Zkoušková písemka z Matematické analýzy 4, LS 2022-23

Písemka číslo 1, verze 2023

(1)(16 bodů) Uvažujte funkce

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{n}} - 1}{n + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.
(b) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.
(c) Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \sum f_n(x)$ všude, kde existuje.

(2)(16 bodů) Uvažujte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} x^{3n}.$$

(a) Najděte poloměr konvergence této řady.
(b) Sečtěte řadu na intervalu konvergence.
(c) Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}(-1)^n$.

(3)(16 bodů) Nechť

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) + (\sin x)^2, \quad x \in [-\pi, \pi),$$

je 2π-periodicky dodefinovaná na $\mathbb{R}$.
(a) Ukažte, že f je konečné variace na $[-\pi, \pi]$.
(b) Nalezněte Fourierovu řadu funkce f.
(c) Zjistěte součet této Fourierovy řady na $\mathbb{R}$.

(4)(12 bodů) Nechť $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jsou konečné variace. Ukažte, že fg je též konečné variace.

3) $f(x) = \operatorname{sgn} x + (\sin x)^2$

· $(\sin x)^2 = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ ... trigonometrický polynom

· $\operatorname{sgn} x$: liché, tedy počítáme pouze se sinem, $a_n = 0$

· $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sgn} x) \sin nx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx = \dfrac{-2}{\pi n}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi} =$

$= -\dfrac{2}{\pi n}\left(\cos n\pi - 1\right) = \dfrac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi} = \dfrac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$

+5 Fourierova řada je $f(x) \sim \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \sin nx\right) + \frac{1-\cos 2x}{2}$

· ~~[illegible]~~ $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x + (\sin x)^2, & x \in [-\pi, \pi) \\ -1, & x = \pi \end{cases}$

Ať $g(x) = \operatorname{sgn} x + (\sin x)^2$, $x \in [-\pi, \pi]$. Pak

· $\operatorname{sgn} x$ monotónní na $[-\pi,\pi]$, tj. je BV

+6

· $(\sin x)^2$ má spojitou integrovatelnou derivaci na $[-\pi,\pi]$, tedy je to AC funkce, tedy je to BV funkce

$\Rightarrow$ g je BV funkce na $[-\pi,\pi]$.

Jelikož $f(x) = g(x) - 2\chi_{\{\pi\}}$, $\chi_{\{\pi\}}$ je BV (monotónní), tedy f BV.

· součet řady: Řada konverguje z předchozího k $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$, $x \in \mathbb{R}$.

Tedy součet je roven: $\begin{cases} \operatorname{sgn} x + (\sin x)^2, & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}(-1+1) = 0, & x = -\pi \end{cases}$

+5

a dále 2π-periodický.

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}(-1)^n \overset{?}{=} f(-1)$

· Řada konverguje z Leibnizova kritéria, neboť

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0 \quad \text{a} \quad \frac{2n+1}{\underbrace{n^2+n}_{=n(n+1)}} > \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$$

+5

$$\frac{2n+1}{n} > \frac{2n+3}{n+2}$$

$$2n^2+5n+2 = (2n+1)(n+2) > (2n+3)n = 2n^2+3n \quad \checkmark$$

Abel $\Rightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{n(n+1)} = \lim_{x \to -1_+} f(x) = -1$

---

4) $fg : [0,1] \to \mathbb{R}$ BV, pokud f, g jsou BV.

Dk.: Ať $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ je dělení $[0,1]$. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} |(fg)(x_i) - fg(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|\,|g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_{i-1})|\,|f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\leq \|f\|_\infty V(g; 0,1) + \|g\|_\infty V(f; 0,1)$$

+12

[f, g nabývají extrémů, tedy omezené]

Proto $V(fg; 0,1) \leq \|f\|_\infty V(g; 0,1) + \|g\|_\infty V(f; 0,1)$. $\blacksquare$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} x^{3n}$:

· poloměr konvergence, $x \neq 0$, $a_n = \frac{2n+1}{n^2+n}|x|^{3n}$, pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{(n+1)^2+(n+1)}|x|^{3n+3}\cdot\frac{n^2+n}{2n+1}\frac{1}{|x|^{3n}} =$$

+4

$$= \frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{n^2+n}{(n+1)^2+(n+1)}\cdot|x|^{3} \longrightarrow |x|^3 \Rightarrow \text{poloměr} = 1$$

· $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} y^n$, $y \in (-1,1)$.

