Funkcionální analýza

Michal Johanis
Jiří Spurný

2022/12/15

Obsah

Kapitola 1

Banachovy a Hilbertovy prostory

■■■Základní strukturou uvažovanou ve funkcionální analýze je koncept normovaného lineárního prostoru (Definice 1), který svazuje dohromady algebraický koncept vektorového prostoru s topologickým konceptem metrického prostoru. Definice je uvažována tak, aby vznikl vektorový prostor s metrikou, vzhledem k níž jsou vektorové operace dobře provázány s metrickou strukturou, zejména pak vyjdou vektorové operace spojité v metrické struktuře (Tvrzení 2). Tato struktura je pak zastřešujícím rámcem jak pro klasické konečněrozměrné prostory $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, tak pro nekonečněrozměrné prostory posloupností a funkcí (Příklady 4). Slouží tak velmi často jako základní kontext pro práci s nekonečněrozměrnými objekty.

V řadě situací je pak klíčová úplnost uvažovaného metrického prostoru. Tento požadavek vede k definici Banachova prostoru (Definice 3).

1. Základní vlastnosti

Budeme pracovat s vektorovými prostory výhradně nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Pokud nebude řečeno jinak, budou tvrzení platit jak pro reálné, tak pro komplexní prostory. Bude-li třeba použité těleso označit, použijeme symbol $\mathbb{K}$[1], tj. $\mathbb{K}$ značí buď těleso $\mathbb{R}$, nebo těleso $\mathbb{C}$. Ještě jinak a formálněji: Před každým tvrzením obsahujícím symbol $\mathbb{K}$ si lze představit větu „Nechť $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.“. Jestliže se v definici nebo tvrzení objeví více vektorových prostorů, pak budeme automaticky předpokládat, že jsou všechny nad stejným tělesem, pokud nebude řečeno jinak.

Je-li X komplexní vektorový prostor, pak jej lze chápat také jako reálný vektorový prostor (operaci násobení skalárem zúžíme pouze na $\mathbb{R}$). Tuto „reálnou verzi“ budeme označovat $X_{\mathbb{R}}$.

DEFINICE 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ nazýváme normou na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Vlastnost (ii) se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Snadno z ní odvodíme následující verzi:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in X$. Indukcí též obdržíme $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ pro libovolná $x_1, \dots, x_n \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

TVRZENÍ 2. *Nechť* $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.
(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.
(b) Norma je 1*-lipschitzovská*[2] *(a tedy spojitá) funkce na* X.
(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ *a* $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ *jsou spojitá.*

Všimněme si, že tvrzení (c) lze chápat jako větu o aritmetice limit pro posloupnosti v normovaných lineárních prostorech.

[1] Z německého *der Körper*, tj. těleso.
[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz

DŮKAZ. (a) Funkce $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty)$ je translačně invariantní metrika, neboť

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x),$$
$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \text{a}$$
$$\rho(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = \rho(x, y)$$

pro libovolná $x, y, z \in X$. Též snadno vidíme, že $0 = \rho(x, y) = \|x - y\|$, právě když $x = y$.

(b) Máme $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| = \rho(x, y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

(c) Připomeňme, že v součinu metrických prostorů funguje konvergence posloupností „po souřadnicích“. Chceme tedy ukázat, že pokud $\{x_n\} \subset X$ a $\{y_n\} \subset X$ splňují $x_n \to x \in X$ a $y_n \to y \in X$, pak $x_n + y_n \to x + y$. To je ovšem snadné: $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$. Podobně, předpokládejme, že $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ a $\{x_n\} \subset X$ splňují $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{K}$ a $x_n \to x \in X$. Pak $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \leq |\alpha_n|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| \to 0$.

□

Nechť X je normovaný lineární prostor. Budeme používat následující značení:

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Nebude-li hrozit nedorozumění, v jakém prostoru se koule bere, budeme zpravidla index X u koulí $B_X(x, r)$ a $U_X(x, r)$ vynechávat.

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pro $A, B \subset X$, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme $\alpha A = \{\alpha y;\ y \in A\}$, $x + A = \{x + y;\ y \in A\}$ a $A + B = \{y + z;\ y \in A, z \in B\}$. Je snadné si rozmyslet, že platí $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1) = rB_X$ pro libovolné $x \in X$, $r > 0$ a analogicky pro otevřené koule. Dále není obtížné si rozmyslet, že pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$ a $\operatorname{Int} B(x, r) = U(x, r)$.

DEFINICE 3. Banachův[3] prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

PŘÍKLADY 4.

a) Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normami $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}|x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.

b)
- Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ všech spojitých funkcí z K do $\mathbb{K}$. Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a, b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n \text{ existuje vlastní}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}$ (vizte Tvrzení 60(b)).
- Prostor $c_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n = 0\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (vizte Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ (x_n)_{n=1}^\infty \text{ má pouze konečně mnoho nenulových členů}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00}, kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00}.
- Je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak prostor

$$c_0(\Gamma) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathbb{K};\ \forall\varepsilon > 0 \text{ je } \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \geq \varepsilon\} \text{ konečná}\right\}$$

[3] Stefan Banach

se supremovou normou $\|(x_\gamma)\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$ níže. Vskutku, je-li $x \in \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina $A = \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \geq \varepsilon\}$ je nekonečná. Pak pro každé $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ a $\gamma \in A$ platí, že $|y_\gamma| \geq |x_\gamma| - |x_\gamma - y_\gamma| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$.
Všimněme si též, že z definice snadno plyne, že je-li $(x_\gamma) \in c_0(\Gamma)$, pak množina $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\}$ je spočetná.

- Prostor $\ell_p = \big\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\big\}$, $1 \leq p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = \big(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. (Je to speciální případ prostorů uvedených níže.)
- Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_p = \big(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\big)^{1/p}$ pro $1 \leq p < \infty$, resp. $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ pro $p = \infty$. (Připomeňme, že $\operatorname{ess\,sup} g = \inf\big\{\eta \in \mathbb{R};\ \mu\big(\{x \in \Omega;\ g(x) > \eta\}\big) = 0\big\}$. V případě, že $p = \infty$ navíc předpokládáme, že μ není identicky nulová.) Bude-li jasné z kontextu, jaká míra se na prostoru Ω rozumí, budeme pro prostor $L_p(\mu)$ též používat značení $L_p(\Omega)$.
- Je-li $\Omega = \Gamma$ libovolná neprázdná množina, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Gamma)$ a μ je aritmetická míra na Γ, pak máme
$$L_p(\mu) = \ell_p(\Gamma) = \Big\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sum_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|^p < +\infty\Big\} = \Big\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\substack{F\subset\Gamma\\ F \text{ konečná}}} \sum_{\gamma\in F}|x_\gamma|^p < +\infty\Big\}$$
a
$$L_\infty(\mu) = \ell_\infty(\Gamma) = \big\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma| < +\infty\big\}.$$
Pro $\Gamma = \mathbb{N}$ je $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$.

c) Nechť K je kompaktní prostor, pak prostor $M(K)$ regulárních borelovských[4] komplexních či znaménkových měr na K s normou $\|\mu\| = |\mu|(K)$ je Banachův prostor. Připomeňme, že nezáporná míra μ na kompaktním metrickém prostoru leží v $M(K)$, pokud je definovaná na σ-algebře borelovských množin, je vnitřně i zevně regulární a má konečné hodnoty na kompaktech. Znaménková či komplexní míra leží v $M(K)$, pokud je definována na borelovských množinách a její variace $|\mu|$ leží v $M(K)$.

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li Y podprostor X, pak $(Y, \|\cdot\|)$, kde uvažujeme restrikci normy $\|\cdot\|$ na Y, je zjevně též normovaný lineární prostor. Následující tvrzení je speciálním případem tvrzení o (metrických) podprostorech metrických prostorů.

TVRZENÍ 5. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*
(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.
(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

DEFINICE 6. Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x,y) \leq \rho(x,y) \leq B\sigma(x,y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Zjevně skoro stejné metriky jsou ekvivalentní.

PŘÍKLAD 7. Metriky $\rho(x,y) = |x-y|$ a $\sigma(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$ na $\mathbb{R}$ jsou ekvivalentní, ale nikoli skoro stejné (všimněte si, že $\mathbb{R}$ je v σ omezená). Metriky $\rho(x,y) = |x-y|$ a $\sigma(x,y) = |x-y| + \operatorname{arctg}|x-y|$ na $\mathbb{R}$ jsou skoro stejné, neboť $\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq 2\rho(x,y)$.

◇

TVRZENÍ 8. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá.

[4]Félix Édouard Justin Émile Borel

$\Leftarrow$ Sporem: Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in X$ splňující $\rho_1(x_n, y_n) > n\rho_2(x_n, y_n)$, tedy $\|x_n - y_n\|_1 > n\|x_n - y_n\|_2$. Položme $z_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|_1}$. Pak $\rho_1(z_n, 0) = \|z_n\|_1 = 1$, ale $\rho_2(z_n, 0) = \|z_n\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$, což je spor s ekvivalencí ρ_1 a ρ_2.

□

Díky předchozímu tvrzení je následující definice konzistentní s Definicí 6.

DEFINICE 9 (ekvivalentní normy). Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

PŘÍKLAD 10. Na prostoru ℓ_1 uvažme normu $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Pak normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$ nejsou ekvivalentní. Položíme-li $z_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ krát}}, 0, 0, \ldots)$, pak $\|z_n\|_\infty = 1$, ale $\|z_n\|_1 = n$.

◇

POZNÁMKA. Ekvivalentní normy na prostoru X zachovávají konvergenci posloupností. Různé ekvivalentní normy tedy mohou mít různé geometrické vlastnosti (neboť se mění tvar jednotkové koule), ale topologické vlastnosti (tj. vlastnosti závisející jen na konvergenci posloupností) zůstávají nezměněny.

VĚTA 11. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Důkaz bychom mohli provést ihned, nicméně my jej odložíme do Věty 66, kde stejným argumentem dokážeme více věcí najednou.

LEMMA 12. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Vezměme $x \in B_2$. Pak $\|x\|_1 \leq b\|x\|_2 \leq b$, tedy $x \in B_{(X,\|\cdot\|_1)}(0, b) = bB_1$. Na druhou stranu, nechť $x \in aB_1$. Pak $\|x\|_2 \leq \frac{1}{a}\|x\|_1 \leq \frac{1}{a}a = 1$, tedy $x \in B_2$.

$\Leftarrow$ Je-li $x \in X$ nenulový vektor, je $\frac{x}{\|x\|_2} \in B_2 \subset bB_1$, a tedy $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_1 \leq b$. Podobně, $a\frac{x}{\|x\|_1} \in aB_1 \subset B_2$, a tedy $a\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 \leq 1$. Odtud již plynou požadované odhady.

□

TVRZENÍ 13. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.
(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
(iii) Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.
(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

DŮKAZ. Ekvivalence (i) a (ii) plyne z Lemmatu 12. Ekvivalence (i) a (iii) plyne z Tvrzení 8. Ekvivalence (iii) a (iv) plyne z definice homeomorfismu a vlastností spojitých zobrazení.

□

DEFINICE 14. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \ldots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \ldots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Snadno se dokáže indukcí, že konvexní množina M je uzavřená na konvexní kombinace svých prvků, tj. $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ kdykoli $x_1, \ldots, x_n \in M$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Z vlastností normy snadno plyne následující fakt:

FAKT 15. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Připomeňme, že lineární obal množiny $M \subset X$ je definován jako $\bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ podprostor } X\}$. Budeme jej značit span M. Dále připomeňme, že platí

$$\operatorname{span} M = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

DEFINICE 16. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Povšimněme si, že výše uvedená definice je smysluplná, neboť systém, který se proniká, obsahuje alespoň celý prostor X. Snadno se nahlédne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní, a tedy konvexní obal je konvexní množina.

TVRZENÍ 17. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

DŮKAZ. Označme $C = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}$. Inkluze $C \subset \operatorname{conv} M$ je zjevná, neboť konvexní množina conv M obsahuje všechny konvexní kombinace svých prvků. Na druhou stranu, $M \subset C$. Stačí tedy ukázat, že C je konvexní, protože pak $\operatorname{conv} M \subset C$ dle definice conv M.

Nechť $x, y \in C$ a $\alpha \in [0, 1]$. Pak $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ pro nějaká $x_1, \dots, x_n \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ a obdobně $y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ pro nějaká $y_1, \dots, y_m \in M$, $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$. Pak

$$\alpha x + (1-\alpha) y = \sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha) \mu_i y_i \in C,$$

neboť $\sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha) \mu_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} \mu_i = \alpha + (1-\alpha) = 1$.

□

DEFINICE 18. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Všimněme si, že pro symetrii M stačí ověřit $-M \subset M$. Dále si všimněme, že koule B_X a U_X v normovaném lineárním prostoru X jsou symetrické množiny.

FAKT 19. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.*

DŮKAZ. Zvolme libovolné $y \in U(0, r)$ a položme $u = x + y$, $v = x - y$. Pak $u, v \in U(x, r) \subset M$. Ze symetrie M plyne $-v \in M$ a z konvexity M dostáváme $y = \frac{1}{2}(-v + u) \in M$. Pro $B(x, r)$ je důkaz totožný.

□

DEFINICE 20. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako $\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a uzavřený konvexní obal M jako $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Povšimněme si, že výše uvedené definice jsou smysluplné, neboť v definujících systémech množin se vždy vyskytuje alespoň celý prostor X. Dále je zřejmé, že uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor a uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina.

FAKT 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

DŮKAZ. Nechť $x, y \in \overline{C}$ a $\lambda \in [0, 1]$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\} \subset C$, $\{y_n\} \subset C$ splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. Protože C je konvexní, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in C$. Protože sčítání a násobení skalárem jsou spojité operace, máme $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \to \lambda x + (1-\lambda) y$, a tedy $\lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{C}$. Důkaz pro podprostor je analogický.

□

TVRZENÍ 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}} M = \overline{\operatorname{span} \overline{M}}$ a $\overline{\operatorname{conv}} M = \overline{\operatorname{conv} \overline{M}}$.*

DŮKAZ. Inkluze $\overline{\operatorname{span}} M \subset \overline{\operatorname{span} \overline{M}}$ a $\overline{\operatorname{conv}} M \subset \overline{\operatorname{conv} \overline{M}}$ plynou z definic a Faktu 21. Pro opačné inkluze si uvědomme, že $\overline{\operatorname{span}} M$ je podprostor obsahující M a $\overline{\operatorname{conv}} M$ je konvexní množina obsahující M. Tedy $\operatorname{span} \overline{M} \subset \overline{\operatorname{span}} M$ a $\operatorname{conv} \overline{M} \subset \overline{\operatorname{conv}} M$. Protože $\overline{\operatorname{span}} M$ a $\overline{\operatorname{conv}} M$ jsou uzavřené množiny, dostáváme, že $\overline{\operatorname{span} \overline{M}} \subset \overline{\operatorname{span}} M$ a $\overline{\operatorname{conv} \overline{M}} \subset \overline{\operatorname{conv}} M$.

□

Poznamenejme, že součet uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Stačí uvažovat $A = \left\{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\right\}$ a $B = \mathbb{R} \times \{0\}$. Pak $A + B = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Dokonce ani součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený, vizte Příklad 53. Nicméně platí následující tvrzení:

TVRZENÍ 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ je uzavřená a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $F + K$ je uzavřená. Je-li navíc F kompaktní, pak je i $F + K$ kompaktní.*

DŮKAZ. Nechť $\{z_n\} \subset F + K$ je posloupnost konvergující k nějakému $z \in X$. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Pak $x_{n_k} = z_{n_k} - y_{n_k} \to z - y$ dle Tvrzení 2(c). Protože F je uzavřená, je $z - y \in F$. Tedy $z = (z - y) + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je uzavřená.

Nechť je nyní navíc F kompaktní a $\{z_n\} \subset F + K$ je libovolná posloupnost. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Protože F je kompaktní, posloupnost $\{x_{n_k}\}$ má podposloupnost $\{x_{n_{k_l}}\}$, která konverguje k nějakému $x \in F$. Tedy $z_{n_{k_l}} = x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}} \to x + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je kompaktní.

□

VĚTA 24. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor nad $\mathbb{K}$. Nejprve ukážeme, že $\operatorname{span}\{Y \cup \{e\}\}$ je uzavřený pro libovolné $e \in X$. Obecné tvrzení pak snadno plyne pomocí matematické indukce dle $\dim Z$.

Je-li $e \in Y$, pak není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $e \notin Y$. Nechť $\{x_n\} \subset \operatorname{span}(Y \cup \{e\})$ je posloupnost konvergující k $x \in X$. Pak $x_n = y_n + t_n e$ pro nějaká $y_n \in Y$ a $t_n \in \mathbb{K}$. Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{t_n\}$ je omezená. Kdyby tomu tak nebylo, pak by existovala podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ splňující $|t_{n_k}| \to +\infty$. Pak ale

$$\left\| \frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} - (-e) \right\| = \left\| \frac{x_{n_k}}{t_{n_k}} \right\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \to 0 \cdot \|x\| = 0,$$

tedy $y_{n_k}/t_{n_k} \to -e$. Ale $y_{n_k}/t_{n_k} \in Y$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a Y je uzavřený, tudíž $e \in Y$, což je spor.

Posloupnost $\{t_n\}$ je tedy omezená, takže z ní můžeme vybrat podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $t \in \mathbb{K}$. Pak $y_{n_k} \to y = x - te$ a $y \in Y$, neboť Y je uzavřený. Tedy $x = y + te \in \operatorname{span}\{Y \cup \{e\}\}$.

□

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

VĚTA 26.

(a) Prostory c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$ jsou separabilní.
(b) Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.
(c) Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.
(d) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky[5] měřitelná a $1 \le p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

DŮKAZ. (a) Nechť $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je množina vektorů z c_{00} s racionálními souřadnicemi (v případě komplexního prostoru jsou reálná i imaginární složka racionální). Pak $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je spočetná. Tvrdíme, že je hustá v c_0: Vezměme

[5] Henri Léon Lebesgue

libovolné $x \in c_0$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_i| < \varepsilon$ pro $i > n$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální“) q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \varepsilon$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - q_i| \le \varepsilon$.

Podobně ověříme, že $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je hustá v ℓ_p pro $1 \le p < \infty$. Vezměme libovolné $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální“) q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^{1/p}$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < n \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(b) Uvažujme množinu $\mathcal{A} = \{\chi_A;\ A \subset \mathbb{N}\} \subset \ell_\infty$. Pak pro $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \ne B$ platí $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$, neboť existuje $n \in \mathbb{N}$ které leží právě v jedné z množin A, B. Tedy $\mathcal{A}$ je 1-separovaná podmnožina ℓ_∞. Tato množina je ovšem nespočetná (např. pomocí Cantorovy diagonální metody[6]).

(c) Prostor $C(K)$ je podprostorem prostoru $\ell_\infty(K)$ všech omezených funkcí na K. Ukážeme, že existuje spočetná množina $\mathcal{A} \subset \ell_\infty(K)$ taková, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$. Odtud plyne separabilita $C(K)$, neboť pak $C(K)$ je (metrický) podprostor separabilního metrického prostoru $\overline{\mathcal{A}}$.

Kompakt K je totálně omezený, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konečný systém $\mathcal{B}_n$ otevřených koulí o poloměru $\frac{1}{n}$ pokrývající K. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a položme $D_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$, kde $\mathcal{B}_n = \{B_1, B_2, \dots\}$. Pak $\mathcal{D}_n = \{D_1, D_2, \dots\}$ je konečný systém disjunktních množin s diametrem nejvýše $\frac{2}{n}$ pokrývající K. Nechť $\mathcal{A}_n$ je množina funkcí konstantních na prvcích $\mathcal{D}_n$ s racionálními (resp. „komplexně racionálními“) hodnotami. Pak $\mathcal{A}_n$ je spočetná. Tedy i množina $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ je spočetná. Tvrdíme, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$.

Nechť $f \in C(K)$ a $\varepsilon > 0$. Pak f je stejnoměrně spojitá na K, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $x, y \in K$, $\rho(x, y) < \delta$, kde ρ je metrika prostoru K. Nalezněme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{n} < \delta$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je takové, že $\mathcal{D}_n = \{D_1, \dots, D_k\}$. Bez újmy na obecnosti (po eventuálním přečíslování) můžeme předpokládat, že všechny množiny D_i jsou neprázdné. V každé množině D_i zvolíme prvek x_i a nalezneme q_i racionální tak, aby $|q_i - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Konečně položíme $g = \sum_{i=1}^{k} q_i \chi_{D_i}$. Pak $g \in \mathcal{A}$. Dále, je-li $x \in K$ libovolné, pak $x \in D_j$ pro nějaké j. Máme $\rho(x, x_j) \le \frac{2}{n} < \delta$, a tedy $|f(x) - g(x)| = |f(x) - q_j| \le |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - q_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Tedy $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$.

(d) Prostor $L_p(\Omega)$ lze přirozeně chápat jako podprostor $L_p(\mathbb{R}^n)$, tedy stačí ukázat separabilitu $L_p(\mathbb{R}^n)$. Pro $j \in \mathbb{N}$ označme $K_j = B_{\mathbb{R}^n}(0, j)$. Pak dle (c) existuje spočetná množina $\mathcal{A}_j$ spojitých funkcí na K_j která je hustá v prostoru $(C(K_j), \|\cdot\|_\infty)$. Rozšiřme funkce z $\mathcal{A}_j$ nulou mimo K_j a chápejme je jako funkce na celém $\mathbb{R}^n$. Ukážeme, že spočetná množina $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j$ je hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Nechť $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ a $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty[7], [R, Věta 3.14], je množina $C_c(\mathbb{R}^n)$ spojitých funkcí s kompaktním nosičem hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$. Tedy existuje $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ splňující $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ je takové, že K_j obsahuje nosič g. Pak existuje $h \in \mathcal{A}_j$ taková, že $\|g - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K_j)^{1/p}}$. Máme $\|g - h\|_p^p = \int_{K_j} |g - h|^p \,\mathrm{d}\lambda \le \frac{\varepsilon^p}{2^p \lambda(K_j)} \lambda(K_j) = (\frac{\varepsilon}{2})^p$. Tedy dohromady $\|f - h\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

Později uvidíme, že pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

■■■Stejně jako v konečněrozměrných prostorech, tak i v obecném Banachově prostoru X se snažíme nalézt „bázi“, tj. systém vektorů $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ v X takový, že každý vektor $x \in X$ lze jednoznačně napsat jako sumu $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry $x_\gamma \in \mathbb{K}$, $\gamma \in \Gamma$. Ukazuje se, že chceme-li tuto sumu míti konečnou pro každé $x \in X$, tedy chceme-li klasickou bázi lineárního prostoru, hledaný systém $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ by byl v každém nekonečněrozměrném Banachově prostoru nespočetný, a to situaci při zacházení s vektory

[6]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1891)

[7]Nikolaj Nikolajevič Luzin (Николай Николаевич Лузин) (1912)

velmi komplikuje. Musíme tedy připustit i nekonečné sumy vektorů, což vede k nutnosti rozvinout teorii nekonečných řad v normovaných lineárních prostorech. Ta se nám pak bude hodit při studiu konceptu ortonormální báze v Hilbertových prostorech (Definice 104).

DEFINICE 27. Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Uvědomme si, že v normovaných lineárních prostorech platí stejná nutná podmínka konvergence řady jako pro řady reálných čísel: je-li $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentní, pak $x_n \to 0$. (Důkaz je stejný: $x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \to 0$.)

FAKT 28. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

DŮKAZ. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{N} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ pro každé $N \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti normy (Tvrzení 2(b)) tedy dostáváme $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

□

PŘÍKLAD 29. Vektory $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ v prostorech c_0 a ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, kde pouze n-tá souřadnice je rovna 1, budeme nazývat kanonické bázové vektory. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ v c_0, resp. ℓ_p platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v příslušné normě. Vskutku, pro $x \in c_0$ máme $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_\infty = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0$ z definice limity. Podobně pro $x \in \ell_p$ máme $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$.

◇

VĚTA 30 (Test úplnosti). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť je řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolutně konvergentní. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ její částečné součty. Pak pro indexy $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ platí

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|.$$

Z platnosti Bolzanovy[8]-Cauchyovy[9] podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ tedy dostáváme platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost $\{s_n\}$. Ta je proto konvergentní, neboť X je Banachův.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Nejprve ukážeme, že $\{x_n\}$ má konvergentní podposloupnost. S využitím cauchyovskosti nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ tak, že $\|x_l - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro všechna $k, l \in \mathbb{N}$ splňující $l \geq n_k$. Speciálně platí $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ je tedy absolutně konvergentní, takže existuje $z \in X$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = z$. To ale znamená, že

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_1}.$$

Tedy $\{x_{n_k}\}$ konverguje k $x = z + x_{n_1}$.

Na závěr zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, tedy existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq m_0$. Pak pro všechna $n, k \geq m_0$ platí $\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Zafixujeme-li

[8] Bernard Bolzano (Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano)

[9] Augustin-Louis Cauchy

nyní $n \geq m_0$, pak $\|x_n - x\| = \lim_{k\to\infty}\|x_n - x_{n_k}\| \leq \varepsilon$. Tedy $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ pro každé $n \geq m_0$, což znamená, že $x_n \to x$.

□

DEFINICE 31. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí, že

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Je-li zobecněná řada konvergentní, pak symbolem $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ rozumíme též její součet (který je určen jednoznačně, vizte Větu 33).

DEFINICE 32. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pokud

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

VĚTA 33. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X konvergující k x. Pak platí:*

(a) Její součet je určen jednoznačně.
(b) Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(c) $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ pro každou permutaci (tj. bijekci) $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$.
(d) $\big(\|x_\gamma\|\big)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.
(e) Je-li $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ libovolná prostá posloupnost taková, že $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\} \subset \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, pak $\sum_{n=1}^\infty x_{\gamma_n} = x$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x, y \in X$, $x \neq y$ jsou součty naší zobecněné řady. Položme $\varepsilon = \|x - y\| > 0$. Pak dle definice existují konečné množiny $F_x, F_y \subset \Gamma$ splňující $\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F \supset F_x$ a $\left\|y - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F \supset F_y$. Dále položme $F = F_x \cup F_y$. Pak $\varepsilon = \|x - y\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| + \left\|y - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, což je spor.

(b) Je-li $\varepsilon > 0$, pak z definice konvergence existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ disjunktní s F platí

$$\left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| = \left\|\sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma\right\| + \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Nechť $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$ je permutace. Je-li $\varepsilon > 0$, pak z definice konvergence existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Množina $\pi^{-1}(F)$ je konečná a pro $F' \supset \pi^{-1}(F)$ konečnou platí $\pi(F') \supset F$, a tedy $\left\|x - \sum_{\gamma\in F'} x_{\pi(\gamma)}\right\| = \left\|x - \sum_{\gamma\in\pi(F')} x_\gamma\right\| < \varepsilon$. To znamená, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$.

(d) Dle (b) zobecněná řada splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $F \subset \Gamma$ je příslušná konečná množina z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro toto ε. Je-li $\gamma \notin F$, pak $\{\gamma\} \cap F = \emptyset$, a tedy $\|x_\gamma\| < \varepsilon$. To znamená, že $\{\gamma \in \Gamma;\ \|x_\gamma\| \geq \varepsilon\} \subset F$, tedy speciálně je to množina konečná.

(e) Označme $s_n = \sum_{k=1}^n x_{\gamma_k}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F \subset \{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\}$

a že $F \neq \emptyset$. Položme $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N};\ \gamma_n \in F\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \supset F$, takže $\|x - s_n\| < \varepsilon$.

□

TVRZENÍ 34. *Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když* $\sup\bigl\{\sum_{\gamma \in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigr\} < +\infty$. *Potom platí* $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup\bigl\{\sum_{\gamma \in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigr\}$.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Nechť $x = \sup\bigl\{\sum_{\gamma \in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigr\} \in \mathbb{R}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma > x - \varepsilon$. Pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $F' \supset F$ tedy máme $\bigl|x - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma\bigr| = x - \sum_{\gamma \in F'} a_\gamma \leq x - \sum_{\gamma \in F} a_\gamma < \varepsilon$. Odtud plyne $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = x$.

$\Rightarrow$ Je-li $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = x$, pak existuje $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\bigl|x - \sum_{\gamma \in H'} a_\gamma\bigr| < 1$ pro každou $H' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H' \supset H$. Pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ pak máme $\sum_{\gamma \in F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma \in H \cup F} a_\gamma < x + 1$, tedy $\sup\bigl\{\sum_{\gamma \in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigr\} < +\infty$.

Závěrečné tvrzení pak bylo dokázáno v první části důkazu.

□

TVRZENÍ 35. *Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$, $\sum_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma$ jsou konvergentní zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru nad $\mathbb{K}$ a nechť $c \in \mathbb{K}$. Pak $\sum_{\gamma \in \Gamma}(x_\gamma + y_\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma$ a $\sum_{\gamma \in \Gamma} c x_\gamma = c \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$.*

DŮKAZ. Označme $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ a $y = \sum_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existují $F_x, F_y \subset \mathcal{F}(\Gamma)$ takové, že $\bigl\|x - \sum_{\gamma \in H} x_\gamma\bigr\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x$, resp. $\bigl\|y - \sum_{\gamma \in H} y_\gamma\bigr\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_y$. Pro libovolnou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x \cup F_y$ je tedy $\bigl\|x + y - \sum_{\gamma \in H}(x_\gamma + y_\gamma)\bigr\| \leq \bigl\|x - \sum_{\gamma \in H} x_\gamma\bigr\| + \bigl\|y - \sum_{\gamma \in H} y_\gamma\bigr\| < 2\varepsilon$. Podobně, $\bigl\|cx - \sum_{\gamma \in H} c x_\gamma\bigr\| = |c| \bigl\|x - \sum_{\gamma \in H} x_\gamma\bigr\| \leq |c|\varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x$.

□

VĚTA 36. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.
(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ plyne z Věty 33(b). $\Leftarrow$ Najdeme množiny $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ v $\mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F_n = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \frac{1}{n}.$$

Položme $y_n = \sum_{\gamma \in F_n} x_\gamma$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost: Pro dané $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pak pro libovolná $m > n \geq n_0$ máme $\|y_m - y_n\| = \bigl\|\sum_{\gamma \in F_m} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F_n} x_\gamma\bigr\| = \bigl\|\sum_{\gamma \in F_m \setminus F_n} x_\gamma\bigr\| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tedy $\{y_n\}$ konverguje k nějakému $x \in X$. Ukážeme, že $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\|y_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F_{n_0} platí

$$\left\| x - \sum_{\gamma \in F} x_\gamma \right\| \leq \left\| x - \sum_{\gamma \in F_{n_0}} x_\gamma \right\| + \left\| \sum_{\gamma \in F} x_\gamma - \sum_{\gamma \in F_{n_0}} x_\gamma \right\| = \|x - y_{n_0}\| + \left\| \sum_{\gamma \in F \setminus F_{n_0}} x_\gamma \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Tvrzení (b) ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky a tvrzení (a). Nechť $s = \sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\| = \sup\bigl\{\sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\|;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigr\} < +\infty$ (Tvrzení 34). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\| > s - \varepsilon$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ neprotínající F platí

$$\left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| \leq \sum_{\gamma \in F'} \|x_\gamma\| = \sum_{\gamma \in F \cup F'} \|x_\gamma\| - \sum_{\gamma \in F} \|x_\gamma\| < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Obdobně dokážeme (c). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme množinu $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F' \cap F = \emptyset$. Pak $F \cap \Lambda \in \mathcal{F}(\Lambda)$ a každá $F' \in \mathcal{F}(\Lambda)$ neprotínající $F \cap \Lambda$ je též disjunktní s F. Tedy $\left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ a Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněnou řadu $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ je ověřena.

□

Zobecněné řady jsou definovány bez jakékoliv struktury na indexové množině Γ. Ve speciálním případě $\Gamma = \mathbb{N}$ máme na $\mathbb{N}$ strukturu uspořádání, pomocí které jsou definovány „obyčejné“ řady. Nyní se tedy podíváme na vztah řad $\sum_{n=1}^\infty x_n$ a zobecněných řad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

TVRZENÍ 37.

(a) Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k x.
(b) Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.
(c) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (a obě pak mají stejný součet).

DŮKAZ. (a) Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ neprázdná taková, že $\left\|x - \sum_{n\in F'} x_n\right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$. Položme $n_0 = \max F$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $F \subset F' = \{1, \dots, n\}$, a tedy $\left\|x - \sum_{i=1}^n x_i\right\| = \left\|x - \sum_{i\in F'} x_i\right\| < \varepsilon$. To dokazuje, že $\sum_{n=1}^\infty x_n = x$.

(b) Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $F \subset \mathbb{N}$ konečnou neprázdnou takovou, že $\left\|\sum_{n\in H} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ disjunktní s F. Dále nalezneme $n_0 \geq \max F$ takové, že $\left\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak pro každou $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ platí

$$\begin{aligned}\left\|x - \sum_{n\in F'} x_n\right\| &\leq \left\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{n_0} x_n - \sum_{n\in F} x_n\right\| + \left\|\sum_{n\in F'} x_n - \sum_{n\in F} x_n\right\| = \\ &= \left\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\right\| + \left\|\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus F} x_n\right\| + \left\|\sum_{n\in F'\setminus F} x_n\right\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

To znamená, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.

(c) Platí $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^n a_i$. Je-li $F \subset \mathbb{N}$ konečná neprázdná, pak $\sum_{i\in F} a_i \leq \sum_{i=1}^{\max F} a_i$, a tedy $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sup\left\{\sum_{n\in F} a_n;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\}$. Zbytek plyne z Tvrzení 34.

□

DŮSLEDEK 38. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je absolutně konvergentní.*

DEFINICE 39. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

VĚTA 40. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně.
(ii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.
(iii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Je-li π permutace na $\mathbb{N}$, pak dle Věty 33(c) je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = x$. Díky Tvrzení 37(a) tedy máme $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)} = x$.

(ii)⇒(iii) je zjevná.

(iii)⇒(i) Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Není-li tomu tak, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou $F \subset \mathbb{N}$ existuje konečná $F' \subset \mathbb{N}$, $F' \cap F = \emptyset$ taková, že $\left\|\sum_{n\in F'} x_n\right\| \geq \varepsilon$. Můžeme tedy indukcí zkonstruovat posloupnost $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ konečných neprázdných podmnožin $\mathbb{N}$ splňující $\max F_k < \min F_{k+1}$ a $\left\|\sum_{n\in F_k} x_n\right\| \geq \varepsilon$ pro každé

$k \in \mathbb{N}$. Položme ještě $F_0 = \{0\}$ a $D_k = \{\max F_{k-1} + 1, \dots, \max F_k\} \setminus F_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nechť nyní π je permutace $\mathbb{N}$, která postupně v rostoucím pořadí vyjmenovává prvky množin D_1, F_1, D_2, F_2, atd. Pak existují rostoucí posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a posloupnost $\{p_k\} \subset \mathbb{N}_0$ tak, že $\pi\bigl(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}\bigr) = F_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme $\bigl\|\sum_{n=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(n)}\bigr\| = \bigl\|\sum_{n\in F_k} x_n\bigr\| \geq \varepsilon$, což znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. To je spor s předpokladem.

□

VĚTA 41. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní. Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.*

DŮKAZ. První tvrzení plyne z Důsledku 38 a Věty 36(b). V $\mathbb{R}$ plyne opačná implikace z Věty 40 a z Riemannovy[10] věty o přerovnávání neabsolutně konvergentních řad.

□

PŘÍKLAD 42. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ v c_0, resp. ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, platí, že řada v jeho vyjádření $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ konverguje dokonce bezpodmínečně. Vskutku, mějme dáno $x \in c_0$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$. Pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ je $x - \sum_{n\in F'} x_n e_n = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n = 0$ pro $n \in F'$ a $y_n = x_n$ jinak. Jelikož $\|(y_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus F'} |x_n| \leq \sup_{n\geq n_0} |x_n| \leq \varepsilon$, plyne odtud, že $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

Podobně pro $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon^p$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$. Pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ je $x - \sum_{n\in F'} x_n e_n = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n = 0$ pro $n \in F'$ a $y_n = x_n$ jinak. Jelikož $\|(y_n)\|^p \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon^p$, plyne odtud, že $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

◇

Dle předchozího příkladu tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ v prostoru c_0 konverguje bezpodmínečně, ale nikoli absolutně.

3. Lineární operátory a funkcionály

■■■Základním zobrazením přenášející strukturu vektorového prostoru je lineární zobrazení. Jelikož však struktura normovaného lineárního prostoru zahrnuje i koncept metrického prostoru, chceme uvažovat lineární zobrazení, která zachovávají i metrickou strukturu. To přirozeně vede ke spojitému lineárnímu zobrazení (Tvrzení 44), izomorfismu a izometrii (Definice 54), což jsou klíčové pojmy pro naše další úvahy o normovaných lineárních prostorech.

Připomeňme si, že zobrazení $T : X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Dále $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ a $\operatorname{Rng} T = T(X)$ jsou podprostory X, resp. Y. Zobrazení T je prosté, právě když $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Lineární zobrazení z X do $\mathbb{K}$ se nazývá lineární forma na X.

Snadno si lze rozmyslet následující fakt.

FAKT 43. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T : X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní. Obdobně, je-li $N \subset Y$ symetrická, pak $T^{-1}(N)$ je symetrická, a je-li N konvexní, pak $T^{-1}(N)$ je konvexní.*

TVRZENÍ 44. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.
(ii) T je spojité v jednom bodě.
(iii) T je spojité v 0.
(iv) Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.

[10]Georg Friedrich Bernhard Riemann

(v) T je lipschitzovské.
(vi) T je stejnoměrně spojité.
(vii) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
(viii) $T(B_X)$ je omezená.
(ix) $T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.

DŮKAZ. Zjevně (i)⇒(ii).

(ii)⇒(iii) Nechť T je spojité v $x \in X$ a nechť $x_n \to 0$. Pak $x_n + x \to x$, a tedy $T(x_n + x) \to T(x)$. Odtud $T(x_n) = T(x_n + x - x) = T(x_n + x) - T(x) \to T(x) - T(x) = 0 = T(0)$.

(iii)⇒(iv) Existuje $\delta > 0$ takové, že $\|T(y)\| = \|T(y) - T(0)\| \le 1$, kdykoli $\|y\| = \|y - 0\| \le \delta$. Pak pro $x \in X$ nenulové platí, že

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta}\left\|T\left(\delta\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

Nerovnost ve (iv) tedy platí pro $C = \frac{1}{\delta}$.

(iv)⇒(v) Pro libovolná $x, y \in X$ platí $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \le C\|x - y\|$, tedy T je C-lipschitzovské.

(v)⇒(vi)⇒(i) a (iv)⇒(vii)⇒(viii) jsou zřejmé.

(viii)⇒(iv) Nechť $C \ge 0$ je takové, že $\|T(x)\| \le C$ kdykoli $x \in B_X$. Potom pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ platí $\|T(x)\| = \|x\|\big\|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\big\| \le C\|x\|$.

(viii)⇔(ix) Z linearity plyne, že $\|T(x)\| \le C$ pro každé $x \in B_X$, právě když $\|T(y)\| \le \delta C$ pro každé $y \in B(0,\delta)$.

□

Zobrazením splňujícím (vii) se někdy říká omezená. Tedy lineární zobrazení je spojité, právě když je omezené.

V kontextu funkcionální analýzy se lineárním zobrazením říká též lineární *operátory* a lineárním formám lineární *funkcionály*. Nás budou především zajímat spojité lineární operátory a spojité lineární funkcionály. Všimněme si, že je-li $T\colon X \to Y$ spojitý lineární operátor mezi normovanými lineárními prostory X a Y, pak $\operatorname{Ker} T$ je uzavřený podprostor X. Na druhou stranu, $\operatorname{Rng} T$ nemusí být uzavřený.

Připomeňme, že množina všech lineárních zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y tvoří vektorový prostor s operacemi uvažovanými bodově. Jsou-li nyní X, Y normované lineární prostory, pak součet spojitých lineárních zobrazení z X do Y je opět spojité lineární zobrazení a podobně pro násobek skalárem (Tvrzení 2). Tedy množina všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y tvoří vektorový prostor, který značíme $\mathcal{L}(X,Y)$. Dále pro každé $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ položíme

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

Díky Tvrzení 44 je $\|T\|$ konečné nezáporné číslo. Nyní si rozmyslíme, že $T \mapsto \|T\|$ je norma na $\mathcal{L}(X,Y)$:

(i) Je-li $T \ne 0$, pak existuje $x \in X$, $x \ne 0$ takové, že $T(x) \ne 0$. Tedy $T(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|}T(x) \ne 0$, takže $\|T\| > 0$.

(ii) Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\|S + T\| = \sup_{x\in B_X}\|(S + T)(x)\| = \sup_{x\in B_X}\|S(x) + T(x)\| \le \sup_{x\in B_X}\|S(x)\| + \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| = \|S\| + \|T\|$.

(iii) Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $\|\alpha T\| = \sup_{x\in B_X}\|(\alpha T)(x)\| = \sup_{x\in B_X}\|\alpha(T(x))\| = \sup_{x\in B_X}|\alpha|\|T(x)\| = |\alpha| \cdot \|T\|$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s výše uvedenou normou je tedy normovaný lineární prostor.

LEMMA 45. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
(a) $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.
(b) Je-li X netriviální, pak $\|T\| = \sup_{x\in S_X}\|T(x)\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in U_X}\|T(x)\|$.
(c) $\|T\| = \inf\{C \ge 0;\ \|T(x)\| \le C\|x\|$ pro každé $x \in X\}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$. Pak $\|T(x)\| = \|x\| \cdot \|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\| \le \|T\|\|x\|$, neboť $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$.

(b) Zjevně $\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x\in S_X} \|T(x)\|$. Je-li $x \in X \setminus \{0\}$, je $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$ a

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{y\in S_X} \|T(y)\|.$$

Tedy $\sup_{x\in S_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$. Dále, je-li $x \in U_X \setminus \{0\}$, pak $\|T(x)\| \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$. Tedy

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in U_X} \|T(x)\|.$$

Je-li $x \in B_X$, je $(1-\frac{1}{n})x \in U_X$ a $\left\|T\big((1-\frac{1}{n})x\big)\right\| \to \|T(x)\|$. Tedy $\sup_{x\in U_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x\in B_X} \|T(x)\| = \|T\|$ a důkaz (b) je hotov.

(c) Označme $A = \{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$. Díky (a) platí $\|T\| \in A$ a tedy $\inf A \leq \|T\|$. Dokažme nyní opačnou nerovnost. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Z definice infima najdeme $C \in A$, $C < \inf A + \varepsilon$. Pak

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|T(x)\| \leq \sup_{x\in B_X} C\|x\| = C < \inf A + \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, je $\|T\| \leq \inf A$.

□

FAKT 46. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ díky Lemmatu 45 platí $\|T_n(x)-T(x)\| = \|(T_n-T)(x)\| \leq \|T_n-T\|\|x\| \to 0$.

□

FAKT 47. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T\circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ platí $\|T(S(x))\| \leq \|T\|\|S(x)\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|$. Tedy $\|T\circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.

□

VĚTA 48. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův prostor.*

DŮKAZ. Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro libovolné pevné $x \in X$ platí $\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy posloupnost $\{T_n(x)\}$ je cauchyovská v Y a protože Y je úplný, existuje limita $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$, kterou označíme $T(x)$. Máme tak definované zobrazení $T\colon X \to Y$.

Ukažme, že T je lineární. Mějme $x, y \in X$. Pak

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} \big(T_n(x) + T_n(y)\big) = T(x) + T(y)$$

dle Tvrzení 2. Podobně, $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim\big(\alpha T_n(x)\big) = \alpha T(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dále pro $x \in B_X$ platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|)\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Protože $\big|\|T_n\| - \|T_m\|\big| \leq \|T_n - T_m\|$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, je číselná posloupnost $\{\|T_n\|\}$ cauchyovská, a tedy omezená. Tudíž máme $\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|T(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$, tj. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Zbývá dokázat, že $T_n \to T$ v normě prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ pro každé $n, m \geq n_0$. Pak pro $x \in B_X$ a pevné $n \geq n_0$ máme

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ pro libovolné $n \geq n_0$. Proto $T_n \to T$.

□

DEFINICE 49. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Prvky X^* jsou tedy spojité lineární funkcionály na X. Prostor X^* je normovaný lineární prostor s normou $\|f\| = \sup_{x\in B_X}|f(x)|$. Uvědomme si, že je-li X reálný, pak ze symetrie jednotkové koule plyne, že $\|f\| = \sup_{x\in B_X} f(x)$.

Protože jak $\mathbb{R}$, tak $\mathbb{C}$ jsou úplné prostory, důsledkem Věty 48 je následující věta.

VĚTA 50. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

PŘÍKLAD 51. Nechť $X = \ell_p$, $1 \le p \le \infty$, nebo $X = c_0$, nebo $X = c$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ danou předpisem $f_n(x) = x_n$ pro $x = (x_k) \in X$. Pak je snadno vidět, že f je lineární forma a $|f_n(x)| = |x_n| \le \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy $f_n \in X^*$ a $\|f\| \le 1$. Protože $f_n((0,\dots,0,1,0,0,\dots)) = 1$, kde 1 je pouze na n-té souřadnici, je $\|f_n\| = 1$. Funkcionálům f_n budeme říkat kanonické souřadnicové funkcionály.

◇

LEMMA 52. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\|\operatorname{dist}(x,\operatorname{Ker} f)$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \neq 0$. Zvolme $x \in X$ pevné. Je-li $y \in \operatorname{Ker} f$ libovolné, pak $|f(x)| = |f(x-y)| \le \|f\|\|x-y\|$. Tedy $|f(x)| \le \|f\|\operatorname{dist}(x,\operatorname{Ker} f)$. Pro důkaz obrácené nerovnosti zvolme $0 < \varepsilon < \|f\|$ libovolně. Najděme $y \in S_X$ tak, že $|f(y)| \ge \|f\| - \varepsilon$. Pak $x - \frac{f(x)}{f(y)}y \in \operatorname{Ker} f$, a tedy

$$\operatorname{dist}(x,\operatorname{Ker} f) \le \left\| x - \left(x - \frac{f(x)}{f(y)}y \right) \right\| = \frac{|f(x)|}{|f(y)|} \le \frac{|f(x)|}{\|f\|-\varepsilon}.$$

Jelikož bylo ε libovolné, je důkaz dokončen.

□

Následující příklad ukazuje, že součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený (srv. Tvrzení 23 a poznámka před).

PŘÍKLAD 53. Uvažujme prostor ℓ_2 a jeho následující dva podprostory: $Y = \{x \in \ell_2;\ x_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ a $Z = \overline{\operatorname{span}}\{e_{2n} + ne_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory. Pak $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} f_{2n}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, tedy Y i Z jsou uzavřené podprostory ℓ_2. Tvrdíme, že $Y + Z$ je hustý podprostor ℓ_2, který není uzavřený.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $e_{2n-1} \in Y$ a $e_{2n} = (e_{2n} + ne_{2n-1}) - ne_{2n-1} \in Z + Y$. Tedy podprostor $Y + Z$ obsahuje všechny kanonické bázové vektory i jejich lineární kombinace, tudíž je hustý v ℓ_2 (Příklad 29). Dále si všimněme, že je-li $z \in Z$, pak $z_{2n-1} = f_{2n-1}(z) = nf_{2n}(z) = nz_{2n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vskutku, pro $z \in \operatorname{span}\{e_{2n} + ne_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$ je $z = \sum_{j=1}^{k} c_j(e_{2j} + je_{2j-1})$, a tedy $f_{2j-1}(z) = jc_j = jf_{2j}(z)$ pro $1 \le j \le k$ a $f_{2j-1}(z) = 0 = jf_{2j}(z)$ pro $j > k$. Je tedy $f_{2n-1}(z) - nf_{2n}(z) = 0$ pro všechna z z husté podmnožiny Z, a protože funkce $f_{2n-1} - nf_{2n}$ je spojitá na Z, je nutně nulová na celém Z.

Položme konečně $x = \left(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e_{2n}$. Předpokládejme, že $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} = x_{2n} = y_{2n} + z_{2n} = z_{2n}$, a tedy $z_{2n-1} = 1$. To ovšem nelze, neboť $z \in \ell_2$. Tedy $x \notin Y + Z$.

◇

Připomeňme, že je-li T lineární bijekce mezi vektorovými prostory X a Y, pak inverzní zobrazení T^{-1} je též lineární.

