

### 3. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte. Každý příklad je bodován 10 body.

(A) Necht'  $X = \ell_1$  a  $Y = c_0$  uvažované jako prostory nad  $\mathbb{C}$ . Uvažujme předpis

$$\begin{aligned} T((x_n)_{n=1}^\infty) &= \left( \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \right)_{n=1}^\infty \\ &= \left( x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \dots \right). \end{aligned}$$

(2 body) Ukažte, že  $T$  je spojitý lineární operátor z  $X$  do  $Y$ .

(4 body) Nalezněte duální operátor  $T^*: Y^* \rightarrow X^*$  v rámci standardních dualit.

(2 body) Zjistěte, zda je  $T: X \rightarrow Y$  izomorfismus do.

(2 body) Ukažte, že  $T: Y \rightarrow Y$  je spojitý lineární operátor, tj. že je  $T \in \mathcal{L}(Y)$ .

(B) Necht'  $X = L_3([0, \pi])$  uvažovaný jako prostor nad  $\mathbb{C}$ . Uvažujme předpis

$$Tf(x) = \sin x \left( \int_0^\pi f(t) \cos t \, dt \right) + \cos x \left( \int_0^\pi f(t) \sin t \, dt \right), \quad x \in [0, \pi].$$

(1.5 bodu) Ukažte, že  $X$  má nekonečnou dimenzi.

(1.5 bodu) Ukažte, že  $T$  je spojitý lineární operátor na  $X$ .

(1 bod) Zjistěte, zda je  $T$  kompaktní.

(5 bodů) Nalezněte bodové spektrum  $T$ .

(1 bod) Nalezněte spektrum  $T$ .