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \Rightarrow f(y) = \sum_1^{\infty} \frac{y^n}{n} + \sum_1^{\infty} \frac{y^n}{n+1}$$

· $\left(\sum_1^{\infty} \frac{y^n}{n}\right)' = \sum_1^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y} \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{y^n}{n} = -\log(1-y) + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum \frac{y^n}{n} = -\log(1-y)$$

· $\sum_1^{\infty} \frac{y^n}{n+1} = \frac{1}{y}\sum_1^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{y}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^k}{k}\right) = \frac{1}{y}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k}\right) - y\right) =$

$$= \frac{1}{y}\left(-\log(1-y) - y\right), \quad y \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

$$\Rightarrow f(y) = -\frac{y\log(1-y)}{y} - \frac{1}{y}\left(\log(1-y) + y\right) =$$

$$= \cancel{-\frac{y\log(1-y)+1}{y}} - \frac{1}{y}\left(\log(1-y) + y\log(1-y)\right) - 1 =$$

$$= -\frac{\log(1-y)}{y}(1+y) - 1, \quad y \in (-1,1) \setminus \{0\}$$

+7

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{\log(1-x^3)}{x^3}(1+x^3) - 1, & x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1) $f_n(x) = \dfrac{e^{x^2/n}-1}{n+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

· bodová konvergence: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak

$$f_n(x) = \frac{e^{x^2/n}-1}{x^2/n} \, \frac{x^2}{n} \, \frac{1}{n+x^2} \Rightarrow \frac{f_n(x)}{1/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \cdot x^2 \cdot 1 \in (0,\infty)$$

· $f_n(x) > 0 \Rightarrow \sum f_n(x)$ konverguje (+3)

· pro $x = 0$ je $f_n(0) = 0$, tedy $\sum f_n(x)$ konverguje na $\mathbb{R}$.

· stejnoměrná konvergence na $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$, tedy

$f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$, tedy $\sum f_n \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. (+3)

· lokálně stejnoměrná konvergence: nechť $x \in [-A, A]$ pro $A > 0$ pevné.

$\frac{e^y-1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \Rightarrow$ existuje $\eta > 0$, že $\left|\frac{e^y-1}{y}\right| \le 2$ pro $y \in (-\eta, \eta) \setminus \{0\}$.

Ať $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\frac{A^2}{n_0} \le \eta$, pak pro $x \in [-A, A]$ a $n \ge n_0$ platí

$$|f_n(x)| = \left|\frac{e^{x^2/n}-1}{x^2/n}\right| \frac{x^2}{n} \cdot \frac{1}{n+x^2} \le 2 \cdot \frac{A^2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2A^2}{n^2}, \quad x \neq 0$$

$= 0 \quad \ldots \, x = 0$

Tedy $|f_n(x)| \le \frac{2A^2}{n^2}$ a $\sum \frac{2A^2}{n^2} < \infty$, proto z Weierstrasse

plyne $\sum f_n \rightrightarrows$ na $[-A, A]$ (+5)

· derivace: $$f_n'(x) = \frac{1}{(n+x^2)^2}\left(e^{x^2/n} \overbrace{\frac{2x}{n}(n+x^2)}^{2x + \frac{2x^3}{n}} - \left(e^{x^2/n} - 1\right) 2x\right)$$

$\Rightarrow$ pro $x \in [-A, A]$ platí $$|f_n'(x)| \le \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{e^{A^2}(2A + 2A^3) + 2A(e^{A^2}+1)}_{B}\Big) = \frac{B}{n^2}$$

Weierstrass $\Rightarrow$ $\sum f_n' \rightrightarrows$ na $(-A, A)$ $\Rightarrow$ $(f(x))' = \sum f_n'(x)$, $x \in (-A, A)$.

· $A > 0$ libovolné $\Rightarrow$ $f'(x) = \sum f_n'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (+5)