DEFINICE 54. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;

- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

POZNÁMKA 55. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T: X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$. Pro libovolná $x, y \in X$ pak totiž máme $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|$.

PŘÍKLAD 56. Prostor c je izomorfní prostoru c_0. Definujme zobrazení $T: c_0 \to c$ předpisem

$$(x_1, x_2, x_3 \dots) \mapsto (x_2 + x_1, x_3 + x_1, x_4 + x_1, \dots).$$

Pak T je dobře definováno, neboť $\lim(x_n + x_1) = x_1$. Snadno je vidět, že T je lineární. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n + x_1| \leq |x_n| + |x_1| \leq \|x\|_{c_0} + \|x\|_{c_0} = 2\|x\|_{c_0}$, a tedy $\|T(x)\|_c = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{n+1} + x_1| \leq 2\|x\|_{c_0}$. Zobrazení T je tedy spojité lineární zobrazení.

Dále definujme zobrazení $S: c \to c_0$ předpisem

$$(y_1, y_2, y_3, \dots) \mapsto (\lim y_n, y_1 - \lim y_n, y_2 - \lim y_n, y_3 - \lim y_n, \dots).$$

Pak S je dobře definováno, neboť $\lim_{k\to\infty}(y_k - \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{k\to\infty} y_k - \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Snadno je vidět, že $T \circ S = Id_c$ a $S \circ T = Id_{c_0}$. Odtud plyne, že T je bijekce a S je lineární zobrazení inverzní k T. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $|y_k - \lim y_n| \leq |y_k| + |\lim y_n| = |y_k| + \lim|y_n| \leq |y_k| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \leq 2\|y\|_c$ a také $|\lim y_n| \leq \|y\|_c \leq 2\|y\|_c$. Tedy $\|S(y)\|_{c_0} \leq 2\|y\|_c$, takže zobrazení S je spojité.

Na závěr si ještě všimněme, že c_0 je vlastní podprostor c, který je izomorfní c.

◇

PŘÍKLAD 57. Prostor $L_1 = L_1([0, 1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, tj. prostor ℓ_1 je izometricky vnořen do L_1. Vskutku, označme $f_n = n(n + 1)\chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})} \in L_1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\|f_n\|_{L_1} = 1$. Definujme zobrazení $T: \ell_1 \to L_1$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0, 1]$. Pak zjevně $T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0, 1]$, která je měřitelná, neboť je bodovou limitou měřitelných funkcí. Podle věty o záměně integrálu a řady pro nezáporné funkce máme

$$\int_0^1 |T(x)| = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty,$$

tedy $T(x) \in L_1$ a zároveň vidíme, že $\|T(x)\|_{L_1} = \|x\|_{\ell_1}$. Zobrazení T je zjevně lineární, takže dle Poznámky 55 je to lineární izometrie do.

◇

PŘÍKLAD 58. Prostor $C([0, 1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0, tj. prostor c_0 je izometricky vnořen do $C([0, 1])$. Vskutku, pro $n \in \mathbb{N}$ označme f_n funkci, která je rovna 0 na $[0, 1] \setminus \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right)$, je afinní na $\left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right)$ a na $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ a splňuje $f_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1$. Pak $\|f_n\|_{C([0,1])} = 1$. Definujme zobrazení $T: c_0 \to C([0, 1])$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0, 1]$. Nechť $x \in c_0$. Pak zjevně $f = T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0, 1]$, která je afinní na každém intervalu $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ a splňuje $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = x_n$. Je tedy spojitá na $(0, 1]$. Abychom ukázali spojitost v 0 zprava, všimněme si, že $f(0) = 0$ a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Položme $\delta = \frac{1}{2n_0}$. Nechť $t \in (0, \delta)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ takové, že $t \in \left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right]$. Tedy $|f(t)| \leq |x_n| < \varepsilon$. Ukázali jsme, že $f \in C([0, 1])$, neboli zobrazení T vskutku zobrazuje do prostoru $C([0, 1])$. Dále T je zjevně lineární a platí $\|T(x)\|_{C([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]}|T(x)(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = \|x\|_{c_0}$, takže dle Poznámky 55 je to lineární izometrie do.

◇

PŘÍKLAD 59. Prostor $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_∞, a není tedy separabilní. Toto vnoření $I\colon \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ je dáno předpisem $I(y) = T_y$, kde $T_y(x) = (y_n x_n)_{n=1}^\infty$ pro $x \in \ell_2$.

Vskutku je-li $y \in \ell_\infty$, pak pro $x \in \ell_2$ je $\sum_{n=1}^\infty |y_n x_n|^2 \le \|y\|_\infty^2 \|x\|_2^2$, tedy T_y zobrazuje do ℓ_2. Snadno nahlédneme, že T_y je lineární a z předchozího odhadu plyne, že je spojité a $\|T_y\| \le \|y\|$. Pro opačný odhad stačí vzít kanonické bázové vektory $e_n \in S_{\ell_2}$, neboť $\|T_y\| \ge \sup_n \|T_y(e_n)\| = \sup_n \|y_n e_n\| = \sup_n |y_n| = \|y\|$. Linearitu zobrazení I si lze snadno rozmyslet. Protože $\|I(y)\| = \|T_y\| = \|y\|$, je I izometrie do. Neseparabilita $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ pak plyne z Věty 26(b).

◇

TVRZENÍ 60. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \le \|T(x)\| \le C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.

(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený v Y.*

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ Máme $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$. Dále $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$ je spojité, platí tedy pro každé $y \in \operatorname{Rng} T$ nerovnost $\|T^{-1}(y)\| \le \|T^{-1}\|\|y\|$. Tudíž $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \le \|T^{-1}\|\|T(x)\|$ pro každé $x \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $X \ne \{0\}$, a tedy $\|T^{-1}\| > 0$. Požadovaná nerovnost tak platí s konstantami $C_1 = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ a $C_2 = \|T\|$.

$\Leftarrow$ Splňují-li kladné konstanty C_1, C_2 požadované nerovnosti, je T spojité a prosté: Je-li $T(x) = 0$, pak $\|x\| \le \frac{1}{C_1}\|T(x)\| = 0$, tedy $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Existuje tedy inverzní operátor $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$, který je lineární. Pro libovolné $y \in \operatorname{Rng} T$ pak máme $\|T^{-1}(y)\| \le \frac{1}{C_1}\|T(T^{-1}(y))\| = \frac{1}{C_1}\|y\|$. Tedy i T^{-1} je spojité.

(b) Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y. Díky odhadu $\|T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)\| \le \|T^{-1}\|\|y_n - y_m\|$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ je cauchyovská i posloupnost $\{T^{-1}(y_n)\}$. Vzhledem k tomu, že X je úplný, konverguje $\{T^{-1}(y_n)\}$ k nějakému $x \in X$. Pak ovšem ze spojitosti operátoru T plyne $y_n = T(T^{-1}y_n) \to T(x)$, tedy i $\{y_n\}$ je konvergentní. Proto je Y úplný.

(c) Podle (b) je $\operatorname{Rng} T$ Banachův prostor. Tedy je uzavřený v Y dle Tvrzení 5(a).

□

FAKT 61. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.*

(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

DŮKAZ. (a) Podle Tvrzení 60(a) existují konstanty $C > 0$ a $D > 0$ takové, že $C\|x\| \le \|T(x)\|$ pro každé $x \in X$ a $D\|y\| \le \|S(y)\|$ pro každé $y \in Y$. Pro každé $x \in X$ tedy máme $CD\|x\| \le D\|T(x)\| \le \big\|S\big(T(x)\big)\big\| = \|S \circ T(x)\| \le \|S\|\|T\|\|x\|$. Podle Tvrzení 60(a) to znamená, že $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Pro každé $x \in X$ máme $\|S \circ T(x)\| = \big\|S\big(T(x)\big)\big\| = \|T(x)\| = \|x\|$ a aplikujeme Poznámku 55.

□

VĚTA 62. *Nechť $X, \widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Je-li T izometrie do, pak $\widehat{T}$ je též izometrie do.*

DŮKAZ. Dle Věty 15.9 existuje jednoznačně určené spojité zobrazení $\widehat{T}\colon \widehat{X} \to Y$, které rozšiřuje T. Ukážeme, že $\widehat{T}$ je lineární. Nechť $x, y \in \widehat{X}$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ v X splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. Ze spojitosti sčítání (Tvrzení 2) plyne $x_n + y_n \to x + y$. Využijeme-li spojitost $\widehat{T}$, máme $\widehat{T}(x + y) = \lim \widehat{T}(x_n + y_n) = \lim T(x_n + y_n) = \lim\big(T(x_n) + T(y_n)\big) = \lim\big(\widehat{T}(x_n) + \widehat{T}(y_n)\big) = \widehat{T}(x) + \widehat{T}(y)$, kde poslední rovnost plyne opět z Tvrzení 2. Podobně pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x_n \to \alpha x$ a tedy $\widehat{T}(\alpha x) = \lim \widehat{T}(\alpha x_n) = \lim T(\alpha x_n) = \lim \alpha T(x_n) = \lim \alpha \widehat{T}(x_n) = \alpha \widehat{T}(x)$.

Konečně, $\|x_n\| \to \|x\|$ a tedy $\|\widehat{T}(x)\| = \lim\|\widehat{T}(x_n)\| = \lim\|T(x_n)\| \le \lim\|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|$. Odtud plyne $\|\widehat{T}\| \le \|T\|$. Jelikož obrácená nerovnost platí díky tomu, že $\widehat{T}$ je rozšířením T, máme $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Je-li T izometrie do, pak předchozí výpočet dává, že $\|\widehat{T}(x)\| = \lim\|T(x_n)\| = \lim\|x_n\| = \|x\|$, tedy i $\widehat{T}$ je izometrie do.

□

4. Konečněrozměrné prostory

■■■Fundamentálním problémem při práci s nekonečněrozměrnými normovanými lineárním prostory je absence normové kompaktnosti uzavřených omezených množin. Dokonce tento rys nekonečnou rozměrnost uvažovaného prostoru charakterizuje, vizte Větu 66. Nekompaktnost omezených uzavřených množin se pak řeší například změnou topologie, jak uvidíme v Sekci 6.9.

LEMMA 63 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

DŮKAZ. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $u \in X \setminus Y$ a označme $d = \operatorname{dist}(u, Y)$. Protože Y je uzavřený, je $d > 0$ a můžeme nalézt $\eta > 0$ tak, aby $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$. Dále existuje $v \in Y$ takové, že $\|u - v\| \le d + \eta$. Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak $x \in S_X$. Je-li $y \in Y$ libovolné, je $v + \|u - v\|y \in Y$, a tedy

$$\|x - y\| = \left\|\frac{u - v}{\|u - v\|} - y\right\| = \frac{\left\|u - \left(v + \|u - v\|y\right)\right\|}{\|u - v\|} \ge \frac{d}{d + \eta}.$$

Dostáváme tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y\in Y}\|x - y\| \ge \frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$.

□

POZNÁMKA. Není-li Y uzavřený, nemusí předchozí tvrzení platit: podprostor c_{00} je hustý v c_0 a tedy pro každé $x \in c_0$ platí $\operatorname{dist}(x, c_{00}) = 0$. Pokud je Y uzavřený, nemusí existovat $x \in S_X$ s vlastností $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. To ukážeme v Příkladu 65.

LEMMA 64. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in S_{X^*}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Existuje $x \in S_X$ splňující $|f(x)| = 1$.
(ii) Existuje $x \in S_X$ splňující $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.
(iii) Existují $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ a $v \in \operatorname{Ker} f$ taková, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.
(iv) Pro každé $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ existuje $v \in \operatorname{Ker} f$ takové, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.

DŮKAZ. Ekvivalence (i)⇔(ii) ihned plyne z Lemmatu 52 a zjevně (iv)⇒(iii).

(iii)⇒(ii) Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak pro každé $y \in \operatorname{Ker} f$ platí

$$\|x - y\| = \frac{\left\|u - \left(v + \|u - v\|y\right)\right\|}{\|u - v\|} \ge \frac{\operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)}{\|u - v\|} = 1.$$

Protože $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \le \|x\| = 1$, platí $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.

(i)⇒(iv) Nechť $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Položme $v = u - \frac{f(u)}{f(x)}x$. Pak $v \in \operatorname{Ker} f$ a $\|u - v\| = \left\|\frac{f(u)}{f(x)}x\right\| = |f(u)| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$ dle Lemmatu 52.

□

PŘÍKLAD 65. Nechť $Y = \left\{x \in c_0;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0\right\}$. Ukážeme, že Y je uzavřený podprostor c_0 a že neexistuje $x \in S_{c_0}$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. Dále pro žádné $x \in c_0 \setminus Y$ neexistuje $y \in Y$ takové, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$.

Uvažme funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Pak zřejmě f je lineární forma na c_0 a $Y = \operatorname{Ker} f$. Dále pro každé $x \in B_{c_0}$ máme $|f(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, tedy f je spojitý lineární funkcionál. Navíc pro $x = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ krát}}, 0, 0, \dots)$ máme $x \in B_{c_0}$ a $f(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^k}$, tedy $\|f\| = 1$. K důkazu tvrzení nyní stačí podle Lemmatu 64 ověřit, že neexistuje $x \in S_{c_0}$ s vlastností $|f(x)| = 1$. Ale to je ihned vidět z pozorování, že pro každé $x \in S_{c_0}$ existuje index $j \in \mathbb{N}$ takový, že $|x_j| < 1$. Pak totiž

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

◇

VĚTA 66. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.
(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(iii) B_X je kompaktní.
(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.
(v) Každá lineární forma na X je spojitá.
(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T : \mathbb{K}^n \to X$ předpisem

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení, a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená (vizte Větu 15.3). Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Norma $\|\cdot\|_X$ je spojitá na X, a tedy nabývá na $T(S)$ minima $C > 0$ ($T(S)$ neobsahuje 0 díky prostotě T). Pro libovolné $y \in X \setminus \{0\}$ je $\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \in S$, takže $C \leq \left\|T\left(\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2}\right)\right\|_X = \frac{\|y\|_X}{\|T^{-1}(y)\|_2}$, odkud $\|T^{-1}(y)\|_2 \leq \frac{1}{C}\|y\|_X$.

(ii)⇒(iii) Je-li $T : \mathbb{K}^n \to X$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_X)$ uzavřená omezená podmnožina $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, takže je kompaktní. Tedy i $B_X = T(T^{-1}(B_X))$ je kompaktní.

(iii)⇒(i) Nechť X je nekonečné dimenze. Indukcí najdeme posloupnost prvků $\{x_n\}$ v S_X tak, že $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: V prvním kroku najdeme libovolné $x_1 \in S_X$. Máme-li $x_1, \dots, x_n$, je $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ vlastní a uzavřený podprostor X (Důsledek 25). Tedy dle Lemmatu 63 existuje x_{n+1} splňující $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$. Tím je konstrukce dokončena. Zkonstruovaná posloupnost $\{x_n\}$ pak nemá konvergentní podposloupnost, neboť jsou všechny její prvky od sebe navzájem vzdáleny alespoň o $\frac{1}{2}$. Tedy B_X není kompaktní.

(i)⇒(vi) Nechť $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Zafixujme nějakou bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X. Označme eukleidovskou[11] normu na $\mathbb{K}^n$ jako $\|\cdot\|_e$. Nechť $T_1 : (X, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ a $T_2 : (X, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ jsou izomorfismy jako v důkazu (i)⇒(ii). Pak $T_2^{-1} \circ T_1 = Id_X$, a tedy $Id_X : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus (Fakt 61), tj. normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní dle Tvrzení 13.

(vi)⇒(v) Předpokládejme, že na $(X, \|\cdot\|)$ existuje nespojitá lineární forma f. Pro každé $x \in X$ položíme $\|x\|_0 = \|x\| + |f(x)|$. Snadno je vidět, že $\|\cdot\|_0$ je norma na X, která je ovšem neomezená na $B_{(X,\|\cdot\|)}$. Tedy normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_0$ nejsou ekvivalentní.

(v)⇒(i) Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory e_γ mají normu 1. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ a položme $f(e_{\gamma_n}) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem není omezená na B_X.

(i)⇒(iv) Nechť Y je nějaký normovaný lineární prostor a $T : (X, \|\cdot\|) \to Y$ je lineární zobrazení. Zvolme bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X a uvažujme normu $\|x\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Díky tvrzení (vi) stačí

[11] Eukleides (Ευκλείδης)

dokázat, že $T\colon (X, \|\cdot\|_1) \to Y$ je spojité. To je ale zřejmé z odhadu

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|T(e_i)\| \leq \max\bigl\{\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_n)\|\bigr\} \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

(iv)$\Rightarrow$(v) je triviální.

□

Všimněme si, že podle předchozí věty jsou všechny uzavřené omezené množiny v konečněrozměrném prostoru X kompaktní. Vskutku, každá taková množina je uzavřenou podmnožinou nějaké koule $B(0, r)$, která je kompaktní, neboť je to spojitý obraz kompaktní koule B_X při zobrazení $x \mapsto rx$ (Tvrzení 2(c)).

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

■■■Stejně jako u každé abstraktní matematické struktury, tak i u normovaných lineárních prostorů potřebujeme znát základní operace, které tato struktura připouští. V případě normovaných lineárních prostorů studujeme jejich součiny, faktorprostory a doplňky podprostorů.

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$. Na kartézském součinu $X \times Y = \{(x, y);\ x \in X, y \in Y\}$ se zavádí struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ tak, že operace se provádějí po složkách. Identifikujeme-li prostor X, resp. Y s podprostorem $\{(x, 0);\ x \in X\}$, resp. $\{(0, y);\ x \in Y\}$, pak vektorový prostor $X \times Y$ je direktním součtem $X \oplus Y$.

Jsou-li nyní $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \bigl(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\bigr)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$: Nechť $|\cdot|_p$ značí příslušnou kanonickou normu na $\mathbb{R}^2$. Pak zjevně $\|(x, y)\|_p = \bigl|\bigl(\|x\|_X, \|y\|_Y\bigr)\bigr|_p$. Nechť (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou prvky $X \times Y$. Pak $\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_p = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|_p = \bigl|\bigl(\|x_1 + x_2\|_X, \|y_1 + y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p$. Protože $\|x_1 + x_2\|_X \leq \|x_1\|_X + \|x_2\|_X$ a $\|y_1 + y_2\|_Y \leq \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y$, je snadno vidět z definice $|\cdot|_p$, že

$$\begin{aligned} \bigl|\bigl(\|x_1 + x_2\|_X, \|y_1 + y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p &\leq \bigl|\bigl(\|x_1\|_X + \|x_2\|_X, \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p = \\ &= \bigl|\bigl(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\bigr) + \bigl(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p. \end{aligned}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro $|\cdot|_p$ pak dostaneme

$$\bigl|\bigl(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\bigr) + \bigl(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p \leq \bigl|\bigl(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\bigr)\bigr|_p + \bigl|\bigl(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p.$$

Tedy dohromady $\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_p \leq \|(x_1, y_1)\|_p + \|(x_2, y_2)\|_p$. Pro $\alpha \in \mathbb{K}$ a $(x, y) \in X \times Y$ pak máme $\|\alpha(x, y)\|_p = \|(\alpha x, \alpha y)\|_p = \bigl|\bigl(\|\alpha x\|_X, \|\alpha y\|_Y\bigr)\bigr|_p = \bigl|\bigl(|\alpha|\|x\|_X, |\alpha|\|y\|_Y\bigr)\bigr|_p = \bigl||\alpha|\bigl(\|x\|_X, \|y\|_Y\bigr)\bigr|_p = |\alpha|\bigl|\bigl(\|x\|_X, \|y\|_Y\bigr)\bigr|_p = |\alpha|\|(x, y)\|_p$.

DEFINICE 67. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Je vidět, že prostor X je izometrický podprostoru $\{(x, 0) \in X \oplus_p Y;\ x \in X\}$ a prostor Y je izometrický podprostoru $\{(0, y) \in X \oplus_p Y;\ y \in Y\}$.

Protože $\|(x, y)\|_p = \bigl|\bigl(\|x\|_X, \|y\|_Y\bigr)\bigr|_p$ a všechny normy na $\mathbb{R}^2$ jsou ekvivalentní (Věta 11), plyne odtud snadno, že normy $\|\cdot\|_p$ na $X \times Y$ jsou ekvivalentní, neboli prostory $X \oplus_p Y$ a $X \oplus_q Y$ jsou izomorfní pro libovolná $1 \leq p, q \leq \infty$ (Tvrzení 13).

Všimněme si, že metrika indukovaná normou $X \oplus_\infty Y$ odpovídá součinové metrice na metrickém prostoru $X \times Y$. Protože součin úplných metrických prostorů je úplný (Věta 15.7), plyne odtud, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_\infty Y$ je Banachův prostor. Vzhledem k výše zmíněné ekvivalenci norem tedy z Tvrzení 60(b) plyne, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_p Y$ je Banachův prostor pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako
$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$
Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy
$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$
Na množině
$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$
definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Jako nulový vektor slouží prvek $\widehat{0} = Y$. Uvědomme si, že operace jsou dobře definovány, neboť nezáleží na výběru reprezentantů příslušných tříd: Jsou-li totiž $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ takové, že $\widehat{x_1} = \widehat{x_2}$ a $\widehat{y_1} = \widehat{y_2}$, pak $x_1 - x_2 \in Y$ a $y_1 - y_2 \in Y$. Proto $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in Y$, což znamená, že $\widehat{x_1 + y_1} = \widehat{x_2 + y_2}$. Podobně, $\alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \in Y$, a tedy $\widehat{\alpha x_1} = \widehat{\alpha x_2}$.

S výše zmíněnými operacemi tvoří X/Y vektorový prostor.

DEFINICE 68. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Snadno je z definice vidět, že kanonické kvocientové zobrazení je lineární a na.

Nechť nyní X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Položíme-li
$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$
je $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ normovaný lineární prostor: Je-li $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, máme
$$\begin{aligned}\|\alpha\widehat{x}\|_{X/Y} = \|\widehat{\alpha x}\|_{X/Y} &= \inf_{z \in Y} \|\alpha x + z\| = \inf_{z \in Y} \|\alpha x + \alpha z\| = \\ &= \inf_{z \in Y} |\alpha| \|x + z\| = |\alpha| \inf_{z \in Y} \|x + z\| = |\alpha| \|\widehat{x}\|_{X/Y}\end{aligned}$$
a
$$\begin{aligned}\|\widehat{x} + \widehat{y}\|_{X/Y} = \|\widehat{x + y}\|_{X/Y} &= \inf_{z \in Y} \|x + y + z\| = \inf_{z_1, z_2 \in Y} \|x + y + z_1 + z_2\| \leq \\ &\leq \inf_{z_1, z_2 \in Y} \big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \inf_{z_1 \in Y} \inf_{z_2 \in Y} \big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \\ &= \inf_{z_1 \in Y} \|x + z_1\| + \inf_{z_2 \in Y} \|y + z_2\| = \|\widehat{x}\|_{X/Y} + \|\widehat{y}\|_{X/Y}.\end{aligned}$$
Konečně, pro $x \in X$ platí, že $\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \operatorname{dist}(x, Y) = 0$ právě tehdy, když $x \in \overline{Y} = Y$, tedy právě když $\widehat{x} = 0$. (Všimněme si, že kvůli poslední vlastnosti je nutná uzavřenost Y.)

Výše zmíněná norma se nazývá kanonická kvocientová norma a v kontextu normovaných lineárních prostorů budeme vždy chápat faktorprostor X/Y jako normovaný lineární prostor opatřený touto normou.

TVRZENÍ 69. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

DŮKAZ. Již víme, že q je lineární a na. Dále $\|q(x)\|_{X/Y} = \|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x + y\| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$, tedy q je spojité. Odtud také dostáváme, že $q(U_X) \subset U_{X/Y}$. Obráceně, je-li $\widehat{x} \in U_{X/Y}$ libovolné, pak $1 > \|\widehat{x}\|_{X/Y}$, a tedy z definice normy existuje $y \in \widehat{x}$ splňující $\|y\| < 1$. Toto y splňuje $q(y) = \widehat{x}$. Odtud plyne $U_{X/Y} \subset q(U_X)$ a dohromady dostáváme $q(U_X) = U_{X/Y}$. Konečně, je-li Y vlastní, pak je X/Y netriviální a $\sup_{z \in U_{X/Y}} \|z\| = 1$. Aplikací Lemmatu 45(b) tak dostaneme $\|q\| = 1$.

□

VĚTA 70. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

DŮKAZ. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Věty 30. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n}$ je absolutně konvergentní řada v X/Y. Z definice normy najdeme prvky $y_n \in \widehat{x_n}$ splňující $\|y_n\| \leq \|\widehat{x_n}\| + \frac{1}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ je absolutně konvergentní řada v X, a tedy je konvergentní (Věta 30). Ze spojitosti kanonického kvocientového zobrazení q dostáváme $q\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n}$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n}$ je konvergentní.

□

DEFINICE 71. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá algebraický doplněk A v X.

Připomeňme, že $X = A \oplus B$, právě když pro každé $x \in X$ existují jednoznačně určené vektory $x_A \in A$ a $x_B \in B$ splňující $x = x_A + x_B$.

DEFINICE 72. Nechť X je množina. Zobrazení $P: X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

FAKT 73. *Nechť X je množina.*

(a) Je-li $P: X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.
(b) Je-li $Y \subset X$ a $P: X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

DŮKAZ. (a) Pro $y \in \operatorname{Rng} P$ existuje $x \in X$ splňující $y = P(x)$, a tedy $P(y) = P(P(x)) = P(x) = y$.
(b) Pro $x \in X$ je $P(x) \in Y$, a tedy $P(P(x)) = P\restriction_Y(P(x)) = P(x)$.

□

Zásadní význam mají projekce lineární (tj. projekce, které jsou zároveň lineárními zobrazeními). Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $X = A \oplus B$, pak můžeme definovat zobrazení $P_A: X \to X$ a $P_B: X \to X$ pomocí $P_A(x) = x_A \in A$ a $P_B(x) = x_B \in B$, kde $x = x_A + x_B$ je výše zmíněný jednoznačný rozklad. Pak P_A i P_B jsou lineární projekce: Nechť $x, y \in X$ a $x = x_A + x_B$, $y = y_A + y_B$ jsou příslušné rozklady. Pak $x + y = (x_A + x_B) + (y_A + y_B) = (x_A + y_A) + (x_B + y_B)$. Jelikož $x_A + y_A \in A$ a $x_B + y_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(x + y) = x_A + y_A = P_A(x) + P_A(y)$ a $P_B(x + y) = x_B + y_B = P_B(x) + P_B(y)$. Podobně, pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x = \alpha(x_A + x_B) = \alpha x_A + \alpha x_B$. Protože $\alpha x_A \in A$ a $\alpha x_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(\alpha x) = \alpha x_A = \alpha P_A(x)$ a $P_B(\alpha x) = \alpha x_B = \alpha P_B(x)$. Konečně, $P_A(P_A(x)) = P_A(x_A) = x_A = P_A(x)$, neboť $x_A = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad x_A. Analogicky dostaneme, že i P_B je projekce.

Projekce P_A a P_B nazýváme projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$. Vzhledem k následujícímu tvrzení se též projekce P_A nazývá projekce na A rovnoběžná s B (a analogicky pro projekci P_B).

TVRZENÍ 74. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$,* $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ *a* $\operatorname{Ker} P_B = A$. *Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

DŮKAZ. Je $(P_A + P_B)(x) = P_A(x) + P_B(x) = x_A + x_B = x$. Dále zjevně platí $\operatorname{Rng} P_A \subset A$. Na druhou stranu, je-li $x \in A$, pak $x = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad a tedy $P_A(x) = x$ a $P_B(x) = 0$. To znamená, že $\operatorname{Rng} P_A = A$ a $A \subset \operatorname{Ker} P_B$. Konečně, je-li $P_B(x) = 0$, pak $x = x_A + 0$, a tedy $x \in A$. Ostatní dvě rovnosti se dokážou analogicky.

Nechť nyní $P: X \to X$ je lineární projekce. Pak pro každé $x \in X$ platí $x = P(x) + \big(x - P(x)\big)$, kde $P(x) \in \operatorname{Rng} P$ a $x - P(x) \in \operatorname{Ker} P$, a tedy $A + B = X$. Je-li $x \in A \cap B$, pak $x = P(y)$ pro nějaké $y \in X$ a zároveň $0 = P(x) = P \circ P(y) = P(y) = x$, tj. $A \cap B = \{0\}$. Proto $X = A \oplus B$. Z rozkladu $x = P(x) + \big(x - P(x)\big)$, který je díky $X = A \oplus B$ nutně jednoznačný, je pak ihned vidět, že $P = P_A$.

□

VĚTA 75. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

DŮKAZ. (a) Nechť $B \subset Y$ je báze Y. Pak B lze doplnit na bázi celého prostoru, existuje tedy lineárně nezávislá množina $C \subset X$ taková, že $B \cup C$ je báze X. Položme $Z = \operatorname{span} C$. Pak je ihned vidět, že $X = Y + Z$. Pokud by $Y \cap Z$ obsahoval nenulový prvek x, pak x je netriviální lineární kombinací prvků B a zároveň netriviální lineární kombinací prvků C. To je spor s jednoznačností vyjádření pomocí lineární kombinace prvků $B \cup C$.

(b) Nechť $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Ukažme, že $q\restriction_A$ je algebraický izomorfismus A na X/Y. Ověřme nejprve prostotu: Je-li $q\restriction_A(a) = q(a) = \widehat{a} = 0$ pro nějaké $a \in A$, pak $a \in Y$, a tedy $a = 0$. K důkazu surjektivity vezměme $\widehat{x} \in X/Y$ a rozložme $x = x_Y + x_A$, kde $x_Y \in Y$ a $x_A \in A$. Pak $x - x_A = x_Y \in Y$, a tedy $q\restriction_A(x_A) = q(x_A) = q(x) = \widehat{x}$.

□

DEFINICE 76. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y v X (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

DEFINICE 77. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

POZNÁMKA. Protože $P_B = Id - P_A$ (Tvrzení 74), k tomu, aby platilo $X = A \oplus_t B$, stačí spojitost jen jedné z projekcí (druhá je pak spojitá automaticky). Díky Tvrzení 74 je tedy podprostor A komplementovaný v X, právě když existuje spojitá lineární projekce z X na A.

Všimněme si také, že pro nenulovou spojitou lineární projekci P v normovaném lineárním prostoru X vždy platí, že $\|P\| \geq 1$, neboť existuje $x \in X$ takový, že $y = P(x) \neq 0$, a protože $P(y) = P(x) = y$, je $\left\|P\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \frac{\|P(y)\|}{\|y\|} = 1$.

VĚTA 78. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*

(a) Je-li $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y a Z uzavřené.
(b) Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_t Z$.

DŮKAZ. (a) $Y = \operatorname{Ker} P_Z$ a $Z = \operatorname{Ker} P_Y$ (Tvrzení 74), jejich uzavřenost tedy plyne ze spojitostí projekcí P_Y a P_Z. (b) bude dokázáno později, konkrétně na str. 58.

□

Díky předchozí větě a Větě 75 vidíme, že neuzavřené podprostory mají algebraický, ale nemají topologický doplněk (tj. nejsou komplementované).

VĚTA 79. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $(y, z) \in Y \oplus_1 Z$, pak $T(y+z) = (y, z)$, tedy T je na. Dále pro každé $x \in X$ máme

$$\begin{aligned}\|x\| = \|P_Y(x) + P_Z(x)\| \leq \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \|\big(P_Y(x), P_Z(x)\big)\|_1 = \|T(x)\|_1 \leq\\ \leq \big(\|P_Y\| + \|P_Z\|\big)\|x\|,\end{aligned}$$

tedy T je izomorfismus dle Tvrzení 60(a).

$\Leftarrow$ Pro každé $x \in X$ platí $\|P_Y(x)\| \leq \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \|T(x)\|_1 \leq \|T\|\|x\|$, což znamená, že P_Y je spojitá projekce.

□

6. Hilbertovy prostory

■■■Význačnou třídou normovaných lineárních prostorů jsou ty, jejichž norma je generována skalárním součinem. Skalární součin je struktura, která „lineárním“ způsobem definuje kolmost vektorů v prostoru a v důsledku generuje strukturu normovaného lineárního prostoru (Definice 80 a 90). V prostorech se skalárním součinem pak platí základní geometrické poučky, na které jsme zvyklí z euklidovské roviny (Tvrzení 86). Nekonečněrozměrné prostory se skalárním součinem jsou tak nekonečněrozměrnou variantou klasických euklidovských prostorů $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$. Klíčovým rysem úplných prostorů se skalárním součinem, tj. Hilbertových prostorů (Definice 82), je možnost vyjádřit jejich prvky pomocí rozvoje do ortonormální báze (Důsledek 114).

DEFINICE 80. Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,
(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,
(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,
(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Uvědomme si, že z (i) a (ii) plyne, že $\langle 0, y\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$ pro každé $y \in X$. Dále si uvědomme, že ve druhé proměnné je skalární součin „sdruženě lineární“, tj. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$ pro libovolná $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. V reálném případě je to tedy bilineární forma na X.

TVRZENÍ 81 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost[12]). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.
(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

DŮKAZ. K důkazu (i) zvolme $x, y \in X$. Pokud $y = 0$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $y \neq 0$, tj. $\langle y, y\rangle > 0$. Pak je funkce

$$t \mapsto \langle x - ty, x - ty\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

kvadratický polynom nezáporný na $\mathbb{R}$, protože

$$\begin{aligned}0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle &= \langle x, x\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - t\big(\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}\big) + t^2\langle y, y\rangle = \\ &= t^2\langle y, y\rangle - 2t\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle.\end{aligned}$$

Tento polynom tedy musí mít nekladný diskriminant, tj. $4(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$. Dostáváme tak

$$|\mathrm{Re}\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

pro každou dvojici $x, y \in X$.

Mějme nyní opět dány vektory $x, y \in X$ a vezměme $\alpha \in \mathbb{C}$ z jednotkové kružnice splňující $\alpha\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$. Pak z právě dokázané nerovnosti použité pro αx a y máme

$$\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \geq |\mathrm{Re}\langle \alpha x, y\rangle| = |\mathrm{Re}\,\alpha\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|.$$

(ii) Vlastnosti normy plynou z vlastností skalárního součinu a tvrzení (i), neboť trojúhelníkovou nerovnost odvodíme pomocí výpočtu

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned} \tag{2}$$

[12]Verzi v eukleidovských prostorech používali Joseph-Louis Lagrange (roz. Giuseppe Luigi Lagrangia) a Augustin-Louis Cauchy, integrální verzi dokázal Cauchyův žák Viktor Jakovlevič Buňakovskij (Виктор Яковлевич Буняковский) (1859) a též Karl Hermann Amandus Schwarz (1885), obecnou verzi dokázal John von Neumann (János Lajos Neumann) (1930).

□

Na prostoru skalárním součinem je dle předchozího tvrzení přirozeně indukována norma. Pokud nebude řečeno jinak, budeme tedy vždy chápat prostor se skalárním součinem zároveň jako normovaný lineární prostor s touto kanonickou normou.

DEFINICE 82. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá Hilbertův[13] prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

PŘÍKLAD 83. Snadno se ověří, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

◇

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem. Je-li Y podprostor X, pak $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, kde uvažujeme restrikci skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na $Y \times Y$, je zjevně též prostor se skalárním součinem. Je-li navíc X Hilbertův a Y je uzavřený, pak dle Tvrzení 5 je Y též Hilbertův prostor.

TVRZENÍ 84. *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$.*
(a) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y\colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X a $\|f_y\| = \|y\|$.
(b) Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

DŮKAZ. (a) Protože skalární součin je lineární v první souřadnici a $|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ pro každé $x \in X$ (Cauchyova-Schwarzova nerovnost, Tvrzení 81), je $f_y \in X^*$ a $\|f_y\| \le \|y\|$. Je-li navíc $y \neq 0$, pak $\frac{y}{\|y\|} \in S_X$ a $f_y\bigl(\frac{y}{\|y\|}\bigr) = \bigl\langle \frac{y}{\|y\|}, y\bigr\rangle = \|y\|$, a tedy $\|f_y\| = \|y\|$.

(b) Připomeňme, že na $X \times X$ uvažujeme součinovou metriku $\rho((x, y), (u, v)) = \max\{\|x-u\|, \|y-v\|\}$. Zvolme $R > 0$ a $(x, y), (u, v) \in X \times X$ splňující $\rho((x, y), 0) \le R$, $\rho((u, v), 0) \le R$. Pak díky Tvrzení 81 máme

$$
\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle - \langle u, v\rangle| &\le |\langle x, y\rangle - \langle x, v\rangle| + |\langle x, v\rangle - \langle u, v\rangle| = |\langle x, y - v\rangle| + |\langle x - u, v\rangle| \le \\
&\le \|x\|\|y - v\| + \|v\|\|x - u\| \le R\bigl(\|x - u\| + \|y - v\|\bigr) \le 2R\rho\bigl((x, y), (u, v)\bigr).
\end{aligned}
$$

□

Při počítání s normou v prostorech se skalárním součinem budeme často používat výpočet z (2), zformulujme jej proto explicitně:

FAKT 85. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Následující tvrzení je okamžitým důsledkem tohoto faktu.

TVRZENÍ 86 (rovnoběžníkové pravidlo). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr).$$

Je-li norma indukovaná skalárním součinem, pak tento skalární součin lze vyjádřit pouze pomocí normy:

TVRZENÍ 87 (polarizační vzorec). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\bigl(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\bigr)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\bigl(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2\bigr)$$

v komplexním případě.

[13] David Hilbert

DŮKAZ. Vzorec pro reálný prostor plyne ihned z Faktu 85. V komplexním případě máme

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2=\\&\quad=4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+i\big(\|x\|^2+\|iy\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,iy\rangle\big)-i\big(\|x\|^2+\|-iy\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,-iy\rangle\big)=\\&\quad=4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+4i\operatorname{Re}\langle x,iy\rangle=4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+4i\operatorname{Re}\big(-i\langle x,y\rangle\big)=4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+4i\operatorname{Im}\langle x,y\rangle=4\langle x,y\rangle,\end{aligned}$$

neboť pro $a,b\in\mathbb{R}$ je $\operatorname{Re}\big(-i(a+ib)\big)=\operatorname{Re}(b-ia)=b=\operatorname{Im}(a+ib)$.

□

DŮSLEDEK 88. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X\to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ pro každé $x,y\in X$.*

DŮKAZ. Díky polarizačnímu vzorci je $\langle T(x),T(y)\rangle_Y=\frac14\big(\|T(x)+T(y)\|_Y^2-\|T(x)-T(y)\|_Y^2\big)=\frac14\big(\|T(x+y)\|_Y^2-\|T(x-y)\|_Y^2\big)=\frac14\big(\|x+y\|_X^2-\|x-y\|_X^2\big)=\langle x,y\rangle_X$, pokud jsou prostory reálné. V komplexním případě je výpočet analogický.

□

VĚTA 89. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X\oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X\oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

DŮKAZ. Pro $(x,y),\ (u,v)\in X\times Y$ definujme $\langle(x,y),(u,v)\rangle=\langle x,u\rangle_X+\langle y,v\rangle_Y$. Tento vzorec definuje skalární součin na $X\times Y$: Pro $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (u,v)\in X\times Y$ máme

$$\begin{aligned}\big\langle(x_1,y_1)+(x_2,y_2),(u,v)\big\rangle&=\big\langle(x_1+x_2,y_1+y_2),(u,v)\big\rangle=\langle x_1+x_2,u\rangle_X+\langle y_1+y_2,v\rangle_Y=\\&=\langle x_1,u\rangle_X+\langle x_2,u\rangle_X+\langle y_1,v\rangle_Y+\langle y_2,v\rangle_Y=\\&=\langle(x_1,y_1),(u,v)\rangle+\langle(x_2,y_2),(u,v)\rangle.\end{aligned}$$

Dále pro $(x,y),\ (u,v)\in X\times Y$ a $\alpha\in\mathbb{K}$ máme

$$\langle\alpha(x,y),(u,v)\rangle=\langle(\alpha x,\alpha y),(u,v)\rangle=\langle\alpha x,u\rangle_X+\langle\alpha y,v\rangle_Y=\alpha\langle x,u\rangle_X+\alpha\langle y,v\rangle_Y=\alpha\langle(u,v),(x,y)\rangle,$$

$$\langle(x,y),(u,v)\rangle=\langle x,u\rangle_X+\langle y,v\rangle_Y=\overline{\langle u,x\rangle_X}+\overline{\langle v,y\rangle_Y}=\overline{\langle u,x\rangle_X+\langle v,y\rangle_Y}=\overline{\langle(u,v),(x,y)\rangle}.$$

Konečně, $\langle(x,y),(x,y)\rangle=\langle x,x\rangle_X+\langle y,y\rangle_Y=\|x\|_X^2+\|y\|_Y^2=\|(x,y)\|_2^2$, což dokazuje i poslední dvě vlastnosti skalárního součinu a též to, že výše uvedený skalární součin na $X\times Y$ indukuje normu $X\oplus_2 Y$.

□

DEFINICE 90. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x,y\in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x,y\rangle=0$. Tento fakt značíme též $x\perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A\subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x\perp A$. Množiny $A,B\subset X$ jsou ortogonální, pokud $x\perp y$ pro každé $x\in A$, $y\in B$, což značíme $A\perp B$. Množina $A^\perp=\{x\in X;\ x\perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

FAKT 91 (Pythagorova[14] věta, asi 500 p.n.l.). *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x,y\in X$. Je-li $x\perp y$, pak*

$$\|x\pm y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1,\dots,x_n\in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1+\ldots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

DŮKAZ. První vzorec ihned plyne z Faktu 85. Druhý vzorec plyne z prvního snadno indukcí, uvědomíme-li si, že $x_{i+1}\perp(x_1+\ldots+x_i)$ pro $i=1,\dots,n-1$.

□

TVRZENÍ 92. *Nechť X je prostor se skalárním součinem.*

(a) Je-li Y podprostor X, pak $Y\cap Y^\perp=\{0\}$.

[14] Pythagoras ze Samu (Πυϑαγόρας ο Σάμιος)

(b) $\{0\}^\perp = X$ *a* $X^\perp = \{0\}$.
(c) Pro $A \subset X$ *je* $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.
(d) Pro $A \subset X$ *je* $A^\perp$ *uzavřený podprostor* X.
(e) Je-li $X = Y + Z$ *pro nějaké podprostory* $Y, Z \subset X$ *takové, že* $Y \perp Z$*, pak* $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ *a* $X = Y \oplus Z$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in Y \cap Y^\perp$, pak $\langle x, x\rangle = 0$, tedy $x = 0$.

(b) První rovnost je zřejmá, druhá plyne z (a), neboť $X^\perp = X \cap X^\perp$.

(c) Zjevně $A^\perp \supset (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$. Na druhou stranu nechť $y \in A^\perp$. Pak $f_y\colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojitý lineární funkcionál na X (Tvrzení 84(a)) a $A \subset \operatorname{Ker} f$. Tedy $\overline{\operatorname{span}} A \subset \operatorname{Ker} f$, což znamená, že $\langle x, y\rangle = 0$ pro každé $x \in \overline{\operatorname{span}} A$.

(d) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y\colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X. Tedy $A^\perp = \bigcap_{y\in A}\{y\}^\perp = \bigcap_{y\in A} \operatorname{Ker} f_y$ je uzavřený podprostor X.

(e) Dle předpokladu je $Z \subset Y^\perp$. Na druhou stranu, je-li $x \in Y^\perp$, pak $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z \subset Y^\perp$. Tedy $y = x - z \in Y^\perp$, což znamená, že $y \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, neboli $x = z \in Z$. Tudíž $Y^\perp = Z$. Záměnou rolí Y a Z obdržíme rovnost $Z^\perp = Y$. Konečně, poslední tvrzení plyne z (a).

□

LEMMA 93. *Nechť* X *je prostor se skalárním součinem. Jsou-li* $x, z \in X$ *takové, že* $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ *pro každé* $y \in X$*, pak* $x = z$.

DŮKAZ. Máme $\langle x - z, y\rangle = 0$ pro každé $y \in X$, takže speciálně $\|x - z\|^2 = \langle x - z, x - z\rangle = 0$.

□

VĚTA 94 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť* C *je neprázdná uzavřená konvexní množina v Hilbertově prostoru* H*. Pak pro každé* $x \in H$ *existuje právě jedno* $y \in C$ *tak, že* $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.

DŮKAZ. Je-li $x \in C$, stačí volit $y = x$. Není-li x v C, užijeme rovnost $\operatorname{dist}(x, C) = \operatorname{dist}(0, C - x)$ k pozorování, že lze bez újmy na obecnosti předpokládat $x = 0 \notin C$. Označme $d = \operatorname{dist}(0, C)$ a najděme posloupnost $\{y_n\}$ v C splňující $\|y_n\| \to d$. Tato posloupnost je cauchyovská: Nechť $0 < \varepsilon \leq 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|y_n\| < d + \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Pro libovolná $n, k \geq n_0$ pak z rovnoběžníkového pravidla plyne, že

$$\begin{aligned}\|y_n - y_k\|^2 &= 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - \|y_n + y_k\|^2 = 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4\left\|\frac{y_n + y_k}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4d^2 < 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon^2 + 8d\varepsilon \leq (4 + 8d)\varepsilon.\end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme použili fakt, že C je konvexní, a tedy $\frac{1}{2}(y_n + y_k) \in C$.) Posloupnost $\{y_n\}$ tudíž konverguje k nějakému prvku $y \in H$, který však leží v C díky uzavřenosti C. Pak $\|y\| = \lim\|y_n\| = d$.

Předpokládejme nyní, že $y_1, y_2 \in C$ splňují $\|y_1\| = \|y_2\| = d$. Z rovnoběžníkového pravidla a faktu $\frac{y_1+y_2}{2} \in C$ dostáváme

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\big(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\big) - \|y_1 + y_2\|^2 = 4d^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

Tedy $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, tj. $y_1 = y_2$. Tím je důkaz jednoznačnosti dokončen.

□

PŘÍKLAD 95. Není-li H Hilbertův pak, Věta 94 nemusí platit: Nechť C je jednotková koule v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ a $x = (2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Pak pro každé $t \in [-1, 1]$ je $\|x - (1, t)\|_\infty = 1 = \operatorname{dist}(x, C)$, tedy nejbližší prvek není určen jednoznačně. Dokonce nejbližší prvek nemusí ani existovat, vizte Příklad 65.

◇

LEMMA 96 (F. Riesz, 1934). *Nechť* X *je prostor se skalárním součinem,* Y *je jeho podprostor a* $x \in X$. *Pak* $y \in Y$ *splňuje* $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ *právě tehdy, když* $x - y \perp Y$.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Pro každé $z \in Y$ platí $y - z \in Y$, a tedy $x - y \perp y - z$. Z Pythagorovy věty (Fakt 91) tak máme $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$. Odtud $\|x-y\| = \min\{\|x-z\|;\ z \in Y\} = \operatorname{dist}(x, Y)$.

$\Rightarrow$ Nechť $z \in Y$ je libovolné. Chceme dokázat, že $\langle x - y, z\rangle = 0$. Zřejmě lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|z\| = 1$. Položme $\alpha = \langle x - y, z\rangle$. Pak $y + \alpha z \in Y$, a tedy

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &\leq \|x-(y+\alpha z)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|\alpha z\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-y, \alpha z\rangle = \\ &= \|x-y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}\big(\overline{\alpha}\langle x-y, z\rangle\big) = \|x-y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\alpha) = \|x-y\|^2 - |\alpha|^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $|\alpha|^2 \leq 0$, a tedy $\alpha = 0$.

$\square$

DEFINICE 97. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

TVRZENÍ 98. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je zobrazení takové, že $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$. Pak P je ortogonální lineární projekce.*

DŮKAZ. Položme $Y = \operatorname{span}\operatorname{Rng} P$. Je-li $z \in \operatorname{Rng} P$, pak $z - P(z) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, a tedy $P(z) = z$. Dle Faktu 73(b) to znamená, že P je projekce. Dále nechť $x, y \in X$. Pak $x - P(x) \in Y^\perp$ a $y - P(y) \in Y^\perp$. Tedy $x + y - P(x) - P(y) \in Y^\perp$. Protože podle předpokladu je i $x + y - P(x+y) \in Y^\perp$, dostáváme, že $P(x+y) - P(x) - P(y) = x + y - P(x) - P(y) - \big(x + y - P(x+y)\big) \in Y^\perp$. Tedy $P(x+y) - P(x) - P(y) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, neboli $P(x+y) = P(x) + P(y)$. Analogicky pro $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\alpha(x - P(x)) \in Y^\perp$ a $\alpha x - P(\alpha x) \in Y^\perp$, a tedy $P(\alpha x) - \alpha P(x) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$.

