nabývá na sféře (+3)

tedy maximalizujeme funkci $1+y^2-2xy = h(x,y,z)$ na $x^2+y^2+z^2=1$.

$Dg = (2x, 2y, 2z) = 0$, bod není na sféře

$Df + \lambda Dg = 0 \Rightarrow$ (+3)

$$\begin{aligned} -2y + 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 2x + 2y\lambda &= 0 \\ 2\lambda z &= 0 \end{aligned}$$

$\to \lambda = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = \pm 1$

$\lambda \neq 0$

$\to z = 0$:

$$\begin{aligned} -2y + 2\lambda x &= 0 \Rightarrow y = \lambda x \\ 2y - 2x + 2\lambda y &= 0 \Rightarrow \lambda x - x + \lambda^2 x = 0 \\ & \quad\; x(\lambda^2+\lambda-1) = 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ n.ř.

$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ (+5)

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$2\lambda_{1,2} + 1 = \pm\sqrt{5}$

$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \lambda^2 x^2 = 1$

$x^2 = \dfrac{1}{1+\lambda^2} \to y^2 = \dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$

$2xy = 2 \cdot x \cdot \lambda x = 2\lambda x^2 = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ (+6)

$g(x,y,z) = 1 + \dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \dfrac{1+\lambda^2+\lambda^2-2\lambda}{1+\lambda^2} = \dfrac{1+2\lambda^2-2\lambda}{1+\lambda^2} =$

$= 2 - \dfrac{2\lambda+1}{1+\lambda^2} = 2 - \dfrac{\pm\sqrt{5}}{2-\lambda} = 2 - \dfrac{\pm 2\sqrt{5}}{4-(-1\pm\sqrt{5})} =$

$= \dfrac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \|A\| = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

4) a) stačí pro $F_1 \cup F_2$, kde $F_1, F_2$ kptní, pak indukcí.

Ať $\mathcal{U}$ pokrytí otevřené $F_1 \cup F_2$, pak existuje konečné

+5 podpokrytí $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$, že $F_i \subset \bigcup \mathcal{U}_i$, $i=1,2$. Pak

$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ konečný systém $F_1 \cup F_2 \subset \bigcup \mathcal{U}_1 \cup \bigcup \mathcal{U}_2$

b) Ať $i_0 \in I$ vybráno. Pak $F_{i_0}$ kompakt a $F_i$, $i \neq i_0$ uzavřené.

Tedy $\bigcap_{i \neq i_0} F_i$ uzavřená, tedy $F_{i_0} \cap \bigcap_{i \neq i_0} F_i$ je uzavřená

+5 v kptu $F_{i_0}$, tedy kptní

c) Ať $x_n, y_n$, že $\rho(x_n, y_n) \to \operatorname{diam} X < \infty$. Pak

dále $x_{n_k} \to x$, $y_{n_k} \to y$ z kptnosti, pak

+5 $\rho(x,y) = \lim \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) = \operatorname{diam} X$.