$\square$

VĚTA 99. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *P je ortogonální.*
(ii) $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Rng} P$.
(iii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^\perp$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$.
(iv) $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x \in X$.
(v) $x - P(x) \perp P(x)$ *pro každé* $x \in X$.
(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle$ *pro každé* $x \in X$.
(vii) *P je spojitá a $\|P\| \leq 1$ (tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).*

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) plyne z toho, že pro $x \in \operatorname{Ker} P$ je $x = x - P(x)$, (ii)$\Rightarrow$(i) plyne z toho, že $x - P(x) \in \operatorname{Ker} P$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) plyne z Tvrzení 74 a 92(e), (iii)$\Rightarrow$(ii) je triviální.

(i)$\Leftrightarrow$(iv) plyne z Lemmatu 96.

(i)$\Rightarrow$(v) je triviální.

(v)$\Rightarrow$(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle - \langle P(x), x - P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle$.

(vi)$\Rightarrow$(vii) Pro libovolné $x \in X$ je $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle = |\langle P(x), x\rangle| \leq \|P(x)\|\|x\|$. Odtud plyne, že $\|P(x)\| \leq \|x\|$.

(vii)$\Rightarrow$(ii) Zvolme libovolně $x \in \operatorname{Rng} P$ a $z \in \operatorname{Ker} P$ a položme $Y = \operatorname{span}\{z\}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\|x\| = \|P(x)\| = \|P(x - \alpha z)\| \leq \|x - \alpha z\|$, což znamená, že $\|x\| = \operatorname{dist}(x, Y)$. Podle Lemmatu 96 je tedy $x \perp z$.

$\square$

VĚTA 100 (F. Riesz, 1934). *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^\perp$ a H je izometrický prostoru $Y \oplus_2 Y^\perp$ pomocí kanonického zobrazení $T\colon x \mapsto \big(P_Y(x), P_{Y^\perp}(x)\big)$.*

Druhou část tvrzení srovnejte s Větou 79.

DŮKAZ. Již víme, že $Y \cap Y^\perp = \{0\}$. Dále, pro každé $x \in H$ existuje dle Věty 94 prvek $y \in Y$ splňující $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$, což dle Lemmatu 96 znamená, že $x - y \in Y^\perp$. Protože $x = y + (x - y)$, plyne odtud, že $H = Y + Y^{\perp}$. Tudíž $H = Y \oplus Y^{\perp}$. Konečně, dle Tvrzení 74 je projekce $P_Y : H \to Y$ příslušná tomuto rozkladu ortogonální, tedy je spojitá dle Věty 99. Díky Pythagorově větě pak obdržíme, že

$$\|T(x)\|^2_{Y \oplus_2 Y^{\perp}} = \|P_Y(x)\|^2 + \|P_{Y^{\perp}}(x)\|^2 = \|P_Y(x) + P_{Y^{\perp}}(x)\|^2 = \|x\|^2$$

pro libovolné $x \in H$. A protože pro $u \in Y$ a $v \in Y^{\perp}$ je $T(u+v) = (u, v)$, je T na.

□

Poznamenejme, že není-li H úplný, pak předchozí věta nemusí platit (vizte Příklad 117).

DŮSLEDEK 101. *Nechť H je Hilbertův prostor a $A \subset H$. Pak $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span}} A$.*

DŮKAZ. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}} A$. Dle Tvrzení 92(c) je $(A^{\perp})^{\perp} = (Y^{\perp})^{\perp}$. Dle Věty 100 existuje ortogonální projekce $P : H \to Y$ s $\operatorname{Rng} P = Y$. Věta 99 pak dává, že $(Y^{\perp})^{\perp} = (\operatorname{Ker} P)^{\perp} = Y$.

□

DŮSLEDEK 102. *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak H/Y je izometricky izomorfní s $Y^{\perp}$ pomocí kanonického kvocientového zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $q : H \to H/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Z Vět 100 a 75 plyne, že $q\restriction_{Y^{\perp}}$ zobrazuje $Y^{\perp}$ na H/Y. Dále pro $y \in Y^{\perp}$ díky Faktu 91 platí, že

$$\|q(y)\|^2_{H/Y} = \inf\{\|y + z\|;\ z \in Y\}^2 = \inf\{\|y + z\|^2;\ z \in Y\} = \inf\{\|y\|^2 + \|z\|^2;\ z \in Y\} = \|y\|^2,$$

a tedy $q\restriction_{Y^{\perp}}$ je izometrie.

□

VĚTA 103. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z Tvrzení 37(a).

$\Leftarrow$ Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Mějme tedy $\varepsilon > 0$ dáno. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left\|\sum_{n=k}^{l} x_n\right\| < \varepsilon$ pro libovolná $l \geq k \geq n_0$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$ a nechť $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná a disjunktní s F. Položme dále $k = \min F'$, $l = \max F'$. Pak $l \geq k > n_0$, a tedy s pomocí Pythagorovy věty (Fakt 91) máme

$$\left\|\sum_{n\in F'} x_n\right\|^2 = \sum_{n\in F'} \|x_n\|^2 \leq \sum_{n=k}^{l} \|x_n\|^2 = \left\|\sum_{n=k}^{l} x_n\right\|^2 < \varepsilon^2.$$

□

DEFINICE 104. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Ortonormální množině se též někdy říká ortonormální soustava či ortonormální systém. Všimněme si, že A je ortonormální, právě když pro všechna $x, y \in A$ platí

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \neq y, \\ 1 & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dále si uvědomme, že ortonormální A je maximální, právě když $A^{\perp} = \{0\}$.

POZNÁMKA (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 103 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmínku $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmínkou $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

FAKT 105. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x-y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

DŮKAZ. Podle Pythagorovy věty máme $\|x-y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 = 2$.

□

VĚTA 106. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Vezměme množinu

$$\mathcal{A} = \{A \subset X;\ A \text{ je ortonormální množina}\}$$

uspořádanou inkluzí. Pak $(\mathcal{A}, \subset)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná (obsahuje prázdnou množinu). Navíc má každý řetězec horní závoru, totiž sjednocení všech prvků daného řetězce: Nechť $\mathcal{B}$ je řetězec v $\mathcal{A}$ a $B = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$. Pak zjevně $B \subset S_X$. Jsou-li $x, y \in B$, $x \neq y$, pak $x \in A_1 \in \mathcal{B}$ a $y \in A_2 \in \mathcal{B}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_1 \subset A_2$. Pak ovšem $x, y \in A_2$, což je ortonormální množina, a tedy $x \perp y$. To dokazuje, že B je ortonormální, takže patří do $\mathcal{A}$. Podle Zornova lemmatu[15] tedy v $\mathcal{A}$ existuje maximální prvek.

□

POZNÁMKA 107. Je-li prostor se skalárním součinem separabilní, pak neobsahuje nespočetnou ortonormální množinu, jelikož separabilní metrický prostor neobsahuje nespočetnou diskrétní množinu (vizte Fakt 105). Tedy každý maximální ortonormální systém je v něm (nejvýše) spočetný.

LEMMA 108. *Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

DŮKAZ. Nechť $\alpha \in \Gamma$ a $\varepsilon > 0$. Najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma e_\gamma \right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F. Pak pro $F' = F \cup \{\alpha\}$ platí

$$\varepsilon \geq \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma e_\gamma \right\| \cdot \|e_\alpha\| \geq \left| \left\langle x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma e_\gamma, e_\alpha \right\rangle \right| = \left| \langle x, e_\alpha \rangle - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \langle e_\gamma, e_\alpha \rangle \right| = |\langle x, e_\alpha \rangle - x_\alpha|.$$

Tedy $x_\alpha = \langle x, e_\alpha \rangle$.

□

Jako důsledek dostáváme, že je-li $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ ortonormální báze v X a $x \in X$, pak koeficienty x_γ ve vyjádření $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ jsou určeny jednoznačně (a platí $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$).

Snadným důsledkem Pythagorovy věty (Fakt 91) je následující fakt:

FAKT 109. *Nechť $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\left\| \sum_{i \in F} a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i \in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.*

Okamžitým důsledkem předchozího faktu je následující pozorování:

DŮSLEDEK 110. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

LEMMA 111. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \in Y^\perp$.*

DŮKAZ. Označme $x_Y = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i$. Pro každé $j \in F$ máme $\langle x_Y, e_j \rangle = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$, tj. $\langle x - x_Y, e_j \rangle = 0$. Odtud snadno plyne, že $x - x_Y \perp Y$.

□

VĚTA 112 (Besselova nerovnost[16]). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, pak pro každé $x \in X$ platí, že $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

[15] Zornovo lemma dokázal Kazimierz Kuratowski (1922) a nezávisle Max August Zorn (1935).

[16] Pro trigonometrické funkce používal podobnou nerovnost Friedrich Wilhelm Bessel (1828).

DŮKAZ. Mějme dánu libovolnou konečnou množinu $F \subset \Gamma$. Položme $x_F = \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$. Podle Lemmatu 111 je $x - x_F \perp \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$ a speciálně $x - x_F \perp x_F$. Z Pythagorovy věty a Faktu 109 tedy dostaneme $\|x\|^2 = \|x - x_F + x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$. Podle Tvrzení 34 tak obdržíme

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} \leq \|x\|^2.$$

□

VĚTA 113. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost[17]).
(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ pro každé $x \in X$.
(iii) $\{e_\gamma\}$ je ortonormální báze.
(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.
(v) $\{e_\gamma\}$ je maximální ortonormální systém.

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Poznamenejme, že řadě v (ii) se říká abstraktní Fourierova[18] řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ se nazývají abstraktní Fourierovy koeficienty. Proč, bude osvětleno v Příkladu 116.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x \in X$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F dostáváme s pomocí Faktů 85 a 109

$$\begin{aligned}\left\|x - \sum_{\gamma\in F'}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\|^2 &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\left\langle x, \sum_{\gamma\in F'}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\sum_{\gamma\in F'}\overline{\langle x, e_\gamma\rangle}\langle x, e_\gamma\rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F'}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$.

(ii)⇒(iii) je zřejmá a (iii)⇒(iv) plyne snadno z definic.

(iv)⇒(i) Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ a skaláry x_γ, $\gamma \in F$ tak, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\right\| < \varepsilon$. Položme $Y = \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$. Pak $\operatorname{dist}(x, Y) \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\right\| < \varepsilon$. Z Lemmatu 111 plyne, že $x - \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma \in Y^\perp$, a tedy podle Lemmatu 96 platí $\left\|x - \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\| = \operatorname{dist}(x, Y) < \varepsilon$. Z toho pomocí stejného výpočtu jako v důkazu (i)⇒(ii) dostáváme

$$\varepsilon^2 > \left\|x - \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2,$$

a tedy $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \geq \sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2$. Protože tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \geq \|x\|^2$. Opačná nerovnost je přímo Besselova nerovnost (Věta 112).

(ii)⇒(v) Nechť $\{e_\gamma\}$ není maximální, tj. existuje nenulový vektor x splňující $\langle x, e_\gamma\rangle = 0$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Ale $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma = 0$, což je spor.

Konečně, je-li X Hilbertův, ukážeme, že (v)⇒(iv). Není-li splněna (iv), pak je $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ vlastní uzavřený podprostor X. Podle Věty 100 je $Y^\perp$ netriviální, což je spor s maximalitou $\{e_\gamma\}$.

□

Z Vět 106 a 113 ihned plyne následující důsledek:

[17] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1799)

[18] Jean-Baptiste Joseph Fourier

DŮSLEDEK 114. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

DŮSLEDEK 115. *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H, pak zobrazení $P\colon H\to H$, $P(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x,e_\gamma\rangle e_\gamma$ je ortogonální lineární projekce na $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$. Dále je $\|P(x)\|^2=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x,e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x\in X$.*

DŮKAZ. Označme $Y=\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$ a nechť $P\colon H\to Y$ je ortogonální lineární projekce na Y z Věty 100. Nechť $x\in H$. Pak $x=P(x)+z$, kde $z\in Y^\perp$. Odtud plyne, že $\langle x,e_\gamma\rangle=\langle P(x),e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma\in\Gamma$. Použijeme-li Větu 113 na prostor Y, pak obdržíme, že $P(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\langle P(x),e_\gamma\rangle e_\gamma=\sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x,e_\gamma\rangle e_\gamma$ a $\|P(x)\|^2=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle P(x),e_\gamma\rangle|^2=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x,e_\gamma\rangle|^2$.

□

PŘÍKLAD 116.

- Kanonické bázové vektory $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru ℓ_2 (Příklad 29).
- Obecněji, je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak kanonické bázové vektory $e_\gamma=\chi_{\{\gamma\}}$, $\gamma\in\Gamma$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru $\ell_2(\Gamma)$. (Snadno to plyne např. z Věty 113, neboť je z definice splněna Parsevalova rovnost.)
- Pro Hilbertův prostor $L_2([0,2\pi])$ je systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ n\in\mathbb{N}\right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy[19] věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť $f\in L_2([0,2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f\in L_1([0,2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f. Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f=0$ s. v., a tedy $f=0$ v $L_2([0,2\pi])$.

  Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 113 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x,e_\gamma\rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0,2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

◇

PŘÍKLAD 117. Není-li ve Větě 113 prostor X úplný, pak tvrzení (v) nemusí být ekvivalentní ostatním tvrzením. Nechť e_n, $n\in\mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v prostoru ℓ_2. Dále položme $e=(\frac{1}{n})_{n=1}^\infty\in\ell_2$, $A=\{e_n;\ n\geq 2\}$ a $X=\operatorname{span}(\{e\}\cup A)$. Pak A je maximální ortonormální množina v X: Je-li $x=(x_n)_{n=1}^\infty\in X$ splňující $x\perp A$, pak $0=\langle x,e_n\rangle=x_n$ pro $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Je-li tedy $x=\alpha e+\sum_{i=2}^k\alpha_i e_i$, pak $0=x_{k+1}=\alpha\frac{1}{k+1}$, tj. $\alpha=0$. Proto i $\alpha_i=x_i=0$ pro $i=2,\dots,k$, neboli $x=0$. Nicméně není pravda, že $X=\overline{\operatorname{span}}\,A$, neboť pro každý $x\in\operatorname{span}A$ je $x_1=0$, tedy i pro každý $x\in\overline{\operatorname{span}}\,A$ je $x_1=0$, což znamená, že $e\notin\overline{\operatorname{span}}\,A$.

Všimněme si též, že pro $Y=\overline{\operatorname{span}}\,A$ je $Y^\perp=\{0\}$, neboť A je maximální ortonormální, a tedy neplatí, že $X=Y\oplus Y^\perp$ (srovnejte s Větou 100).

◇

VĚTA 118 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H\to\ell_2(\Gamma)$, $T(x)=\{\langle x,e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ lineární izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

DŮKAZ. Zjevně T je lineární. Z Parsevalovy rovnosti (Věta 113) plyne, že $\|x\|^2=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x,e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x\in H$, a tedy T je izometrie do $\ell_2(\Gamma)$. Všimněme si, že $\{T(e_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ je množina kanonických bázových vektorů v $\ell_2(\Gamma)$. Díky linearitě tedy $\operatorname{Rng}T$ obsahuje všechny vektory v $\ell_2(\Gamma)$, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto vektory tvoří hustou podmnožinu v $\ell_2(\Gamma)$. Podle Tvrzení 60(c) je ovšem $\operatorname{Rng}T$ uzavřený, tudíž je roven celému $\ell_2(\Gamma)$.

□

[19] Lipót Fejér, roz. Leopold Weisz

TVRZENÍ 119. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li* $\dim X = n \in \mathbb{N}$*, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

DŮKAZ. Nechť A je nějaká ortonormální báze X. Je-li $\dim X = n$, pak z Důsledku 110 a z definice ortonormální báze plyne, že A je (algebraickou) bází vektorového prostoru X. Tedy A má n prvků.

Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak A je spočetná podle Poznámky 107. Kdyby A byla konečná, pak dle definice ortonormální báze $\operatorname{span} A = X$, což je spor s $\dim X = \infty$.

□

Později uvidíme, že pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

VĚTA 120 (Heinrich Löwig[20] (1934), F. Riesz (1934)[21]). *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

K důkazu se nám bude hodit následující pozorování:

LEMMA 121. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

DŮKAZ. Zjevně $\operatorname{span}\{x\} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ a každý vektor $y \in X$ lze rozepsat jako

$$y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x,$$

kde $y - \frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{Ker} f$ a $\frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{span}\{x\}$.

□

DŮKAZ VĚTY 120. Nechť H je nad $\mathbb{K}$ a $y \in H$. Dle Tvrzení 84(a) je $f_y \in H^*$ a $\|f_y\| = \|y\|$. Protože skalární součin je sdruženě lineární ve druhé souřadnici, je i zobrazení I sdruženě lineární. Rovnost $\|I(y)\| = \|f_y\| = \|y\|$ tedy říká, že I je izometrie do, neboť $I(u) - I(v) = I(u - v)$. Ukažme, že je na. Je-li $f \in H^*$ nenulové dáno, pak $\operatorname{Ker} f$ je vlastní uzavřený podprostor H. Tedy dle Věty 100 platí, že $H = \operatorname{Ker} f \oplus Z$, kde $Z \perp \operatorname{Ker} f$. Ovšem $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$ (Lemma 121), tedy $\dim Z = 1$. To znamená, že $Z = \operatorname{span}\{z\}$ pro nějaké $z \in S_H$. Položme $y = \overline{f(z)}z$. Pak pro každé $x \in H$ máme $x = u + \alpha z$, kde $u \in \operatorname{Ker} f$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, takže

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle = \big\langle u + \alpha z, \overline{f(z)}z\big\rangle = f(z)\big(\langle u, z\rangle + \alpha\langle z, z\rangle\big) = \alpha f(z)\|z\| = f(u + \alpha z) = f(x).$$

Tedy $I(y) = f_y = f$.

□

[20] roz. Jindřich František Josef Löwi

[21] Reprezentaci dokázal pro ℓ_2 D. Hilbert (1906), pro $L_2([0,1])$ Maurice Fréchet (1907) a F. Riesz (1907). Proto se tato věta někdy nazývá Fréchetova-Rieszova.

Kapitola 2

Hahnova-Banachova věta a dualita

■■■Základním rysem při studiu vektorových prostorů je možnost dualizace problémů, tedy reformulace daného problému ve vektorovém prostoru X pomocí duálního prostoru X^* všech lineárních forem na X. V kontextu normovaných lineárních prostorů se snažíme používat spojitých lineárních forem, tedy spojitých lineárních funkcionálů. K tomuto účelu je však třeba ukázat, že na daném normovaném prostoru je k dispozici dostatečně rozsáhlá množina spojitých lineárních funkcionálů, tedy že prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na normovaném lineárním prostoru X dostatečně zachycuje informaci o X. Úhelným kamenem funkcionální analýzy je tak věta o existenci spojitých funkcionálů, totiž Hahnova-Banachova věta 4. Ta má řadu důležitých důsledku a lze tak ji a její varianty pokládat za nejzásadnější nástroj funkcionální analýzy.

1. Hahnova-Banachova věta

Nejprve se podíváme blíže na to, jak vypadají komplexní lineární funkcionály. Připomeňme si, že pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}(t\alpha) = t \operatorname{Re}\alpha$ a podobně $\operatorname{Im}(\alpha + \beta) = \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta$, $\operatorname{Im}(t\alpha) = t \operatorname{Im}\alpha$. Pro funkci $f : A \to \mathbb{C}$ označíme $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ její reálnou, resp. imaginární složku, tj. $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ pro $x \in A$ a podobně pro $\operatorname{Im} f$.

TVRZENÍ 1. *Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f : X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když* $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Fakt, že $\operatorname{Re} f$ je reálně-lineární je snadno vidět. Pro libovolné $x \in X$ máme $\operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix) = f(ix) = if(x) = i \operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(x)$, a tedy $\operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x)$.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že $\operatorname{Im} f$ je také reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$, odkud ihned plyne aditivita f. Dále, pro libovolné $x \in X$ je

$$f(ix) = \operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x) - i \operatorname{Re} f(i^2x) = i\big(\operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)\big) = if(x).$$

Konečně, pro $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, a $x \in X$ pak máme $f(\alpha x) = f(ax + ibx) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + ibf(x) = \alpha f(x)$.

□

DEFINICE 2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Zřejmě každá pseudonorma je sublineárním funkcionálem a pro každý sublineární funkcionál je $p(0) = 0$. Všimněme si, že pseudonorma se od normy liší pouze v jedné vlastnosti, a to, že mohou existovat nenulové vektory, na nichž je pseudonorma nulová.

VĚTA 3 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929)). *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F \restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F \restriction_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. (a) *1. krok.* Nejprve ukážeme, že f lze rozšířit na podprostor $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$, kde $x \in X \setminus Y$. Uvědomme si, že vzorec $F(y + tx) = f(y) + t\alpha$ dobře definuje lineární rozšíření formy f na Z a že každé lineární rozšíření je tohoto tvaru a je jednoznačně určeno hodnotou $\alpha = F(x) \in \mathbb{R}$. Naším cílem je tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f(y) + t\alpha \leq p(y + tx)$ pro každé $y \in Y$ a $t \in \mathbb{R}$. To je ekvivalentní tomu, že α musí splňovat $\alpha \leq \frac{1}{t}\big(p(y + tx) - f(y)\big) = p(\frac{y}{t} + x) - f(\frac{y}{t})$ pro každé $y \in Y$ a $t > 0$ a zároveň $\alpha \geq \frac{1}{t}\big(p(y + tx) - f(y)\big) = f(-\frac{y}{t}) - p(-\frac{y}{t} - x)$ pro každé $y \in Y$ a $t < 0$. Snadno je vidět, že to nastane, právě když

$$\sup_{z \in Y}\big(f(z) - p(z - x)\big) \leq \alpha \leq \inf_{y \in Y}\big(p(y + x) - f(y)\big).$$

Existence požadovaného $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy bude zřejmá, jakmile ukážeme, že supremum na levé straně je nejvýše rovno infimu na straně pravé. K tomuto účelu zvolme pevně libovolné $z \in Y$. Pak pro každé $y \in Y$ platí $f(z) + f(y) = f(z + y) \leq p(z + y) = p(z - x + y + x) \leq p(z - x) + p(y + x)$ (zde jsme opět podstatně využili linearitu f), neboli $f(z) - p(z - x) \leq p(y + x) - f(y)$. Máme tedy $f(z) - p(z - x) \leq \inf_{y \in Y}\big(p(y + x) - f(y)\big)$ pro každé $z \in Y$, odkud již požadovaná nerovnost ihned plyne.

2. krok. Vezměme množinu

$$\mathcal{P} = \big\{(Z, g);\ Y \subset Z \subset X \text{ je podprostor } X,\ g \text{ je lineární forma na } Z \text{ rozšiřující } f \text{ a } g \leq p \text{ na } Z\big\}.$$

Definujme na $\mathcal{P}$ uspořádání takto: $(Z, g) \leq (W, h)$, pokud $Z \subset W$ a $g = h$ na Z. Pak $(\mathcal{P}, \leq)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná, neboť $(Y, f) \in \mathcal{P}$. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu: Je-li $\mathcal{R} = \{(Y_\gamma, f_\gamma);\ \gamma \in \Gamma\}$ řetězec v $\mathcal{P}$, pak je snadno vidět, že $Z = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$ je podprostor X obsahující Y. Funkce g na Z daná předpisem $g(x) = f_\gamma(x)$ pro $x \in Y_\gamma$ je zřejmě dobře definována, je lineární a splňuje $g \leq p$ na Z. Navíc (Z, g) majorizuje všechny prvky $\mathcal{R}$. Tedy (Z, g) je horní závora $\mathcal{R}$.

Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $(W, F) \in \mathcal{P}$. Pak nutně $W = X$, jinak bychom mohli F rozšířit na větší podprostor pomocí prvního kroku, což by byl spor s maximalitou (W, F). Tedy F je hledané rozšíření.

(b) Je-li X reálný, nalezneme rozšíření pomocí tvrzení (a). Pak ovšem $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$, a tedy $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

Je-li X komplexní, pak podle Tvrzení 1 je $f(x) = g(x) - ig(ix)$, kde $g = \operatorname{Re} f : Y_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ je reálně-lineární forma. Protože $|g(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, můžeme použít předchozí případ na formu g a rozšířit ji na reálně-lineární formu $G : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ splňující $|G(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$. Položíme-li $F(x) = G(x) - iG(ix)$, pak F je lineární forma na X (Tvrzení 1), která zjevně rozšiřuje f. Dále, nechť $x \in X$. Najdeme $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ takové, že $|F(x)| = \alpha F(x)$. Pak $|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = G(\alpha x) - iG(i\alpha x)$, což je reálné číslo, a proto $G(i\alpha x) = 0$. Tedy $|F(x)| = G(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$. Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 4 (Hahnova-Banachova). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F \restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

DŮKAZ. Položme $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro $x \in X$. Pak p je pseudonorma na X splňující $|f| \leq p$ na Y. Dle Věty 3(b) existuje lineární forma F na X rozšiřující f taková, že $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy F je spojitý lineární funkcionál na X a $\|F\| \leq \|f\|$. Protože F rozšiřuje f, platí $\|F\| = \sup_{x \in B_X} |F(x)| \geq \sup_{x \in B_Y} |F(x)| = \sup_{x \in B_Y} |f(x)| = \|f\|$, tedy $\|F\| = \|f\|$.

□

Hahnova-Banachova věta je jedním z nejzásadnějších tvrzení funkcionální analýzy. Dále uvedeme několik z jejích mnoha přímých důsledků. Velkou důležitost mají zejména různé oddělovací věty.

DŮSLEDEK 5. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

DŮKAZ. Pro důkaz první části stačí bez újmy na obecnosti uvažovat $x \neq 0$. Uvažujme podprostor $Y = \operatorname{span}\{x\}$ a funkcionál na Y daný vzorcem $g(tx) = t\|x\|$ pro $t \in \mathbb{K}$. Pak zjevně $g \in Y^*$ a $\|g\| = 1$ (Lemma 1.45(b)). Dle Věty 4 existuje funkcionál $f \in X^*$ o normě 1, který rozšiřuje g. Tedy $f(x) = g(x) = \|x\|$. Pro důkaz druhé části použijeme první část na vektor $x - y$.

□

DŮSLEDEK 6 (Duální vyjádření normy). *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.*

DŮKAZ. Pro $f \in B_{X^*}$ máme $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$. Na duhou stranu, dle Důsledku 5 existuje $f \in B_{X^*}$ takový, že $f(x) = \|x\|$, a tedy $|f(x)| = f(x) = \|x\|$.

□

VĚTA 7 (Oddělování bodu a podprostoru). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$ a $d = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$ a definujme $g\colon Z \to \mathbb{K}$ předpisem $g(y + \alpha x) = \alpha d$ pro $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak g je lineární forma na Z a pro každé $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ máme

$$|g(y + \alpha x)| = |\alpha| d \leq |\alpha| \left\| x - \left(-\frac{y}{\alpha}\right) \right\| = \|y + \alpha x\|$$

a $|g(y)| = 0 \leq \|y\|$. Tedy $g \in Z^*$ a $\|g\| \leq 1$. Vezměme nyní posloupnost $\{y_n\}$ v Y splňující $\|x - y_n\| \to d$. Pak $g\left(\frac{x-y_n}{\|x-y_n\|}\right) = \frac{d}{\|x-y_n\|} \to 1$, a tedy $\|g\| = 1$. Podle Věty 4 existuje $f \in X^*$ rozšiřující g a splňující $\|f\| = \|g\| = 1$. Pak $f = 0$ na Y a $f(x) = g(x) = d$.

□

VĚTA 8. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*
(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.
(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je konečněrozměrný podprostor X a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je jeho báze. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(e_i) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(e_i) = 1$. Protože Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na Y (Věta 1.66). Lze je tedy podle Hahnovy-Banachovy věty rozšířit na spojité lineární funkcionály $g_1, \dots, g_n$ na X (Věta 4). Pak zobrazení $P\colon X \to Y$ dané předpisem

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) e_j$$

je spojitá lineární projekce X na Y: Spojitost a linearita jsou zřejmé. Pro $y \in Y$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ máme $P(y) = P\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n y_i P(e_i) = \sum_{i=1}^n y_i e_i = y$, tedy P je projekce dle Faktu 1.73.

(b) Nechť $\dim(X/Y) = n$ a $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ jsou vybrány tak, že $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$ je báze X/Y, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na X/Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(q(e_i)) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(q(e_i)) = 1$. Všimněme si, že je-li $z = \sum_{i=1}^n z_i q(e_i) \in X/Y$, pak $f_j(z) = z_j$ pro $j = 1, \dots, n$. Protože X/Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na X/Y (Věta 1.66). Položme $g_j = f_j \circ q$, $j = 1, \dots, n$. Pak $g_1, \dots, g_n$ jsou spojité lineární funkcionály na X a zobrazení dané předpisem $P(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x) e_j$ pro $x \in X$ je spojitá lineární projekce na $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, která je nulová na Y. (Fakt, že je to projekce, plyne z $P(e_i) = \sum_{j=1}^n g_j(e_i) e_j = e_i$ jako v případě (a).) Naopak, je-li $P(x) = 0$, pak $0 = g_i(P(x)) = \sum_{j=1}^n g_j(x) g_i(e_j) = g_i(x)$ pro $i = 1, \dots, n$. Tedy $f_i(q(x)) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$, neboli $q(x) = 0$, tj. $x \in Y$. Dohromady tedy máme $Y = \operatorname{Ker} P$, což dle Tvrzení 1.74 znamená, že $Id_X - P$ je spojitá lineární projekce X na Y.

□

VĚTA 9. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li X^* separabilní, pak i X je separabilní.*

DůKAZ. Množina S_{X^*} je metrický podprostor metrického prostoru X^*, tedy je separabilní. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá podmnožina S_{X^*}. Z vlastností duální normy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in S_X$ splňující $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$ (Lemma 1.45(b)). Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak Y je separabilní, neboť lineární kombinace s racionálními koeficienty jsou husté v Y. Tvrdíme, že $X = Y$. Pokud tomu tak není, pak podle Věty 7 existuje $f \in S_{X^*}$ takový, že $f\restriction_Y = 0$. Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $\|f - f_n\| < \frac{1}{4}$. Pak $0 = |f(x_n)| = |f_n(x_n) - f_n(x_n) + f(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - |f(x_n) - f_n(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - \|f - f_n\|\|x_n\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, což je spor.

□

DEFINICE 10. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_{\perp} = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

POZNÁMKA 11. Pro prostor X se skalárním součinem zde máme kolizi ve značení, neboť symbolem $A^{\perp}$ značíme též ortogonální doplněk, což je podmnožina X (zatímco anihilátor $A^{\perp}$ je podmnožina X^*). Díky identifikaci z Věty 1.120 jsou tato tradiční značení naštěstí v případě Hilbertova prostoru relativně konzistentní a ve skutečnosti jsou anihilátory v jistém smyslu zobecněním ortogonálních doplňků: Je-li H Hilbertův prostor, $A \subset H$ a $I\colon H \to H^*$ identifikace z Věty 1.120, pak

$$\begin{aligned} I^{-1}(A^{\perp}) &= \{y \in H;\ I(y) \in A^{\perp}\} = \{y \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\} = \\ &= \{y \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } x \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I^{-1}(A^{\perp})$ je roven ortogonálnímu doplňku A. Podobně,

$$\begin{aligned} I(A)_{\perp} &= \{x \in H;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in I(A)\} = \{x \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } y \in A\} = \\ &= \{x \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } y \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I(A)_{\perp}$ je též roven ortogonálnímu doplňku A.

Uvědomme si, že z definice snadno plynou následují vztahy: $\{0\}^{\perp} = X^*$, $X^{\perp} = \{0\}$ a $\{0\}_{\perp} = X$. Pomocí Hahnovy-Banachovy věty (Důsledek 5) pak odvodíme, že $(X^*)_{\perp} = \{0\}$.

LEMMA 12. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*
(a) $A^{\perp}$ je uzavřený podprostor X^*,
(b) $B_{\perp}$ je uzavřený podprostor X,
(c) $(A^{\perp})_{\perp} = \overline{\operatorname{span}}\, A$,
(d) $(B_{\perp})^{\perp} \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

DůKAZ. (a) Snadno je vidět, že $A^{\perp}$ je podprostor X^*. Jestliže $\{f_n\}$ je posloupnost v $A^{\perp}$ konvergující k $f \in X^*$ a $x \in A$, pak $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (Fakt 1.46). Tedy $f \in A^{\perp}$.

(b) Zde si stačí uvědomit, že $B_{\perp} = \bigcap_{f\in B} \operatorname{Ker} f$.

(c) Je-li $x \in A$, pak pro každé $f \in A^{\perp}$ máme $f(x) = 0$, a tedy $x \in (A^{\perp})_{\perp}$. To znamená, že $A \subset (A^{\perp})_{\perp}$. Protože je $B_{\perp}$ uzavřený podprostor X pro každou $B \subset X^*$ dle (b), platí $\overline{\operatorname{span}}\, A \subset (A^{\perp})_{\perp}$. Je-li $x \in X \setminus \overline{\operatorname{span}}\, A$, existuje $f \in X^*$ splňující $f(x) > 0$ a $f = 0$ na $\overline{\operatorname{span}}\, A$ (Věta 7). Tedy $f \in A^{\perp}$ a $f(x) \neq 0$. Proto $x \notin (A^{\perp})_{\perp}$.

(d) Je-li $f \in B$, pak pro každé $x \in B_{\perp}$ máme $f(x) = 0$, a tedy $f \in (B_{\perp})^{\perp}$. To znamená, že $B \subset (B_{\perp})^{\perp}$. Protože je $A^{\perp}$ uzavřený podprostor X^* pro každou $A \subset X$ dle (a), platí $\overline{\operatorname{span}}\, B \subset (B_{\perp})^{\perp}$.

□

V Příkladu 23 ukážeme, že v (d) v lemmatu výše nemusí nastat rovnost. „Správné znění“ lemmatu uvedeme v oddílu 6.9 (Lemma 6.111).

2. Reprezentace duálů

V tomto oddílu si ukážeme, jakým způsobem lze interpretovat duální prostory k některým prostorům. Nejdůležitější jsou zejména konkrétní reprezentace duálů ke klasickým Banachovým prostorům.

TVRZENÍ 13. *Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.*

Důkaz odložíme až do oddílu 4.1, kde jej provedeme přirozeně pomocí tam zavedených pojmů. Tvrzení je pak přímým důsledkem Věty 4.6.

DEFINICE 14. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Sdruženým exponentem k 1 je ∞, sdruženým exponentem k ∞ je 1 a sdruženým exponentem ke 2 je 2. Všimněme si ještě následujících vztahů: Jsou-li p, q sdružené exponenty, $1 \leq p < \infty$, pak $pq = p + q$, $q = \frac{p}{p-1}$ a $q = (q-1)p$.

POZNÁMKA. Připomeňme, že prostor všech lineárních forem na $\mathbb{K}^n$ je algebraicky izomorfní opět prostoru $\mathbb{K}^n$. Protože všechny lineární formy na $\mathbb{K}^n$ jsou spojité (Věta 1.66), je prostor $(\mathbb{K}^n)^*$ algebraicky izomorfní prostoru $\mathbb{K}^n$ a tento algebraický izomorfismus je dán lineárním zobrazením $I : \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$, $I(y)(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Protože každé lineární zobrazení z konečněrozměrného prostoru je spojité (Věta 1.66), je zobrazení I izomorfismus normovaných lineárních prostorů, a to ať bereme na $\mathbb{K}^n$ jakoukoli normu. Způsobem stejným jako v důkazu Věty 15(a), (b) níže lze ukázat, že I je izometrie prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q)$ na prostor $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)^*$, kde p, q jsou sdružené exponenty, $1 \leq p \leq \infty$.

VĚTA 15 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům[1]).

(a) *Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I : \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) *Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I : \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) *Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) *Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Všimněme si, že ve skutečnosti je tvrzení (b) speciálním případem tvrzení (c) a (d). Nicméně z pedagogických důvodů je vhodné tvrzení (b) zformulovat i dokazovat zvlášť, neboť je výrazně jednodušší.

Obvykle se funkce sgn rozšiřuje na komplexní čísla vzorcem $\operatorname{sgn} \alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Je tedy $\alpha = |\alpha| \operatorname{sgn} \alpha$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Nám se ovšem v následujícím důkazu bude hodit převrácená hodnota $\operatorname{sgn} \alpha$, což je shodou okolností též komplexně sdružené číslo $\overline{\operatorname{sgn} \alpha}$, proto budeme používat označení cgn.

[1]Pro ℓ_p, $1 < p < \infty$ Edmund Georg Hermann Landau (1907), pro $L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$ F. Riesz (1909), pro $L_1([0,1])$ Hugo Dyonizy Steinhaus (1919).

Definujeme tedy $\operatorname{cgn}\alpha = \frac{|\alpha|}{\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{cgn} 0 = 0$. Platí $|\alpha| = \alpha \operatorname{cgn}\alpha$ a $|\operatorname{cgn}\alpha| \leq 1$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Všimněme si též, že je-li f měřitelná funkce (vzhledem k nějaké míře), pak funkce $\operatorname{sgn} f$ i $\operatorname{cgn} f$ jsou měřitelné.

DŮKAZ. (a) Nechť $y \in \ell_1$ je dáno. Pro každé $x \in c_0$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_\infty |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in c_0^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_1$. Pro opačnou nerovnost uvažujme vektory

$$x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $x^n \in B_{c_0}$ a platí

$$f_y(x^n) = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n} |y_k| \to \|y\|_1.$$

Tedy $\|f_y\| = \|y\|_{\ell_1}$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in c_0^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v c_0. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Vektor $x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots)$ je v B_{c_0} pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) \operatorname{cgn} y_k = f\left(\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cgn} y_k) e_k\right) = f(x^n) \leq \|f\| \|x^n\| \leq \|f\|.$$

Jelikož je $n \in \mathbb{N}$ libovolné, je $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_1$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in c_0$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(b) Nejprve předpokládejme, že $1 < p < \infty$. Nechť $y \in \ell_q$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ platí z Hölderovy nerovnosti[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_p^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y \neq 0$. Uvažujme vektor

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{-1/p} \big(|y_1|^{q-1} \operatorname{cgn} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{cgn} y_2, \dots\big).$$

Je

$$\|x\|_p = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $x \in B_{\ell_p}$. Proto

$$\|f_y\| \geq |f_y(x)| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_n) y_n\right| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \|y\|_q,$$

což znamená, že $\|f_y\| = \|y\|_q$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

[2] Nerovnost dokázali v jiné formě Leonard James Rogers (1888) a Otto Ludwig Hölder (1889), který dokonce cituje Rogerse; v současné formě jak pro sumy, tak pro integrály ji pak zformuloval F. Riesz (1910).

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_p^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_p. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) e_k.$$

Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) f(e_k) = |f(x^n)| \le \|f\| \|x^n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/p}.$$

Odtud dostáváme $\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \le \|f\|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_q$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_p$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

Zbývá případ $p = 1$. Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_1^*$ a $\|f_y\| \le \|y\|_\infty$. Pro opačnou nerovnost uvažujme kanonické bázové vektory e_n, $n \in \mathbb{N}$ v ℓ_1. Máme $\|f_y\| \ge |f_y(e_n)| = |y_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\|f_y\| \ge \|y\|_\infty$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_1^*$. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $|y_n| \le \|f\| \|e_n\| = \|f\|$, tedy $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_1$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(c), (d) Nechť $g \in L_q(\mu)$ je dáno. Pro každé $f \in L_p(\mu)$ platí z Hölderovy nerovnosti (pro $p > 1$), případně jednoduchým odhadem (pro $p = 1$)

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Odtud plyne, že φ_g je dobře definovaná funkce. Dále φ_g je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $\varphi_g \in L_p(\mu)^*$ a $\|\varphi_g\| \le \|g\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $g \neq 0$. V případě $p > 1$ uvažujme funkci

$$f = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} |g|^{q-1} \operatorname{cgn} g.$$

Je

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p(q-1)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $f \in B_{L_p(\mu)}$. Proto

$$\|\varphi_g\| \ge |\varphi_g(f)| = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left| \int_\Omega |g|^{q-1} (\operatorname{cgn} g) g \, \mathrm{d}\mu \right| = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_q,$$

což znamená, že $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$. V případě, že $p = 1$ (a μ je tak dle předpokladu σ-konečná) vezměme $\varepsilon > 0$ libovolné a uvažujme množinu $A = \{x \in \Omega;\ |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Pak A je kladné míry, a tedy díky σ-konečnosti μ existuje $B \subset A$ splňující $0 < \mu(B) < +\infty$. Je $f = \frac{1}{\mu(B)}\chi_B \operatorname{cgn} g \in B_{L_1(\mu)}$, a proto

$$\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \frac{1}{\mu(B)}\left|\int_B (\operatorname{cgn} g) g \,\mathrm{d}\mu\right| = \frac{1}{\mu(B)}\int_B |g| \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \big(\|g\|_\infty - \varepsilon\big) \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Odtud plyne $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Předpokládejme nejprve, že $\mu(\Omega) < +\infty$. Nechť je dán $\varphi \in L_p(\mu)^*$. Pro každou $A \in \mathcal{S}$ položme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A).$$

Poznamenejme, že díky předpokladu konečnosti míry je ν dobře definována. Funkce ν je komplexní (případně znaménková) míra na Ω. Vskutku, je-li $\{A_j;\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$ systém po dvou disjunktních měřitelných množin a označíme-li $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, pak $\big\|\chi_A - \chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\big\|_p = \mu\big(A \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\big)^{1/p} \to 0$ (zde opět využíváme faktu, že μ je konečná). Tedy díky spojitosti φ máme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A) = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(\chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_{j=1}^n \chi_{A_j}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Zřejmě je ν absolutně spojitá vzhledem k μ (tj. $\nu(A) = 0$ pro každou $A \in \mathcal{S}$ splňující $\mu(A) = 0$), dle Radonovy-Nikodymovy věty[3] tedy existuje $g \in L_1(\mu)$ splňující $\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. To znamená, že $\varphi(\chi_A) = \nu(A) = \int_\Omega \chi_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Z linearity φ a z linearity integrálu tedy ihned plyne, že

$$\varphi(s) = \int_\Omega sg \,\mathrm{d}\mu \tag{1}$$

pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω.

Ukážeme, že platí $g \in L_q(\mu)$. Je-li $p > 1$, zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$ a položme $A_n = \{x \in \Omega;\ |g(x)| \leq n\}$ a $f = \chi_{A_n}|g|^{q-1} \operatorname{cgn} g$. Existuje posloupnost $\{s_k\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na Ω takových, že $s_k \to f$ bodově a navíc $|s_k(x)| \leq 4|f(x)|$ pro každé $x \in \Omega$ a $k \in \mathbb{N}$ (použijeme větu [R, Věta 1.17] na rozklad $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$). Protože $|s_k - f|^p \leq 5^p|f|^p$, funkce $|f|$ je omezená a μ je konečná, máme podle Lebesgueovy věty $\|s_k - f\|_p \to 0$. Podobně, $|s_k g| \leq 4|f||g| \leq 4n^q$, tedy dle Lebesgueovy věty $\int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$. Zkombinujeme-li oba tyto fakty se spojitostí φ a platností (1), dostaneme

$$\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \varphi(s_k) = \varphi(f) \leq \|\varphi\|\|f\|_p = \|\varphi\|\left(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Úpravou obdržíme $\int_\Omega \chi_{A_n}|g|^q \,\mathrm{d}\mu \leq \|\varphi\|^q$, a to platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Leviovy věty[4] o monotónní konvergenci tedy dostáváme $\|g\|_q \leq \|\varphi\|$.

V případě $p = 1$ díky (1) máme $\left|\int_A g \,\mathrm{d}\mu\right| = |\varphi(\chi_A)| \leq \|\varphi\|\|\chi_A\|_1 = \|\varphi\|\mu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Podle věty [R, Věta 1.40] tedy platí $|g(x)| \leq \|\varphi\|$ pro s. v. $x \in \Omega$, odkud $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|$.

Protože $g \in L_q(\mu)$, je podle první části důkazu φ_g spojitý lineární funkcionál na $L_p(\mu)$. Protože $\varphi(s) = \varphi_g(s)$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω (vizte (1)) a protože množina všech jednoduchých měřitelných funkcí na Ω je hustá v prostoru $L_p(\mu)$ ([R, Věta 3.13]), platí $\varphi = \varphi_g$ (Věta 15.4).

Dále uvažujme případ, kdy Ω má nekonečnou, ale σ-konečnou míru. Nechť $w \in L_1(\mu)$ je funkce splňující $0 < w(x) < 1$ pro všechna $x \in \Omega$ ([R, Lemma 6.9]). Definujme míru μ_1 na $\mathcal{S}$ vztahem $\mu_1(A) = \int_A w \,\mathrm{d}\mu$ pro $A \in \mathcal{S}$. Pak μ_1 je konečná míra. Definujme nyní funkcionál $\psi \in L_p(\mu_1)^*$ předpisem $\psi(h) = \varphi(w^{1/p}h)$ pro $h \in L_p(\mu_1)$. Funkcionál ψ je dobře definovaný, neboť

$$\int_\Omega |w^{1/p}h|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p \,\mathrm{d}\mu_1 < +\infty \tag{2}$$

[3] V $\mathbb{R}^n$ větu dokázal Johann Karl August Radon (1913), obecný případ pak Otton Marcin Nikodym (1930).

[4] Beppo Levi

pro každou $h \in L_p(\mu_1)$, a dále ψ je zjevně lineární a dle (2) máme $|\psi(f)| = |\varphi(w^{1/p} f)| \le \|\varphi\| \|w^{1/p} h\|_{L_p(\mu)} = \|\varphi\| \|h\|_{L_p(\mu_1)}$. Podle první části důkazu tedy existuje funkce $g_1 \in L_q(\mu_1)$ taková, že $\psi(f) = \int_\Omega f g_1 \,\mathrm{d}\mu_1$ pro každou $f \in L_p(\mu_1)$. Položme $g = w^{1/q} g_1$, pokud $p > 1$, resp. $g = g_1$, pokud $p = 1$. Pak pro $p > 1$ máme $\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g_1|^q w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g_1|^q \,\mathrm{d}\mu_1 < +\infty$, zatímco pro $p = 1$ máme $\operatorname{ess\,sup}_\mu |g| = \operatorname{ess\,sup}_\mu |g_1| = \operatorname{ess\,sup}_{\mu_1} |g_1| < +\infty$, neboť míry μ a μ_1 mají přesně stejné nulové množiny. Tedy $g \in L_q(\mu)$. Konečně, pro každé $f \in L_p(\mu)$ máme $h = w^{-1/p} f \in L_p(\mu_1)$ (vizte (2)), takže

$$\varphi(f) = \psi(h) = \int_\Omega h g_1 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_\Omega w^{-1/p} f g_1 w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu = \varphi_g(f).$$

Nyní se budeme věnovat případu, kdy $\mu(\Omega)$ není σ-konečná a $1 < p < \infty$. Pro $A \in \mathcal{S}$ lze prostor $L_p(A)$ přirozeným způsobem chápat jako podprostor $L_p(\Omega)$ sestávající z funkcí rovných 0 mimo A. Označme φ^A restrikci funkcionálu φ na podprostor $L_p(A)$. Zřejmě $\|\varphi^B\| \le \|\varphi^A\| \le \|\varphi\|$ pro každé $A, B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$. Označme $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S};\ A \text{ má } \sigma\text{-konečnou míru}\}$. Položme $\gamma = \sup_{A \in \mathcal{A}} \|\varphi^A\| \le \|\varphi\|$, nalezněme posloupnost množin $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ splňující $\lim_{n\to\infty} \|\varphi^{E_n}\| = \gamma$ a položme $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Pak $E \in \mathcal{A}$ a $\gamma \ge \|\varphi^E\| \ge \|\varphi^{E_n}\| \to \gamma$, tedy $\|\varphi^E\| = \gamma$. Poznamenejme, že nakonec se ukáže, že platí $\varphi(f) = \varphi^E(f \restriction_E)$ pro každé $f \in L_p(\Omega)$.

Podle předchozí části důkazu existuje pro každé $A \in \mathcal{A}$ jednoznačně určená funkce $g_A \in L_q(A)$ splňující $\varphi^A = \varphi_{g_A}$ a $\|\varphi^A\| = \|g_A\|_q$. Jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, pak snadno vidíme, že $\varphi_{g_B}(f) = \varphi^B(f) = \varphi(f) = \varphi^A(f) = \varphi_{g_A}(f) = \varphi_{g_A \restriction_B}(f)$ pro každou $f \in L_p(B)$, přičemž $g_A \restriction_B \in L_q(B)$. Tedy z jednoznačnosti vyjádření funkcionálu φ^B dostáváme $g_B = g_A$ s. v. na B. Položme $g = g_E$ a rozšiřme ji nulou na doplňku E. Pak $g \in L_q(\Omega)$. Ukážeme, že $\varphi = \varphi_g$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, $A \cap E = \emptyset$. Protože $A \cup E \in \mathcal{A}$ a dále $g_{E\cup A} = g_E$ s. v. na E a $g_{E\cup A} = g_A$ s. v. na A, dostáváme

$$\begin{aligned}\gamma^q \ge \|\varphi^{E\cup A}\|^q &= \|g_{E\cup A}\|_q^q = \int_{E\cup A} |g_{E\cup A}|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_E |g_{E\cup A}|^q \,\mathrm{d}\mu + \int_A |g_{E\cup A}|^q \,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_E |g_E|^q \,\mathrm{d}\mu + \int_A |g_A|^q \,\mathrm{d}\mu = \|\varphi^E\|^q + \|g_A\|_q^q = \gamma^q + \|g_A\|_q^q,\end{aligned}$$

což znamená, že $g_A = 0$. (Poznamenejme, že toto je klíčové místo důkazu, a jediné, kde využíváme fakt $q < \infty$.) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ a $f \in L_p(A)$ tedy máme

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \varphi^A(f) &= \int_A f g_A \,\mathrm{d}\mu = \int_{A\setminus E} f g_A \,\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap E} f g_A \,\mathrm{d}\mu = \int_{A\setminus E} f g_{A\setminus E} \,\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap E} f g_{A\cap E} \,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_{A\cap E} f g_E \,\mathrm{d}\mu = \int_{A\cap E} f g \,\mathrm{d}\mu = \int_A f g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu = \varphi_g(f),\end{aligned}$$

přičemž předposlední dvě rovnosti platí proto, že $g = 0$ mimo E a $f = 0$ mimo A. Rovnost $\varphi(f) = \varphi_g(f)$ tedy speciálně platí pro každou jednoduchou měřitelnou funkci f na Ω splňující $\mu\big(\{x \in \Omega;\ f(x) \ne 0\}\big) < +\infty$. Množina všech těchto funkcí je ovšem hustá v $L_p(\Omega)$ ([R, Věta 3.13]), odkud plyne $\varphi = \varphi_g$ (Věta 15.4).

□

Poznámka. Všimněme si, že pro prostor ℓ_2 (nebo obecněji $L_2(\mu)$) máme dvě reprezentace duálu: „hilbertovskou“ reprezentaci pomocí sdruženě lineárního zobrazení $I_H \colon \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 1.120 a „banachovskou“ reprezentaci pomocí lineárního zobrazení $I \colon \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 15(b). Rozdíl je v tom, jak vypadá akce prvku $y \in \ell_2$ reprezentujícího funkcionál na prvek $x \in \ell_2$:

$$I_H(y)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n},$$

$$I(y)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$

V případě reálného prostoru obě reprezentace splývají, v případě komplexního prostoru platí $I_H(y) = I(\overline{y})$. Pro prostor $L_2(\mu)$ je interpretace obou reprezentací analogická.

Důkaz následujícího tvrzení je podobný důkazu Věty 15(a), (b).

VĚTA 16. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

DŮKAZ. Nechť X, Y jsou nad $\mathbb{K}$. Označme $Z = X \oplus_p Y$. Zobrazení $Q_X\colon Z \to X$, $Q_X(x,y) = x$ a $Q_Y\colon Z \to Y$, $Q_Y(x,y) = y$ jsou zjevně spojité lineární operátory. Proto $I(f,g) = f \circ Q_X + g \circ Q_Y$ je spojitý lineární funkcionál na Z, a tedy I je dobře definováno. Zjevně I je lineární. Ukážeme, že I je na: Je-li $h \in Z^*$, pak položíme $f(x) = h(x,0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0,y)$ pro $y \in Y$. Snadno je vidět, že $f \in X^*$ a $g \in Y^*$. Máme $I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y) = h(x,0) + h(0,y) = h(x,y)$ pro každé $(x,y) \in Z$, tedy $I(f,g) = h$.

Nakonec ukažme, že I je izometrie. Nechť $(f,g) \in X^* \oplus_q Y^*$. Předpokládejme nejprve, že $1 < p < \infty$. Pak s využitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |I(f,g)(x,y)| = \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \bigl(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\bigr) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \bigl(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\bigr)^{\frac{1}{q}} \bigl(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\bigr)^{\frac{1}{p}} = \bigl(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\bigr)^{\frac{1}{q}} = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $(f,g) \neq 0$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Položme $c = \bigl(\|f\|^q + \|g\|^q\bigr)^{\frac{1}{p}}$ a $\eta = \frac{c}{\|f\|^{q-1}+\|g\|^{q-1}}\varepsilon$. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \eta$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \eta$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = \frac{1}{c}\bigl(\|f\|^{q-1}\alpha x, \|g\|^{q-1}\beta y\bigr) \in Z$. Pak

$$\|u\| = \frac{1}{c}\bigl(\|f\|^q\|x\|^p + \|g\|^q\|y\|^p\bigr)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{c}\bigl(\|f\|^q + \|g\|^q\bigr)^{\frac{1}{p}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}I(f,g)(u) &= \frac{1}{c}\bigl(\|f\|^{q-1}f(\alpha x) + \|g\|^{q-1}g(\beta y)\bigr) = \frac{1}{c}\bigl(\|f\|^{q-1}|f(x)| + \|g\|^{q-1}|g(y)|\bigr) > \\ &> \frac{\|f\|^q + \|g\|^q}{c} - \frac{\|f\|^{q-1} + \|g\|^{q-1}}{c}\eta = \bigl(\|f\|^q + \|g\|^q\bigr)^{\frac{1}{q}} - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Je-li $p = 1$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \bigl(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\bigr) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\bigl\{\|f\|_{X^*}, \|g\|_{Y^*}\bigr\}\bigl(\|x\|_X + \|y\|_Y\bigr) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $\|f\| \geq \|g\|$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$. Pak $\|I(f,g)\| \geq |I(f,g)(x,0)| = |f(x)| > \|f\| - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon$. Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Konečně, je-li $p = \infty$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \bigl(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\bigr) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\bigl\{\|x\|_X, \|y\|_Y\bigr\}\bigl(\|f\|_{X^*} + \|g\|_{Y^*}\bigr) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné a nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \varepsilon$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = (\alpha x, \beta y) \in Z$. Pak $\|u\| = \max\bigl\{|\alpha|\|x\|, |\beta|\|y\|\bigr\} \leq 1$ a

$$I(f,g)(u) = f(\alpha x) + g(\beta y) = |f(x)| + |g(y)| > \|f\| + \|g\| - 2\varepsilon = \|(f,g)\| - 2\varepsilon.$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

□

Několik následujících tvrzení se bude týkat prostoru $C(K)$. Zformulujeme je v obecnější verzi pro kompaktní topologické prostory. Čtenář, který není obeznámen se základy topologie, si všude místo topologického prostoru může přestavovat metrický prostor.

DEFINICE 17. Nechť K je kompaktní topologický prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

FAKT 18. *Nechť K je kompaktní topologický prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.*

DŮKAZ. Máme $\Lambda(g) - \Lambda(f) = \Lambda(g - f) \geq 0$, neboť $g - f \geq 0$. Pro reálnou $f \in C(K)$ platí $f \leq |f|$ a $-f \leq |f|$, odkud s použitím monotonie dostaneme $\Lambda(f) \leq \Lambda(|f|)$ a $-\Lambda(f) = \Lambda(-f) \leq \Lambda(|f|)$, což dohromady dává odhad $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Odtud v reálném případě platí, že $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(1)$ pro $f \in B_{C(K)}$. V komplexním případě pak $|\Lambda(f)| = |\Lambda(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)| \leq |\Lambda(\operatorname{Re} f)| + |\Lambda(\operatorname{Im} f)| \leq \Lambda(|\operatorname{Re} f|) + \Lambda(|\operatorname{Im} f|) \leq 2\Lambda(|f|)$, a tedy $\|\Lambda\| \leq 2\Lambda(1)$.

□

Poznamenejme, že ve skutečnosti výše uvedená nerovnost $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$ platí i v komplexním případě, což ihned plyne z reprezentace níže.

VĚTA 19 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Všimněme si, že předchozí věta říká, že existuje bijekce mezi množinou všech regulárních borelovských *nezáporných* měr na K a množinou všech spojitých lineárních *nezáporných* funkcionálů na $C(K)$.

K důkazu budeme potřebovat Lemma 15.14 a Větu 15.15.

DŮKAZ. Důkaz je poměrně technický, proto nejprve nastíníme základní strategii. Předpokládejme, že míra μ má požadované vlastnosti. Z regularity plyne, že μ je jednoznačně určena svými hodnotami na otevřených, případně uzavřených, množinách. Zvolme například otevřené množiny. Pro každou otevřenou množinu $G \subset K$ platí $\mu(G) = \int_K \chi_G \,\mathrm{d}\mu$, kde na pravé straně je „evaluace funkcionálu Λ na funkci χ_G“. Zdálo by se tedy vhodné definovat $\mu(G) = \Lambda(\chi_G)$, ovšem hodnota $\Lambda(\chi_G)$ obvykle není definována, neboť χ_G není spojitá funkce (pokud G není obojetná). Přirozeným nápadem tedy je funkci χ_G aproximovat pomocí spojitých funkcí. Pro každou $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$ se $\operatorname{supp} f \subset G$ platí $\Lambda(f) = \int_G f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_G 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(G)$. Na druhou stranu, zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, pak z vnitřní regularity plyne existence uzavřené $F \subset G$ takové, že $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Dle Lemmatu 15.14 existuje $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$, která je rovna 1 na F a $\operatorname{supp} f \subset G$. Pak $\Lambda(f) = \int_G f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_F f \,\mathrm{d}\mu = \mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Platí tedy

$$\mu(G) = \sup\bigl\{\Lambda(f);\ f \in C(K), 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp} f \subset G\bigr\}. \tag{3}$$

Vztah (3) je tedy nutnou podmínkou, kterou musí míra μ splňovat, a proto je přirozené vyjít při konstrukci μ právě z tohoto vzorce. Hodnoty μ na borelovských množinách jsou pak jednoznačně určeny pomocí vnější regularity. Konstrukci lze tedy vést tak, že definujeme μ na otevřených množinách vzorcem (3) a na borelovských množinách vzorcem

$$\mu(E) = \inf\bigl\{\mu(G);\ G \supset E, G \text{ otevřená}\bigr\}, \tag{4}$$

ukážeme, že definice je konzistentní a že takto definovaná μ je regulární míra, a že tato míra reprezentuje funkcionál Λ. Kvůli technickým obtížím nicméně zkonstruujeme nejprve vnější míru tak, že definujeme hodnoty μ vzorcem (4) na *všech* podmnožinách K, a pak pomocí Carathéodoryovy[5] konstrukce ukážeme, že restrikce μ na borelovské množiny je míra. Konstrukce bude rozdělena do několika technických kroků:

[5] Constantin Carathéodory (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή) (1914)

1. krok: Konstrukce vnější míry μ na K pomocí vzorců (3) a (4).
2. krok: Ukážeme, že borelovské množiny jsou carathéodoryovsky měřitelné vzhledem k μ, a tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.
3. krok: Ukážeme, že μ reprezentuje funkcionál Λ.
4. krok: Ukážeme jednoznačnost μ.

1. krok. Pro každou otevřenou $G \subset K$ definujme $\mu(G)$ pomocí vzorce (3). Dále pro každou $E \subset K$, která není otevřená, definujme $\mu(E)$ pomocí vzorce (4). Je ihned vidět, že jsou-li $U, V \subset K$ otevřené a $U \subset V$, pak $\mu(U) \leq \mu(V)$. Odtud plyne, že vzorec (4) platí pro všechny $E \subset K$. Dále je zřejmé, že μ je nezáporná, konečná (Fakt 18), $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(E) \leq \mu(F)$ pro libovolné $E, F \subset K$, $E \subset F$. Zbývá ukázat σ-subaditivitu.

Nechť je dána posloupnost množin $\{E_n\}$ v K. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle (4) existují otevřené množiny $G_n \supset E_n$ splňující $\mu(G_n) < \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Pak G je otevřená množina a podle (3) existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset G$ a $\Lambda(f) > \mu(G) - \varepsilon$. Množina $\operatorname{supp} f$ je uzavřená podmnožina K, tedy je kompaktní. Proto existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Položme $U_{m+1} = K \setminus \operatorname{supp} f$ a $U_i = G_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ je otevřené pokrytí K, a tedy dle Věty 15.15 existují $g_1, \dots, g_{m+1} \in C(K)$ splňující $0 \leq g_i \leq 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, m+1$ a $\sum_{i=1}^{m+1} g_i = 1$. Protože $g_{m+1} = 0$ na $\operatorname{supp} f$, platí $\sum_{i=1}^{m} g_i = 1$ na $\operatorname{supp} f$. Položme $h_i = f g_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $h_i \in C(K)$, $0 \leq h_i \leq 1$ a $\operatorname{supp} h_i \subset U_i = G_i$ pro $i = 1, \dots, m$ a $f = \sum_{i=1}^{m} h_i$. Tedy

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu(G) < \Lambda(f) + \varepsilon = \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \Lambda(h_i) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \mu(G_i) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) \leq$$
$$\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Protože nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, je μ σ-subaditivní. Tedy μ je vnější míra na K.

2.krok. Nechť $\mathcal{S}$ je množina všech carathéodoryovsky měřitelných podmnožin K vzhledem k μ, tj. množin $E \subset K$ splňujících $\mu(T) = \mu(T \cap E) + \mu(T \setminus E)$ pro každou testovací $T \subset K$. Pak dle Caratheódoryovy věty je $\mathcal{S}$ σ-algebra a μ zúžená na $\mathcal{S}$ je míra (dokonce úplná). Je třeba ukázat, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny borelovské podmnožiny K. K tomu stačí ověřit, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny otevřené množiny.

Nejprve ukážeme, že μ je aditivní na otevřených množinách. Nechť tedy $U, V \subset K$ jsou disjunktní otevřené množiny. Díky subaditivitě μ stačí ukázat, že $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V)$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle (3) existují $f, g \in C(K)$ splňující $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset U$ a $0 \leq g \leq 1$, $\operatorname{supp} g \subset V$ takové, že $\Lambda(f) \geq \mu(U) - \varepsilon$ a $\Lambda(g) \geq \mu(V) - \varepsilon$. Protože U a V jsou disjunktní, platí $0 \leq f + g \leq 1$ a $\operatorname{supp}(f + g) \subset U \cup V$, a tedy

$$\mu(U \cup V) \geq \Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \geq \mu(U) + \mu(V) - 2\varepsilon.$$

Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V)$.

Nyní již relativně snadno dostaneme, že každá otevřená podmnožina K je carathéodoryovsky měřitelná vzhledem k μ. Nechť tedy $G \subset K$ je otevřená a $T \subset K$ je libovolná. Díky subaditivitě stačí ukázat, že $\mu(T) \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle (4) existuje $U \supset T$ otevřená splňující $\mu(U) < \mu(T) + \varepsilon$. Ze (3) najdeme $f \in C(K)$ takovou, že $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset U \cap G$ a $\Lambda(f) > \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 15.14 existuje otevřená množina V splňující $\operatorname{supp} f \subset V \subset \overline{V} \subset U \cap G$. Pak $\mu(V) \geq \Lambda(f) \geq \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Množiny V a $U \setminus \overline{V}$ jsou disjunktní a otevřené. Z aditivity μ na otevřených množinách tedy dostáváme

$$\mu(T) > \mu(U) - \varepsilon \geq \mu\big(V \cup (U \setminus \overline{V})\big) - \varepsilon = \mu(V) + \mu(U \setminus \overline{V}) - \varepsilon \geq$$
$$\geq \mu(U \cap G) - \varepsilon + \mu(U \setminus G) - \varepsilon \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G) - 2\varepsilon.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\mu(T) \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$.

Na závěr tohoto kroku si uvědomme, že z monotonie Λ plyne $\mu(K) = \Lambda(1) < +\infty$, speciálně μ je konečná na kompaktních podmnožinách K. Dále μ je zevně regulární přímo podle (4). Ovšem každá konečná zevně regulární míra je automaticky regulární i zevnitř. Tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.

3. krok. Ukážeme, že $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $f \in C(K)$. S využitím rozkladu na reálnou a imaginární část a díky linearitě Λ a integrálu stačí dokázat reprezentaci pro reálné funkce. Dále si všimněme, že stačí dokázat nerovnost $\Lambda(f) \le \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou reálnou $f \in C(K)$. Pak totiž aplikací této nerovnosti na $-f$ obdržíme opačnou nerovnost pro f.

Nechť je tedy dána reálná $f \in C(K)$ a nechť $a, b \in \mathbb{R}$ splňují $a \le f \le b$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Vskutku, máme-li požadovanou nerovnost dokázánu pro všechny nezáporné $g \in C(K)$, pak díky rovnosti $\Lambda(1) = \mu(K) = \int_K \chi_K \,\mathrm{d}\mu$ máme $\Lambda(f) = \Lambda(f - a\chi_K + a\chi_K) = \Lambda(f - a\chi_K) + a\Lambda(\chi_K) \le \int_K (f - a\chi_K) \,\mathrm{d}\mu + a\int_K \chi_K \,\mathrm{d}\mu = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$. Zvolme libovolné $0 < \varepsilon < 1$ a reálná čísla $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} \le b < y_n$ splňující $y_i - y_{i-1} \le \varepsilon$ pro $i = 1, \dots, n$. Protože f je spojitá, množiny

$$E_i = \{x \in K;\ y_{i-1} \le f(x) < y_i\}, \quad i = 1, \dots, n$$

tvoří borelovský rozklad K. Dále množiny $\{x \in K;\ f(x) < y_i + \varepsilon\}$ jsou otevřené. Díky regularitě μ tedy existují otevřené množiny U_i, $i = 1, \dots, n$ splňující $\mu(U_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ a $E_i \subset U_i \subset \{x \in K; f(x) < y_i + \varepsilon\}$. Systém $\{U_1, \dots, U_n\}$ tvoří otevřené pokrytí K, a tedy podle Věty 15.15 existují funkce $g_1, \dots, g_n \in C(K)$ splňující $0 \le g_i \le 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, n$ a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$. Pak máme $g_i f \le (y_i + \varepsilon) g_i$ na K a $f \ge y_{i-1} \ge y_i - \varepsilon$ na E_i pro $i = 1, \dots, n$, a tedy

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \Lambda\left(f \sum_{i=1}^n g_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda(g_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda(g_i) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\mu(U_i) \le \\
&\le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \le \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (y_i - \varepsilon) \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} n(b + 2\varepsilon) \le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\varepsilon\big) \\
&= \int_K f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\big),
\end{aligned}$$

přičemž první nerovnost plyne z monotonie Λ a druhá plyne z (3). Protože nerovnost platí pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$, je tím důkaz 3. kroku dokončen.

4. krok. Nechť μ, ν jsou dvě regulární borelovské míry reprezentující funkcionál Λ. Vzhledem k vnější regularitě stačí ukázat, že se shodují na otevřených množinách. Nechť $G \subset K$ je otevřená množina. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Díky vnitřní regularitě existuje uzavřená množina $F \subset U$ splňující $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 15.14 existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \le f \le 1$, $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset G$. Pak

$$\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon \le \int_K f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon = \int_K f \,\mathrm{d}\nu + \varepsilon \le \nu(G) + \varepsilon.$$

Toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tedy $\mu(G) \le \nu(G)$. Prohozením rolí μ a ν dostaneme opačnou nerovnost.

□

Před studiem následující věty je nezbytné se seznámit s integrací vzhledem ke komplexním mírám, vizte např. Dodatek, pododdíl 15.4.4.

VĚTA 20 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$[6]). *Je-li K kompaktní Hausdorffův topologický prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu.$$

[6] F. Riesz větu ukázal pro $C([a, b])$ pomocí Stieltjesova integrálu (1909-11), J. Radon zavedl míru a zobecnil větu na $\mathbb{R}^n$ (1913), pro kompaktní metrické prostory reprezentaci dokázal S. Banach (1937).

Tuto reprezentační větu dokážeme s pomocí Věty 19 a následujícího lemmatu.

LEMMA 21. *Nechť K je kompaktní topologický prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \leq \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.*

DŮKAZ. Nechť $C^+(K)$ značí nezáporné spojité funkce na K. Pro $f \in C^+(K)$ a $h \in C(K)$ splňující $|h| \leq f$ platí $|\varphi(h)| \leq \|\varphi\|\|h\| \leq \|\varphi\|\|f\|$. Můžeme tedy definovat nezápornou funkci $\Lambda\colon C^+(K) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Lambda(f) = \sup\left\{|\varphi(h)|;\ h \in C(K), |h| \leq f\right\}.$$

Snadno je vidět, že $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C^+(K)$ splňují $f \leq g$, a dále $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ kdykoli $f \in C^+(K)$ a $c \geq 0$. Též ihned vidíme, že Λ splňuje náš požadavek $|\varphi(f)| \leq \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Zbývá nám ukázat, že Λ lze rozšířit na všechny funkce z $C(K)$ tak, aby to byl lineární funkcionál.

Ukažme nejprve, že Λ je aditivní na $C^+(K)$, tj. $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$ pro libovolné $f_1, f_2 \in C^+(K)$. Nechť $f_1, f_2 \in C^+(K)$ jsou dány. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle definice existují $h_1, h_2 \in C(K)$ takové, že $|h_j| \leq f_j$ a $|\varphi(h_j)| > \Lambda(f_j) - \varepsilon$, $j = 1, 2$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ splňují $|\alpha_j| = 1$ a $\alpha_j\varphi(h_j) = |\varphi(h_j)|$, $j = 1, 2$. Pak $|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \leq |h_1| + |h_2| \leq f_1 + f_2$, takže

$$\Lambda(f_1)+\Lambda(f_2) < |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)|+2\varepsilon = \varphi(\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)+2\varepsilon \leq \Lambda(|h_1|+|h_2|)+2\varepsilon \leq \Lambda(f_1+f_2)+2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) \leq \Lambda(f_1 + f_2)$.

Pro opačnou nerovnost uvažujme libovolnou funkci $h \in C(K)$ splňující $|h| \leq f_1 + f_2$. Položme $V = \{x \in K;\ f_1(x) + f_2(x) > 0\}$ a pro $j = 1, 2$ definujme

$$h_j(x) = \begin{cases} \frac{f_j(x)h(x)}{f_1(x)+f_2(x)} & \text{pro } x \in V, \\ 0 & \text{pro } x \in K \setminus V. \end{cases}$$

Funkce h_j jsou zjevně spojité v bodech množiny V. Je-li $x \in K \setminus V$, pak $h(x) = 0$, a protože h je spojitá a platí $0 \leq |h_j| \leq |h|$, jsou i h_j spojité v x. Tedy $h_j \in C(K)$, $j = 1, 2$. Protože $h_1 + h_2 = h$ a $|h_j| \leq f_j$, máme

$$|\varphi(h)| = |\varphi(h_1) + \varphi(h_2)| \leq |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)| \leq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2).$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $h \in C(K)$ splňující $|h| \leq f_1 + f_2$, dostáváme, že $\Lambda(f_1 + f_2) \leq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

Na závěr dodefinujeme $\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$ pro reálnou $f \in C(K)$ a v komplexním případě dále $\Lambda(f) = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)$ pro obecnou $f \in C(K)$. (Poznamenejme, že definice jsou konzistentní, neboť $\Lambda(0) = 0$.) Zbývá nám ověřit linearitu Λ. Nechť nejprve $f, g \in C(K)$ jsou reálné. Položme $h = f + g$. Pak $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, neboli $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Z aditivity Λ pro nezáporné funkce tak dostáváme $\Lambda(h^+) + \Lambda(f^-) + \Lambda(g^-) = \Lambda(h^-) + \Lambda(f^+) + \Lambda(g^+)$, odkud již snadno obdržíme $\Lambda(h) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$. Komplexní případ pak snadno plyne z reálného a z aditivity Re a Im.

Konečně, snadno je vidět, že pro každou $f \in C(K)$ je $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ pro $c \geq 0$ a $\Lambda(-f) = -\Lambda(f)$. V komplexním případě pak $\Lambda(if) = \Lambda(-\operatorname{Im} f) + i\Lambda(\operatorname{Re} f) = i\big(\Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)\big) = i\Lambda(f)$. Tím je dokázáno, že Λ je lineární funkcionál na $C(K)$.

$\square$

DŮKAZ VĚTY 20. Nechť $\mu \in M(K)$ je dáno. Pro každé $f \in C(K)$ platí

$$\int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \leq \|f\||\mu|(K) = \|\mu\|\|f\|.$$

Odtud plyne, že φ_μ je dobře definovaná funkce a platí $|\varphi_\mu(f)| \leq \int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \leq \|\mu\|\|f\|$. Dále φ_μ je zjevně lineární, a tedy $\varphi_\mu \in C(K)^*$ a $\|\varphi_\mu\| \leq \|\mu\|$.

Na druhou stranu, dle Tvrzení 15.95 existuje borelovská funkce $h\colon K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ a $\int_K f\,\mathrm{d}\mu = \int_K fh\,\mathrm{d}|\mu|$ pro každou $f \in L_1(|\mu|)$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, str. 71] nebo Důsledek 15.86) existuje posloupnost $\{f_n\} \subset B_{C(K)}$ taková, že $f_n(x) \to \overline{h}(x)$ pro $|\mu|$-s. v. $x \in K$. Pak z Lebesgueovy věty plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_\mu(f_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_K f_n \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \int_K f_n h \, \mathrm{d}|\mu| \right| = \left| \int_K \overline{h} h \, \mathrm{d}|\mu| \right| = \int_K 1 \, \mathrm{d}|\mu| = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$. Linearita zobrazení I je zřejmá, takže je to lineární izometrie do.

Ukažme, že I je na. Nechť $\varphi \in C(K)^*$. Dle Lemmatu 21 existuje nezáporný lineární funkcionál Λ na $C(K)$ splňující $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Dle Věty 19 existuje na K (konečná) regulární borelovská nezáporná míra λ splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in C(K)$. Máme tedy

$$|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_K |f| \, \mathrm{d}\lambda = \|f\|_{L_1(\lambda)}$$

pro každou $f \in C(K)$. Odtud plyne, že jsou-li $f, g \in C(K)$ takové, že $f = g$ λ-s. v. na K, pak $|\varphi(f) - \varphi(g)| \le \|f - g\|_{L_1(\lambda)} = 0$, neboli $\varphi(f) = \varphi(g)$. Můžeme tedy chápat funkcionál φ jako lineární funkcionál $\tilde{\varphi}$ na prostoru $(C(K), \|\cdot\|_{L_1(\lambda)})$ jakožto podprostoru $L_1(\lambda)$. Navíc nerovnost výše ukazuje, že $\tilde{\varphi}$ je spojitý a $\|\tilde{\varphi}\| \le 1$. Protože $C(K)$ je hustý podprostor $L_1(\lambda)$ v normě prostoru $L_1(\lambda)$ ([R, Věta 3.14]), existuje jednoznačné rozšíření $\tilde{\varphi}$ na funkcionál $\psi \in L_1(\lambda)^*$ (Věta 1.62). Tedy dle Věty 15(d) existuje $g \in L_\infty(\lambda)$ taková, že $\psi(f) = \int_K fg \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in L_1(\lambda)$. Definujme komplexní borelovskou míru μ předpisem

$$\mu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $E \subset K$ borelovskou. Dle Věty 15.92 je μ regulární. Pak díky Větě 15.94 máme $\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu = \int_K fg \, \mathrm{d}\lambda = \psi(f) = \tilde{\varphi}(f) = \varphi(f)$ pro každou $f \in C(K)$.

□

VĚTA 22 (Felix Hausdorff). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

DŮKAZ. (a) Je-li $f \in Y^\perp$ a jsou-li $x, y \in X$ takové, že $\widehat{x} = \widehat{y}$ v X/Y, pak $x - y \in Y$, a tedy $f(x) = f(y)$. Zobrazení I je tedy dobře definované. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in Y^\perp$. Pak $\|I(f)\| = \sup_{\widehat{x} \in U_{X/Y}} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x \in U_X} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x \in U_X} |f(x)| = \|f\|$, přičemž druhá rovnost plyne z faktu $U_{X/Y} = q(U_X)$, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení (Tvrzení 1.69). Konečně, je-li $g \in (X/Y)^*$, pak $g \circ q \in X^*$ a navíc $g \circ q \in Y^\perp$. Zjevně $I(g \circ q) = g$, tedy I je na.

(b) Nejprve si uvědomme, že $Y^\perp$ je uzavřený podprostor X^* (Lemma 12(a)), a tedy $X^*/Y^\perp$ je normovaný lineární prostor. Dále, I je dobře definováno, neboť jsou-li $f, g \in X^*$ takové, že $\widehat{f} = \widehat{g}$ v $X^*/Y^\perp$, pak $f - g \in Y^\perp$, neboli $f = g$ na Y. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in X^*$. Je-li $h \in \widehat{f}$, pak $h\restriction_Y = f\restriction_Y$, tedy $\|h\| \ge \|f\restriction_Y\|$, odkud plyne $\|\widehat{f}\| = \inf_{h \in \widehat{f}} \|h\| \ge \|f\restriction_Y\| = \|I(\widehat{f})\|$. Na druhou stranu, dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 4) existuje rozšíření $g \in X^*$ funkcionálu $f\restriction_Y \in Y^*$ splňující $\|g\| = \|f\restriction_Y\|$. Pak $g - f \in Y^\perp$, tj. $g \in \widehat{f}$. Proto $\|I(\widehat{f})\| = \|f\restriction_Y\| = \|g\| \ge \|\widehat{f}\|$. Konečně, je-li $g \in Y^*$ a $f \in X^*$ je rozšíření g z Hahnovy-Banachovy věty, pak $I(\widehat{f}) = f\restriction_Y = g$, a tedy I je na.

□

POZNÁMKA. Reprezentační věty z tohoto oddílu hovoří o tom, jak lze reprezentovat duální prostor pro konkrétní Banachovy prostory X v tom smyslu, že existuje izometrie mezi nějakým Banachovým prostorem Y a duálem X^*. Nejdůležitější částí těchto reprezentačních vět jsou ovšem popisy toho, jakým způsobem prvek Y, který reprezentuje funkcionál na X, působí na prvky prostoru X.

Obvykle se prostory X^* a Y ztotožňují, říkáme tedy například „ℓ_1 je duálem k c_0“. Vždy je ovšem třeba mít na paměti, že toto ztotožnění je realizováno pomocí příslušné izometrie, a je důležité vědět, jak vypadá příslušná „akce“ konkrétního prvku prostoru Y na daný prvek prostoru X.

PŘÍKLAD 23. Uvažujme $X = \ell_1$ a $B = c_0 \subset \ell_\infty = \ell_1^*$. Pak B je uzavřený podprostor ℓ_1^* a $B_\perp = \{0\} \subset \ell_1$. Označíme-li totiž f_n kanonické bázové vektory v c_0, pak pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in B_\perp$ máme $x_n = f_n(x) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $(B_\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \ell_1^* = \ell_\infty \supsetneqq c_0 = B$.

◇

3. Druhý duál a reflexivita

Normovaný lineární prostor X lze přirozeným reprezentovat v jeho druhém duálu X^{**} (Definice 25). Tímto procesem získáme informaci o vztahu X a jeho chování v X^{**}. V případě, že X lze tímto kanonickým vnořením ztotožnit s X^{**}, dospíváme k pojmu reflexivního prostoru (Definice 29). To je velmi důležitý koncept zejména z hlediska slabých topologií, jak bude více vysvětleno v Sekci 6.9.

DEFINICE 24. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Z definice je zřejmé, že ε_x je lineární, spojitost pak plyne z odhadu $|f(x)| \leq \|x\|\|f\|$.

DEFINICE 25. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

TVRZENÍ 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

DŮKAZ. Pro libovolná $x, y \in X$, $f \in X^*$ a skalár α máme $\varepsilon_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varepsilon_x(f) + \varepsilon_y(f) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(f)$ a podobně $\varepsilon_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\varepsilon_x(f)) = (\alpha\varepsilon_x)(f)$. Tedy zobrazení ε je lineární. Dále $\|\varepsilon(x)\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(f)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| = \|x\|$ dle duálního vyjádření normy (Důsledek 6). Tedy ε je izometrie do. Je-li X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený dle Tvrzení 1.60(c).

□

Pomocí vnoření do druhého duálu snadno dokážeme následující pozorování.

TVRZENÍ 27. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak* $\dim X^* = \dim X$, *a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

DŮKAZ. Je-li $\dim X = n < \infty$, pak dimenze prostoru všech lineárních forem na X je rovna n. Podle Věty 1.66 je ovšem každá lineární forma na X spojitá, a tedy $\dim X^* = n$.

Nechť nyní $\dim X = \infty$. Ukážeme, že pak také $\dim X^* = \infty$. Předpokládejme, že to není pravda, tj. $\dim X^* < \infty$. Pak dle předchozí části je $\dim X^{**} < \infty$. Prostor X je ovšem izomorfní podprostoru X^{**}, a tedy $\dim X = \dim \varepsilon(X) \leq \dim X^{**} < \infty$, což je spor.

□

VĚTA 28. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

DŮKAZ. Položme $\widehat{X} = \overline{\varepsilon(X)} \subset X^{**}$. Protože X^{**} je úplný (Věta 1.50), je i $\widehat{X}$ úplný (Tvrzení 1.5(b)) a zřejmě $\varepsilon(X)$ je v něm hustý. Podle Tvrzení 26 lze prostor X identifikovat s prostorem $\varepsilon(X)$.

Nechť nyní X je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Podle první části existuje jeho zúplnění $\widehat{X}$ jakožto normovaného lineárního prostoru. Pak metrický prostor $\widehat{X} \times \widehat{X}$ je též úplný (Věta 15.7) a snadno je vidět, že $X \times X$ je v něm hustý. Funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ je dle Tvrzení 1.84(b) stejnoměrně spojitá na omezených podmnožinách $X \times X$, tedy existuje její spojité rozšíření $s \colon \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{K}$ (Věta 15.10). Funkce $(x, y, z) \mapsto s(x + y, z)$ a $(x, y, z) \mapsto s(x, z) + s(y, z)$ jsou spojité na prostoru $\widehat{X} \times \widehat{X} \times \widehat{X}$ a jsou si rovny na jeho husté podmnožině $X \times X \times X$ (z linearity skalárního součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Tedy dle Věty 15.4 platí $s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z)$ pro každé $x, y, z \in \widehat{X}$. Analogicky ověříme i ostatní vlastnosti skalárního součinu a též rovnost $s(x, x) = \|x\|^2_{\widehat{X}}$ pro každé $x \in \widehat{X}$. Tedy s je skalární součin na $\widehat{X}$ indukující úplnou normu na $\widehat{X}$.

K důkazu jednoznačnosti předpokládejme, že X_1 a X_2 jsou zúplnění X. Pak zobrazení Id_X chápané jako prvek $\mathcal{L}(X, X_2)$ lze rozšířit na spojitý lineární operátor $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ (Věta 1.62). Je-li $x \in X_1$ a $\{x_n\}$ posloupnost v X konvergující k x, pak platí

$$\|T(x)\|_{X_2} = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_{X_2} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{X_2} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{X_1} = \|x\|_{X_1},$$

a tedy T je izometrie do. Podle Tvrzení 1.60(c) je $T(X)$ uzavřený v X_2. Zároveň ale $T(X)$ obsahuje X, což je hustý podprostor X_2, takže $T(X) = X_2$.

□

DEFINICE 29. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Povšimněme si, že je-li $X^{**} = \varepsilon(X)$ pro normovaný lineární prostor X, pak X je izometrický úplnému prostoru X^{**}. Tedy je úplný dle Věty 1.60(b). Podmínka $X^{**} = \varepsilon(X)$ ve výše zmíněné definici tedy nemůže být splněna pro prostory, které nejsou Banachovy.

VĚTA 30. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

DŮKAZ. Nechť H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{K}$. Mějme $F \in H^{**}$ dáno. Položme $f(x) = \overline{F(I(x))}$ pro $x \in H$, kde $I \colon H \to H^*$ je identifikace z Věty 1.120. Snadno je vidět, že $f \in H^*$, čili dle Věty 1.120 existuje $y \in H$ takové, že $f(x) = \langle x, y \rangle$ pro každé $x \in H$. Vezměme libovolné $g \in H^*$ a nalezněme $x \in H$ splňující $I(x) = g$. Pak

$$F(g) = F(I(x)) = \overline{\overline{F(I(x))}} = \overline{f(x)} = \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle = g(y) = \varepsilon_y(g).$$

Tedy $F = \varepsilon_y = \varepsilon(y)$, odkud plyne, že ε je na.

Alternativně můžeme argumentovat následovně: Dle Věty 1.118 je H lineárně izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$, který je reflexivní podle Příkladu 33(b). Tedy je H reflexivní dle Věty 31(a).

□

VĚTA 31. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.
(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.
(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.
(d) Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \le p \le \infty$.
(e) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je reflexivní Banachův prostor, $T \colon X \to Y$ je lineární izomorfismus a je dán $F \in X^{**}$. Všimněme si, že $g \circ T \in X^*$ pro každé $g \in Y^*$, takže můžeme definovat

$$G(g) = F(g \circ T) \quad \text{pro } g \in Y^*.$$

Snadno je vidět, že G je lineární a $|G(g)| \le \|F\|\|g \circ T\| \le \|F\|\|T\|\|g\|$ (Fakt 1.47), tedy $G \in Y^{**}$. Protože Y je reflexivní, existuje $y \in Y$ splňující $\varepsilon_y = G$. Tvrdíme, že $x = T^{-1}(y)$ splňuje $\varepsilon_x = F$. Zvolme $f \in X^*$ libovolně. Pak $g = f \circ T^{-1} \in Y^*$, a tedy

$$F(f) = F(f \circ T^{-1} \circ T) = F(g \circ T) = G(g) = \varepsilon_y(g) = g(y) = f \circ T^{-1}(T(x)) = f(x) = \varepsilon_x(f).$$

Tedy kanonické vnoření ε je na.

(b) Nechť Y je uzavřený podprostor reflexivního prostoru X a nechť $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Zafixujme $G \in Y^{**}$ a položme

$$F(f) = G(f\restriction_Y) \quad \text{pro } f \in X^*.$$

Pak $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \le \|G\|\|f\restriction_Y\| \le \|G\|\|f\|$, a tedy existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_1(x) = F$. Dokonce $x \in Y$, protože v opačném případě by existoval funkcionál $f \in X^*$ splňující $f = 0$ na Y a $f(x) > 0$ (Věta 7), což by znamenalo, že

$$0 < f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f\restriction_Y) = G(0) = 0.$$

Nakonec ukažme, že $\varepsilon_2(x) = G$. Dané $g \in Y^*$ rozšiřme pomocí Hahnovy-Banachovy věty na $f \in X^*$ a počítejme

$$\varepsilon_2(x)(g) = g(x) = f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f\restriction_Y) = G(g).$$

(c) Nechť $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon X^* \to X^{***}$ jsou příslušná kanonická vnoření.

$\Rightarrow$ Je-li $\Phi \in X^{***}$ dáno, je $f = \Phi \circ \varepsilon_1 \in X^*$. Tvrdíme, že platí $\varepsilon_2(f) = \Phi$. Pro libovolné $F \in X^{**}$ totiž z reflexivity X najdeme $y \in X$ splňující $\varepsilon_1(y) = F$. Pak

$$\Phi(F) = \Phi(\varepsilon_1(y)) = f(y) = \varepsilon_1(y)(f) = F(f) = \varepsilon_2(f)(F).$$

Tedy ε_2 je na, což znamená, že X^* je reflexivní.

$\Leftarrow$ Z předchozí implikace plyne, že X^{**} je reflexivní. Podle Tvrzení 26 je $\varepsilon_1(X)$ uzavřený podprostor X^{**}, a tedy je reflexivní podle (b). Prostor X je izometrický prostoru $\varepsilon(X)$ (opět Tvrzení 26), a tedy je reflexivní podle (a).

(d) Nechť $1 \le p \le \infty$. Označme $\varepsilon\colon X \oplus_p Y \to (X \oplus_p Y)^{**}$, $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon Y \to Y^{**}$ příslušná kanonická vnoření a $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ identifikaci z Věty 16. Nechť $H \in (X \oplus Y)^{**}$ je dáno. Položme $F(f) = H(I(f,0))$ pro $f \in X^*$ a $G(g) = H(I(0,g))$ pro $g \in Y^*$. Potom $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \le \|H\|\|(f,0)\| \le \|H\|\|f\|$, a podobně $G \in Y^{**}$. Protože X a Y jsou reflexivní, existují prvky $x \in X$ a $y \in Y$ tak, že $\varepsilon_1(x) = F$ a $\varepsilon_2(y) = G$. Tvrdíme, že $\varepsilon(x, y) = H$. Je-li totiž $h \in (X \oplus_p Y)^*$, pak položíme $f(x) = h(x, 0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0, y)$ pro $y \in Y$. Pak $h = I(f,0) + I(0,g)$, a dostáváme tedy

$$\begin{aligned} H(h) &= H\big(I(f,0) + I(0,g)\big) = F(f) + G(g) = \varepsilon_1(x)(f) + \varepsilon_2(y)(g) = \\ &= f(x) + g(y) = h(x, y) = \varepsilon_{(x,y)}(h). \end{aligned}$$

Odtud plyne $\varepsilon_{(x,y)} = H$, čili ε je na.

(e) Nechť $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení a $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ je identifikace z Věty 22. Nechť $\Phi \in (X/Y)^{**}$ je dáno. Položme $G(f) = \Phi(I(f))$ pro $f \in Y^\perp$. Pak $G \in (Y^\perp)^*$ a dle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho spojité rozšíření $F \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_x = F$. Chceme ukázat, že $\varepsilon_{\widehat{x}} = \Phi$. Nechť tedy $\varphi \in (X/Y)^*$ je libovolné. Pak $f = \varphi \circ q \in Y^\perp$ a $I(f) = \varphi$, neboť $I(f)(\widehat{y}) = f(y) = \varphi \circ q(y) = \varphi(\widehat{y})$ pro každé $y \in X$. Tedy

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(f)) = G(f) = F(f) = \varepsilon_x(f) = f(x) = \varphi(\widehat{x}) = \varepsilon_{\widehat{x}}(\varphi).$$

□

TVRZENÍ 32. *Je-li X separabilní reflexivní Banachův prostor, pak i X^* je separabilní.*

DŮKAZ. Prostor X^{**} je izometrický separabilnímu X, tedy je separabilní. Pak X^* je separabilní dle Věty 9.

□

PŘÍKLADY 33.

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.
(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.
(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.
(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor[7]), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

[7] Robert Clarke James (1951)

DŮKAZ. (a) Dle Věty 1.66 je každý konečněrozměrný prostor izomorfní prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, který je reflexivní, neboť je Hilbertův (Věta 30). Izomorfismus ovšem zachovává reflexivitu (Věta 31(a)).

(b) Nechť $I : L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$ označuje identifikaci z Věty 15(c). Je-li $\Phi \in L_p(\mu)^{**}$ dáno, je $\Phi \circ I \in L_q(\mu)^*$. Opět podle Věty 15(c) tedy existuje $f \in L_p(\mu)$ splňující

$$\int gf \, \mathrm{d}\mu = \Phi \circ I(g) \quad \text{pro každé } g \in L_q(\mu).$$

Pak $\Phi = \varepsilon_f$, protože pro libovolné $\varphi \in L_p(\mu)^*$ nalezneme $g \in L_q(\mu)$ s vlastností $I(g) = \varphi$ a spočteme

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(g)) = \Phi \circ I(g) = \int gf \, \mathrm{d}\mu = \int fg \, \mathrm{d}\mu = I(g)(f) = \varepsilon_f(I(g)) = \varepsilon_f(\varphi).$$

(c) Prostor c_0^{**} je izometrický prostoru ℓ_∞ (Věta 15(a), Tvrzení 13 a Věta 15(b)). Prostor c_0 je ovšem separabilní, zatímco prostor ℓ_∞ je neseparabilní (Věta 1.26). Tedy c_0^{**} není izomorfní c_0, proto c_0 není reflexivní.

Prostor ℓ_1 není reflexivní podle Věty 31(a) a (c), neboť je izometrický c_0^*. Podobně, prostor ℓ_∞ není reflexivní, neboť je izometrický ℓ_1^* (případně proto, že nereflexivní c_0 je jeho uzavřeným podprostorem (Věta 31(b))). Prostor $L_1([0,1])$ není reflexivní podle Věty 31(b), neboť podle Příkladu 1.57 obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, který není reflexivní. Prostor $L_\infty([0,1])$ není reflexivní, neboť je izometrický duálu k nereflexivnímu prostoru $L_1([0,1])$ (Věta 15(d)).

Prostor $C([0,1])$ není reflexivní dle Tvrzení 32, neboť je separabilní (Věta 1.26(c)), zatímco jeho duál není separabilní. Vskutku, všimněme si, že duál obsahuje nespočetnou množinu Diracových[8] měr $\{\delta_x;\ x \in [0,1]\}$. Tato množina je ovšem 2-separovaná: Jsou-li $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, pak snadno vyrobíme spojitou funkci $f : [0,1] \to [-1,1]$, která splňuje $f(x) = 1$, $f(y) = -1$. Pak $f \in B_{C([0,1])}$, a tedy $\|\delta_x - \delta_y\| \geq (\delta_x - \delta_y)(f) = \delta_x(f) - \delta_y(f) = f(x) - f(y) = 2$.

Alternativně lze argumentovat tím, že $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický nereflexivnímu prostoru c_0 (Příklad 1.58).

(d) Konstrukce Jamesova prostoru je mimo rámec těchto skript.

□

[8] Paul Adrien Maurice Dirac

Kapitola 3

Úplnost v Banachových prostorech

■■■Tato kapitola studuje roli úplnosti v Banachových prostorech. Ukazuje se, že kombinace lineární a úplné metrické struktury má za následek netriviální tvrzení, jako je Princip stejnoměrné omezenosti (Věta 1) a Věta o otevřeném zobrazení (Věta 5). V následujících kapitolách pak oceníme všudypřítomnost těchto tvrzení.

VĚTA 1 (Princip stejnoměrné omezenosti[1]). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

DŮKAZ[2]. (i)$\Rightarrow$(ii) je zřejmá.

(ii)$\Rightarrow$(i) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \{x \in X;\ \|T(x)\| \leq n \text{ pro každé } T \in \mathcal{A}\}.$$

Pak jsou F_n uzavřené množiny pokrývající díky (ii) celé X. Podle Baireovy věty[3] (Důsledek 15.12) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} má neprázdný vnitřek. Existuje tedy koule $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Nechť nyní $T \in \mathcal{A}$ je libovolný. Pro každé $x \in B_X$ je $x_0 + rx \in B(x_0, r)$, a tedy $\|T(rx)\| = \|T(x_0 + rx - x_0)\| \leq \|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\| \leq 2n_0$. Odtud $\|T(x)\| \leq \frac{2n_0}{r}$, což znamená, že $\|T\| \leq \frac{2n_0}{r}$. Proto je $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} \leq \frac{2n_0}{r}$.

□

DŮSLEDEK 2. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a* $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že T je lineární. Zvolme $x, y \in X$ a skalár α libovolně. Pak díky spojitosti vektorových operací platí $T(x + y) = \lim T_n(x + y) = \lim\bigl(T_n(x) + T_n(y)\bigr) = \lim T_n(x) + \lim T_n(y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim \alpha T_n(x) = \alpha \lim T_n(x) = \alpha T(x)$. Dále, pro pevné $x \in X$ ze spojitosti normy plyne $\lim \|T_n(x)\| = \|T(x)\|$, speciálně posloupnost $\{\|T_n(x)\|\}$ je omezená. Z principu stejnoměrné omezenosti (Věta 1) plyne, že posloupnost $\{\|T_n\|\}$ je omezená. Pak pro libovolné $x \in B_X$ platí $\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \in \mathbb{R}$. Tedy T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

□

Následující příklad ukazuje, že bez úplnosti Princip stejnoměrné omezenosti neplatí.

PŘÍKLAD 3. Nechť $X = c_{00}$ a $\mathcal{A} = \{nf_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály. Pak pro každé $x \in X$ je množina $\{n \in N;\ f_n(x) \neq 0\}$ konečná, a tedy $\sup\{|nf_n(x)|;\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Nicméně $\sup\{\|nf_n\|;\ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{n;\ n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.

◇

[1] Větu dokázal pro $C([0, 1])$ Eduard Helly (1912). Jeho důkaz funguje i v obecném případě. Obecné verze podali S. Banach (1922), H. Hahn (1922) a Theophil Henry Hildebrandt (1923). Nejznámější verzi publikovali S. Banach a H. Steinhaus (1927), proto se věta často nazývá Banachova-Steinhausova.

[2] Důkaz využívající Baireovu větu pochází od Stanisława Sakse (1927).

[3] René-Louis Baire ji zformuloval pro $\mathbb{R}$ (1899), základní myšlenka pochází ovšem už od Williama Fogga Osgooda (1897).

DEFINICE 4. Zobrazení $f: X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \to Y$ je lineární zobrazení (ne nutně spojité), které je otevřené. Pak T je na. Vskutku, $T(X)$ je otevřená množina obsahující 0, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $U(0,\delta) \subset T(X)$. Protože $T(X)$ je podprostor Y, obsahuje speciálně všechny násobky $U(0,\delta)$, a tedy $T(X) = Y$. Jedním z nejzákladnějších výsledků teorie Banachových prostorů je fakt, že pro spojité lineární operátory platí i věta obrácená. Zásadní roli zde ovšem hraje úplnost.

VĚTA 5 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

K důkazu použijeme následující lemma.

LEMMA 6 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

DŮKAZ. Nejprve si povšimněme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat pouze případ $r = s = 1$. Vskutku, máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak operátor $\frac{r}{s}T$ splňuje $U(0,1) \subset \overline{(\frac{r}{s}T)(U(0,1))}$, a tedy podle případu $r = s = 1$ platí $U(0,1) \subset (\frac{r}{s}T)(U(0,1))$, odkud $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.

Nechť tedy $r = s = 1$ a nechť je dáno $z \in U_Y$. Najdeme $\delta \in (0,1)$ takové, že $\|z\| < 1 - \delta$. Ukážeme, že $y = \frac{1}{1-\delta} z \in T\left(\frac{1}{1-\delta} U_X\right)$. Pak totiž $z = (1-\delta)y \in (1-\delta)T\left(\frac{1}{1-\delta}U_X\right) = T(U_X)$. Pomocí matematické indukce najdeme $y_0, y_1, y_2 \ldots \in Y$ takové, že

(i) $y_0 = 0$,
(ii) $\|y - y_n\| < \delta^n$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(iii) $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Je $\|y\| < 1$, a tedy je volbou $y_0 = 0$ podmínka (ii) splněna. Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N}$ a již máme nalezeny prvky $y_0, \ldots, y_{n-1}$. Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}U_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(U_X)} = \overline{\delta^{n-1}T(U_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}U_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^{n-1}U_X)$ splňující $\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n$. Pak $y_n = y_{n-1} + w$ splňuje požadované podmínky. Tím je konstrukce završena.

Nyní pro každé $n \in \mathbb{N}$ ze (iii) zvolíme $x_n \in \delta^{n-1}U_X$ takové, že $y_n - y_{n-1} = T(x_n)$. Protože $\delta < 1$, je řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ absolutně konvergentní, a díky úplnosti X je tedy konvergentní (Věta 1.30). Označme $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Pak dle Faktu 1.28 máme $\|x\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \sum_{n=1}^\infty \delta^{n-1} = \frac{1}{1-\delta}$. Tedy $x \in \frac{1}{1-\delta}U_X$. Ukážeme, že $T(x) = y$, čímž bude důkaz završen:

$$T(x) = \sum_{n=1}^\infty T(x_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} y_N = y,$$

přičemž poslední rovnost platí díky (ii).

□

DŮKAZ VĚTY 5. Stačí ukázat, že $T(U_X)$ obsahuje kouli $U(0,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Vskutku, nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in T(G)$ je libovolný. Nechť dále $x \in G$ splňuje $y = T(x)$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $U(x,r) \subset G$. Máme tedy $U(y,\delta r) = y + rU(0,\delta) \subset y + rT(U_X) = T(x + rU_X) = T(U(x,r)) \subset T(G)$.

Protože T je na, platí

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^\infty nU_X\right) = \bigcup_{n=1}^\infty T(nU_X) \subset \bigcup_{n=1}^\infty \overline{T(nU_X)}.$$

Z Baireovy věty (Důsledek 15.12) plyne existence $n \in \mathbb{N}$ takového, že $\overline{T(nU_X)}$ má neprázdný vnitřek, tedy obsahuje nějakou kouli $U(x,r)$. Množina $\overline{T(nU_X)}$ je konvexní a symetrická (Fakty 1.43 a 1.21), proto je $U(0,r) \subset \overline{T(nU_X)}$ (Fakt 1.19). Podle Lemmatu 6 ovšem platí $U(0,r) \subset T(nU_X)$, a tedy $U(0,\frac{r}{n}) \subset T(U_X)$.

□

DŮSLEDEK 7 (S. Banach, 1929). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. $\Leftarrow$ Spojitost T^{-1} plyne z otevřenosti T, tedy z Věty 5.

□

FAKT 8. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definujme $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$. Pak $\widehat{T} \in \mathcal{L}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$, $\|\widehat{T}\| = \|T\|$, $\widehat{T}$ je prosté a $T = \widehat{T} \circ q$, kde $q\colon X \to X/\ker T$ je kanonické kvocientové zobrazení.*

DŮKAZ. Je-li $\widehat{x} = \widehat{y}$, pak $x - y \in \operatorname{Ker} T$, a tedy $T(x) = T(y)$. Proto je $\widehat{T}$ dobře definované lineární zobrazení. Vzorec $T = \widehat{T} \circ q$ je jen přeformulovaná definice $\widehat{T}$. Díky Tvrzení 1.69 a Lemmatu 1.45(b) je $\sup_{z \in U_{X/\operatorname{Ker} T}} \|\widehat{T}(z)\| = \sup_{z \in q(U_X)} \|\widehat{T}(z)\| = \sup_{x \in U_X} \|\widehat{T} \circ q(x)\| = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\| = \|T\|$. Tedy $\widehat{T}$ je spojité (Tvrzení 1.44) a $\|\widehat{T}\| = \|T\|$ (Lemma 1.45(b)). Konečně, je-li $\widehat{x} \in \operatorname{Ker} \widehat{T}$, pak $x \in \operatorname{Ker} T$, což znamená, že $\widehat{x} = 0$, a tedy $\widehat{T}$ je prosté.

□

DŮSLEDEK 9. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \le c\|y\|$.

(b) Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

DŮKAZ. (a) Díky Větě 5 existuje $r > 0$ takové, že $T(B_X) \supset B_Y(0, r)$. Nechť nyní $y \in Y \setminus \{0\}$ je dáno. Pak $\frac{r}{\|y\|} y \in B_Y(0, r)$, a tedy existuje $x \in B_X$ splňující $T(x) = \frac{r}{\|y\|} y$. Protože $T\big(\frac{\|y\|}{r} x\big) = y$ a $\big\|\frac{\|y\|}{r} x\big\| \le \frac{1}{r}\|y\|$, tvrzení platí s konstantou $c = \frac{1}{r}$.

(b) Zjevně $\widehat{T}$ je na. Tvrzení tedy plyne z Faktu 8 a Důsledku 7.

□

Jak ukazují následující příklady, předpoklady na úplnost zdrojového i cílového prostoru ve větě o otevřeném zobrazení jsou naprosto podstatné.

PŘÍKLAD 10. Položme $X = c_0$ a uvažujme operátor $T\colon X \to c_0$ definovaný předpisem $T(x) = \big(\frac{1}{n} x_n\big)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n) \in X$. Ihned je vidět, že T je prostý spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 1$. Položme dále $Y = T(X)$. Pak $T\colon X \to Y$ je na, X je úplný, ale ukážeme, že T není otevřené zobrazení. Nejprve si všimněme, že $c_{00} \subset Y$, neboť pro libovolný $y = \sum_{n=1}^{k} y_n e_n \in c_{00}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory, je $T\big(\sum_{n=1}^{k} n y_n e_n\big) = y$. Předpokládejme nyní, že T je otevřené zobrazení. Pak $B(0, r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Protože $c_{00} \subset Y$, je speciálně $z_k = \sum_{n=1}^{k} r e_n \in T(U_X)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Protože T je prostý, jediný prvek, který se zobrazí na z_k, je prvek $\sum_{n=1}^{k} n r e_n \in X$, jehož norma je ovšem rovna $kr > 1$, a tím pádem tento prvek nepatří do U_X. To je spor.

◇

PŘÍKLAD 11. Nechť $Y = (Y, \|\cdot\|_1)$ je libovolný nekonečněrozměrný Banachův prostor. Podle Věty 1.66 existuje na Y norma $\|\cdot\|_2$, která není ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$. Z důkazu Věty 1.66 je vidět, že můžeme předpokládat, že $\|x\|_1 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in Y$. Protože normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nejsou ekvivalentní, existuje posloupnost $\{x_n\} \subset Y$ splňující $\|x_n\|_1 = 1$ a $\|x_n\|_2 > n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $X = (Y, \|\cdot\|_2)$ a uvažujme lineární operátor $T\colon X \to Y$, $T = Id_X$. Pak T je spojitý, neboť $\|T(x)\|_1 = \|x\|_1 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in X$. Zjevně Y je úplný a T je na. Ukážeme sporem, že T není otevřené zobrazení. Předpokládejme, že $B(0, r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Pak $\|r x_k\|_1 = r$, $T^{-1}(r x_k) = \{r x_k\}$, ale $\|r x_k\|_2 > rk > 1$, tedy $r x_k \notin U_X$. To je spor.

◇

DEFINICE 12. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f: X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Je-li $f: X \to Y$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory X a Y, pak má uzavřený graf. Vskutku, nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v množině graf f konvergující k $(x, y) \in X \times Y$. Pak $x_n \to x$, a tedy $f(x_n) \to f(x)$. Zároveň ovšem $f(x_n) = y_n \to y$, tedy dle jednoznačnosti limity $y = f(x)$, což znamená, že $(x, y) \in$ graf f. Lineární zobrazení mezi Banachovými prostory mají tu významnou vlastnost, že pro ně platí i opačná implikace:

VĚTA 13 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T: X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z poznámky před větou.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že kanonické „projekce“ $P: X \oplus_\infty Y \to X$, $P(x, y) = x$ a $Q: X \oplus_\infty Y \to Y$, $Q(x, y) = y$ jsou spojité lineární operátory, a že zobrazení $S: X \to X \oplus_\infty Y$, $S(x) = (x, T(x))$ je lineární. Proto je $G = \operatorname{graf} T = S(X)$ vektorový podprostor $X \oplus_\infty Y$, který je dle předpokladu uzavřený. Tedy G je Banachův prostor (Tvrzení 1.5(b)). Dále uvažujme zobrazení $\tilde{S}: X \to G$, $\tilde{S} = S$. Pak $\tilde{S}$ je bijekce a $P\restriction_G$ je inverzní k $\tilde{S}$. Zobrazení $P\restriction_G$ je spojité lineární zobrazení, které je prosté a na. Dle Důsledku 7 je jeho inverze $\tilde{S}$ spojitá. Proto je i $T = Q \circ \tilde{S}$ spojité.

$\square$

DŮKAZ VĚTY 1.78(B). Nechť $P_Y: X \to Y$ je projekce příslušná rozkladu $X = Y \oplus Z$. Protože Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru X, je to také Banachův prostor, takže díky Větě 13 stačí ukázat, že P_Y má uzavřený graf. Nechť tedy $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v graf P_Y konvergující k $(x, y) \in X \oplus_\infty Y$. Pak $x_n \to x$ a $y_n \to y$. Dále $x_n - y_n = x_n - P_Y(x_n) \in Z$ (Tvrzení 1.74) a díky uzavřenosti Z tak máme $x - y = \lim(x_n - y_n) \in Z$. Tedy $x = y + (x - y)$, kde $y \in Y$ a $x - y \in Z$, je jednoznačný rozklad x, což znamená, že $y = P_Y(x)$, neboli $(x, y) \in$ graf P_Y.

$\square$

Kapitola 4

Lineární operátory

■■■Jelikož zkoumáme vektorové prostory, je základním uvažovaným typem zobrazení operátor, tedy lineární zobrazení. Vzhledem k tomu, že uvažujeme naše prostory s metrickou strukturou, zajímáme se zejména o spojitá lineární zobrazení. Ta přenášejí informace o struktuře daného normovaného lineárního prostoru. Uvidíme, jak koncept duálních prostorů pomáhá dobře zachytit vlastnosti operátoru (oddíl 1) a jak interakce linearity s kompaktností vede k zajímavým výsledkům o chování takzvaných kompaktních operátorů (oddíly 2 a 3).

1. Duální operátory

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Abychom zlepšili přehlednost některých komplikovanějších výrazů, které by obsahovaly příliš mnoho závorek, budeme často výrazy typu $T(x)$ zkracovat jako Tx.

DEFINICE 1. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 2 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

VĚTA 2. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*
(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.
(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.
(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

DŮKAZ. (a) Pro dané $f \in Y^*$ je funkce $x \mapsto f(Tx)$ zjevně lineární a spojitá na X, tudíž se jedná o prvek X^*. Zobrazení $T^*\colon Y^* \to X^*$ je tedy dobře definované. Snadno je vidět, že T^* je lineární operátor. Dále platí

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|T^* f\| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |T^* f(x)| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |f(Tx)| = \\ &= \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{Y^*}} |f(Tx)| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|,\end{aligned}$$

přičemž předposlední rovnost plyne z duálního vyjádření normy (Důsledek 2.6). Tedy $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(b) Linearita zobrazení $T \mapsto T^*$ se snadno ověří: Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a α je skalár. Zvolme $f \in Y^*$ libovolně. Pak $(S+T)^* f(x) = f\big((S+T)x\big) = f(Sx+Tx) = f(Sx)+f(Tx) = S^* f(x)+T^* f(x) = (S^* f + T^* f)(x)$ a $(\alpha T)^* f(x) = f\big((\alpha T)x\big) = f\big(\alpha(Tx)\big) = \alpha f(Tx) = \alpha\big(T^* f(x)\big) = \big(\alpha(T^* f)\big)(x)$ pro každé $x \in X$, neboli $(S + T)^* f = S^* f + T^* f = (S^* + T^*) f$ a $(\alpha T)^* f = \alpha(T^* f) = (\alpha T^*) f$. Odtud $(S + T)^* = S^* + T^*$ a $(\alpha T)^* = \alpha T^*$. Izometrie pak plyne z (a).

(c) Nechť $f \in Z^*$ je libovolné. Pak pro každé $x \in X$ platí $(S \circ T)^* f(x) = f(S \circ Tx) = f\big(S(Tx)\big) = S^* f(Tx) = T^*(S^* f)(x)$, tedy $(S \circ T)^* f = T^*(S^* f) = (T^* \circ S^*) f$. Odtud $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Konečně, pro $f \in X^*$ a $x \in X$ máme $Id_X^* f(x) = f(Id_X x) = f(x) = Id_{X^*} f(x)$.

□

PŘÍKLAD 3. Nechť $X = \mathbb{K}^n$ a $Y = \mathbb{K}^m$ s libovolnými normami a nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Z lineární algebry víme, že T je reprezentován jistou maticí $A \in M(m \times n)$ tak, že $T(x) = Ax$ pro $x \in \mathbb{K}^n$. Zkoumejme, jak vypadá duální operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$. Použijeme-li standardní reprezentaci duálu z lineární algebry spolu s Větou 1.66, pak $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, přičemž $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ a analogicky pro Y^*. V této reprezentaci je tedy $T^*\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$. Nechť $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$. Pro každé $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$T^* f(x) = f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^m f_j (Ax)_j = \sum_{j=1}^m f_j \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \\ = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} f_j \right) x_k = \sum_{k=1}^n (A^{\mathrm{T}} f)_k x_k = (A^{\mathrm{T}} f)x,$$

kde A^{T} je matice transponovaná k matici A. Tedy $T^*(f) = A^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí A^{T}.

Je-li na X a Y eukleidovská norma, pak X a Y jsou Hilbertovy prostory. Vedle reprezentace duálů použité výše tedy máme k dispozici ještě reprezentaci z Věty 1.120 (která se v komplexním případě liší). Podívejme se, jak vypadá T^* v této reprezentaci. Opět je $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, ale $f(x) = \sum_{j=1}^n \overline{f_j} x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ (a analogicky pro Y^*). Pro $T^*\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ v této reprezentaci tedy pro každé $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$ a $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$T^* f(x) = f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^m \overline{f_j} (Ax)_j = \sum_{j=1}^m \overline{f_j} \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \\ = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} \overline{f_j} \right) x_k = \sum_{k=1}^n \overline{\left(\sum_{j=1}^m \overline{a_{jk}} f_j \right)} x_k = \sum_{k=1}^n \overline{(\overline{A}^{\mathrm{T}} f)_k} x_k = (\overline{A}^{\mathrm{T}} f)x,$$

kde $\overline{A}^{\mathrm{T}} = (\overline{a_{kj}})$ pro $A = (a_{jk})$. Tedy $T^*(f) = \overline{A}^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí $\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

◇

VĚTA 4. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí, že*
(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.
(e) Jsou-li navíc X, Y Banachovy a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

DŮKAZ. Tvrzení (a) dostaneme z ekvivalencí

$$f \in \operatorname{Ker} T^* \Leftrightarrow T^* f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X\colon T^* f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X\colon f(Tx) = 0 \Leftrightarrow f \in (\operatorname{Rng} T)^\perp.$$

Tvrzení (b) dokážeme obdobně, přičemž pro druhou ekvivalenci používáme Hahnovu-Banachovu větu (Důsledek 2.5):

$$x \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \forall f \in Y^*\colon f(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall f \in Y^*\colon (T^* f)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\operatorname{Rng} T^*)_\perp.$$

(c) Díky (a) a Lemmatu 2.12(c) platí $(\operatorname{Ker} T^*)_\perp = \big((\operatorname{Rng} T)^\perp\big)_\perp = \overline{\operatorname{Rng} T}$.

(d) Díky (b) a Lemmatu 2.12(d) platí $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \big((\operatorname{Rng} T^*)_\perp\big)^\perp \supset \overline{\operatorname{Rng} T^*}$.

(e) Díky (d) stačí dokázat inkluzi $(\operatorname{Ker} T)^\perp \subset \operatorname{Rng} T^*$. Nechť $f \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$ je dáno. Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Rng} T$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je dle Důsledku 3.9(b) lineárním izomorfismem, a tedy k němu existuje inverze $\widehat{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Rng} T, X/\operatorname{Ker} T)$. Pro $y \in \operatorname{Rng} T$ položme $g(y) = I(f)(\widehat{T}^{-1} y)$, kde $I\colon (\operatorname{Ker} T)^\perp \to (X/\operatorname{Ker} T)^*$ je identifikace z Věty 2.22(a). Pak $g \in (\operatorname{Rng} T)^*$ a podle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho rozšíření $\tilde{g} \in Y^*$. Tvrdíme, že $T^* \tilde{g} = f$. Nejprve si všimněme, že pro každé $x \in X$ platí $\widehat{T}^{-1}(Tx) = \widehat{x}$. Proto $T^* \tilde{g}(x) = \tilde{g}(Tx) = g(Tx) = I(f)\big(\widehat{T}^{-1}(Tx)\big) = I(f)(\widehat{x}) = f(x)$ pro každé $x \in X$.

□

Poznamenejme, že „správné znění“ tvrzení (d) uvedeme v oddílu 6.9 (Věta 6.113).

TVRZENÍ 5 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon\colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S : \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**} \restriction_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Ztotožníme-li prostory X, Y s jejich kanonickými vnořeními v X^{**}, Y^{**}, pak výše uvedené tvrzení neformálně říká, že $T = T^{**} \restriction_X$.

DŮKAZ. Nechť $x \in X$. Pro každé $f \in Y^*$ platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(f) = f(Tx) = T^* f(x) = (\varepsilon_X(x))(T^* f) = \big(T^{**}(\varepsilon_X(x))\big)(f),$$

tedy $\varepsilon_Y(Tx) = T^{**}(\varepsilon_X(x))$. Odtud $\varepsilon_Y \circ T = T^{**} \circ \varepsilon_X$.

□

VĚTA 6. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
(a) T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ je hustý v Y.
(b) Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
(c) Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.
Je-li X úplný, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

DŮKAZ. (a) Díky Větě 4(c) je $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$. Je-li tedy T^* prostý, pak $\overline{\operatorname{Rng} T} = \{0\}_\perp = Y$. Na druhou stranu, je-li $\operatorname{Rng} T$ je hustý v Y, pak $\operatorname{Ker} T^* \subset \big((\operatorname{Ker} T^*)_\perp\big)^\perp = Y^\perp = \{0\}$ dle Lemmatu 2.12(d).

(b) Nechť $f \in Y^*$. Pro každé $y \in Y$ platí

$$\big((T^{-1})^*(T^* f)\big)(y) = T^* f(T^{-1} y) = f\big(T(T^{-1} y)\big) = f(y),$$

tedy $(T^{-1})^*(T^* f) = f$. Obráceně, nechť $g \in X^*$. Pro každé $x \in X$ platí

$$T^*\big((T^{-1})^* g\big)(x) = (T^{-1})^* g(Tx) = g\big(T^{-1}(Tx)\big) = g(x),$$

tedy $T^*\big((T^{-1})^* g\big) = g$. To znamená, že $(T^{-1})^*$ je inverzním operátorem k T^*, a tedy T^* je izomorfismus na.

(c) Pro $f \in Y^*$ máme $\|T^* f\| = \sup_{x \in B_X} |T^* f(x)| = \sup_{x \in B_X} |f(Tx)| = \sup_{y \in B_Y} |f(y)| = \|f\|$. Z (b) pak plyne, že T^* je na.

Nechť nyní X je úplný. Je-li T^* izomorfismus na, pak dle (b) je T^{**} též izomorfismus na. Podle Tvrzení 5 je tedy T složením izomorfismů do, proto je to izomorfismus do (Fakt 1.61). Je tedy $\operatorname{Rng} T$ uzavřený v Y (Tvrzení 1.60(c)). Podle (a) to ovšem znamená, že T je na. Je-li T^{**} navíc izometrie, pak z Tvrzení 5 a Faktu 1.61 plyne, že T je izometrie.

□

2. Kompaktní operátory

■■■Pojem kompaktního operátoru je založen na konceptu matice, tj. na konceptu operátoru mezi konečněrozměrnými prostory. Ukazuje se, že chování kompaktních operátorů do jisté míry imituje chování matic a že kompaktní operátory se zhusta vyskytují při řešení širokého spektra nekonečněrozměrných problémů.

Nechť X je metrický prostor. Připomeňme, že množina $M \subset X$ se nazývá relativně kompaktní v X, pokud $\overline{M}$ je kompaktní, a že M je relativně kompaktní v X, právě když z každé posloupnosti prvků M lze vybrat podposloupnost konvergující v X. Je-li X úplný, pak M je relativně kompaktní v X, právě když je totálně omezená. Je-li Y metrický prostor takový, že X je jeho podprostor a M je relativně kompaktní v X, pak M je i relativně kompaktní v Y.

PŘÍKLAD 7 (Hilbertova krychle). Položme
$$Q = \{x = (x_n) \in \ell_2;\ |x_n| \le \tfrac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}.$$
Pak Q je kompaktní podmnožina ℓ_2: Platí, že $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in \ell_2;\ |f_n(x)| \le \frac{1}{n}\}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, proto je Q je uzavřená podmnožina ℓ_2. Stačí tedy ukázat, že je totálně omezená.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$, a tedy $\sum_{n=m+1}^{\infty}|x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ pro každé $x \in Q$. Označme $R\colon \ell_2 \to \mathbb{K}^m$ restrikci na prvních m souřadnic, tj. $R(x) = (x_n)_{n=1}^m$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, a všimněme si, že $\|R(x)\|_2 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in \ell_2$. Speciálně, $\|R(x)\|_2 \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < +\infty$ pro $x \in Q$. Čili množina $R(Q)$ je omezená v prostoru $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2)$, tedy je tam totálně omezená a existuje k ní konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť $A \subset \mathbb{K}^m$. Rozšiřme vektory z A zpět do ℓ_2 pomocí nulových souřadnic: položíme $\tilde{A} = \{x = (x_n) \in \ell_2;\ R(x) \in A \text{ a } x_n = 0 \text{ pro } n > m\}$. Pak $\tilde{A}$ je konečná množina a tvrdíme, že tvoří ε-síť pro Q. Nechť tedy $x \in Q$. Pak existuje $y \in A$ takové, že $\|R(x) - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $z \in \tilde{A}$ je takový, že $R(z) = y$. Pak
$$\|x - z\|_2 = \left(\|R(x) - R(z)\|_2^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2} < \varepsilon.$$
◇

DEFINICE 8. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tradičně se též používají poněkud nekonzistentní zkratky $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$ a $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X, X)$.

TVRZENÍ 9. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.
(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.
(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ. Je-li $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, je $T(B_X)$ relativně kompaktní, a tedy omezená. Tudíž T je spojitý dle Tvrzení 1.44.

Nechť nyní $T\colon X \to Y$ je lineární. (i)⇒(ii) je zřejmá.

(ii)⇒(iii) Je-li $r > 0$ takové, že $\{x_n\} \subset B(0, r)$, pak $\frac{1}{r}x_n \subset B_X$. Protože $\{T(\frac{1}{r}x_n)\} \subset T(B_X)$, existuje rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ taková, že $\{T(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní. Pak ovšem i $\{T(x_{n_k})\} = \{rT(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní.

(iii)⇒(i) Nechť $A \subset X$ je omezená a $\{y_n\}$ je posloupnost v $T(A)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ takové, že $y_n = T(x_n)$. Tedy $\{x_n\}$ je omezená a dle předpokladu lze z $\{y_n\} = \{T(x_n)\}$ vybrat konvergentní podposloupnost. To znamená, že $T(A)$ je relativně kompaktní.

□

PŘÍKLAD 10. Definujme $T \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ předpisem $T(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n)$. Snadno je vidět, že T je lineární operátor. Protože $T(B_{\ell_2}) \subset Q$, kde Q je Hilbertova krychle (Příklad 7), je T kompaktní dle Tvrzení 9. Nicméně T není konečněrozměrný, neboť $T(\ell_2)$ obsahuje lineárně nezávislou množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů.

Na druhou stranu, identita na ℓ_2 je příkladem spojitého lineárního operátoru, který není kompaktní, neboť obraz jednotkové koule obsahuje množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů, která je $\sqrt{2}$-separovaná (tj. $\|e_k - e_n\| \ge \sqrt{2}$ pro $k \ne n$), takže není relativně kompaktní.

◇

Uvědomme si, že lineární operátor T můžeme chápat jako lineární zobrazení do libovolného nadprostoru $\operatorname{Rng} T$. Kompaktnost lineárního operátoru ovšem může zásadně záviset na tom, jaký cílový prostor bereme, neboť v definici se bere uzávěr $T(A)$ v cílovém prostoru, a pro různé prostory můžeme dostat různé uzávěry. Vizte též následující tvrzení.

TVRZENÍ 11. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

(a) Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X,Z)$.
(b) Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, pak $T \in \mathcal{K}(X,Z)$.

DŮKAZ. (a) Pro $A \subset X$ omezenou je $T(A)$ relativně kompaktní v Y, a tedy i relativně kompaktní v Z.

(b) Nechť $A \subset X$ je omezená. Protože Z je uzavřený v Y, je množina $\overline{T(A)}^Z = Z \cap \overline{T(A)}^Y$ uzavřená v Y, a tedy $\overline{T(A)}^Z = \overline{T(A)}^Y$. Proto je $\overline{T(A)}^Z$ kompaktní.

□

VĚTA 12. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1,\dots,f_n \in X^*$ a $y_1,\dots,y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ pro každé $x \in X$.
(b) $\mathcal{K}(X,Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$ a $\mathcal{F}(X,Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X,Y)$.
(c) Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X,Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$.
(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.
(e) Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X,Y)$.

Všimněme si, že poslední tvrzení nám říká, že „netriviální“ (tj. nikoli konečněrozměrné) kompaktní lineární operátory mezi Banachovými prostory nemají nikdy uzavřený Rng.

DŮKAZ. (a) $\Leftarrow$ je zřejmá, neboť v tom případě $\operatorname{Rng} T \subset \operatorname{span}\{y_1,\dots,y_n\}$.

$\Rightarrow$ Nechť $\{y_1,\dots,y_n\}$ je nějaká báze $\operatorname{Rng} T$. Definujme lineární formy $g_1,\dots,g_n$ na $\operatorname{Rng} T$ hodnotami na bázi následovně:

$$g_i(y_j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Protože $\operatorname{Rng} T$ je konečněrozměrný, jsou $g_1,\dots,g_n$ spojité lineární funkcionály (Věta 1.66). Všimněme si, že pro každý prvek $y \in \operatorname{Rng} T$ platí

$$y = \sum_{i=1}^n g_i(y)y_i.$$

Vskutku, máme-li $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ pro nějaké skaláry $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, pak $g_j(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_j(y_i) = \alpha_j$ pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$. Položme $f_i = g_i \circ T \in X^*$ pro $i = 1,\dots,n$. Pak $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(T(x))y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$.

(b) Kompaktní lineární operátory jsou spojité, je tedy $\mathcal{K}(X,Y)$ podmnožinou $\mathcal{L}(X,Y)$. Jsou-li $S, T \in \mathcal{K}(X,Y)$ pak $(S+T)(B_X) \subset S(B_X) + T(B_X) \subset \overline{S(B_X)} + \overline{T(B_X)}$, přičemž množina vpravo je kompaktní dle Tvrzení 1.23. Tedy $(S+T)(B_X)$ je relativně kompaktní v Y, což znamená, že $S+T$ je kompaktní operátor (Tvrzení 9). Podobně, pro α skalár a $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ je $\overline{(\alpha T)(B_X)} = \alpha\overline{T(B_X)}$, tedy je to kompakt, neboť je to spojitý obraz kompaktu $\overline{T(B_X)}$ (Tvrzení 1.2(c)). Opět díky Tvrzení 9 je tak operátor αT kompaktní. To dokazuje, že $\mathcal{K}(X,Y)$ je podprostorem $\mathcal{L}(X,Y)$.

Dále, nechť $S, T \in \mathcal{F}(X,Y)$ a $\alpha \neq 0$ je skalár. Pak $\operatorname{Rng}(S+T) \subset \operatorname{Rng} S + \operatorname{Rng} T$ a $\operatorname{Rng}(\alpha T) = \operatorname{Rng} T$, tedy $\operatorname{Rng}(S+T)$ i $\operatorname{Rng}(\alpha T)$ jsou konečněrozměrné. Konečně, $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y (Důsledek 1.25), takže $\overline{T(B_X)} \subset \operatorname{Rng} T$. Množina $\overline{T(B_X)}$ je tedy omezená uzavřená podmnožina konečněrozměrného prostoru, takže je kompaktní (Věta 1.66). Proto je $\mathcal{F}(X,Y)$ podprostorem $\mathcal{K}(X,Y)$.

(c) Nechť $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{K}(X,Y)$ konvergující k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále nalezneme množinu $\{x_1,\dots,x_k\} \subset B_X$ takovou, že

$\{T_n(x_1), \dots, T_n(x_k)\}$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť pro $T_n(B_X)$. Ukážeme, že $\{T(x_1), \dots, T(x_k)\}$ je konečná ε-síť pro $T(B_X)$. Pro $x \in B_X$ totiž nalezneme $i \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\|T_n(x) - T_n(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$\|T(x)-T(x_i)\| \le \|T(x)-T_n(x)\|+\|T_n(x)-T_n(x_i)\|+\|T_n(x_i)-T(x_i)\| < \|T-T_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|T_n-T\| < \varepsilon.$$

Tedy $T(B_X)$ je totálně omezená, a protože Y je úplný, je T kompaktní dle Tvrzení 9.

(d) Nechť Z je normovaný lineární prostor, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Pak $S(B_X)$ je omezená, a tedy $T \circ S(B_X) = T(S(B_X))$ je relativně kompaktní, neboli $T \circ S \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Obráceně, nechť $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Položme $A = T(B_X)$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní, tedy $S(\overline{A})$ je také kompaktní. Proto je $S \circ T(B_X) = S(A) \subset S(\overline{A})$ relativně kompaktní, což znamená, že $S \circ T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(e) Označme $Z = \operatorname{Rng} T$. Pak Z je uzavřený podprostor Y, tedy je Banachův a podle věty o otevřeném zobrazení (Věta 3.5) je $T : X \to Z$ otevřené zobrazení. Relativně kompaktní množina $T(B_X)$ tedy obsahuje $B_Z(0, r)$ pro nějaké $r > 0$, což znamená, že $B_Z(0, r)$, a tedy i B_Z, je kompaktní. Díky Větě 1.66 tedy platí, že $\dim \operatorname{Rng} T = \dim Z < \infty$.

□

VĚTA 13 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Položme $K = \overline{T(B_X)}$ a $\mathcal{F} = \{f \restriction_K;\ f \in B_{Y^*}\}$. Pak K je kompaktní a $\mathcal{F} \subset C(K)$. Dále pro každé $f \in B_{Y^*}$ díky spojitosti f platí $\|f \restriction_K\|_{C(K)} = \sup_{y \in K}|f(y)| = \sup_{y \in T(B_X)}|f(y)| = \sup_{x \in B_X}|f(T(x))| \le \|f\|\|T\| \le \|T\|$. Tedy $\mathcal{F} \subset C(K)$ je omezená množina stejně spojitých (dokonce 1-lipschitzovských) funkcí na kompaktním prostoru K. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty[1] to znamená, že $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $C(K)$.

Nechť nyní $\{f_n\}$ je posloupnost v B_{Y^*}. Položme $g_n = f_n \restriction_K$. Pak $\{g_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$, a tedy existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ konvergentní v $C(K)$. Tvrdíme, že pak $\{T^* f_{n_k}\}$ je cauchyovská: Pro $k, l \in \mathbb{N}$ máme

$$\|T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l}\| = \|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})\| = \sup_{x \in B_X} \left|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})(x)\right| = \sup_{x \in B_X} |(f_{n_k} - f_{n_l})(Tx)| \le$$
$$\le \sup_{z \in K}|(f_{n_k} - f_{n_l})(z)| = \|g_{n_k} - g_{n_l}\|_{C(K)}.$$

Protože $\{g_{n_k}\}$ je cauchyovská, je i $\{T^* f_{n_k}\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní v X^*. Odtud plyne, že $T^*(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní v X^*.

$\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Podle první části důkazu je T^{**} kompaktní, takže je kompaktní i $T^{**} \restriction_{\varepsilon_X(X)} : \varepsilon_X(X) \to Y^{**}$. Označme $S : \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**} \restriction_{\varepsilon_X(X)}$. Podprostor $\varepsilon_Y(Y)$ je uzavřený v Y^{**} (Tvrzení 2.26), tedy $S \in \mathcal{K}(\varepsilon_X(X), \varepsilon_Y(Y))$ dle Tvrzení 11(b). Podle Tvrzení 5 a Věty 12(d) je tedy $T = \varepsilon_Y^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$ kompaktní.

□

Poznamenejme, že z důkazu je vidět, že implikace $\Leftarrow$ v předchozí větě platí i pro Y neúplný.

PŘÍKLAD 14. Nechť $K \in L_2([0, 1]^2)$. Ukážeme, že operátor $T : L_2([0, 1]) \to L_2([0, 1])$ definovaný předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t, s) f(s) \, \mathrm{d}s$$

je kompaktní lineární operátor. Takovýto operátor se nazývá integrální operátor. Funkce K se nazývá jádro integrálního operátoru.

Nejprve si uvědomme, že je-li $f \in L_2([0, 1])$, pak díky Fubiniově větě[2] patří funkce $(t, s) \mapsto f(s)$ do $L_2([0, 1]^2)$. Z Hölderovy nerovnosti tedy plyne, že funkce $(t, s) \mapsto K(t, s) f(s)$ patří do $L_1([0, 1]^2)$. Podle

[1] Pro $C([0, 1])$ dokázal postačující podmínku pro relativní kompaktnost (v jiném jazyce) Giulio Ascoli (1883), že je to podmínka nutná ukázal Cesare Arzelà (1889).

[2] Guido Fubini (1907)

Fubiniovy věty je tedy pro s. v. $t \in [0,1]$ hodnota $Tf(t)$ dobře definována a funkce Tf je měřitelná. Dále, opět s využitím Hölderovy nerovnosti a Fubiniovy věty, je

$$\begin{aligned}\int_0^1 |Tf(t)|^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t \le \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \|f\|^2\|K\|^2.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $Tf \in L_2([0,1])$. Ihned je vidět, že T je lineární operátor, a nerovnost výše implikuje, že T je spojitý a $\|T\| \le \|K\|$. Níže ukážeme, že T je kompaktní.

Nejprve předpokládejme, že jádro K je spojité. Ukážeme, že pak T zobrazuje do $C([0,1])$ a je to kompaktní operátor z $L_2([0,1])$ do $C([0,1])$. Nechť $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti K plyne existence $\delta > 0$ takového, že $|K(t,s)-K(u,s)| < \varepsilon$ kdykoli $s,t,u \in [0,1]$, $|t-u| < \delta$. Pak pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolná $t,u \in [0,1]$ splňující $|t-u| < \delta$ platí

$$\begin{aligned}|Tf(t) - Tf(u)| &= \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 K(u,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_0^1 |K(t,s)-K(u,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \int_0^1 \varepsilon|f(s)|\,\mathrm{d}s \le \varepsilon\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} = \varepsilon\|f\|_2 \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $Tf \in C([0,1])$. Navíc jsme ukázali, že $T(B_{L_2([0,1])})$ je stejně spojitá podmnožina $C([0,1])$. Protože pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolné $t \in [0,1]$ platí

$$|Tf(t)| \le \int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \int_0^1 \|K\|_\infty |f(s)|\,\mathrm{d}s \le \|K\|_\infty \left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \le \|K\|_\infty,$$

je množina $T(B_{L_2([0,1])})$ omezená v $C([0,1])$. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty je tedy $T(B_{L_2([0,1])})$ relativně kompaktní v $C([0,1])$.

Nechť dále $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $L_2([0,1])$. Pak z ní lze vybrat podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ tak, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní v $C([0,1])$, neboli stejnoměrně konvergentní. Protože míra $[0,1]$ je konečná, plyne odtud, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní i v prostoru $L_2([0,1])$. Ukázali jsme tedy, že pokud jádro K je spojité, pak je operátor $T\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ kompaktní (Tvrzení 9).

Konečně, nechť jádro K je obecné. Pak dle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje posloupnost spojitých funkcí $\{K_n\} \subset C([0,1]^2)$ takových, že $\|K_n - K\|_2 \to 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme operátor $T_n\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ předpisem $T_n f(t) = \int_0^1 K_n(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$. Pak podle předchozí části jsou operátory T_n kompaktní. Máme $(T_n - T)f = \int_0^1 \big(K_n(t,s) - K(t,s)\big)f(s)\,\mathrm{d}s$, tedy operátor $T_n - T$ je integrální operátor s jádrem $K_n - K$. Na začátku jsme si spočetli, že pro takovéto operátory platí $\|T_n - T\| \le \|K_n - K\|_2$, odkud plyne, že $T_n \to T$ v prostoru $\mathcal{L}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$. Jeho podprostor $\mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$ je ovšem uzavřený (Věta 12(c)), tedy $T \in \mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$.

◇

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů[3]

■■■Spektrum, tj. vlastní čísla, čtvercové matice je v řadě otázek klíčová informace pro zjištění chování matice; zajímá nás při hledání Jordanova tvaru matice či při diagonalizaci matice. Pro obecné operátory je

[3]Tato teorie se zabývá řešením lineárních rovnic $T(x) = y$ pro jistou třídu lineárních operátorů T. Základy položil Erik Ivar Fredholm (1903), který se zabýval integrálními rovnicemi souvisejícími s operátorem z Příkladu 14. Moderní obecnou formu této teorii dal F. Riesz (1916), kterému ovšem chyběla Hahnova-Banachova věta, takže o záležitosti vyžadující dualitu ji doplnil J. P. Schauder (1930). Proto se tato teorie někdy nazývá Rieszova-Schauderova teorie.

nutné definovat spektrum obecněji než v konečněrozměrném případě, ale i v této situaci se jedná o esenciální informaci pro zkoumání vlastností daného operátoru. Pro kompaktní operátory pak dostáváme Fredholmovy věty 24, 30 a 31, které ukazují, jak kompaktnost operátoru vynucuje jeho chování podobné vlastnostem matic.

Nechť X je normovaný lineární prostor. V tomto oddílu se budeme zabývat studiem operátorů z $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, kterým budeme říkat operátory na X. Označíme-li $O\colon X \to X$, $O(x) = 0$ a $I = Id_X$, pak snadno nahlédneme, že $(\mathcal{L}(X), +, -, \circ, O, I)$, kde za operaci násobení $\circ$ bereme skládání operátorů, tvoří (nekomutativní) okruh s jednotkou. (Distributivita zleva platí díky linearitě operátorů z $\mathcal{L}(X)$.) V dalším bude I (případně I_X) vždy značit identitu na příslušném prostoru (na prostoru X).

Podívejme se nyní blíže na invertovatelné prvky (vzhledem k násobení, neboli skládání) okruhu $\mathcal{L}(X)$. Prvek $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný, právě když k němu existuje inverzní prvek $S \in \mathcal{L}(X)$, tj. prvek splňující $T \circ S = I$ a $S \circ T = I$. Z první rovnosti plyne, že T je nutně na, zatímco ze druhé rovnosti plyne, že T je prostý. Dohromady pak dostáváme, že S je inverzním zobrazením k bijekci T. Vidíme tedy, že T je invertovatelný, právě když je to bijekce a inverzní zobrazení T^{-1} je prvkem $\mathcal{L}(X)$. Inverzní zobrazení k lineárnímu je ovšem automaticky lineární, stačí tedy testovat pouze spojitost inverzního zobrazení T^{-1}. (Vidíme též, že algebraické značení inverzního prvku k T v okruhu $\mathcal{L}(X)$ jako T^{-1} není v kolizi se značením pro inverzní zobrazení.) Podle dřívějších definic je tedy T invertovatelným prvkem v $\mathcal{L}(X)$, právě když T je izomorfismus X na X. Pro Banachovy prostory je ovšem každá bijekce izomorfismem (Důsledek 3.7). Dostáváme tedy následující tvrzení:

TVRZENÍ 15. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertovatelný, právě když T je bijekce.*

Připomeňme ještě, že invertovatelné prvky v okruhu tvoří grupu, tj. jsou-li $S, T \in \mathcal{L}(X)$ invertovatelné, pak i $S \circ T$ je invertovatelný a $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Poznamenejme nakonec, že z Věty 12 plyne, že $\mathcal{K}(X)$ tvoří ideál v $\mathcal{L}(X)$.

DEFINICE 16. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertovatelný. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Je-li X Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$, pak $\lambda I - T$ není invertovatelný, právě když $\lambda I - T$ není prostý nebo není na (Tvrzení 15). Tedy λ je ve spektru T, právě když rovnice $T(x) - \lambda x = 0$ má více řešení nebo rovnice $T(x) - \lambda x = y$ nemá řešení pro nějakou pravou stranu $y \in X$.

Následující větu si dokážeme až v oddílu 9.2 (Věty 9.40 a 9.51(b)). Důkaz neprázdnosti vyžaduje netriviální znalosti z komplexní analýzy.

VĚTA 17. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní a netriviální, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

PŘÍKLAD 18. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $P \in \mathcal{L}(X)$ je netriviální projekce (tj. $P \neq 0$ a $P \neq I$). Pak $\sigma(P) = \sigma_{\mathrm{p}}(P) = \{0, 1\}$. Pro $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ je $(\lambda I - P)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} P$.

Vskutku, jelikož $P \neq I$, podprostor $\operatorname{Ker} P$ je nenulový, a tedy $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(P)$. Dále $I - P$ je netriviální projekce, a tedy $\operatorname{Ker}(I - P)$ je nenulový, neboli $1 \in \sigma_{\mathrm{p}}(P)$. Nechť nyní $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Předpokládejme, že $(\lambda I - P) \circ T = I$. Pak $\lambda T - P \circ T = I$, takže $P \circ T = \lambda T - I$. Dále $P = P \circ I = P \circ (\lambda I - P) \circ T = (\lambda P - P) \circ T = (\lambda - 1) P \circ T = (\lambda - 1)(\lambda T - I)$. Odtud plyne, že $T = \frac{1}{\lambda}\bigl(\frac{1}{\lambda-1} P + I\bigr)$. Pro takto definované T je pak $(\lambda I - P) \circ T = \frac{1}{\lambda-1} P + I - \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} P - \frac{1}{\lambda} P = I$ a podobně $T \circ (\lambda I - P) = I$.

$\diamond$

Následující dvě tvrzení mohou být užitečná při výpočtu spekter některých konkrétních operátorů.

LEMMA 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že $0 \notin \sigma(T)$. Dále zjevně stačí dokázat pouze implikaci $\Leftarrow$ a tu pak aplikovat na T^{-1} a $\frac{1}{\lambda}$. Nechť tedy $\lambda \notin \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Pak $\lambda I - T$ je invertovatelný. Položíme-li $S = \left(\frac{1}{\lambda} I - T^{-1}\right) \circ T$, pak $S = \frac{1}{\lambda} T - I = -\frac{1}{\lambda}(\lambda I - T)$, a tedy S je invertovatelný. Proto je invertovatelný i operátor $S \circ T^{-1} = \frac{1}{\lambda} I - T^{-1}$. Odtud plyne, že $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(T^{-1})$.

□

TVRZENÍ 20. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\right\}$.*

DŮKAZ. Nechť $\lambda \in \sigma(T)$. Pak $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1}) \subset B(0, \|T^{-1}\|)$ dle Lemmatu 19 a Věty 17. Tedy $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq \|T^{-1}\|$, neboli $|\lambda| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Druhá nerovnost plyne přímo z Věty 17.

□

VĚTA 21. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

DŮKAZ. Podle Věty 2 je $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$, a tedy podle Věty 6 je $\lambda I_{X^*} - T^*$ invertovatelný, právě když $\lambda I_X - T$ je invertovatelný.

□

Poznamenejme, že na neúplném prostoru platí pouze $\sigma(T^*) \subset \sigma(T)$.

TVRZENÍ 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

DŮKAZ. Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$. Předpokládejme, že $0 \notin \sigma(T)$. Pak operátor $-T = 0I - T$ je invertovatelný, a tedy i T je invertovatelný. Podle Věty 12(d) to znamená, že $I = T^{-1}T$ je kompaktní operátor. Tedy $B_X = I(B_X)$ je kompaktní podmnožina X. To je spor s předpokladem, že $\dim X = \infty$ (Věta 1.66).

Nechť nyní $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$. Dle známé věty z lineární algebry platí, že $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Rng} T = \dim X$, a tedy $\dim \operatorname{Ker} T > 0$. To znamená, že $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

□

VĚTA 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. Je-li X Banachův, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Označme $Y = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Pak $T = \lambda I$ na Y, a tedy $\lambda B_Y = T(B_Y)$ je relativně kompaktní množina v X. Protože ovšem Y je uzavřený v X, je λB_Y uzavřená v X, a tedy kompaktní v Y. Z Věty 1.66 potom plyne, že $\dim Y < \infty$.

Dále, podle Tvrzení 2.8(a) existuje Z uzavřený podprostor X takový, že $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$. Označme $S = (\lambda I - T)\restriction_Z$ a všimněme si, že S je prostý: Je-li $S(x) = 0$ pro $x \in Z$, pak $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = Y$, tedy $x = 0$. Dále pro každé $x \in X$ máme $(\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T)(P_Y x + P_Z x) = (\lambda I - T)(P_Z x) = S(P_Z x)$. Odtud plyne, že $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = S(Z) = \operatorname{Rng} S$. Ukážeme, že S je izomorfismus do.

Pokud S není izomorfismus do, pak z Tvrzení 1.60(a) plyne existence posloupnosti $\{x_n\} \in S_Z$ takové, že $S(x_n) \to 0$. Protože T je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $T(x_{n_k}) \to x$ pro nějaké $x \in X$. Pak ovšem také $\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) = S(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \to 0 + x = x$. Odtud plyne, že $\frac{x}{\lambda} \in S_Z$, neboť Z je uzavřený. Díky tomu máme $S(x_{n_k}) \to S(\frac{x}{\lambda})$, což znamená, že $S(\frac{x}{\lambda}) = 0$. To je ale ve sporu s prostotou S.

Je-li tedy X úplný, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = \operatorname{Rng} S$ je uzavřený dle Tvrzení 1.60(c).

□

VĚTA 24 (Fredholmova alternativa). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Tvrzení věty lze interpretovat následujícím způsobem: Rovnice $(\lambda I - T)x = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in X$, právě když příslušná homogenní rovnice $(\lambda I - T)x = 0$ má pouze triviální řešení. Protože na konečněrozměrném prostoru je každý lineární operátor kompaktní, lze každý lineární operátor na konečněrozměrném prostoru zapsat ve tvaru $I - T$, T kompaktní. Fredholmova alternativa je tedy zobecněním známé věty o řešitelnosti soustav n lineárních rovnic o n neznámých.

DůKAZ. $\Leftarrow$ Označme $S = \lambda I - T$ a předpokládejme, že S není na. Nejprve si všimněme následujícího pozorování: Nechť A je libovolná množina a $f : A \to A$ je prosté zobrazení, které není na. Označíme-li $B = f(A) \subsetneq A$, pak $f\restriction_B : B \to B$ je opět prosté zobrazení, které není na. Vskutku, $f(B) \subset f(A) = B$, tedy $f\restriction_B$ zobrazuje do B. Dále, je-li $f\restriction_B : B \to B$ na, pak $f(B) = f\restriction_B(B) = B = f(A)$, tedy z prostoty f plyne $A = B$, což je spor.

Aplikujme nyní toto pozorování iterativně na S: Položme $X_0 = X$ a $X_n = \operatorname{Rng} S\restriction_{X_{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 23 je $\operatorname{Rng} S$ Banachův, takže S je izomorfismus do (Důsledek 3.7). Tedy i restrikce S na libovolný podprostor X je izomorfismus do, odkud indukcí plyne, že každý podprostor X_n je uzavřený v X (Tvrzení 1.60(c)). Dále díky pozorování výše indukcí obdržíme, že $X_n \subsetneq X_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že to je ve sporu s kompaktností T.

Pro každé $n \geq 0$ existuje $x_n \in S_{X_n}$ splňující $\operatorname{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ (Lemma 1.63). Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ máme $T(x_m) - T(x_n) = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m - \lambda x_n$. Protože $S(x_n) \in X_{n+1}$ a $S(x_m) \in X_{m+1} \subset X_{n+1}$, je $u = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m \in X_{n+1}$. Proto

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| = |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} - x_n \right\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Tedy posloupnost $\{T(x_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

$\Rightarrow$ Z Vět 2 a 6(a) plyne, že operátor $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$ je prostý. Podle Schauderovy věty (Věta 13) je T^* kompaktní, takže podle první části důkazu je $\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = X^*$. Věta 4(b) pak dává

$$\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \Big(\operatorname{Rng}\big((\lambda I_X - T)^*\big)\Big)_\perp = \big(\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp = (X^*)_\perp = \{0\},$$

tedy $\lambda I_X - T$ je prostý.

□

Poznamenejme, že z důkazu (s využitím poznámky za Větou 13) je vidět, že implikace $\Rightarrow$ v předchozí větě platí i pro neúplný prostor X.

DůSLEDEK 25. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.*

DůKAZ. Je-li $\lambda \notin \sigma_p(T)$, pak $\lambda I - T$ je prostý. Je-li navíc $\lambda \neq 0$, pak z Fredholmovy alternativy (Věta 24) plyne, že $\lambda I - T$ je bijekce. Podle Tvrzení 15 to znamená, že $\lambda I - T$ je invertovatelný, a tedy $\lambda \notin \sigma(T)$.

□

LEMMA 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

DůKAZ. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ jsou různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou k nim příslušející vlastní vektory. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ jsou skaláry splňující $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = 0$. Pak $0 = T\big(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\big) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k$, a tedy

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k.$$

Díky indukčnímu předpokladu platí, že $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Tím pádem i $\alpha_{n+1} = 0$.

□

VĚTA 27. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

DŮKAZ. Zvolme $r > 0$. Předpokládejme, že množina $\{\lambda \in \sigma(T);\ |\lambda| > r\}$ je nekonečná. Pak v ní podle Důsledku 25 existuje posloupnost $\{\lambda_n\}$ navzájem různých vlastních čísel. Nechť $\{x_n\}$ jsou k nim příslušné vlastní vektory. Položme $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky Lemmatu 26 platí $X_n \subsetneqq X_{n+1}$ a X_n je uzavřený v X_{n+1} (Důsledek 1.25). Podle Rieszova lemmatu (Lemma 1.63) existují $z_n \in S_{X_n}$ takové, že $\operatorname{dist}(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Tvrdíme, že platí $T(z_n) \in X_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) \in X_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Vskutku, nechť $z_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ pro nějaká $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Pak $T(z_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i \in X_n$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in X_{n-1}$. Pak pro libovolná $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$ máme $\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k) \in X_{m-1}$, a tedy

$$\begin{aligned}\|T(z_m) - T(z_k)\| &= \left\|\lambda_m z_m - \big(\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k)\big)\right\| \geq \\ &\geq \operatorname{dist}(\lambda_m z_m, X_{m-1}) = |\lambda_m| \operatorname{dist}(z_m, X_{m-1}) \geq r\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{T(z_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T. $\square$

Zkombinujeme-li Tvrzení 22, Větu 27, Důsledek 25 a Větu 23, obdržíme následující shrnutí:

DŮSLEDEK 28. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní prostor.*

Na druhou stranu, následující příklad ukazuje, že pro nekompaktní operátory může spektrum vypadat téměř jakkoli.

PŘÍKLAD 29. Nechť $R\colon \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2)$ je izometrické vnoření z Příkladu 1.59 (všechny prostory jsou nad $\mathbb{K}$). Pak pro každé $y \in \ell_\infty$ je $\sigma_p(R(y)) = \operatorname{Rng} y = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(R(y)) = \overline{\operatorname{Rng} y}$. Dále je $R(c_0) \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Odtud plyne, že pro každou $K \subset \mathbb{K}$ neprázdnou kompaktní existuje $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ takový, že $\sigma(T) = K$, a pro každou posloupnost $\{y_n\} \subset \mathbb{K}$ konvergující k 0 existuje $T \in \mathcal{K}(\ell_2)$ takový, že $\sigma_p(T) = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Vskutku, je-li $y \in \ell_\infty$, pak zjevně $y_n \in \sigma_p(T_y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť $T_y(e_n) = y_n e_n$. Na druhou stranu, pokud $\lambda \notin \operatorname{Rng} y$, pak rovnice $T_y(x) = \lambda x$, neboli $(y_n x_n)_{n=1}^\infty = (\lambda x_n)_{n=1}^\infty$, nemá nenulové řešení v ℓ_2. Dále, jelikož $\sigma(T_y)$ je uzavřená množina (Věta 17), platí $\overline{\operatorname{Rng} y} = \overline{\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(T_y)$. Na druhou stranu, je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{\operatorname{Rng} y}$ pak $v = \left(\frac{1}{\lambda - y_n}\right)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$. Označíme-li $u = (\lambda - y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, pak $T_v \circ T_u = T_u \circ T_v = I$, a tedy $T_u = \lambda I - T_y$ je invertovatelný. Tedy $\lambda \notin \sigma(T_y)$, z čehož plyne inkluze $\sigma(T_y) \subset \overline{\operatorname{Rng} y}$.

Dále snadno nahlédneme, že $R(c_{00}) \subset \mathcal{F}(\ell_2)$, odkud dle Věty 12(b), (c) plyne, že $R(c_0) \subset \overline{\mathcal{F}(\ell_2)} \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Konečně, je-li $K \subset \mathbb{K}$ neprázdná kompaktní, pak existuje spočetná hustá množina $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v K. Pak pro $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ je $\sigma(T_y) = \overline{\operatorname{Rng} y} = K$. $\diamond$

Z Vět 23, 4 a 2 okamžitě plyne následující tvrzení, které popisuje, jak nalézt prostor všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, pomocí prostoru řešení příslušné adjungované (duální) homogenní rovnice.

VĚTA 30 (Druhá Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Poslední věta popisuje vztahy mezi velikostmi prostoru všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, a prostoru všech řešení příslušné homogenní rovnice.

VĚTA 31 (Třetí Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Všimněme si, že první rovnost je zobecněním Fredholmovy alternativy. Nicméně my Fredholmovu alternativu využijeme v důkazu.

DŮKAZ. Označme $S = \lambda I_X - T$. Dokážeme nejprve nerovnost

$$\dim \operatorname{Ker} S \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S. \tag{1}$$

Předpokládejme opak, tj. $\dim \operatorname{Ker} S > \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$. Dle Věty 23 je $\operatorname{Ker} S$ konečněrozměrný a $\operatorname{Rng} S$ uzavřený. Podle předpokladu je tedy $\operatorname{Rng} S$ konečné kodimenze. Díky Větě 2.8 platí

$$X = \operatorname{Ker} S \oplus_{\mathrm{t}} E = \operatorname{Rng} S \oplus_{\mathrm{t}} F,$$

kde E, F jsou uzavřené podprostory X a $\dim \operatorname{Ker} S > \dim F$. Nechť $A\colon \operatorname{Ker} S \to F$ je lineární zobrazení, které je na a $Ay = 0$ pro nějaké nenulové $y \in \operatorname{Ker} S$ (stačí definovat A pomocí bází). Zobrazení A je spojité díky konečné dimenzi prostoru $\operatorname{Ker} S$ (Věta 1.66). Nechť $P: X \to \operatorname{Ker} S$ je spojitá lineární projekce příslušná prvnímu rozkladu. Položme $U = T - A \circ P$. Pak $A \circ P \in \mathcal{F}(X)$, a tedy $U \in \mathcal{K}(X)$ díky Větě 12(b).

Podívejme se nyní na operátor $\lambda I_X - U$. Platí, že $\lambda I_X - U = S + A \circ P$. Je-li $z \in X$, pak existují $z_1 \in \operatorname{Rng} S$ a $z_2 \in F$ splňující $z = z_1 + z_2$. Všimněme si, že $\operatorname{Rng} S = S(E + \operatorname{Ker} S) = S(E) + S(\operatorname{Ker} S) = S(E)$. Tedy existují $x_1 \in E$ a $x_2 \in \operatorname{Ker} S$ splňující $S(x_1) = z_1$ a $A(x_2) = z_2$. Pak $(\lambda I_X - U)(x_1 + x_2) = (S + A \circ P)x_1 + (S + A \circ P)x_2 = Sx_1 + A(Px_1) + Sx_2 + A(Px_2) = z_1 + z_2 = z$. Tedy $\lambda I_X - U$ je na. Z Fredholmovy alternativy (Věta 24) plyne, že $\lambda I_X - U$ je prostý. To je ale ve sporu s faktem, že $(\lambda I_X - U)y = Sy + A(Py) = Ay = 0$. Tím máme dokázánu nerovnost (1).

Uvědomme si, že $\lambda I_{X^*} - T^* = S^*$ (Věta 2). Podle Věty 13 je $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$. Podle první části důkazu aplikované na $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$ je tedy

$$\dim \operatorname{Ker} S^* \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^*.$$

Dále, podle druhé Fredholmovy věty (Věta 30) je $X^*/\operatorname{Rng} S^* = X^*/(\operatorname{Ker} S)^\perp$. Tento prostor je ovšem izomorfní prostoru $(\operatorname{Ker} S)^*$ (Věta 2.22(b)). Tedy

$$\operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim(\operatorname{Ker} S)^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

Podobně, $\operatorname{Ker} S^* = (\operatorname{Rng} S)^\perp$ (Věta 4(a)). Protože $\operatorname{Rng} S$ je uzavřený, je $(\operatorname{Rng} S)^\perp$ izomorfní s $(X/\operatorname{Rng} S)^*$ (Věta 2.22(a)). Tedy $\dim \operatorname{Ker} S^* = \dim(X/\operatorname{Rng} S)^* = \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$ (vizte Tvrzení 2.27). Dáme-li nyní dohromady dokázané rovnosti a nerovnosti spolu s nerovností (1), dostaneme

$$\dim \operatorname{Ker} S \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S = \dim \operatorname{Ker} S^* \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

$\square$

Kapitola 5

Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

■■■Od obecné teorie normovaných lineárních prostorů nyní přikročíme ke klasičtější analýze, totiž k Fourierově transformaci. Ta je základním nástrojem v řadě matematických problémů, ať už je to teorie parciálních diferenciálních rovnic, prostorů funkcí či harmonická analýza. Než se však do této problematiky pustíme, je třeba se seznámit s takzvanou konvolucí funkcí, což je velmi užitečný nástroj, jak vytvářet funkce s požadovanými vlastnostmi pomocí „integrálního průměrování“. Jako jeden z mnoha důsledků obdržíme hustotu hladkých funkcí v prostorech L_p (Důsledek 14).

1. Konvoluce funkcí

V tomto oddílu budeme pracovat s funkcemi na prostoru $\mathbb{R}^d$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$ a s mírou μ, která je nějakým kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Normu na $\mathbb{R}^d$ budeme uvažovat eukleidovskou, tj. $\|\cdot\|_2$.

DEFINICE 1. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Správnější by bylo označovat konvoluci symbolem $f *_\mu g$, neboť výsledek závisí na míře μ. Tradiční značení vyžaduje, abychom z kontextu věděli, jaká míra je použita. Funkce g se někdy nazývá jádrem konvoluce.

VĚTA 2. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.
(b) Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.
(c) Nechť $1 \leq p, q, r \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2$. Je-li $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ a $h \in L_r(\mu)$, pak $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$.

Důležitým speciálním případem v (c) je $p = q = r = 1$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\mu = C\lambda$ a $x \in \mathbb{R}^d$. Definujme $\varphi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ předpisem $\varphi(z) = x - z$. Pak φ je diferencovatelná bijekce a $|J_\varphi|(z) = 1$ v každém bodě $z \in \mathbb{R}^d$. Tedy dle věty o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)C\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(z))g(x-\varphi(z))C\,\mathrm{d}\lambda(z) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(z)f(x-z)\,\mathrm{d}\mu(z),$$

pokud jeden z integrálů konverguje. Odtud již tvrzení (a) plyne.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$ je takové, že $f * g(x)$ a $f * h(x)$ jsou definovány. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot (g+h)(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f(y)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y),$$

a tedy $f*(g+h)(x) = f*g(x) + f*h(x) = \big(f*g + f*h\big)(x)$. Druhá rovnost plyne z právě dokázané rovnosti a tvrzení (a).

Důkaz (c) odložíme na později (str. 75), až se o konvoluci dozvíme více.

□

Nyní se zaměříme na otázku, kdy je konvoluce definována.

LEMMA 3. *Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je lebesgueovsky měřitelná.*
(a) Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x-y)$ lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^d$.
(b) Funkce $(x,y) \mapsto f(y)$ a $(x,y) \mapsto f(x-y)$ jsou lebesgueovsky měřitelné na $(\mathbb{R}^d)^2$.

DŮKAZ. V celém důkazu bude měřitelná znamenat lebesgueovsky měřitelná.

(a) Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $h(y) = f(x-y)$ pro $y \in \mathbb{R}^d$. Je-li $G \subset \mathbb{K}$ otevřená, pak je snadno vidět, že $h^{-1}(G) = x - f^{-1}(G)$. Množina $f^{-1}(G)$ je měřitelná, a protože Lebesgueova míra je symetrická a translačně invariantní, je i množina $h^{-1}(G)$ měřitelná. Funkce h je tedy měřitelná.

(b) Označme $\varphi(x,y) = f(y)$ a $\psi(x,y) = f(x-y)$. Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je otevřená. Položme $A = f^{-1}(G)$. Pak $A \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná a $\varphi^{-1}(G) = \mathbb{R}^d \times A \subset (\mathbb{R}^d)^2$. Je to tedy měřitelný obdélník, a tím pádem měřitelná množina. Dále definujme $T: (\mathbb{R}^d)^2 \to (\mathbb{R}^d)^2$ předpisem $T(x,y) = (x-y, y)$. Pak zjevně T je prosté lineární zobrazení, a tedy bijekce $(\mathbb{R}^d)^2$ na $(\mathbb{R}^d)^2$. Platí, že $\psi^{-1}(G) = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ x-y \in A\} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ T(x,y) \in A \times \mathbb{R}^d\} = T^{-1}(A \times \mathbb{R}^d)$. Množina $A \times \mathbb{R}^d$ je měřitelný obdélník v $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy měřitelná množina, proto i její obraz při lineárním zobrazení T^{-1} je měřitelná množina (vizte např. [R, str. 175]).

□

LEMMA 4. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x,y) = f(y)g(x-y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.*

DŮKAZ. Podle Lemmatu 3(b) je funkce F měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. S využitím věty o substituci jako v důkazu Věty 2(a) obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \cdot \|g\|_1\,\mathrm{d}\mu(y) = \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty,$$

odkud podle Fubiniovy věty plyne, že $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

□

DEFINICE 5. Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Všimněme si, že je-li $y \in \mathbb{R}^d$, pak pro libovolné $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ platí $\tau_y(f+g) = \tau_y f + \tau_y g$ a $\tau_y(\alpha f) = \alpha \tau_y f$, tj. τ_y je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory všech funkcí na $\mathbb{R}^d$.

VĚTA 6. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau: \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že díky větě o substituci pro libovolné $g \in L_p(\mu)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ platí, že $\|\tau_y g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(u)|^p\,\mathrm{d}\mu(u) = \|g\|_p^p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje $g \in C(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem K taková, že $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $r > 0$ je takové, že $K \subset B(0,r)$, a položme $B = B(0, r+1)$.

Protože g je stejnoměrně spojitá a $\mu(B) < +\infty$, existuje $0 < \delta \le 1$ takové, že $|g(u) - g(v)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(B)^{1/p}}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$, $\|u - v\| < \delta$. Nechť nyní $x, y \in \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\|x - y\| < \delta$. Je-li $u + x - y \in K$, pak $\|u\| \le \|u + x - y\| + \|x - y\| \le r + 1$, tedy $u \in B$. S využitím věty o substituci tedy máme

$$\begin{aligned}\|\tau_x g - \tau_y g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_x g(z) - \tau_y g(z)|^p \, \mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(z - x) - g(z - y)|^p \, \mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(u) - g(u + x - y)|^p \, \mathrm{d}\mu(u) = \int_B |g(u) - g(u + x - y)|^p \, \mathrm{d}\mu(u) \le \\ &\le \int_B \frac{\varepsilon^p}{3^p \mu(B)} \, \mathrm{d}\mu(z) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.\end{aligned}$$

Dohromady tak dostáváme

$$\begin{aligned}\|\tau(x) - \tau(y)\|_p &= \|\tau_x f - \tau_y f\|_p \le \|\tau_x f - \tau_x g\|_p + \|\tau_x g - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - \tau_y f\|_p \le \\ &\le \|\tau_x(f - g)\|_p + \frac{\varepsilon}{3} + \|\tau_y(g - f)\|_p = \|f - g\|_p + \frac{\varepsilon}{3} + \|g - f\|_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Připomeňme, že $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ je vektorový prostor lokálně integrovatelných funkcí definovaných na měřitelné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tj. funkcí $f : \Omega \to \mathbb{K}$ takových, že pro každé $x \in \Omega$ existuje okolí $U \subset \Omega$ bodu x takové, že $f\restriction_U$ je integrovatelná. Poznamenejme, že z Lindelöfovy[1] vlastnosti množiny Ω plyne, že funkce z $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ jsou automaticky měřitelné. Z vlastností kompaktních množin pak plyne, že je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak $f\restriction_K$ je integrovatelná. Dále se snadno nahlédne, že $C(\mathbb{R}^d) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ a $L_p(\mathbb{R}^d, \mu) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ pro každé $1 \le p \le \infty$.

VĚTA 7. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

- (a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \le p, q \le \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$.*
- (b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.*
- (c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*
- (d) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.*
- (e) *Nechť $1 \le p, q \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_r(\mu)$ a platí $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.*

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$. Funkce $y \mapsto f(y)g(x - y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a) a $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x - y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \le \|f\|_p \|g\|_q$ (pro $1 < p, q < \infty$ to plyne z Hölderovy nerovnosti, jinak je odhad přímočarý; též využíváme větu o substituci). Tedy $f * g$ je definována na celém $\mathbb{R}^d$ a $|f * g(x)| \le \|f\|_p \|g\|_q$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále díky Větě 2(a) můžeme bez újmy na obecnost předpokládat, že $q < \infty$. Položme $h(z) = g(-z)$ pro $z \in \mathbb{R}^d$. Dle věty o substituci je $h \in L_q(\mu)$. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^d$ pomocí Hölderovy nerovnosti (resp. přímočarého odhadu pro $p = \infty$) dostáváme

$$\begin{aligned}|f * g(x) - f * g(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(g(x - z) - g(y - z)\big) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(h(z - x) - h(z - y)\big) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| \le \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left| \big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z) \right| \mathrm{d}\mu(z) \le \|f\|_p \|\tau_x h - \tau_y h\|_q.\end{aligned}$$

Věta 6 nyní implikuje stejnoměrnou spojitost $f * g$.

[1] Ernst Leonard Lindelöf

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $y \mapsto f(y)g(x-y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a). Položme $K = \operatorname{supp} g$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{x-K} |f(y)||g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \le \|g\|_\infty \int_{x-K} |f(y)| \, \mathrm{d}\mu(y),$$

přičemž poslední integrál je konečný, neboť množina $x - K$ je kompaktní. Tedy hodnota $f * g(x)$ je definována.

Nechť nyní $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)$. Pak pro $y \in \operatorname{supp} f$ platí $x - y \notin \operatorname{supp} g$, a tedy

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\operatorname{supp} f} f(y)g(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) = 0.$$

Odtud plyne, že $\{x \in \mathbb{R}^d;\ f * g(x) \ne 0\} \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Podle Tvrzení 1.23 je ovšem množina $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ uzavřená, a tedy $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Konečně, ukažme spojitost. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $L = B(x,1) - K$. Pak L je kompaktní (Tvrzení 1.23). Položme $h(z) = (\chi_L f)(-z)$ pro $z \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_1(\mu)$. Nechť $y \in B(x,1)$ je libovolné. Pak s využitím Věty 2 dostáváme

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &= |g * f(x) - g * f(y)| = \left| \int_K g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| = \\ &= \left| \int_K g(z)\big(h(z-x) - h(z-y)\big) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)| \big|h(z-x) - h(z-y)\big| \, \mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)| \big|\big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z)\big| \, \mathrm{d}\mu(z) \le \|g\|_\infty \|\tau_x h - \tau_y h\|_1, \end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost platí proto, že je-li $z \in K$, pak $x - z, y - z \in L$, a tedy $g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big) = g(z)\big((\chi_L f)(x-z) - (\chi_L f)(y-z)\big)$ pro každé $z \in \mathbb{R}^d$. Věta 6 nyní implikuje spojitost $f * g$ v bodě x.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $A_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| \le n\} \cap B(0,n)$ a $B_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |g(y)| \le n\} \cap B(0,n)$. Pak A_n i B_n jsou měřitelné množiny. Položme dále $f_n = \chi_{A_n} f$ a $g_n = \chi_{B_n} g$. Pak zjevně $f_n \to f$ a $g_n \to g$ bodově na $\mathbb{R}^n$ a $|f_n(x)| \le |f(x)|$, $|g_n(x)| \le |g(x)|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Odtud plyne, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^d$ platí $f_n(y)g_n(x-y) \to f(y)g(x-y)$ a $|f_n(y)g_n(x-y)| \le |f(y)g(x-y)|$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n, g_n \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$, a tedy dle (a) je $f_n * g_n$ definována a spojitá na celém $\mathbb{R}^d$. Pro $x \in D$ je podle předpokladu $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(y) < +\infty$, takže dle Lebesgueovy věty $f_n * g_n(x) \to f * g(x)$. Funkce $f * g$ je tedy na D bodovou limitou spojitých funkcí, a proto je tam měřitelná.

(d) Položíme-li $F(x,y) = f(y)g(x-y)$, pak dle Lemmatu 4 je $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$. Podle Fubiniovy věty tedy platí, že $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \, \mathrm{d}\mu(y)$ konverguje pro μ-s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ a $f * g \in L_1(\mu)$. Použijeme-li Fubiniovu větu ještě jednou, dostaneme

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \, \mathrm{d}\mu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x,y)| \, \mathrm{d}\mu \times \mu = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

(e) Případ sdružených exponentů je (a), případ $p = q = 1$ je (d). Zbývají případy, kdy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ a $1 < \max\{p,q\} < \infty$, což znamená, že $r < \infty$. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = |f(y)|^p |g(x-y)|^q$ nezáporná měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy dle Fubiniovy věty (a věty o substituci) platí

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \, \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \|g\|_q^q \, \mathrm{d}\mu(y) = \|f\|_p^p \|g\|_q^q < +\infty. \quad (1) \end{aligned}$$

To znamená, že integrál $\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ je konečný pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Dále, je-li $p = 1$, pak $r = q > 1$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{1}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{1}{r}}|g(x-y)|\big)\,\mathrm{d}\mu(y) \le$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_1^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Je-li $q = 1$, pak obdržíme analogicky $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \le \|g\|_1^{1-\frac{1}{r}} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{\frac{1}{r}}$. Konečně, je-li $p, q > 1$, pak $\frac{1}{r} < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r} < \frac{1}{q}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ tak dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti (Věta 15.75 pro $\alpha_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ a $\alpha_3 = \frac{1}{r}$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(x-y)|^{1-\frac{q}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{p}{r}} |g(x-y)|^{\frac{q}{r}}\big)\,\mathrm{d}\mu(y) \le$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}} =$$
$$= \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Všimněme si, že díky předchozím výpočtům je tento odhad platný i pro $p = 1$ nebo $q = 1$. Protože poslední číslo v tomto odhadu je konečné pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$, je funkce $f * g$ je definována skoro všude na $\mathbb{R}^d$ a platí $|f * g(x)| \le \|f\|_p^{1-p/r} \|g\|_q^{1-q/r} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{1/r}$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Podle (c) je funkce $f * g$ měřitelná a můžeme tedy s pomocí (1) odhadnout

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^r\,\mathrm{d}\mu(x) \le \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

□

DŮKAZ VĚTY 2(C). Pomocí Lemmatu 3 snadno odvodíme, že funkce $F_x(y,z) = f(z)g(y-z)h(x-y)$ je měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále je $|f| \in L_p(\mu)$, $|g| \in L_q(\mu)$ a $|h| \in L_r(\mu)$. Z předpokladu na p, q, r plyne, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$ nebo $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 1$. Předpokládejme nejprve, že nastane první případ. Pak dle Věty 7(e) je $|f| * |g| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Protože $\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{r} \ge 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $\big(|f| * |g|\big) * |h|(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. To znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)g(y-z)h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)||g(y-z)|\,\mathrm{d}\mu(z)\right)|h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f| * |g|(y)|h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy plyne, že $F_x \in L_1(\mu \times \mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Podobně, jestliže $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 1$, pak dle Věty 7(e) je $|g| * |h| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$. Protože $\frac{1}{p} + \frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 \ge 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $|f| * \big(|g| * |h|\big)(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. S využitím věty o substituci to znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)g(y-z)h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y-z)||h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(u)||h(x-z-u)|\,\mathrm{d}\mu(u)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\big(|g| * |h|\big)(x-z)\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy i ve druhém případě plyne, že $F_x \in L_1(\mu \times \mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Konečně, opětovným použitím Fubiniovy věty spolu s větou o substituci tedy pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y - z) \, \mathrm{d}\mu(z) \right) h(x - y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y, z) \, \mathrm{d}\mu(z) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y, z) \, \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y - z) h(x - y) \, \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) h(x - z - u) \, \mathrm{d}\mu(u) \right) \mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g * h(x - z) \, \mathrm{d}\mu(z) = f * (g * h)(x).\end{aligned}$$

□

DEFINICE 8. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Je-li f funkce na Ω s komplexními hodnotami, pak $D^\alpha f(x) = D^\alpha(\operatorname{Re} f)(x) + i D^\alpha(\operatorname{Im} f)(x)$ pro $x \in \Omega$. Připomeňme, že symbolem $C^k(\Omega, \mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ značíme funkce z Ω do $\mathbb{K}$ takové, že mají spojité všechny parciální derivace všech řádů až do k včetně (resp. všech řádů pokud $k = \infty$) na Ω. Obvykle používáme zkratku $C^k(\Omega, \mathbb{K}) = C^k(\Omega)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že ne každá parciální derivace je tvaru D^α pro nějaký multiindex α (např. $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$). Nicméně pokud derivujeme funkce z $C^k(\Omega)$, pak si díky větě o záměně parciálních derivací vystačíme pouze s parciálními derivacemi D^α. Díky Větě 15.1 lze tedy obvykle pracovat pouze s parciálními derivacemi D^α.

DEFINICE 9. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A.

Obvykle používáme zkratku $\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \mathcal{D}(A)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že $\mathcal{D}(A)$ je podprostor vektorového prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(A)$ je podprostor $\mathcal{D}(B)$, pokud $A \subset B$. Snadno je vidět, že pro každou $f \in \mathcal{D}(A)$ a každý multiindex α je $D^\alpha f \in \mathcal{D}(A)$, neboť $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$.

PŘÍKLAD 10. Funkce $p(x) = \|x\|^2$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ patří do $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Platí totiž $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}(x) = 2$ a $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pro $i \neq j$ a všechny ostatní parciální derivace jsou nulové.

Definujme funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{pro } t \in (-1, 1), \\ 0 & \text{pro } t \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Pak není obtížné spočítat, že $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (jediná potíž je v bodech ± 1), a zjevně $\{t \in \mathbb{R};\ \varphi(t) \neq 0\} = (-1, 1)$, takže $\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$. Tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Konečně, položíme-li $\psi = \varphi \circ p$, pak ihned vidíme, že $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \psi(x) \neq 0\} = U(0,1)$ a $\operatorname{supp} \psi = B(0,1)$.

$\diamond$

Vzhledem k tomu, že nosič funkce lze posouvat a měnit jeho velikost pomocí transformace $x \mapsto ax + b$, která zachovává hladkost, předchozí příklad ukazuje, že pro libovolnou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ obsahuje netriviální nezápornou funkci.

VĚTA 11. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.*

DŮKAZ. Dle Věty 7(b) jsou funkce $f * g$ i $f * D^\alpha g$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ definovány a spojité na celém $\mathbb{R}^d$. Dále ukážeme platnost vzorce $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ indukcí podle $|\alpha|$. Odtud plyne, že $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pomocí Věty 15.1.

Nechť nejprve $k = 1$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Funkce $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ je spojitá s kompaktním nosičem, a tedy existuje $C > 0$ takové, že $\left|\frac{\partial g}{\partial x_j}(y)\right| \leq C$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(t) = f * g(x + te_j)$ pro $t \in (-1,1)$. Dále položme $F(t,y) = f(y)g(x + te_j - y)$ pro $t \in (-1,1)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$. Pak pro každé $t \in (-1,1)$ je funkce $y \mapsto F(t,y)$ měřitelná. Dále pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1,1)$ je $\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = f(y)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y)$. Položme $K = B(x,1) - \operatorname{supp} g$. Pak K je kompaktní (Tvrzení 1.23) a je-li $t \in (-1,1)$ a $y \in \mathbb{R}^d \setminus K$, pak $x + te_j - y \notin \operatorname{supp} g$, takže $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y) = 0$. Pro $h = C\chi_K|f|$ je tedy $h \in L_1(\mu)$ a $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,y)\right| \leq h(y)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1,1)$. Konečně, $y \mapsto F(0,y) \in L_1(\mu)$, neboť $f * g(x)$ je definována. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tedy máme $\frac{\partial f * g}{\partial x_j}(x) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial t}(0,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$.

Nechť nyní $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| > 1$ a předpokládejme, že vzorec platí pro libovolné D^β takové, že $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ a $|\beta| < |\alpha|$. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$, a tedy s využitím indukčního předpokladu a dále již dokázaného případu $k = 1$ obdržíme

$$D^\alpha(f * g) = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(D^{\alpha - e_j}(f * g)\big) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f * D^{\alpha - e_j} g) = f * \frac{\partial}{\partial x_j}(D^{\alpha - e_j} g) = f * D^\alpha g.$$

$\square$

DEFINICE 12. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

VĚTA 13. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \overset{L_p}{\to} f$.

DŮKAZ. (a) Podle Věty 7(a) jsou funkce $f * g_n$ definovány na celém $\mathbb{R}^d$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$ splňují $\|u - v\| \leq \delta$. Nechť $M > 0$ je takové, že $|f(x)| \leq M$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dle Důsledku 15.74 existuje $r > 0$ takové, že $\int_{B(0,r)} g\,\mathrm{d}\mu > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ pak dle věty o substituci (užijeme $\varphi(x) = nx$, $J_\varphi(x) = n^d$) máme $\int_{B(0,r/n)} g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r/n)} n^d g(nx)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r)} g(u)\,\mathrm{d}\mu(u) > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{r}{n_0} < \delta$. Pak pro každé

$n \geq n_0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že

$$\begin{aligned}
\bigl|f * g_n(x) - f(x)\bigr| &= \bigl|g_n * f(x) - f(x)\bigr| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) f(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) - f(x)\int_{\mathbb{R}^d} g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y)\bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|\,\mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|\,\mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|\,\mathrm{d}\mu(y) \leq \\
&\leq \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y) 2M \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

přičemž jsme využili komutativitu konvoluce (Věta 2(a)).

(b) Podle Věty 7(e) existuje $A \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\mu(A) = 0$ a všechny funkce $f * g_n$ jsou definovány na $\mathbb{R}^d \setminus A$. Podobně jako v případě (a) a s využitím Jensenovy nerovnosti[2] ([R, Věta 3.3]) dostáváme, že pro každé $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ platí, že

$$\bigl|f * g_n(x) - f(x)\bigr|^p = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \bigl(f(x-y) - f(x)\bigr) g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Díky Fubiniově větě (a Lemmatu 3(b)) je tedy

$$\begin{aligned}
\|f * g_n - f\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-y) g_n(y)\,\mathrm{d}\mu = \varphi * g_n(0),
\end{aligned}$$

kde $\varphi(y) = \|\tau_{-y} f - f\|_p^p$. Funkce φ je zjevně omezená a díky Větě 6 je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^d$, a tedy $\varphi * g_n(0) \to \varphi(0) = 0$ dle (a).

□

DŮSLEDEK 14. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_p(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje kompaktní $K \subset \Omega$ taková, že $\delta = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > 0$ a $\|f - \chi_K f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ (stačí použít Důsledek 15.74 na $K_n = \{x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,n);\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$). Položme $h = \chi_K f$. Vezměme nějakou nezápornou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\operatorname{supp} g \subset B(0,\delta)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu = 1$ a položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak podle Věty 13(b) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\|f - h * g_n\|_p \leq \|f - h\|_p + \|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Podle Věty 11 je $h * g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a podle Věty 7(b) je $\operatorname{supp} h * g_n \subset K + B(0,\delta) \subset \Omega$, tedy $h * g_n \in \mathcal{D}(\Omega)$.

□

Následující příklad se nám bude hodit později.

PŘÍKLAD 15. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ a $b - a \leq d - c$. Pak

$$\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a+c], \\ x - (a+c) & \text{pro } x \in [a+c, b+c], \\ b - a & \text{pro } x \in [b+c, a+d], \\ b + d - x & \text{pro } x \in [a+d, b+d], \\ 0 & \text{pro } x \in [b+d, +\infty). \end{cases}$$

[2] Johan Willem Ludwig Valdemar Jensen (1906)

Vskutku, $\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(y)\chi_{(c,d)}(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_a^b \chi_{(c,d)}(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{x-b}^{x-a} \chi_{(c,d)}\,\mathrm{d}\lambda$, odkud již uvedený vzorec snadno plyne.

◇

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$. V tomto oddílu budeme konvoluci funkcí na $\mathbb{R}^d$ rozumět vzhledem k míře μ_d.

■■■Fourierova transformace je základním příkladem transformace Gelfandovy, kterou se budeme zaobírat v oddíle 9.5 (vizte též kapitolu 13). Umožňuje realizovat funkce z $L_1(\mu_d)$ jako funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$ takovým způsobem, že diferenciální vlastnosti se přenášejí na vlastnosti algebraické. To je fundamentálním rysem celé teorie, neboť tím získáváme nástroj pro převádění (parciálních) diferenciálních rovnic na rovnice algebraické. Na prostoru $L_2(\mu_d)$ je pak možno realizovat Fourierovu transformaci jakožto izometrický lineární operátor na $L_2(\mu_d)$ (takzvanou Fourierovu-Plancherelovu transformaci), který slouží jako základní „transformace souřadnic“ na tomto prostoru.

DEFINICE 16. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

PŘÍKLAD 17. Nechť $r > 0$. Pak $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin rt}{t}$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}r$. Vskutku, $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} e^{-itx}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r}\big(\cos(-tx) + i\,\sin(-tx)\big)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{\sin tx}{t}]_{-r}^{r}$ (díky lichosti funkce sin), odkud již výsledek ihned plyne.

◇

Dříve, než se podíváme na vlastnosti Fourierovy transformace, zavedeme ještě několik užitečných pojmů.

DEFINICE 18. Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Z věty o stejnoměrné limitě posloupnosti spojitých funkcí plyne, že $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $\ell_\infty(\mathbb{R}^d)$, a tedy je to Banachův prostor.

DEFINICE 19. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Snadno se nahlédne, že $C_0(\mathbb{R}^d)$ je uzavřeným podprostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, tedy je to Banachův prostor. Na druhou stranu, $C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ je podprostorem $C_0(\mathbb{R}^d)$, a není příliš obtížné si rozmyslet, že je ve skutečnosti hustým podprostorem. (Stačí funkci z $C_0(\mathbb{R}^d)$ vynásobit funkcí $x \mapsto 1-\min\{\operatorname{dist}(x, B(0,R)), 1\}$.) Příkladem funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$, která nemá kompaktní nosič, je $\frac{1}{1+\|x\|^2}$.

Intuitivně lze říci, že funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$ „jdou v nekonečnu k nule“. Přesněji, je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

LEMMA 20 (G. F. B. Riemann (1853), H. Lebesgue (1903)). *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak*

$$\lim_{\|t\|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$$

DŮKAZ. Protože $e^{-i\pi} = -1$, pro $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ máme díky větě o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f(x)e^{-i\left\langle t,x+\frac{\pi}{\|t\|^2}t\right\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f\Big(u - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)e^{-i\langle t,u\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u).$$

Odtud

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\Big)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| \le \\ &\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\Big|\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{2}\big\|\tau_0 f - \tau_{\pi t/\|t\|^2} f\big\|_1.\end{aligned}$$

Tvrzení lemmatu nyní plyne z Věty 6.

□

V této kapitole budeme pro funkci f definovanou na $\mathbb{R}^d$ značit její „otočení" symbolem $\tilde{f}$, tj. $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

VĚTA 21. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mu_d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y\widehat{f}$.

(c) Je-li $c \neq 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = |c|^d\widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$. Speciálně, $\widehat{\tilde{f}} = \tilde{\widehat{f}}$.

(d) $\widehat{\overline{f}} = \overline{\tilde{\widehat{f}}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_jf(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial\widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}g\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d}f\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d$.

Pro důkaz tvrzení (e) budeme potřebovat následující tři lemmata:

LEMMA 22. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a,+\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a,b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a,+\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a,+\infty))$, pak* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

DŮKAZ. Uvědomme si, že podle našich předpokladů platí $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé $x \in (a,+\infty)$ (vizte např. [R, Věty 7.20 a 7.21]). Z Heineovy věty a Důsledku 15.74 plyne, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$, speciálně tedy limita existuje. Protože $f \in L_1([a,+\infty))$, nezbývá, než aby byla nulová.

□

LEMMA 23. *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g mají (vlastní) derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$ a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f'g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} fg'\,\mathrm{d}\lambda$.*

DŮKAZ. Podle předpokladu je funkce fg' spojitá na $\mathbb{R}$ a má konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy existuje i konečný Newtonův integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Dále díky Lemmatu 22 platí $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Podle věty o integraci per partes pro Newtonův integrál tedy máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál zcela vlevo dle předpokladu konverguje i jako Lebesgueův integrál. Rovnost tedy platí i pro integrály v Lebesgueově smyslu.

□

LEMMA 24. *Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1,\dots,d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\lambda$.*

DŮKAZ. Označme $F(u,v) = f(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$, $G(u,v) = g(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$, $F_1(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$ a $G_1(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$ pro $u \in \mathbb{R}^{d-1}$, $v \in \mathbb{R}$. Dle předpokladu je $F, F_1 \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Podle Fubiniovy věty tedy existují množiny $A, B \subset \mathbb{R}^{d-1}$ míry 0 takové, že $v \mapsto F(u,v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus A$ a $v \mapsto F_1(u,v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus B$. Položme $E = A \cup B$. Pak díky Fubiniově větě máme

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x) \,\mathrm{d}\lambda_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u,v) G(u,v) \,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus E} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u,v) G(u,v) \,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus E} \left(-\int_{\mathbb{R}} F(u,v) G_1(u,v) \,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(u,v) G_1(u,v) \,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \,\mathrm{d}\lambda_d(x),
\end{aligned}$$

přičemž druhá a čtvrtá rovnost platí díky tomu, že E má nulovou míru, a třetí rovnost plyne z Lemmatu 23. □

DŮKAZ VĚTY 21. (a) Nechť $t \in \mathbb{R}^d$ a $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^d$ konvergující k t. Pak díky spojitosti skalárního součinu pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle} \to f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}$. Protože $|f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle}| = |f(x)|$, je podle Lebesgueovy věty $\lim \widehat{f}(t_n) = \lim \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d = \widehat{f}(t)$. Tedy $\widehat{f}$ je spojitá v t. Dále zjevně $|\widehat{f}(t)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \|f\|_1$. Fakt, že $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ nyní plyne z Lemmatu 20. Konečně, linearita Fourierovy transformace je zřejmá z definice.

(b) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{\tau_y f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t,u\rangle} e^{-i\langle t,y\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(u) = e^{-i\langle y,t\rangle} \widehat{f}(t).$$

Dále

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,x\rangle} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t-y,x\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \widehat{f}(t-y) = \tau_y \widehat{f}(t).$$

(c) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\tfrac{x}{c}\right)e^{-i\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(x) = |c|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t,cu\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(u) = |c|^d \widehat{f}(ct).$$

(d) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{\overline{f}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)}e^{-i\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)e^{-i\langle t,-x\rangle}} \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}} \,\mathrm{d}\mu_d(x) = \overline{\widehat{f}(t)}.$$

(e) Díky Lemmatu 24 máme

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}\lambda(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-it_j)e^{-i\langle t,x\rangle} \,\mathrm{d}\lambda(x) = it_j \widehat{f}(t).$$

(f) Zvolme pevně $t \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(u) = \widehat{f}(t + ue_j)$ pro $u \in \mathbb{R}$. Dále položme $F(u,x) = f(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle}$ pro $u \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} F(u,x) \,\mathrm{d}\mu_d(x)$. Pak pro každé $u \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto F(u,x)$ měřitelná. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $u \in \mathbb{R}$ je $\frac{\partial F}{\partial u}(u,x) = -ix_j f(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle} = h(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle}$, takže $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(u,x)\right| = |h(x)|$. Dle předpokladu je tedy h integrovatelná majoranta. Konečně, zjevně $x \mapsto F(0,x) \in L_1(\mu_d)$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tak máme $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial u}(0,x)\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \widehat{h}(t)$.

(g) Zvolme pevně libovolné $t \in \mathbb{R}^d$. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}$ měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Dále $|F(x,y)| = |f(y)||g(x-y)|$ a aplikujeme-li Lemma 4 na $|F|$, dostaneme, že $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Můžeme tedy použít Fubiniovu větu a substituci $\varphi(u) = u + y$ k výpočtu

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} f*g(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu_d(y)\Big)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(u)e^{-i\langle t,u+y\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u)\Big)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-i\langle t,y\rangle}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(u)e^{-i\langle t,u\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u)\Big)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t).\end{aligned}$$

(h) Položme $F(x,y) = f(y)g(x)e^{-i\langle x,y\rangle}$. Pak F je dle Lemmatu 3(b) měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Máme

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|F(x,y)|\,\mathrm{d}\mu_d(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|g(x)|\,\mathrm{d}\mu_d(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty,$$

podle Fubiniovy věty, tedy $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Proto můžeme použít Fubiniovu větu ještě jednou k výpočtu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(y)\Big)g(x)\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle}g(x)\,\mathrm{d}\mu_d(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}\mu_d(y).\end{aligned}$$

□

Pro budoucí použití se nám bude hodit nalézt nějakou omezenou spojitou funkci, jejíž Fourierova transformace je regularizačním jádrem.

PŘÍKLAD 25. Definujme funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Nezápornost funkce $\widehat{g}$ je zjevná a její integrál snadno spočteme pomocí Fubiniovy věty. Stejně snadno pomocí Fubiniovy věty odvodíme, že $g \in L_1(\mu_d)$. Dokažme tedy platnost vzorce. Nechť nejprve $d = 1$. Zvolme $t \in \mathbb{R}$ pevné. Funkce g je sudá, proto

$$\widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\cos(-tx) + i\sin(-tx)\big)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = 2\int_{[0,+\infty)} e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Pomocí integrace per partes snadno odvodíme, že $\int e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^{-x}\cdot\frac{t\sin(tx)-\cos(tx)}{1+t^2}$ na $\mathbb{R}$. Odtud dostáváme, že $\widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_0^\infty e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1+t^2}$.

Je-li nyní $d > 1$, pak díky Fubiniově větě a případu $d = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|} e^{-i\sum_{j=1}^d t_j x_j}\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \big(e^{-|x_j|} e^{-it_j x_j}\big)\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^d \big(e^{-|x_j|} e^{-it_j x_j}\big)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \cdots \mathrm{d}\mu_1(x_d) = \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} \big(e^{-|x_j|} e^{-it_j x_j}\big)\, \mathrm{d}\mu_1(x_j) = \\ &= \prod_{j=1}^d \big(\tfrac{2}{\pi}\big)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t_j^2} = \big(\tfrac{2}{\pi}\big)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2}.\end{aligned}$$

◇

LEMMA 26. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} h_n(t)\, \mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

DŮKAZ. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Protože g_n je omezená (Věta 21(a)), je $f * g_n$ definována na celém $\mathbb{R}^d$ (Věta 7(a)). Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ tedy máme

$$\begin{aligned}f * g_n(x) = g_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g_n(y)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) n^d \widehat{g}(-ny)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t) n^d \widehat{g}(nt)\, \mathrm{d}\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-x} f(t) \widehat{h_n}(t)\, \mathrm{d}\mu_d(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_{-x} f}(t) h_n(t)\, \mathrm{d}\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t)\, \mathrm{d}\mu_d(t),\end{aligned}$$

přičemž při výpočtu jsme použili postupně substituci $\varphi(y) = -y$ a Větu 21(c), (h) a (b).

□

VĚTA 27 (o inverzi). *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

DŮKAZ. Nechť g je funkce z Příkladu 25. Pak $x \mapsto \widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Všimněme si též, že $g(0) = 1$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 26. Podle Lemmatu 26 pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t)\, \mathrm{d}\mu_d(t)$. Pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je $h_n(t) \to g(0) = 1$. Protože $|\widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t)| \leq |\widehat{f}(t)|$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a dle předpokladu $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, můžeme použít Lebesgueovu větu. Dostáváme tak $f * g_n(x) \to \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Na druhou stranu, podle Věty 13(b) platí, že $f * g_n \to f$ v $L_1(\mu_d)$. Existuje tedy podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ taková, že $f * g_{n_k}(x) \to f(x)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ ([R, Věta 3.12]). Z jednoznačnosti limity pak dostáváme, že $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(t)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Předpokládejme nyní, že je f navíc spojitá. Protože $x \mapsto \widehat{\widehat{f}}(-x)$ je spojitá dle Věty 21(a) a $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$ na husté podmnožině $\mathbb{R}^d$, musejí se tyto funkce rovnat všude (Věta 15.4).

□

DŮSLEDEK 28. *Fourierova transformace $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je-li $g \in L_1(\mu_d)$ spojitá a $\widehat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g) = \widehat{\widetilde{g}}$.*

DŮKAZ. Je-li $\mathcal{F}(f) = 0$, pak dle věty o inverzi je $f(x) = 0$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Tedy $\operatorname{Ker} \mathcal{F} = \{0\}$. Máme-li nyní g jako v předpokladech, pak dle věty o inverzi a Věty 21(c) je $g = \mathcal{F}(\widehat{\widetilde{g}})$, odkud již tvrzení okamžitě plyne.

□

DŮSLEDEK 29. *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.*

DŮKAZ. Položme $h = \widehat{f} * \widehat{g}$. Protože $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$ a $\widehat{g}$ je omezená (Věta 21(a)), je h definovaná a spojitá na $\mathbb{R}^d$ a navíc $h \in L_1(\mu_d)$ (Věta 7(a), (d)). Dále je $\widehat{h} = \widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f}}\widehat{\widehat{g}}$ (Věta 21(g)), a tedy $\widehat{h}(t) = f(-t)g(-t) = fg(-t)$ pro s. v. $t \in \mathbb{R}^d$ (Věta 27). Dle předpokladu je tak $\widehat{h} \in L_1(\mu_d)$ a opětovnou aplikací věty o inverzi spolu s Větou 21(c) dostáváme, že $h = \widehat{\widehat{\widehat{h}}} = \widehat{\widehat{\widehat{h}}} = \widehat{fg}$.

□

PŘÍKLAD 30. Nechť $\mathcal{F} : L_1(\mu_1) \to C_0(\mathbb{R})$ je Fourierova transformace. Pak inverzní Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1}$ není spojitá. Speciálně, díky Důsledku 3.7 tedy $\mathcal{F}$ není na.

Vskutku, položme $f_n = \chi_{(-n,n)}$ a $g_n = f_1 * f_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dle Příkladu 15 je $g_n \in C_0(\mathbb{R}) \cap L_1(\mu_1)$ a $\|g_n\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. Dále je $\widehat{g_n}(t) = \widehat{f_1}(t)\widehat{f_n}(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin t \sin nt}{t^2}$ dle Věty 21(g) a Příkladu 17, takže $\widehat{g_n} \in L_1(\mu_1)$. Podle Důsledku 28 tak dostáváme, že $\mathcal{F}^{-1}(g_n)(x) = \widetilde{\widehat{g_n}}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin x \sin nx}{x^2}$. Tedy

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g_n)\|_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\mu_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda \geq \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda \geq$$
$$\geq \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{\pi}x|\sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{2^3}{\pi^5}}\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin y|}{y}\,\mathrm{d}\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

což znamená, že lineární zobrazení $\mathcal{F}^{-1}$ není spojité.

◇

VĚTA 31 (Michel Plancherel, 1910). *Existuje právě jedna lineární izometrie $F : L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \widehat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.*

DŮKAZ. Pro zkrácení zápisu budeme v tomto důkazu používat zkratky $L_2 = L_2(\mu_d)$ a $L_1 = L_1(\mu_d)$. Nechť $u \in L_2 \cap L_1$. Položme $v(x) = \overline{u(-x)}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $v \in L_2 \cap L_1$, a tedy dle Věty 7(a) a (d) je funkce $f = u * v$ stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_1$. Dále dle Věty 21(g) a (d) platí, že $\widehat{f} = \widehat{u}\,\widehat{v} = \widehat{u}\,\overline{\widehat{u}} = |\widehat{u}|^2 \geq 0$. Nechť g je funkce z Příkladu 25. Pak $x \mapsto \widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 26. Funkce h_n jsou nezáporné a snadno nahlédneme, že pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je posloupnost $\{h_n(t)\}_{n=1}^\infty$ neklesající a konverguje ke $g(0) = 1$. Použijeme-li nyní postupně Větu 13(a), Lemma 26 a Leviovu větu o monotónní konvergenci, dostaneme

$$\|u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\overline{u(y)}\,\mathrm{d}\mu_d(y) = f(0) = \lim_{n\to\infty} f * g_n(0) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} h_n\,\mathrm{d}\mu_d =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{u}|^2\,\mathrm{d}\mu_d = \|\widehat{u}\|_2^2.$$

Zobrazení $u \mapsto \widehat{u}$ je tedy lineární izometrie z podprostoru $L_2 \cap L_1$ prostoru L_2 do prostoru L_2. Podprostor $L_2 \cap L_1$ je ovšem v prostoru L_2 hustý (obsahuje např. jednoduché funkce nulové mimo množinu konečné míry, dále vizte např. [R, Věta 3.13]; alternativně lze použít Důsledek 14), a tedy podle Věty 1.62 existuje jednoznačné rozšíření tohoto zobrazení na zobrazení $F \in \mathcal{L}(L_2, L_2)$, které je izometrie do.

Ukažme nyní, že F je na. Podle Tvrzení 1.60(c) je $\operatorname{Rng} F$ uzavřený v L_2. Pokud $\operatorname{Rng} F \neq L_2$, pak podle Hahnovy-Banachovy věty (Důsledek 2.7) existuje $\varphi \in L_2^*$ takový, že $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi = 0$ na $\operatorname{Rng} F$. Podle Věty 2.15 existuje $f \in L_2$ takové, že $\varphi = \varphi_f$. Speciálně tedy platí $\varphi_f(\widehat{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u} f = 0$ pro každou $u \in L_2 \cap L_1$. Z hustoty $L_2 \cap L_1$ v L_2 plyne existence posloupnosti $\{f_n\} \subset L_2 \cap L_1$ takové, že $f_n \to f$ v L_2. Zvolme libovolně $u \in L_2 \cap L_1$. Protože $u, \widehat{u}, F(f) \in L_2$, je $\varphi_u, \varphi_{\widehat{u}}, \varphi_{F(f)} \in L_2^*$. Máme tedy $\varphi_{\widehat{u}}(f_n) \to \varphi_{\widehat{u}}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = 0$. Ze spojitosti F plyne, že $\widehat{f_n} = F(f_n) \to F(f)$. Dle Věty 21(h) tedy máme

$$\varphi_{F(f)}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} uF(f)\,\mathrm{d}\mu_d = \varphi_u(F(f)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_u(\widehat{f_n}) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_n} u\,\mathrm{d}\mu_d =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n\widehat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\widehat{u}}(f_n) = 0.$$

Protože to platí pro každé u z husté podmnožiny L_2, plyne odtud, že $F(f) = 0$, a z prostoty F dostáváme $f = 0$, což je spor s nenulovostí φ_f.

□

Poznamenejme, že zatímco Fourierova transformace funkce z $L_1(\mu_d)$ je určena jakožto funkce definovaná v každém bodě $\mathbb{R}^d$, transformace F z Plancherelovy věty určuje „Fourierův obraz" pouze jakožto prvek $L_2(\mu_d)$, tedy třídu ekvivalence funkcí na $\mathbb{R}^d$ rovných skoro všude.

Následující příklad ukazuje, jak lze v některých případech nalézt Fourierovu-Plancherelovu transformaci funkce $f \in L_2(\mu_1)$.

PŘÍKLAD 32. Nechť $f \in L_2(\mu_1)$. Označme $f_n = \chi_{(-n,n)} f$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in L_1(\mu_1) \cap L_2(\mu_1)$, existuje tedy Fourierova transformace $\widehat{f_n}$. Předpokládejme, že posloupnost funkcí $\{\widehat{f_n}\}$ konverguje skoro všude k nějaké funkci g. Pak $F(f) = g$, kde F značí rozšíření Fourierovy transformace na $L_2(\mu_1)$ dané Větou 31. Vskutku, z Lebesgueovy věty plyne, že $f_n \to f$ v $L_2(\mu_1)$. Díky spojitosti F tedy $F(f_n) \to F(f)$ v $L_2(\mu_1)$. Proto existuje vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}$ taková, že $F(f_{n_k}) \to F(f)$ skoro všude. Ale $F(f_{n_k}) = \widehat{f_{n_k}}$, což jsou funkce konvergující dle předpokladu skoro všude ke g. Tedy $F(f) = g$.

◇

PŘÍKLAD 33. Nechť $f \in L_2(\mathbb{R})$ má omezený nosič (zde míníme f jako funkci definovanou bodově). Pak $\widehat{f}$ má omezený nosič, právě když $f = 0$ s. v.

Vskutku, nejprve si uvědomme, že za daných předpokladů je $f \in L_1(\mathbb{R})$, takže Fourierova transformace funkce f je definována. Nechť $r > 1$ je takové, že $\operatorname{supp} f \subset [-(r-1), r-1]$. Označme h prvek Hilbertova prostoru $L_2([-r,r])$, který je reprezentován funkcí $f \restriction_{[-r,r]}$, a dále označme $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2r}} e^{i\frac{\pi}{r}nx}$. Systém $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L_2([-r,r])$ (vizte též Příklad 1.116). Protože $\langle h, g_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2r}} \int_{-r}^{r} f(x) e^{-i\frac{\pi}{r}nx} \,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\, \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$, plyne odtud, že $h = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n) g_n$.

Předpokládáme-li nyní, že $\widehat{f}$ má omezený nosič, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $h = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n) g_n$ Označíme-li $g(z) = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n) g_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, pak $f = g$ s. v. na $[-r,r]$. Speciálně, $g = 0$ s. v. na $(r-1, r)$. Funkce g je ovšem holomorfní, a protože je nulová na omezené nekonečné množině (tj. na množině mající hromadný bod), je $g = 0$.

◇

Kapitola 6

Topologické vektorové prostory

■■■Až dosud byl naší základní uvažovanou strukturou normovaný vektorový prostor, tedy objekt kombinující vektorovou strukturu s metrikou danou normou. To pak mimo jiné zařizuje spojitost vektorových operací v metrice dané normou, vizte Tvrzení 1.2. Ne všechny zajímavé matematické struktury je však možno vtěsnat do tohoto kontextu normovaných vektorových prostorů, takže je třeba uvážit obecnější koncept. Nabízí se tak svázat vektorový prostor s topologií tak, aby opět platila spojitost vektorových operací. To pak přirozeně vede k definici topologického vektorového prostoru.

1. Základní vlastnosti

DEFINICE 1 (Andrej Nikolajevič Kolmogorov[1] (1934)). Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a τ je topologie na X. Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$, nazveme dvojici (X, τ) topologickým vektorovým prostorem.

Systém všech okolí bodu $x \in X$ značíme $\tau(x)$.

Jak je zvykem, budeme často v označení topologického vektorového prostoru (X, τ) vynechávat explicitní označení topologie, tj. budeme o tomto prostoru hovořit pouze jako o X. Pokud se v důkazu objeví symbol τ, pak pokud není řečeno jinak, míní se tím právě příslušná vektorová topologie na X.

PŘÍKLADY 2. Následující prostory jsou příklady topologických vektorových prostorů:

- Vektorový prostor s indiskrétní topologií.
- Normované lineární prostory (Tvrzení 1.2).
- Prostor $\mathbb{K}^\Gamma$ se součinovou topologií, kde Γ je libovolná neprázdná množina. Tento prostor lze též chápat jako prostor všech funkcí na Γ s topologií bodové konvergence. Vizte Příklad 62.
- Prostor $C_\mathrm{p}(T)$ spojitých funkcí na topologickém prostoru T s topologií bodové konvergence (je to podprostor prostoru $\mathbb{K}^T$).
- Prostor $\mathcal{D}(A)$ s metrikou z Definice 7.10, kde $A \subset \mathbb{R}^d$ (Věta 7.11).
- Prostor $C(T)$, kde T je topologický prostor, s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T (vizte Příklad 9).
- Prostor $H(\Omega)$ funkcí holomorfních na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence (je to podprostor $C(\Omega)$ z příkladu výše).
- Prostor $L_p([0,1])$ pro $p \in (0,1)$ s metrikou $\rho(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p$. Důkaz spolu s dalšími informacemi lze nalézt v Příkladu 55.

FAKT 3. *Nechť X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní pseudometrika na X. Pak*

(a) operace sčítání je spojitá jakožto zobrazení $+\colon (X,\rho) \times (X,\rho) \to (X,\rho)$;
(b) $\rho(nx, 0) \le n\rho(x, 0)$ pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v $X \times X$ konvergující k $(x, y) \in X \times X$ v součinové pseudometrice. Pak díky translační invarianci dostáváme $\rho(x_n + y_n, x + y) = \rho(x_n + y_n - x, y) = \rho(x_n - x, y - y_n) \le \rho(x_n - x, 0) + \rho(0, y - y_n) = \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0$.

[1] Андрей Николаевич Колмогоров; topologii měl definovánu pomocí operátoru uzávěru.

(b) Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ nerovnost zjevně platí. Předpokládáme-li její platnost pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\rho((n+1)x, 0) \le \rho((n+1)x, x) + \rho(x, 0) = \rho(nx, 0) + \rho(x, 0) \le n\rho(x, 0) + \rho(x, 0) = (n+1)\rho(x, 0).$$

□

PŘÍKLAD 4. Uvažujme prostor $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{K};\ f \text{ měřitelná}\}$ s metrikou $\rho(f, g) = \int_0^1 \min\{|f - g|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda$ (ztotožňujeme přitom funkce rovnající se skoro všude). Pak X s topologií indukovanou metrikou ρ je topologický vektorový prostor a platí, že posloupnost $\{f_n\} \subset X$ konverguje k $f \in X$ v metrice ρ právě tehdy, když $f_n \to f$ v míře.

Vskutku, snadno nahlédneme, že ρ je dokonce translačně invariantní metrika (využijeme nerovnost $\min\{a+b, 1\} \le \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$ platnou pro každé $a, b \in [0, +\infty)$). Tedy je dle Faktu 3 operace $+$ na X spojitá. Nechť nyní $c_n \to c$ v $\mathbb{K}$ a $f_n \to f$ v ρ. Pak funkce $g_n = \min\{|c_n - c||f|, 1\}$ konvergují bodově k 0. Označme $M = 1 + \sup\{|c_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. S využitím nerovnosti $\min\{Ma, 1\} \le M\min\{a, 1\}$ platné pro každé $a \in [0, +\infty)$ a $M \in [1, +\infty)$ dostáváme

$$\rho(c_n f_n, cf) \le \rho(c_n f_n, c_n f) + \rho(c_n f, cf) = \int_0^1 \min\{|c_n||f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 \min\{|c_n - c||f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \le$$
$$\le \int_0^1 M\min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda = M\rho(f_n, f) + \int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda.$$

Jelikož $\int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda \to 0$ dle Lebesgueovy věty (integrovatelnou majorantou je konstantní 1), platí $\rho(c_n f_n, cf) \to 0$. Tedy i operace $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ je spojitá, neboli X je topologický vektorový prostor.

Nechť posloupnost $\{f_n\} \subset X$ konverguje k $f \in X$ v ρ. Ukážeme, že konverguje v míře, tj. že platí

$$\forall \varepsilon > 0\colon \lambda\bigl(\{x \in [0,1];\ |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\bigr) \to 0,$$

Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je dáno. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\varepsilon \le 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $E_n = \{x \in [0,1];\ |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}$. Pak

$$\lambda(E_n) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\rho(f_n, f) \to 0.$$

Obráceně, nechť $f_n \to f$ v míře. Nechť $\varepsilon \in (0, 1]$ je dáno a E_n jsou stejné množiny jako výše. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(E_n) < \varepsilon$ pro $n \ge n_0$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\rho(f_n, f) = \int_0^1 \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \le$$
$$\le \int_{E_n} 1\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\lambda \le \lambda(E_n) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Tedy $f_n \to f$ v metrice ρ.

◇

Nyní se podívejme na některé základní vztahy mezi vektorovými operacemi a topologií v topologickém vektorovém prostoru.

TVRZENÍ 5. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X.
(b) Pro každé $x \in X$ je $\tau(x) = x + \tau(0)$.
(c) Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ otevřené takové, že $V + V \subset U$.

DŮKAZ. (a) Spojité inverze k daným zobrazením jsou dány po řadě dány předpisy $y \mapsto y + (-a)$ a $y \mapsto \frac{1}{\lambda}y$.

(b) Nechť $y, z \in X$. Je-li $U \in \tau(y)$, pak $U + (z - y) \in \tau(z)$. Vskutku, existuje otevřená G taková, že $y \in G \subset U$. Podle (a) je množina $G + (z - y)$ otevřená a platí $z \in G + (z - y) \subset U + (z - y)$. Tedy $U + (z - y) \in \tau(z)$. Aplikujeme-li nyní tento poznatek po řadě na $y = x, z = 0$ a $y = 0, z = x$, obdržíme rovnost $\tau(x) = x + \tau(0)$.

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Jelikož $0 + 0 = 0$, ze spojitosti zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$ v bodě $(0, 0)$ dostáváme existenci otevřených $V_1, V_2 \in \tau(0)$ splňujících $V_1 + V_2 \subset U$. Položíme-li $V = V_1 \cap V_2$, pak V je otevřené okolí 0 a zjevně $V + V \subset U$.

□

Pro další studium topologických vektorových prostorů je vhodné zavést následující geometrické pojmy:

DEFINICE 6. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- vyvážená, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Všimněme si, že jednotková koule v normovaném lineárním prostoru je vyvážená a pohlcující. Dále, každá vyvážená množina je symetrická a obsahuje 0.

TVRZENÍ 7. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*
(a) Každé $U \in \tau(0)$ je pohlcující.
(b) $\tau(0)$ má bázi z otevřených vyvážených množin.

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$ a $x \in X$ je dáno. Zobrazení $t \mapsto tx$ je spojité v bodě 0 a $U \in \tau(0x)$, tedy existuje $\lambda > 0$ takové, že $tx \in U$ kdykoli $|t| < \lambda$.

(b) Nechť $U \in \tau(0)$. Zobrazení $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ je spojité v bodě $(0, 0)$, tedy existují $\delta > 0$ a $V \in \tau(0)$ otevřené tak, že $tx \in U$ kdykoli $x \in V$ a $|t| < \delta$. Položíme $W = \bigcup_{|t|<\delta}(tV)$. Protože $0V = \{0\} \subset tV$ pro každé $0 < |t| < \delta$, je $W = \bigcup_{0<|t|<\delta}(tV)$, a tedy W je zjevně otevřené okolí 0 splňující $W \subset U$. Dále je-li $x \in W$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$, pak $x \in tV$ pro nějaké $t \in \mathbb{K}$, $|t| < \delta$. Tedy $\alpha x \in (\alpha t)V \subset W$, neboť $|\alpha t| \leq |t| < \delta$.

□

Následující věta ukazuje, že vlastnosti uvedené v Tvrzení 5(c) a Tvrzení 7 již charakterizují topologické vektorové prostory.

VĚTA 8 (John von Neumann (1935)). *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém podmnožin X obsahujících 0, který je bází filtru (tj. je neprázdný a pro každá $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset U_1 \cap U_2$). Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ má následující vlastnosti:*
(i) Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.
(ii) Každá množina z $\mathcal{U}$ je pohlcující.
(iii) Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená.
Pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0.

DŮKAZ. Definujme topologii τ pomocí systémů okolí takto: Nechť $\tau(0) = \{A \subset X;\ U \subset A \text{ pro nějaké } U \in \mathcal{U}\}$ a $\tau(x) = x + \tau(0)$ pro $x \in X$. Aby takto byla skutečně definována topologie, je nezbytné, aby pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existovalo $V \in \tau(x)$ takové, že $U \in \tau(y)$ pro každé $y \in V$. Ověřme tedy tuto podmínku: Je $U = x + W$ pro nějaké $W \in \tau(0)$, a tedy existuje $W' \in \mathcal{U}$ takové, že $W' \subset W$. Dle vlastnosti (i) existuje $V' \in \mathcal{U}$ takové, že $V' + V' \subset W'$. Položme $V = x + V'$. Pak $V \in \tau(x)$ a pro $y \in V$ je $y + V' \subset x + V' + V' \subset x + W' \subset x + W = U$, tedy $U \in \tau(y)$.

Nyní ukažme, že operace sčítání je spojitá. Nechť $x_1, x_2 \in X$ a $U \in \tau(x_1 + x_2)$. Pak existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $x_1 + x_2 + V \subset U$. Dle vlastnosti (i) existuje $W \subset \mathcal{U}$ takové, že $W + W \subset V$. Pak $x_1 + W \in \tau(x_1)$, $x_2 + W \in \tau(x_2)$ a $y + z \in x_1 + x_2 + W + W \subset x_1 + x_2 + V \subset U$ pro libovolné $y \in x_1 + W$ a $z \in x_2 + W$. Tím je spojitost sčítání v bodě $(x_1, x_2) \in X \times X$ ověřena.

Dále ověříme spojitost násobení skalárem. Nechť $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ a $x_0 \in X$. Pro dané $U \in \mathcal{U}$ stačí nalézt $\delta > 0$ a $V \in \mathcal{U}$ taková, že

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < \delta \ \ \forall x \in x_0 + V : \lambda x \in \lambda_0 x_0 + U.$$

Díky (i) existuje $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W + W \subset U$. Dle (ii) je W pohlcující, existuje tedy $\delta > 0$ tak, že $tx_0 \in W$ pro každé $t \in [0, \delta]$. Dle (iii) je W vyvážená, tedy dokonce $\alpha x_0 = \frac{\alpha}{\delta}\delta x_0 \in W$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$,

$|\alpha| \leq \delta$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $n \geq |\lambda_0| + \delta$. Pomocí (i) induktivně nalezneme $V \in \mathcal{U}$ tak, aby

$$\underbrace{V + V + \cdots + V}_{n \text{ krát}} \subset W.$$

Potom pro $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < \delta$ a $x \in x_0 + V$ máme $\lambda(x - x_0) \in \lambda V = n(\frac{\lambda}{n} V) \subset nV \subset V + V + \cdots + V \subset W$, přičemž jsme využili jednak toho, že $\left|\frac{\lambda}{n}\right| \leq \frac{|\lambda_0|+\delta}{n} \leq 1$ a V je dle (iii) vyvážená, a jednak snadného faktu, že $nA \subset \underbrace{A + A + \cdots A}_{n \text{ krát}}$ pro libovolnou podmnožinu A vektorového prostoru. Tedy $\lambda x = \lambda_0 x_0 + \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 \in \lambda_0 x_0 + W + W \subset \lambda_0 x_0 + U$.

Konečně, jednoznačnost plyne z toho, že je-li σ topologie na X taková, že (X, σ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 pro topologii σ, pak nutně $\sigma(x) = \tau(x)$ pro každé $x \in X$ (Tvrzení 5(b)).

□

PŘÍKLAD 9. Nechť T je topologický prostor a $C(T)$ je vektorový prostor všech spojitých funkcí na T. Pro $K \subset T$ kompaktní a $\varepsilon > 0$ položme $U_{K,\varepsilon} = \{f \in C(T);\ \max_K |f| < \varepsilon\}$. Snadno ověříme, že systém $\mathcal{U} = \{U_{K,\varepsilon};\ K \subset T \text{ kompaktní}, \varepsilon > 0\}$ splňuje podmínky z Věty 8, a tedy generuje na $C(T)$ vektorovou topologii τ_{K} takovou, že $\mathcal{U}$ je bází okolí 0. Vskutku, nejprve si uvědomme, že $0 \in U_{K,\varepsilon}$ pro každou $U_{K,\varepsilon} \in \mathcal{U}$. Jsou-li $U_{K_1,\varepsilon_1}, U_{K_2,\varepsilon_2} \in \mathcal{U}$, pak $U_{K_1 \cup K_2, \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}} \subset U_{K_1,\varepsilon_1} \cap U_{K_2,\varepsilon_2}$ je též prvek $\mathcal{U}$. Dále je-li $U_{K,\varepsilon} \in \mathcal{U}$, pak $U_{K,\frac{\varepsilon}{2}} + U_{K,\frac{\varepsilon}{2}} \subset U_{K,\varepsilon}$. Je-li $f \in C(T)$ libovolná, pak $m = \max_K |f| < +\infty$, a tedy $tf \in U_{K,\varepsilon}$ pro každé $t \in [0, \frac{\varepsilon}{2m}]$, což znamená, že $U_{K,\varepsilon}$ je pohlcující. Konečně, vyváženost $U_{K,\varepsilon}$ plyne z toho, že je-li $f \in U_{K,\varepsilon}$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$, pak $\max_K |\alpha f| \leq \max_K |f| < \varepsilon$.

Všimněme si, že je-li $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset C(T)$ net, pak $f_\gamma \to f$ v τ_{K}, právě když pro každou $K \subset T$ kompaktní a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ takové, že pro každé $\gamma \geq \gamma_0$ je $\max_K |f_\gamma - f| < \varepsilon$, a tedy právě když $f_\gamma \to f$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině T.

Další informace o tomto prostoru se dozvíme v Příkladu 64.

◇

Následující věta uvádí několik topologických oddělovacích vlastností lineárních topologií.

VĚTA 10. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K. Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.
(b) X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).
(c) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
  (i) X je Hausdorffův.
  (ii) X je T_1 (tj. body jsou uzavřené množiny).
  (iii) $\{0\}$ je uzavřená množina.
  (iv) $\{0\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(0)\}$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in K$, pak $X \setminus C$ je okolí x, a tedy dle Tvrzení 5(c) existuje otevřené $V_x \in \tau(0)$ splňující $x + V_x + V_x + V_x \subset X \setminus C$. Díky kompaktnosti K existují body $x_1, \dots, x_n \in K$ takové, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Protože $\bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \in \tau(0)$, existuje dle Tvrzení 7(b) otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Dostáváme tak, že

$$K + V + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i}) \subset X \setminus C.$$

Ze symetrie V pak plyne, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$. Vskutku, je-li $x \in (K + V) \cap (C + V)$, pak $x = z + v = y + u$ pro nějaká $z \in K$, $y \in C$ a $u, v \in V$. Ale $-u \in V$, takže $y = z + v - u \in K + V + V$, což je spor.

(b) Je-li $C \subset X$ uzavřená a $x \in X \setminus C$, stačí použít (a) pro $K = \{x\}$.

(c) (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) jsou zřejmé, (iii)$\Rightarrow$(ii) plyne z Tvrzení 5(a), (ii)$\Rightarrow$(i) plyne z (b). Snadno nahlédneme, že (iv) je ekvivalentní tvrzení, že $\{x\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(x)\}$ pro každé $x \in X$, což je ekvivalentní (ii).

□

Pro čtenáře s hlubšími znalostmi topologie poznamenejme, že topologické vektorové prostory jsou dokonce úplně regulární. To plyne například z toho, že jsou uniformizovatelné.

Následující tvrzení je zobecněním Tvrzení 1.23 odehrávajícího se v normovaných lineárních prostorech.

TVRZENÍ 11. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li $G \subset X$ otevřené a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.
(b) Je-li $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní, je $F + K$ uzavřená.
(c) Jsou-li $K, L \subset X$ kompaktní, je i $K + L$ kompaktní.

DŮKAZ. (a) $A + G = \bigcup_{x \in A}(x + G)$, přičemž množiny vpravo jsou otevřené dle Tvrzení 5(a).

Důkaz (b) i (c) lze vést zcela analogicky důkazu Tvrzení 1.23, pouze je potřeba pracovat místo posloupností s nety. Je ovšem třeba mít na paměti, že pojem podnetu je poněkud komplikovaný. My zde ukážeme elegantnější přístup.

(b) Ukážeme, že $X \setminus (F + K)$ je otevřená. Zvolme libovolné $x \in X \setminus (F + K)$. Pak $K \cap (x - F) = \emptyset$. Množina $x - F$ je uzavřená (Tvrzení 5(a)), tedy dle Věty 10(a) existuje symetrické $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (x - F) = \emptyset$. Je tedy $(x - V) \cap (F + K) = \emptyset$ a ze symetrie V plyne, že $x + V \subset X \setminus (F + K)$.

(c) Protože $+\colon X \times X \to X$ je spojité a $K \times L \subset X \times X$ je kompaktní, je kompaktní i množina $K + L = +(K \times L)$.

□

Dále si uvedeme několik jednoduchých vlastností uzávěrů a vnitřků v topologickém vektorovém prostoru.

TVRZENÍ 12. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\overline{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.
(b) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.
(c) $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$ *a* $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ *pro libovolné* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
(d) Je-li Y podprostor X, pak $\overline{Y}$ je též podprostor X.
(e) Je-li A konvexní, pak $\overline{A}$ a $\operatorname{Int} A$ *jsou konvexní. Dále je-li* $\operatorname{Int} A$ *neprázdná, pak* $\overline{A} = \overline{\operatorname{Int} A}$.
(f) Je-li A vyvážená, pak $\overline{A}$ je vyvážená.
(g) Je-li A vyvážená a $0 \in \operatorname{Int} A$, *pak* $\operatorname{Int} A$ *je vyvážená.*

DŮKAZ. (a) Platí, že

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U \in \tau(0)\colon (x + U) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall U \in \tau(0)\colon x \in A - U \Leftrightarrow \forall U \in \tau(0)\colon x \in A + U,$$

přičemž poslední ekvivalence platí díky tomu, že $U \in \tau(0)$, právě když $-U \in \tau(0)$, což plyne z Tvrzení 5(a).

(b) Zvolme libovolné $U \in \tau(0)$. Dle Tvrzení 5(c) existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Pak dle (a) je $\overline{A} \subset A + V$ a $\overline{B} \subset B + V$, a tedy $\overline{A} + \overline{B} \subset A + B + V + V \subset A + B + U$. Protože toto platí pro každé $U \in \tau(0)$, opětovná aplikace (a) implikuje první část (b). Dále, $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset A + B$ a množina vlevo je otevřená (Tvrzení 11(a)). Odtud plyne druhá část (b).

(c)

$$\begin{aligned}\lambda\overline{A} &= \lambda\bigcap\{C;\ C \text{ uzavřená}, C \supset A\} = \bigcap\{\lambda C;\ C \text{ uzavřená}, C \supset A\} = \\ &= \bigcap\{\lambda C;\ \lambda C \text{ uzavřená}, \lambda C \supset \lambda A\} = \bigcap\{D;\ D \text{ uzavřená}, D \supset \lambda A\} = \overline{\lambda A},\end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost platí díky Tvrzení 5(a). Analogicky,

$$\begin{aligned}\lambda \operatorname{Int} A &= \lambda\bigcup\{G;\ G \text{ otevřená}, G \subset A\} = \bigcup\{\lambda G;\ G \text{ otevřená}, G \subset A\} = \\ &= \bigcup\{\lambda G;\ \lambda G \text{ otevřená}, \lambda G \subset \lambda A\} = \bigcup\{H;\ H \text{ otevřená}, H \subset \lambda A\} = \operatorname{Int}(\lambda A).\end{aligned}$$

(d) Snadno nahlédneme, že podmnožina Z vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ je jeho podprostorem, právě když $Z + Z \subset Z$ a $\lambda Z \subset Z$ pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$. Stačí tedy aplikovat (b) a (c).

(e) Snadno nahlédneme, že podmnožina C vektorového prostoru je konvexní, právě když $\lambda C + (1 - \lambda)C \subset C$ pro každé $\lambda \in (0, 1)$. Aplikujeme-li toto pozorování spolu s (c) a (b), dostáváme, že $\lambda\overline{A} + (1 -$

$\lambda)\overline{A} = \overline{\lambda A} + \overline{(1-\lambda)A} \subset \overline{\lambda A + (1-\lambda)A} \subset \overline{A}$ pro každé $\lambda \in (0,1)$. Podobně, $\lambda \operatorname{Int} A + (1-\lambda)\operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A) + \operatorname{Int}((1-\lambda)A) \subset \operatorname{Int}(\lambda A + (1-\lambda)A) \subset \operatorname{Int} A$ pro každé $\lambda \in (0,1)$.

K důkazu rovnosti $\overline{A} = \overline{\operatorname{Int} A}$ stačí ukázat, že $A \subset \overline{\operatorname{Int} A}$. Nechť $x \in A$ a nechť $y \in \operatorname{Int} A$ a $U \in \tau(0)$ je takové, že $y + U \subset A$. Položme $u_n = (1-\frac{1}{n})x + \frac{1}{n}y$ pro $n \in \mathbb{N}$ Pak $u_n + \frac{1}{n}U = (1-\frac{1}{n})x + \frac{1}{n}(y+U) \subset (1-\frac{1}{n})A + \frac{1}{n}A \subset A$, takže dle Tvrzení 5(a) je $u_n \in \operatorname{Int} A$. Jelikož $u_n \to x$, dostáváme, že $x \in \overline{\operatorname{Int} A}$.

(f) plyne ihned z (c) a toho, že každá vyvážená množina obsahuje 0.

(g) Nechť $\alpha \in \mathbb{K}$ splňuje $0 < |\alpha| \leq 1$. Pak $\alpha \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\alpha A) \subset \operatorname{Int} A$ dle (c). Pro $\alpha = 0$ platí $\alpha \operatorname{Int} A = \{0\} \subset \operatorname{Int} A$ přímo z předpokladu tvrzení.

□

Poznamenejme, že v (b) nemusí nastat rovnost: pro uzávěry vizte příklad před Tvrzením 1.23, pro vnitřky lze vzít např. $A = \{0\}$, $B = (0,1)$; chceme-li neprázdné vnitřky, pak např. $A = \mathbb{Q} \cup (-1,1)$, $B = (-1,1)$.

PŘÍKLAD 13. Nechť $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq |y|\}$. Pak A je vyvážená množina, jejíž vnitřek není vyvážený: Bod $0 = (0,0)$ není ve vnitřku A, neboť k němu konverguje například posloupnost $\{(\frac{1}{n}, 0)\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Platí však $(0,1) \in \operatorname{Int} A$ a každá neprázdná vyvážená množina obsahuje 0.

◇

Následující věta je zobecněním Věty 1.24.

VĚTA 14. *Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $Y + Z$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor nad $\mathbb{K}$. Nejprve ukážeme, že $Y + \operatorname{span}\{e\}$ je uzavřený pro libovolné $e \in X$. Obecné tvrzení pak snadno plyne pomocí matematické indukce dle $\dim Z$.

Je-li $e \in Y$, pak není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $e \notin Y$. Protože Y je uzavřený, existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $(e + U) \cap Y = \emptyset$. Nechť $V \in \tau(0)$ je vyvážené takové, že $V + V \subset U$ (Tvrzení 5(c) a 7(b)). Ukážeme, že $X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$ je otevřená. Zvolme libovolné $x \in X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$. Protože V je pohlcující, existuje $r \in (0,1)$ takové, že $tx \in V$ pro $t \in [0,r]$. Je-li nyní $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \frac{1}{r}$, pak $\frac{1}{\lambda}x + e + \frac{1}{\lambda}V = \frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{1}{|\lambda|}x + e + \frac{1}{\lambda}V \subset e + \frac{|\lambda|}{\lambda}V + V \subset e + V + V \subset e + U$. To znamená, že $(\frac{1}{\lambda}x + e + \frac{1}{\lambda}V) \cap Y = \emptyset$, a tedy i $(x + \lambda e + V) \cap Y = \emptyset$.

Na druhou stranu, množina $K = \{x + \lambda e;\ |\lambda| \leq \frac{1}{r}\}$ je kompaktní (je spojitým obrazem kompaktu $B(0, \frac{1}{r})$ v $\mathbb{K}$), disjunktní s Y, a protože Y je uzavřený, existuje dle Věty 10(a) okolí $W \in \tau(0)$ takové, že $(K + W) \cap Y = \emptyset$. Konečně, $S = V \cap W \in \tau(0)$ a zjevně $(x + \operatorname{span}\{e\} + S) \cap Y = \emptyset$. Odtud snadno plyne, že $x + S \subset X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$.

□

DŮSLEDEK 15. *Nechť X je Hausdorffův topologický vektorový prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

DŮKAZ. Nechť Z je konečněrozměrný podprostor X. Podprostor $Y = \{0\}$ je uzavřený, lze tedy použít Větu 14 na $Z = Y + Z$.

□

2. Omezené množiny, metrizovatelnost

■■■Máme-li dán topologický vektorový prostor, v řadě případů by nám pomohla informace, že jeho topologie je generována nějakou (pseudo)metrikou. Metrizační věta 22 poskytuje poměrně snadno ověřitelnou podmínku charakterizující (pseudo)metrizovatelnost topologie našeho topologického vektorového prostoru. Věta 24 pak udává postačující podmínku pro (pseudo)metrizovatelnost pomocí pojmu omezené množiny.

DEFINICE 16. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

POZNÁMKA 17. Je-li X topologický vektorový prostor a $x \in X$, $x \notin \overline{\{0\}}$, pak množina $\{nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ není omezená: Je-li $V \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $0 \notin x + V$, pak $-x \notin V$, a tedy $x \notin V$. To znamená, že pro libovolné $t > 0$ je $\lceil t \rceil x \notin tV$. Speciálně, je-li X Hausdorffův, pak netriviální podprostory nejsou omezené.

POZNÁMKA 18. Nechť (X, τ) je metrizovatelný topologický vektorový prostor a nechť ρ je metrika na X indukující τ. Uvědomme si, že pak máme na X definovány dva různé pojmy omezenosti: výše zmíněnou topologickou omezenost (říkejme jí zde τ-omezenost) a též klasickou metrickou omezenost (zde ρ-omezenost).

Je-li ρ translačně invariantní, pak platí, že je-li $A \subset X$ τ-omezená, je i ρ-omezená: Položme $U = \{x \in X;\ \rho(x, 0) < 1\}$. Pak $U \in \tau(0)$. Dle Tvrzení 7(b) existuje vyvážené $V \in \tau(0)$, $V \subset U$. Díky τ-omezenosti A existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq t$. Pak z vyváženosti V plyne, že $A \subset tV \subset n\frac{t}{n}V \subset nV \subset nU$. Je-li nyní $x \in A$, pak $\frac{1}{n}x \in U$, a tedy $\rho(\frac{1}{n}x, 0) < 1$. Z Faktu 3(b) pak konečně plyne, že $\rho(x, 0) = \rho(n\frac{1}{n}x, 0) \leq n\rho(\frac{1}{n}x, 0) < n$.

Je ovšem třeba dát pozor na to, že obecně mezi těmito dvěma pojmy nemusí být vůbec žádný vztah: Uvažujme prostor $\mathbb{R}$ se standardní topologií, kterou označíme τ. Nechť $\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$. Pak (translačně invariantní) metrika ρ indukuje na $\mathbb{R}$ topologii τ (neboť je ekvivalentní standardní metrice), ale množina $A = \mathbb{R}$ je ρ-omezená, ale není τ-omezená. Obecněji, je-li (P, ρ) metrický prostor, pak $\bar{\rho} = \min\{\rho, 1\}$ je ekvivalentní metrika na P (funkce $f(t) = \min\{t, 1\}$ je jednak neklesající a jednak konkávní s hodnotou $f(0) = 0$, a tedy subaditivní). Zjevně každá podmnožina P je $\bar{\rho}$-omezená; na druhou stranu celý prostor X není nikdy τ-omezený, je-li τ Hausdorffova. Vizte též Poznámku 25).

Pro obrácený příklad vezměme prostor c_0. Položme $\varphi(t) = (|t| - 1)^+$ a

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|$$

pro $x, y \in c_0$. Pak ρ je ekvivalentní metrika na c_0: Funkce ρ je dobře definovaná, neboť díky tomu, že $x, y \in c_0$, je suma v definici konečná. Je snadno vidět, že ρ je metrika a $\|x - y\|_\infty \leq \rho(x, y)$ pro všechna $x, y \in c_0$. Na druhou stranu, zvolme $x \in c_0$ pevně. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \frac{1}{2}$ pro $n \geq n_0$. Je-li $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \frac{1}{2})$ a $n \geq n_0$, pak $|y_n| \leq 1$, takže $\varphi(x_n) = \varphi(y_n) = 0$. Pro $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \frac{1}{2})$ tedy platí, že $\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty + \sum_{n=1}^{n_0} |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| \leq (n_0 + 1)\|x - y\|_\infty$, neboť φ je zjevně 1-lipschitzovská.

Je-li τ topologie indukovaná supremovou normou, pak množina $A = B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 2)$ je τ-omezená, neboť $A \subset \frac{2}{r} B_{\|\cdot\|_\infty}(0, r)$ pro libovolné $r > 0$. Nicméně $\rho\big(\sum_{j=1}^{n} 2e_j, 0\big) = 2 + n$, tedy A není ρ-omezená.

Na druhou stranu není obtížné si rozmyslet, že pokud (X, τ) je topologický vektorový prostor, jehož topologie je indukovaná nějakou *normou*, pak τ-omezené a normově omezené podmnožiny X splývají.

TVRZENÍ 19. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Množina A je omezená.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \to 0$ platí $\gamma_n x_n \to 0$.
(iii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí $\frac{1}{n}x_n \to 0$.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Zvolme $U \in \tau(0)$. Nechť $V \in \tau(0)$, $V \subset U$ je vyvážené. Existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Nechť $v_n \in V$ jsou prvky splňující $x_n = tv_n$. Dále nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $|\gamma_n t| < 1$ pro $n \geq n_0$. Pak $\gamma_n x_n = \gamma_n t v_n \in V \subset U$ pro $n \geq n_0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(i) Není-li A omezená, pak existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $A \not\subset nU$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Nechť $x_n \in A \setminus nU$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{x_n}{n} \notin U$, a tedy $\frac{x_n}{n} \not\to 0$, což je spor s (iii).

□

TVRZENÍ 20. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.

(b) Množina λA omezená pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.
(c) Množina $\overline{A}$ je omezená.

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Dle definice omezenosti existují $t_A, t_B > 0$ taková, že $A \subset t_A V$ a $B \subset t_B V$. Položme $t = \max\{t_A, t_B\}$. Pak z vyváženosti V dostáváme, že $A \subset t\frac{t_A}{t}V \subset tV$ a $B \subset t\frac{t_B}{t}V \subset tV$. Tedy $A \cup B \subset tV \subset tU$ a $A + B \subset tV + tV = t(V + V) \subset tU$.

(b) Zjevně můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $V \in \tau(0)$, $V \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Pak $\lambda A \subset \lambda tV = |\lambda| t \frac{\lambda}{|\lambda|} V \subset |\lambda| tV \subset |\lambda| tU$.

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Dle Věty 10(b) existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $\overline{V} \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Pak dle Tvrzení 12(c) platí, že $\overline{A} \subset \overline{tV} = t\overline{V} \subset tU$.

□

Všimněme si, že konečné množiny jsou omezené: pro jednobodové to plyne z Tvrzení 7(a), pro ostatní to dostaneme pomocí Tvrzení 20(a).

LEMMA 21. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $W \in \tau(0)$, $W \subset U$ a dále existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\delta_n V \subset W$. Tedy $V \subset \frac{1}{|\delta_n|}\frac{|\delta_n|}{\delta_n} W \subset \frac{1}{|\delta_n|} W \subset \frac{1}{|\delta_n|} U$.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $W \in \tau(0)$, $W \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $V \subset tW$. Je-li nyní $n \in \mathbb{N}$ zvoleno tak, že platí $|\delta_n t| < 1$, pak $\delta_n V \subset \delta_n tW \subset W \subset U$.

□

Význam spočetné báze okolí 0 nám objasní následující věta z obecné topologie. Důkaz lze nalézt např. v Dodatku (Věta 15.69).

VĚTA 22. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X má spočetnou bázi okolí 0.
(ii) X je pseudometrizovatelný.
(iii) X je pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou.

Je-li X Hausdorffův, pak lze výše předponu pseudo- vynechat.

DEFINICE 23. Nechť X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je lokálně omezený, pokud ke každému $x \in X$ existuje omezené okolí x.

Všimněme si, že z Tvrzení 20(a) plyne, že prostor je lokálně omezený, právě když v něm existuje omezené okolí 0.

VĚTA 24. *Nechť X je lokálně omezený topologický vektorový prostor. Pak X je pseudometrizovatelný.*

DŮKAZ. Nechť V je omezené okolí 0. Dle Lemmatu 21 je systém $\{\frac{1}{n}V;\ n \in \mathbb{N}\}$ báze okolí 0. Věta 22 tedy implikuje pseudometrizovatelnost X.

□

POZNÁMKA 25. Poznamenejme, že (na rozdíl od Věty 66 dále) věta obrácená neplatí. Může se totiž stát, že $\tau(0)$ má spočetnou bázi, která ovšem není vygenerována jedním okolím (jako v Lemmatu 21). Příkladem je třeba prostor X měřitelných funkcí s konvergencí v míře (Příklad 4). Ukážeme, že v tomto prostoru neexistuje omezené okolí 0: Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje $\delta \in (0, 1)$ takové, že $B_\delta = \{f \in X;\ \rho(f, 0) \leq \delta\} \subset U$. Položme $f_n = n\chi_{[0,\delta]}$. Pak $\rho(f_n, 0) = \delta$, a tedy $f_n \in B_\delta \subset U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nicméně, je-li $t > 0$, a $n = \lceil t \rceil$, pak $\rho(\frac{1}{t} f_n, 0) = \delta$. Tedy $\frac{1}{t} f_n \notin B_{\delta/2}$, neboli $f_n \notin tB_{\delta/2}$.

3. Totální omezenost a kompaktnost

■■■Stejně jako v metrických prostorech hraje i v topologických vektorových prostorech důležitou roli kompaktnost. Ta je nepřekvapivě svázána s konceptem totální omezenosti.

DEFINICE 26. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá totálně omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$.

TVRZENÍ 27. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*
(a) A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.
(b) Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.
(c) Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.
(d) Je-li A totálně omezená a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak je i λA totálně omezená.
(e) Je-li A totálně omezená, pak je i $\overline{A}$ totálně omezený.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ je triviální.

$\Leftarrow$ Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \neq \emptyset$. Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje symetrické $V \in \tau(0)$ takové, že $V - V = V + V \subset U$. Nechť $F \subset X$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Pro každé $x \in F$ zvolme $a_x \in A \cap (x + V)$, pokud je tato množina neprázdná, v opačném případě pak zvolme $a_x \in A$ libovolně. Pak $A \subset \bigcup_{x \in F}(a_x + U)$. Vskutku, je-li $y \in A$, pak existuje $x \in F$ takové, že $y \in x + V$. Pak $a_x \in x + V$, takže $x \in a_x - V$, a tedy $y \in a_x - V + V \subset a_x + U$. Odtud plyne, že A je totálně omezená.

(b) plyne ihned z (a).

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ a $H \subset B$ jsou konečné takové, že $A \subset F + V$ a $B \subset H + V$. Pak $A \cup B \subset (F \cup H) + U$ a $A + B \subset (F + V) + (H + V) \subset (F + H) + U$.

(d) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak $\frac{1}{\lambda}U \in \tau(0)$, a tedy existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + \frac{1}{\lambda}U$. Tudíž $\lambda A \subset \lambda F + \lambda\frac{1}{\lambda}U = \lambda F + U$.

(e) Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Podle Tvrzení 12(a) dostáváme, že $\overline{A} \subset A + V \subset F + V + V \subset F + U$.

□

TVRZENÍ 28. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.*

DŮKAZ. Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $U \in \tau(0)$. Pak $K \subset \bigcup_{x \in K}(x + \operatorname{Int} U)$, a tedy díky kompaktnosti K existuje konečná množina $F \subset K$ taková, že

$$K \subset \bigcup_{x \in F}(x + \operatorname{Int} U) \subset \bigcup_{x \in F}(x + U).$$

Nechť A je totálně omezená a $U \in \tau(0)$. Nechť $V \in \tau(0)$ je vyvážené takové, že $V + V \subset U$, a nechť $F \subset A$ je konečná množina pro kterou $A \subset F + V$. Jelikož je F konečná, je omezená, a tudíž $F \subset tV$ pro nějaké $t > 0$. Položme $s = \max\{1, t\}$. Díky vyváženosti V pak dostaneme $A \subset F + V \subset tV + V = s\frac{t}{s}V + s\frac{1}{s}V \subset sV + sV = s(V + V) \subset sU$.

□

POZNÁMKA 29. Nechť X je topologický prostor. Uvědomme si, že je-li $\{x_n\} \subset X$ posloupnost, která konverguje k $x \in X$, pak množina $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní. Tedy konvergentní posloupnosti v topologickém vektorovém prostoru jsou omezené (dokonce totálně omezené). Nic z toho ale neplatí pro nety! Vezměme například $\Gamma = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním (pro čtenáře obeznámené s teorií množin poznamenejme, že jde vlastně o ordinální interval $[1, 2\omega)$) a položme $x_{(0,n)} = n$ a $x_{(1,n)} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = 0$ v $\mathbb{R}$, ale $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ není omezená. Zajímavější příklad netu se stejným chováním je dán následujícím uspořádáním na Γ: $(j, n) \geq (j, m)$ pokud $n \geq m$, $j = 0, 1$, a $(1, n) \geq (0, m)$ pokud $n \geq 2m$. (Snadno ověříme, že Γ je usměrněná množina.)

Následující fakt je užitečné srovnat s Poznámkou 18.

FAKT 30. *Nechť (X,τ) je topologický vektorový prostor pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou ρ. Pak $A \subset X$ je τ-totálně omezená, právě když je ρ-totálně omezená.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak $U_\rho(0,\varepsilon) \in \tau(0)$, a tedy existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U_\rho(0,\varepsilon)$. To znamená, že F je konečná ε-síť pro A v metrice ρ.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\rho(0,\varepsilon) \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná ε-síť v metrice ρ. Díky translační invariantnosti ρ je $U_\rho(x,\varepsilon) = x + U_\rho(0,\varepsilon)$, z čehož plyne, že

$$A \subset \bigcup_{x\in F} U_\rho(x,\varepsilon) = \bigcup_{x\in F} \big(x + U_\rho(0,\varepsilon)\big) = F + U_\rho(0,\varepsilon) \subset F + U.$$

Tedy A je τ-totálně omezená.

□

DEFINICE 31. Nechť (X,τ_X), (Y,τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f\colon X \to Y$. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Snadno je vidět, že každé stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.

TVRZENÍ 32. *Nechť (X,τ_X), (Y,τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f\colon X \to Y$ je stejnoměrně spojité. Je-li $A \subset X$ totálně omezená, je i $f(A)$ totálně omezená.*

DŮKAZ. Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Pak existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$. Dále díky totální omezenosti A existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$. Pak $f(A) \subset f(F+U) = f\big(\bigcup_{y\in F}(y+U)\big) = \bigcup_{y\in F} f(y+U) \subset \bigcup_{y\in F}(f(y)+V) = f(F) + V$.
□

4. Lineární zobrazení

■■■Podobně jako v rámci normovaných vektorových prostorů, základním uvažovaným zobrazením v topologických vektorových prostorech je spojité, lineární zobrazení. Tvrzení 1.44 pro normované lineární prostory má analogii i v topologických vektorových prostorech, je však třeba ho formulovat opatrněji, vizte Větu 33.

Začneme jednoduchým dodatkem k Faktu 1.43: lineárním obrazem vyvážené množiny je opět vyvážená množina, podobně vzorem vyvážené množiny při lineárním zobrazení je opět vyvážená množina.

VĚTA 33. *Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) T je omezené na nějakém okolí 0.
(ii) T je spojité v 0.
(iii) T je spojité.
(iv) T je stejnoměrně spojité.
(v) T je sekvenciálně spojité.
(vi) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
(vii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to 0$ je množina $\{T(x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.

Pak (i)$\Rightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Leftrightarrow$(vii). Je-li Y lokálně omezený, pak (i)–(iv) jsou ekvivalentní. Je-li X pseudometrizovatelný, pak (ii)–(vii) jsou ekvivalentní.

V důkazu využijeme následující lemma.

LEMMA 34. *Nechť X je pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Jestliže $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{N}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$.*

DŮKAZ. Dle Věty 22 existuje na X translačně invariantní pseudometrika ρ indukující topologii X. Nalezneme indexy $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ tak, aby $\rho(x_n, 0) \leq \frac{1}{k^2}$ pro každé $n \geq n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položme $\gamma_n = k$ pro $n_{k-1} \leq n < n_k$. Pak $\gamma_n \to +\infty$ a pro každé $k > 1$ a $n \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k-1} \leq n < n_k$ platí díky Faktu 3(b), že

$$\rho(\gamma_n x_n, 0) = \rho(k x_n, 0) \leq k\rho(x_n, 0) \leq \frac{k}{(k-1)^2}.$$

Tedy $\rho(\gamma_n x_n, 0) \to 0$.

□

Poznamenejme, že bez předpokladu pseudometrizovatelnosti předchozí lemma neplatí, vizte Příklad 62.

DŮKAZ VĚTY 33. (iv)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii) jsou triviální.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Ze spojitosti T v 0 plyne existence $U \in \tau_X(0)$ takového, že $T(U) \subset V$. Splňují-li nyní prvky $x, y \in X$ vztah $x - y \in U$, pak $T(x) - T(y) = T(x - y) \in V$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $U \in \tau_X(0)$ je takové, že $T(U)$ je omezená. Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Pak existuje $t > 0$ takové, že $T(U) \subset tV$. Množina $\frac{1}{t}U$ je okolím 0 v X a platí, že $T(\frac{1}{t}U) = \frac{1}{t}T(U) \subset \frac{1}{t}tV = V$.

(iii)$\Rightarrow$(v) je zjevná.

(v)$\Rightarrow$(vi) Využijeme charakterizaci omezenosti z Tvrzení 19. Nechť $A \subset X$ je omezená, nechť $\{y_n\} \subset T(A)$ a nechť $\{x_n\} \subset A$ je taková, že $T(x_n) = y_n$. Protože A je omezená, je $\frac{1}{n}x_n \to 0$. Ze sekvenciální spojitosti T dostáváme, že $\frac{1}{n}y_n = T(\frac{1}{n}x_n) \to 0$. Tvrzení 19 tak implikuje, že $T(A)$ je omezená.

(vi)$\Rightarrow$(vii) plyne z toho, že pokud $\{x_n\} \subset X$ a $x_n \to 0$, pak $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (Poznámka 29).

(vii)$\Rightarrow$(vi) Využijeme opět charakterizaci omezenosti z Tvrzení 19. Nechť $A \subset X$ je omezená, nechť $\{y_n\} \subset T(A)$ a nechť $\{x_n\} \subset A$ je taková, že $T(x_n) = y_n$. Protože A je omezená, je $\frac{1}{\sqrt{n}}x_n \to 0$. Ze (vii) dostáváme, že $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}y_n\right\} = \left\{T\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n\right)\right\}$ je omezená. Tedy $\frac{1}{n}y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}y_n\right) \to 0$. Tvrzení 19 tak implikuje, že $T(A)$ je omezená.

Předpokládejme nyní, že Y je lokálně omezený a rozmysleme si, že (ii)$\Rightarrow$(i): Nechť $V \subset Y$ je omezené okolí 0. Pak existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že $T(U) \subset V$, tedy T je omezené na U.

Konečně, nechť X je pseudometrizovatelný a dokažme, že (vii)$\Rightarrow$(ii). Nechť $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0. Dle Lemmatu 34 existuje $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$. Pak je množina $\{T(\gamma_n x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená, a tedy $T(x_n) = \frac{1}{\gamma_n}T(\gamma_n x_n) \to 0$ dle Tvrzení 19. Díky pseudometrizovatelnosti X to znamená, že T je spojitý v 0.

□

Implikace (ii)$\Rightarrow$(i) v předchozí větě nemusí obecně platit, a to ani v metrizovatelném případě: stačí uvažovat prostor měřitelných funkcí X s konvergencí v míře (Příklad 4). Pak identita $Id\colon X \to X$ je zřejmě spojitá, ale není omezená na žádném okolí 0, neboť v prostoru X je každé okolí 0 neomezené (vizte Poznámku 25).

Taktéž implikace (vi)$\Rightarrow$(v) nemusí obecně platit. Příkladem jsou topologie z oddílu 9. Např. zobrazení $Id\colon (c_0, w) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ zobrazuje omezené množiny na omezené (Věta 94), ale není sekvenciálně spojité, neboť $e_n \to 0$ slabě, ale nikoli v normě (Příklad 90).

Konečně, ani implikace (v)$\Rightarrow$(iii) nemusí obecně platit:

PŘÍKLAD 35. Nechť $X = C([0,1])$ s topologií τ_{p} bodové konvergence a $Y = C([0,1])$ s topologií τ_λ konvergence v míře (vizte Příklad 4). Nechť $I\colon X \to Y$ je identické zobrazení. Pak I je sekvenciálně spojité, ale není spojité.

Ukažme nejprve sekvenciální spojitost I. Nechť ρ je metrika z Příkladu 4 indukující topologii τ_λ. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konvergující k f v X, tj. $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in [0,1]$. Pak jsou funkce $g_n = \min\{|f_n - f|, 1\}$ omezené konstantou 1 a bodově konvergují k 0. Z Lebesgueovy věty tedy plyne, že $\rho\big(I(f_n), I(f)\big) = \rho(f_n, f) = \int_0^1 g_n \,\mathrm{d}\lambda \to 0$, tj. $I(f_n) \to I(f)$ v Y.

Abychom ukázali, že I není spojité, pro libovolnou konečnou množinu $F \subset [0,1]$ nalezneme spojitou funkci $f_F\colon [0,1] \to [0,1]$ takovou, že $f_F(x) = 0$ pro $x \in F$ a $\lambda(\{x \in [0,1];\ f_F(x) = 1\}) \geq \frac{1}{2}$. Označme $\mathcal{F}$ systém konečných podmnožin $[0,1]$ a uspořádejme jej vztahem $H \geq F$, pokud $H \supset F$. Pak $\mathcal{F}$ je usměrněná množina a systém $\{f_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ je tak net v X. Zřejmě $\lim_{F\in\mathcal{F}} f_F = 0$ v X. Na druhou stranu však $\rho\big(I(f_F), 0\big) = \rho(f_F, 0) = \int_0^1 f_F \,\mathrm{d}\lambda \geq \frac{1}{2}$ pro každé $F \in \mathcal{F}$, takže $\{I(f_F)\}_{F\in\mathcal{F}}$ nekonverguje k 0 v Y.

$\diamond$

VĚTA 36. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $f : X \to \mathbb{K}$ je nenulová lineární forma. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá.*
(ii) $\operatorname{Ker} f$ *je uzavřené.*
(iii) $\overline{\operatorname{Ker} f} \neq X$.

DŮKAZ. Zjevně (i)⇒(ii)⇒(iii).

(iii)⇒(i) Dle předpokladu existuje $x \in X$ a $U \in \tau(0)$ vyvážené tak, že $(x + U) \cap \operatorname{Ker} f = \emptyset$. Pak $f(U)$ je vyvážená množina v $\mathbb{K}$ taková, že $0 \notin f(x) + f(U)$, což speciálně znamená, že $f(U) \neq \mathbb{K}$. Ukážeme, že to znamená, že $f(U)$ je omezená, což dle Věty 33 znamená, že f je spojitá. Pokud by $f(U)$ byla neomezená, nalezli bychom posloupnost $\{\lambda_n\} \in f(U)$ takovou, že $|\lambda_n| \to +\infty$. Díky vyváženosti ovšem obsahuje $f(U)$ s každým svým bodem λ též kruh $B(0, |\lambda|)$. To znamená, že $f(U) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, |\lambda_n|) = \mathbb{K}$, což je spor.

□

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) funkcionály.

DEFINICE 37. Nechť X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^\#$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat algebraickým duálem. Symbolem X^* budeme (ve shodě s Definicí 1.49) značit podprostor $X^\#$ sestávající z lineárních funkcionálů, které jsou spojité na X, a budeme jej nazývat topologickým duálem (či jenom duálem).

Podobně jako pro normované lineární prostory zavedeme též pojem izomorfismu:

DEFINICE 38. Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T : X \to Y$ je lineární. Říkáme, že T je izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je homeomorfismus X na Y; říkáme, že T je izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$.

FAKT 39. *Nechť X je vektorový prostor, Y je topologický vektorový prostor, a $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je net lineárních zobrazení z X do Y. Je-li $T : X \to Y$ bodovou limitou netu $\{T_\gamma\}$, pak T je lineární.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že dle předpokladu je pro každé $x \in X$ limita $\lim_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma(x)$ určena jednoznačně. Nechť $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ze spojitosti vektorových operací v Y plyne, že $T(x + y) = \lim T_\gamma(x + y) = \lim(T_\gamma(x) + T_\gamma(y)) = \lim T_\gamma(x) + \lim T_\gamma(y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \lim T_\gamma(\alpha x) = \lim \alpha T_\gamma(x) = \alpha \lim T_\gamma(x) = \alpha T(x)$.

□

5. Konečněrozměrné prostory

■■■Konečněrozměrné topologické vektorové prostory mají naštěstí očekávanou standardní strukturu, jak ukazuje následující analogie Věty 1.66.

VĚTA 40. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *X je Hausdorffův a* $\dim X < \infty$.
(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(iii) *X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí* 0.
(iv) *X je pseudometrizovatelný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité.*
(v) *X je pseudometrizovatelný a každá lineární forma na X je spojitá.*

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T\colon \mathbb{K}^n \to X$ předpisem

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní. Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Protože X je Hausdorffův, je množina $\{0\}$ uzavřená. Dále $0 \notin T(S)$ díky prostotě T, dle Věty 10(a) tedy existuje vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $V \cap T(S) = \emptyset$. Pak $T^{-1}(V) \subset U_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$: Kdyby existovalo $y \in V$ takové, že $c = \|T^{-1}(y)\|_2 \geq 1$, pak $T^{-1}(\frac{1}{c}y) \in S$, tedy $\frac{1}{c}y \in T(S)$. Díky vyváženosti V je ovšem $\frac{1}{c}y \in V$, což je spor. Zobrazení T^{-1} je tedy omezené na V, což dle Věty 33 znamená, že je spojité.

(ii)⇒(iii) Je-li $T\colon X \to \mathbb{K}^n$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)})$ okolí nuly (ze spojitosti T), které je kompaktní (ze spojitosti T^{-1}), a tedy totálně omezené (Tvrzení 28).

(iii)⇒(i) Nechť $V \in \tau(0)$ je totálně omezené. Dle Tvrzení 28 a Lemmatu 21 systém $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2^n}V;\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi okolí 0. Dále $\frac{1}{2}V \in \tau(0)$, a tedy existuje konečná $F \subset V$ taková, že $V \subset F + \frac{1}{2}V$. Položme $Y = \operatorname{span} F$. Pomocí matematické indukce ukážeme, že $V \subset Y + \frac{1}{2^n}V$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ to plyne z toho, že $F \subset Y$. Předpokládáme-li nyní platnost tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak

$$V \subset Y + \tfrac{1}{2^n}V \subset Y + \tfrac{1}{2^n}(F + \tfrac{1}{2}V) \subset Y + \tfrac{1}{2^n}(Y + \tfrac{1}{2}V) = Y + \tfrac{1}{2^{n+1}}V.$$

Jelikož je $\mathcal{B}$ báze okolí 0, Tvrzení 12(a) implikuje, že $V \subset \overline{Y}$. Dle Důsledku 15 je ovšem Y uzavřený v X, a tedy $V \subset Y$. Jelikož V je pohlcující, plyne odtud, že $Y = X$.

(ii)⇒(iv) Nechť $I\colon (X, \tau) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus. Definujme $\rho(x, y) = \|I(x) - I(y)\|_2$. Snadno je vidět, že ρ je metrika na X. Dále, je-li $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$ net, pak $x_\gamma \to x$ v metrice ρ, právě když $I(x_\gamma) \to I(x)$ v prostoru $\mathbb{K}^n$, což nastane, právě když $x_\gamma \to x$ v τ, neboť I je homeomorfismus. Tedy ρ indukuje topologii τ.

Nechť dále Y je topologický vektorový prostor a $T\colon X \to Y$ je lineární. Položme $S = T \circ I^{-1}$. Pak $S\colon \mathbb{K}^n \to Y$ je lineární. Ukážeme, že S je spojité, což ihned implikuje spojitost $T = S \circ I$. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je kanonická báze $\mathbb{K}^n$. Pak $S(x) = \sum_{i=1}^n x_i S(e_i)$ pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Protože „projekce“ $x \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost S.

(iv)⇒(v) je triviální.

(v)⇒(i) Není-li X Hausdorffův, pak existuje $x \in X \setminus \{0\}$, takové, že $x \in \overline{\{0\}}$. Doplníme-li množinu $\{x\}$ na algebraickou bázi vektorového prostoru X, pak snadno zkonstruujeme lineární formu f na X, pro kterou $f(x) \neq 0$. Ta ovšem není spojitá, neboť nesplňuje podmínku, že $f(\overline{\{0\}}) \subset \overline{f(\{0\})} = \{0\}$.

Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$. Nechť ρ je pseudometrika na X indukující jeho topologii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $U_n = \{x \in X;\ \rho(x, 0) < \frac{1}{n}\}$ okolím nuly, a tedy pohlcující. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti (vynásobením vhodnou konstantou) předpokládat, že $e_{\gamma_n} \in U_n$. To znamená, že $\rho(e_{\gamma_n}, 0) < \frac{1}{n}$, neboli $e_{\gamma_n} \to 0$. Položme $f(e_{\gamma_n}) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem zjevně není spojitá.

□

DŮSLEDEK 41. *Nechť X je konečněrozměrný vektorový prostor. Pak na X existuje jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie.*

DŮKAZ. Nechť (X, τ_1) a (X, τ_2) jsou Hausdorffovy topologické vektorové prostory. Pak dle Věty 40 je $Id\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ homeomorfismus (aplikujeme implikaci (i)⇒(iv) na Id a na Id^{-1}). To znamená, že $\tau_1 = \tau_2$.

□

POZNÁMKA 42. Poznamenejme, že podmínku pseudometrizovatelnosti z tvrzení (iv) a (v) výše nelze vynechat. Pro každý vektorový prostor X totiž existuje vektorová topologie na X taková, že každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité. Pro čtenáře s hlubšími znalostmi obecné topologie uvádíme následující konstrukci: Nechť $\mathcal{T}$ je množina všech vektorových topologií na X a nechť τ je slabá topologie na X vzhledem k soustavě $\{Id\colon X \to (X,\sigma);\ \sigma \in \mathcal{T}\}$. Snadno nahlédneme, že (X,τ) je topologický vektorový prostor. Nechť nyní (Y,φ) je topologický vektorový prostor a $T\colon X \to (Y,\varphi)$ je lineární. Nechť σ je slabá topologie na X vzhledem k $\{T\}$. Snadno je vidět, že $\sigma \in \mathcal{T}$, takže $Id\colon (X,\tau) \to (X,\sigma)$ je spojitá. Tedy i $T\colon (X,\tau) \to (Y,\varphi)$ je spojité, neboť je složením zobrazení $Id\colon (X,\tau) \to (X,\sigma)$ a $T\colon (X,\sigma) \to (Y,\varphi)$.

6. Lokálně konvexní prostory

■■■V průběhu tohoto oddílu vydělíme z třídy topologických vektorových prostorů jistou podtřídu tzv. lokálně konvexních prostorů, které hrají klíčovou roli v úvahách týkající se duality. Jak uvidíme v Příkladu 55, existují topologické vektorové prostory s triviálním duálem. V takových případech pak nelze prakticky vůbec aplikovat teorii duality. Lokálně konvexní prostory tak tvoří třídu prostorů, kde právě je možné používat věty podobné tvrzením z Kapitoly 2. Jak již sám název napovídá, klíčovou roli bude hrát právě konvexita.

Začněme jednoduchým pozorováním o zachovávání konvexity při vektorových operacích.

FAKT 43. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A, B \subset X$ jsou konvexní a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak množiny αA a $A + B$ jsou konvexní.*

DŮKAZ. Jsou-li $x, y \in A$ a $\lambda \in [0,1]$, pak $\lambda\alpha x + (1-\lambda)\alpha y = \alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \in \alpha A$. Dále, jsou-li $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ a $\lambda \in [0,1]$, pak $\lambda(x_1+y_1)+(1-\lambda)(x_2+y_2) = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2+\lambda y_1+(1-\lambda)y_2 \in A + B$.

□

DEFINICE 44. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $A \subset X$ se nazývá absolutně konvexní, pokud je konvexní a vyvážená.

Všimněme si, že jednotková koule v normovaném lineárním prostoru je absolutně konvexní.

FAKT 45. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A vyvážená, je conv A *vyvážená, a tedy absolutně konvexní.*
(b) A je absolutně konvexní, právě když pro každé $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \le 1$ platí $\alpha x + \beta y \in A$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in \operatorname{conv} A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \le 1$. Dle Tvrzení 1.17 existují $x_1, \dots, x_n \in A$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$, takové, že $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ a $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$. Pak $\alpha x_j \in A$ pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$, a tedy $\alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha\lambda_j x_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j(\alpha x_j) \in \operatorname{conv} A$. Množina conv A je tedy vyvážená.

(b) $\Leftarrow$ Konvexita A je zjevná, pro důkaz vyváženosti stačí vzít $\beta = 0$.

$\Rightarrow$ Nechť $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha|+|\beta| \le 1$. Je-li $\alpha = 0$, pak $\alpha x + \beta y = \beta y \in A$ díky vyváženosti A; analogicky pro $\beta = 0$. V ostatních případech položme $\mu = \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}$, $\nu = \frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}$. Pak $\mu, \nu > 0$ a $\mu + \nu = 1$. Protože A je vyvážená, platí $\frac{\alpha(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|}x \in A$ a $\frac{\beta(|\alpha|+|\beta|)}{|\beta|}y \in A$. Z konvexity A tedy plyne $\alpha x + \beta y = \mu\frac{\alpha(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|}x + \nu\frac{\beta(|\alpha|+|\beta|)}{|\beta|}y \in A$.

□

FAKT 46. *Nechť X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $|p(x) - p(y)| \le p(x-y)$ pro všechna $x, y \in X$.
(b) Množina $Z = p^{-1}(0)$ je podprostor X. Pro libovolná $x, y \in X$ taková, že $x - y \in Z$, je $p(x) = p(y)$.
(c) Množiny $\{x \in X;\ p(x) < c\}$ a $\{x \in X;\ p(x) \le c\}$ jsou absolutně konvexní pro každé $c \in [0, +\infty)$.

DŮKAZ. (a) Pro $x, y \in X$ platí, že $p(x) \le p(x-y)+p(y)$ a $p(y) \le p(y-x)+p(x) = p(x-y)+p(x)$, a tedy $|p(x)-p(y)| \le p(x-y)$.

(b) Pro $x, y \in Z$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ platí, že $0 \le p(\alpha x + \beta y) \le |\alpha|p(x) + |\beta|p(y) = 0$, a tedy $\alpha x + \beta y \in Z$. Jsou-li $x, y \in X$ taková, že $x - y \in Z$, pak z (a) plyne, že $|p(x) - p(y)| \le p(x-y) = 0$.

(c) Funkce p je konvexní, tedy všechny její podúrovňové množiny jsou konvexní. Ihned je vidět, že jsou též vyvážené.

$\square$

DEFINICE 47. Nechť X je vektorový prostor a $f: X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je nezáporně homogenní, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \geq 0$.

Všimněme si, že pro každou nezáporně homogenní funkci f platí, že $f(0) = 0$. Dále každý sublineární funkcionál (a speciálně každá pseudonorma) jsou nezáporně homogenní.

FAKT 48. *Nechť X je vektorový prostor a f je nezáporně homogenní funkce na X. Označme $F_c = \{x \in X;\ f(x) \leq c\}$ a $G_c = \{x \in X;\ f(x) < c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$. Pro každé $c > 0$ jsou množiny F_c a G_c pohlcující a navíc $F_c = cF_1$, $G_c = cG_1$.*

DŮKAZ. Nechť $c > 0$ a $x \in X$. Je-li $f(x) \leq 0$, pak $f(tx) = tf(x) \leq 0 < c$ pro každé $t \geq 0$, tedy $tx \in G_c \subset F_c$. Je-li $f(x) > 0$, pak $f(tx) = tf(x) \leq \frac{c}{2} < c$ pro každé $t \in [0, \frac{c}{2f(x)}]$, takže $tx \in G_c \subset F_c$. Množiny F_c a G_c jsou tedy pohlcující. Dále, $cG_1 = \{cx;\ x \in X, f(x) < 1\} = \{cx;\ x \in X, f(cx) < c\} = \{y \in X;\ f(y) < c\} = G_c$, a analogicky pro F_c.

$\square$

Dle předchozího faktu mají všechny podúrovňové množiny (v kladné úrovni) nezáporně homogenní funkce stejný tvar a můžeme se tedy omezit pouze na „kanonickou" množinu na úrovni 1. Dále uvidíme, že naopak každá pohlcující množina již určuje příslušnou *nezápornou* nezáporně homogenní funkci.

DEFINICE 49. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Minkowského[2] funkcionál množiny A je funkce $\mu_A\colon X \to [0, +\infty)$ definovaná předpisem

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\}.$$

Povšimněme si, že μ_A je dobře definovaný, neboť A je pohlcující. Není obtížné si rozmyslet, že je-li X normovaný lineární prostor, pak $\mu_{B_X} = \|\cdot\|$.

Shrňme nyní základní algebraické vlastnosti Minkowského funkcionálu:

VĚTA 50. *Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.
(b) μ_A je nezáporně homogenní.
(c) Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.
(d) Je-li A absolutně konvexní, je μ_A pseudonorma.
(e) $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.
(f) Je-li A vyvážená nebo konvexní, pak $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.
(g) Nechť $p\colon X \to [0, +\infty)$ je nezáporně homogenní a $B \subset X$.
- *Je-li B pohlcující a $B \subset \{x \in X;\ p(x) \leq 1\}$, pak $\mu_B \geq p$.*
- *Je-li $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B$, pak $\mu_B \leq p$.*

Je-li tedy $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X;\ p(x) \leq 1\}$, pak $\mu_B = p$.

DŮKAZ. (a) Je $\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} \subset \{\lambda > 0;\ x \in \lambda B\}$, odkud požadovaná nerovnost ihned plyne.

(b) Nechť $x \in X$ a $t \geq 0$. Pokud $t = 0$, pak $\mu_A(0x) = \mu_A(0) = 0 = 0\mu_A(x)$. Pro $t > 0$ je

$$\begin{aligned} t\mu_A(x) &= t\inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} = \inf\{t\lambda;\ \lambda > 0, x \in \lambda A\} = \\ &= \inf\{t\lambda;\ \lambda > 0, tx \in t\lambda A\} = \inf\{u > 0;\ tx \in uA\} = \mu_A(tx). \end{aligned}$$

(c) Díky (b) stačí dokázat subaditivitu. Nechť $x, y \in X$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existují $0 < \alpha < \mu_A(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ a $0 < \beta < \mu_A(y) + \frac{\varepsilon}{2}$ taková, že $x \in \alpha A$ a $y \in \beta A$. Z konvexity A dostáváme, že

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{\beta} \in A,$$

[2]Hermann Minkowski

a tedy $x + y \in (\alpha + \beta)A$. To znamená, že $\mu_A(x + y) \leq \alpha + \beta < \mu_A(x) + \mu_A(y) + \varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

(d) Díky (b) a (c) stačí dokázat, že $\mu_A(\alpha x) = |\alpha|\mu_A(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Nechť nejprve $|\alpha| = 1$. Díky vyváženosti A je $\frac{1}{\alpha}A = A$, takže $\mu_A(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0;\ \alpha x \in \lambda A\} = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda \frac{1}{\alpha} A\} = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} = \mu_A(x)$. Je-li nyní $\alpha \in \mathbb{K}$ libovolné nenulové, pak díky (b) a předchozímu je

$$\mu_A(\alpha x) = \mu_A\left(|\alpha| \frac{\alpha}{|\alpha|} x\right) = |\alpha|\mu_A\left(\frac{\alpha}{|\alpha|} x\right) = |\alpha|\mu_A(x).$$

(e) Je-li $x \in A$, pak $x \in 1A$, takže $\mu_A(x) \leq 1$.

(f) Díky (e) stačí ukázat první inkluzi. Je-li $x \in X$ takové, že $\mu_A(x) < 1$, pak existuje $\lambda \in (0, 1)$ takové, že $x \in \lambda A$. Díky předpokladům na A je $\lambda A \subset A$, takže $x \in A$.

(g) Nechť nejprve B je pohlcující a $B \subset \{x \in X;\ p(x) \leq 1\}$. Zvolme pevně $x \in X$. Je-li $\lambda > 0$ takové, že $x \in \lambda B$, pak $\frac{1}{\lambda}x \in B$, takže $p(\frac{1}{\lambda}x) \leq 1$, neboli $p(x) \leq \lambda$. Tedy $p(x)$ je dolní závora množiny $\{\lambda > 0;\ x \in \lambda B\}$, odkud plyne, že $p(x) \leq \mu_B(x)$.

Nechť nyní $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B$. Z Faktu 48 plyne, že B je pohlcující. Zvolme pevně $x \in X$. Protože p je nezáporná, existuje posloupnost $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ taková, že $\lambda_n > p(x)$ a $\lambda_n \to p(x)$. Pak $p\big(\frac{1}{\lambda_n}x\big) < 1$, takže $\frac{1}{\lambda_n}x \in B$, neboli $x \in \lambda_n B$, čili $\mu_B(x) \leq \lambda_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o limitě a nerovnostech tak je $\mu_B(x) \leq p(x)$.

□

Všimněme si, že z (g) speciálně plyne, že je-li $A \subset X$ pohlcující, pak pro $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$ je $\mu_B = \mu_A$.

Nyní se podívejme na některé topologické vlastnosti výše zkoumaných pojmů.

TVRZENÍ 51. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak* $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$. *Je-li navíc A vyvážená nebo konvexní, pak*

$$\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} \subset \overline{A}.$$

DŮKAZ. Nechť $x \in \operatorname{Int} A$. Díky spojitosti násobení skalárem existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $(1+\varepsilon)x \in \operatorname{Int} A \subset A$. Dle Věty 50(b) a (e) tedy $\mu_A(x) = \frac{1}{1+\varepsilon}\mu_A\big((1 + \varepsilon)x\big) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Nechť nyní A je vyvážená nebo konvexní. První tři inkluze plynou z předchozího a Věty 50(f). Nechť tedy pro $x \in X$ platí, že $\mu_A(x) \leq 1$. Pak pro každé $t \in (0, 1)$ platí, že $tx \in A$: Vskutku, $\mu_A(tx) = t\mu_A(x) \leq t < 1$, takže $tx \in A$ dle Věty 50(f). Tedy $\frac{n}{n+1}x \in A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\frac{n}{n+1}x \to x$, což znamená, že $x \in \overline{A}$.

□

LEMMA 52. *Nechť X je topologický vektorový prostor a p je sublineární funkcionál na X. Pak p je stejnoměrně spojitý, právě když je shora omezený na nějakém okolí* 0.

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. $\Leftarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $U \in \tau(0)$ a $C > 0$ jsou taková, že U je symetrické a $p(z) \leq C$ pro $z \in U$. Položme $V = \frac{\varepsilon}{C}U$. Pak V je okolí 0. Pro $x, y \in X$ taková, že $x - y \in V$, pak platí, že $\frac{C}{\varepsilon}(x - y) \in U$ a $\frac{C}{\varepsilon}(y - x) \in U$, takže díky sublinearitě dostáváme, že

$$-\varepsilon \leq -\frac{\varepsilon}{C} p\big(\tfrac{C}{\varepsilon}(y - x)\big) = -p(y - x) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y) = \frac{\varepsilon}{C} p\big(\tfrac{C}{\varepsilon}(x - y)\big) \leq \varepsilon.$$

□

Uvědomme si, že výše uvedené lemma lze aplikovat též na lineární funkcionály na *reálném* prostoru.

DŮSLEDEK 53. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující konvexní množina. Pak μ_A je spojitý, právě když A je okolím* 0. *V tom případě pak platí, že*

$$\operatorname{Int} A = \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} = \overline{A}.$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Množina $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$ je zjevně otevřené okolí 0, takže $A \in \tau(0)$ dle Věty 50(f).

$\Leftarrow$ plyne z Věty 50(c) a (e) a Lemmatu 52.

Konečně, inkluze $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$ plyne z Tvrzení 51, opačná inkluze pak z toho, že $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A$ a množina vlevo je otevřená. Analogicky, inkluze $\{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} \subset \overline{A}$

plyne opět z Tvrzení 51, opačná inkluze pak z toho, že $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$ a množina vpravo je uzavřená.

□

VĚTA 54. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak $X^* \neq \{0\}$, právě když v X existuje konvexní okolí* 0 *různé od X.*

DŮKAZ. Díky Tvrzení 2.1 platí, že $X^* = \{0\}$, právě když $(X_{\mathbb{R}})^* = \{0\}$, takže můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že X je reálný. Je-li $f \in X^*$, $f \neq 0$, pak $U = f^{-1}\big((-1,1)\big)$ je zjevně konvexní okolí 0 různé od X, neboť jistě existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = 1$.

Na druhou stranu, nechť $U \in \tau(0)$ je konvexní a $U \neq X$. Pak U je pohlcující, a tedy μ_U je nezáporný sublineární funkcionál, a existuje $z \in X$ takové, že $\mu_U(z) > 0$. Definujme $f(tz) = t\mu_U(z)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Pak f je lineární na $Z = \operatorname{span}\{z\}$ a $f \leq \mu_U$ na Z: Pro $t \geq 0$ je $f(tz) = t\mu_U(z) = \mu_U(tz)$ a pro $t < 0$ je $f(tz) = t\mu_U(z) < 0 \leq \mu_U(tz)$. Tedy dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3) existuje $F \in X^{\#}$ rozšiřující f takový, že $F \leq \mu_U$ na X. Díky Větě 50(e) je $\mu_U \leq 1$ na U, takže podle Lemmatu 52 je F spojitý. Konečně, $F(z) = f(z) = \mu_U(z) > 0$, tedy $F \neq 0$.

□

PŘÍKLAD 55 (Mahlon Marsh Day (1940)). Nechť μ je míra a $p \in (0,1)$. Položme $X = L_p(\mu)$ a definujme $\rho(f,g) = \int |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu$. Pak ρ je úplná translačně invariantní metrika na X, ve které je X topologický vektorový prostor. Tento prostor je lokálně omezený. Dále, je-li μ Lebesgueova míra na $[0,1]$, tj. $X = L_p([0,1])$, pak prostor X má následující vlastnost: Je-li $A \subset X$ neprázdná otevřená konvexní množina, pak $A = X$. To podle Věty 54 znamená, že $X^* = \{0\}$.

Označme $q(f) = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu$, $f \in X$. Pak $q(f+g) \leq q(f) + q(g)$ pro každé $f, g \in X$. (To platí díky tomu, že funkce $t \mapsto t^p$ je subaditivní, neboť je konkávní a v 0 nezáporná.) Odtud snadno dostáváme, že X je vektorový podprostor prostoru měřitelných funkcí a $\rho(f,g) = q(f-g)$ je translačně invariantní metrika. (Uvědomme si ale, že na rozdíl od případu $p \geq 1$ funkce $q^{1/p}$ není norma.) Úplnost ρ se dokáže zcela stejně jako pro $p \geq 1$, vizte např. [R, Důkaz Věty 3.11]. Abychom ukázali, že ρ generuje vektorovou topologii, stačí dle Faktu 3 ukázat spojitost násobení skalárem. Nechť $f_n \to f$ v ρ a $\alpha_n \to \alpha$ v $\mathbb{K}$. Pak

$$\rho(\alpha_n f_n, \alpha f) \leq \rho(\alpha_n f_n, \alpha_n f) + \rho(\alpha_n f, \alpha f) = |\alpha_n|^p \rho(f_n, f) + |\alpha_n - \alpha|^p q(f) \to 0.$$

Báze okolí 0 je tvořena množinami $B(0,r)$, $r > 0$. Ukážeme, že $B(0,1)$ je omezené okolí 0. Nechť tedy $U \in \tau(0)$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $B(0,r) \subset U$. Je-li $f \in B(0,1)$, pak $r^{1/p} f \in B(0,r)$, a tedy $B(0,1) \subset r^{-1/p} B(0,r) \subset r^{-1/p} U$.

Předpokládejme nyní, že $X = L_p([0,1])$. Stačí ukázat, že X nemá jiné konvexní okolí 0 než X. Nechť tedy $U \in \tau(0)$ je konvexní a $r > 0$ je takové, že $B(0,r) \subset U$. Nechť $f \in X$ je libovolná. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ takové, aby $n^{p-1} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < r$. Tvrdíme, že existuje dělení $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ intervalu $[0,1]$ takové, že

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda \quad \text{pro } j = 1, \ldots, n.$$

Vskutku, funkce $G(x) = \int_0^x |f|^p \,\mathrm{d}\lambda$ je neklesající na $[0,1]$, spojitá a splňuje $G(0) = 0$ a $G(1) = \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda$. Dle věty o nabývání mezihodnot tedy existují $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ tak, že $G(x_j) = \frac{j}{n} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda$ pro $j = 1, \ldots, n$. Položme nyní $g_j = n\chi_{(x_{j-1}, x_j]} f$. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že

$$\int_0^1 |g_j|^p \,\mathrm{d}\lambda = \int_{x_{j-1}}^{x_j} n^p |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = n^{p-1} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < r,$$

to jest $g_j \in B(0,r) \subset U$. Protože však $f = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g_j$, je $f \in U$. Tím jsme dokázali, že $U = X$.

◇

Jak jsme viděli v předchozím příkladu, může být duální prostor k netriviálnímu topologickému vektorovému prostoru triviální. V předchozích kapitolách jsme viděli velkou užitečnost tvrzení typu Hahnovy-Banachovy věty; takové věty ovšem nemohou platit, pokud není duální prostor dostatečně bohatý. Proto z obecných topologických prostorů vydělíme užitečnou třídu, která nám zajistí dostatečný přísun spojitých lineárních funkcionálů. Jak je patrno z Věty 54, klíčem jsou netriviální konvexní okolí 0.

DEFINICE 56.

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je lokálně konvexní[3], pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.
- Lokálně konvexní prostor, jehož topologie je indukovaná translačně invariantní úplnou metrikou, nazveme Fréchetův.
- Dále řekneme, že topologický vektorový prostor je normovatelný, pokud je jeho topologie generovaná normou.

Příkladem lokálně konvexních prostorů jsou například normované lineární prostory. V případě Banachových prostorů jsou to pak Fréchetovy prostory, neboť $\rho(x, y) = \|x - y\|$ je úplná translačně invariantní metrika.

POZNÁMKA 57. Lokálně konvexní prostory jsou úplně regulární, neboť každý topologický vektorový prostor je úplně regulární. Pro lokálně konvexní prostory to ovšem snadno dokážeme bez hlubších znalostí topologie pomocí Minkowského funkcionálu: Nechť X je lokálně konvexní, $y \in X$ a $F \subset X$ je uzavřená množina neobsahující y. Nechť $C \in \tau(0)$ je konvexní množina splňující $(y + C) \cap F = \emptyset$. Pak $\mu_C \geq 1$ na $F - y$, což plyne z Věty 50(f). Protože μ_C je spojitý (Důsledek 53), je $f(x) = \min\{\mu_C(x - y), 1\}$ spojitá funkce do $[0, 1]$, pro kterou $f(y) = 0$ a $f = 1$ na F.

TVRZENÍ 58. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $U \in \tau(0)$ konvexní, pak existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$.*

DŮKAZ. Položme $A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$. Pak A je absolutně konvexní množina: konvexita se snadno nahlédne, pro důkaz vyváženosti vezměme libovolné $r \in [0, 1]$ a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$. Pak $rU \subset U$, neboť U je konvexní a $0 \in U$, a tedy

$$(r\beta)A = \bigcap_{|\alpha|=1} (r\beta)\alpha U = \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma r U \subset \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma U = A.$$

Zvolme nyní $W \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $W \subset U$. Pak $\frac{1}{\alpha} W \subset W \subset U$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, což znamená, že $W \subset A$. Tedy $0 \in \operatorname{Int} W \subset \operatorname{Int} A$. Dle Tvrzení 12(e), (g) je tak $V = \operatorname{Int} A$ absolutně konvexní otevřené okolí 0 a $V \subset A \subset U$.

□

DŮSLEDEK 59. *V lokálně konvexním prostoru má $\tau(0)$ bázi sestávající z otevřených absolutně konvexních pohlcujících množin a též bázi sestávající z uzavřených absolutně konvexních pohlcujících množin.*

DŮKAZ. První část plyne z Tvrzení 58 a 7(a). Druhá část plyne z regularity topologie τ (každý regulární prostor má bázi okolí sestávající z uzavřených množin) spolu s Tvrzením 12(e), (f).

□

Nechť X je vektorový prostor, $p_1, \dots, p_n$ jsou pseudonormy na X a $\varepsilon > 0$. Označme

$$U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} = \{x \in X;\ p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon\}$$

a uvědomme si, že dle Faktů 46(c) a 48 je tato množina absolutně konvexní a pohlcující.

VĚTA 60. *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je neprázdný systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:*

(a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.
(b) Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.
(c) Net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.

[3]Poprvé je studoval John von Neumann (1935), název zavedl Andrej Nikolajevič Tichonov (Андрей Николаевич Тихонов) (1935).

Topologii τ budeme nazývat topologií generovanou systémem pseudonorem $\mathcal{P}$.

Na druhou stranu, je-li (X, τ) lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin, pak τ je generována systémem pseudonorem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$.

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že systém $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 8. Každá z množin $U_{p,\varepsilon}$ obsahuje 0, takže $\mathcal{S}$ je subbází filtru. Dále jsou-li $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$, pak pro $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ je $\bigcap_{j=1}^n U_{p_j,\varepsilon} = U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset \bigcap_{j=1}^n U_{p_j,\varepsilon_j}$, tedy $\mathcal{U}$ je bází dotyčného filtru. Jsou-li $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ a položíme-li $V = U_{p_1,\dots,p_n,\frac{\varepsilon}{2}}$, pak snadno nahlédneme, že $V + V \subset U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$. Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená a pohlcující, dle Věty 8 tedy existuje právě jedna vektorová topologie τ na X taková, že $\mathcal{U}$ je bází $\tau(0)$. Navíc množiny z $\mathcal{U}$ jsou absolutně konvexní, takže τ je lokálně konvexní.

(a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je zjevně omezená na $U_{p,1}$, takže je spojitá dle Lemmatu 52.

(b) $\Rightarrow$ Nechť $p \in \mathcal{P}$ je dána. Pak existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU_{p,1}$. Pro libovolné $x \in A$ pak platí, že $\frac{x}{t} \in U_{p,1}$, a tedy $p(x) < t$.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno a nechť $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ jsou taková, že $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. Pak existují $M_j > 0$ taková, že $p_j \le M_j$ na A pro $j = 1, \dots, n$. Zvolme $t > \max\{\frac{1}{\varepsilon} M_j;\ j = 1, \dots, n\}$. Pak pro $x \in A$ je $p_j(\frac{x}{t}) < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$, takže $x \in tU_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset tU$.

(c) $\Rightarrow$ plyne z (a).

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ je net a $x \in X$ je takové, že $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Existují $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ taková, že $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. Dále existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ takové, že pro všechny $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \ge \gamma_0$ je $p_j(x_\gamma - x) < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$. Pak pro $\gamma \ge \gamma_0$ je $x_\gamma - x \in U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. To znamená, že $x_\gamma \to x$ v τ.

Nechť nyní (X, τ) je lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin. Označme σ topologii generovanou systémem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$. Je-li $V \in \mathcal{V}$, pak $U_{\mu_V,1} \subset V$ dle Věty 50(f). Odtud dostáváme, že $\tau(0) \subset \sigma(0)$.

Na druhou stranu, pro každé $V \in \mathcal{V}$ a $\varepsilon > 0$ je množina $U_{\mu_V,\varepsilon} = \varepsilon U_{\mu_V,1}$ otevřená v τ (Fakt 48, Důsledek 53), odkud snadno plyne, že $\sigma(0)$ má bázi sestávající z τ-otevřených množin. Tedy $\sigma(0) \subset \tau(0)$.

□

Uvědomme si, že ze spojitosti každé pseudonormy $p \in \mathcal{P}$ ve větě výše plyne τ-otevřenost množin systému $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ 61. *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X je Hausdorffův.
(ii) Každý systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ má následující vlastnost:
Pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ takové, že $p(x) > 0$.
(iii) Existuje systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ s vlastností z tvrzení (ii).

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující τ a nechť $x \in X \setminus \{0\}$. Pak existují $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $x \notin U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$ (Věta 10(c)). Tedy $p_j(x) \ge \varepsilon > 0$ alespoň pro jedno $j \in \{1, \dots, n\}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$ je libovolné a $p \in \mathcal{P}$ je takové, že $\varepsilon = p(x) > 0$. Pak $x \notin U_{p,\varepsilon} \in \tau(0)$. Prostor X je tedy Hausdorffův dle Věty 10(c).

□

PŘÍKLAD 62. Nechť Γ je libovolná neprázdná množina a nechť $X = \mathbb{K}^\Gamma$ s topologií τ generovanou systémem pseudonorem $\{p_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$, kde $p_\gamma(f) = |f(\gamma)|$ pro $f \in X$. Snadno je vidět, že p_γ jsou opravdu pseudonormy, a že pro libovolný net $\{f_\alpha\} \subset X$ platí, že $f_\alpha \to f$, právě když $f_\alpha \to f$ bodově na Γ. Tedy τ je topologie bodové konvergence na Γ (nebo též součinová topologie na $\mathbb{K}^\Gamma$) a je to Hausdorffova lokálně konvexní topologie.

Nechť $\Gamma = [0, 1]$. Tvrdíme, že existuje posloupnost $\{f_n\} \subset X = \mathbb{K}^{[0,1]}$ konvergující k 0 taková, že $\lambda_n f_n \not\to 0$ pro žádnou posloupnost $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ takovou, že $\lambda_n \to +\infty$. (Z Lemmatu 34 tedy plyne, že X není metrizovatelný.) Označme $\Lambda = \big\{\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty);\ \lambda_n \to +\infty\big\}$. Pak Λ má kardinalitu kontinua (například obsahuje posloupnosti $\{n + \chi_A(n)\}$ pro $A \subset \mathbb{N}$), a tedy existuje bijekce $\Phi\colon \Lambda \to [0,1]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ položme

$$f_n(x) = \frac{1}{\Phi^{-1}(x)_n}.$$

Pro pevné $x \in [0,1]$ pak $f_n(x) \to 0$, nicméně pro každou posloupnost $\{\lambda_k\} \in \Lambda$ platí, že $\lambda_n f_n\big(\Phi(\{\lambda_k\})\big) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\lambda_n f_n \not\to 0$.

◇

Víme, že topologický vektorový prostor se spočetnou bází okolí 0 je pseudometrizovatelný (Věta 22). Pro lokálně konvexní prostory je důkaz tohoto tvrzení mnohem jednodušší.

LEMMA 63. *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor generovaný spočetným systémem pseudonorem $\{p_n\}$. Pak*

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x-y), 1\}$$

je translačně invariantní pseudometrika na X generující τ.

DŮKAZ. Ze subaditivity funkce $t \mapsto \min\{t, 1\}$ snadno plyne, že ρ je translačně invariantní pseudometrika. Všechny pseudonormy p_n jsou τ-spojité (Věta 60(a)) a řada v definici ρ konverguje stejnoměrně na $X \times X$, což znamená, že ρ je τ-spojitá. Odtud plyne, že každé ρ-okolí 0 je v $\tau(0)$.

Na druhou stranu, nechť $U \in \tau(0)$. Pak existují $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \in (0,1]$ taková, že $U_{p_{n_1},\dots,p_{n_k},\varepsilon} \subset U$. Položme $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Pak $U_\rho(0, \frac{\varepsilon}{2^m}) \subset U$. Vskutku, je-li $x \in X$, $\rho(x, 0) < \frac{\varepsilon}{2^m}$, pak $\frac{1}{2^{n_j}} \min\{p_{n_j}(x), 1\} < \frac{\varepsilon}{2^m}$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$. Odtud snadno plyne, že $p_{n_j}(x) < \varepsilon$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$, neboli $x \in U_{p_{n_1},\dots,p_{n_k},\varepsilon} \subset U$. Tedy každé τ-okolí 0 je i ρ-okolím 0.

□

PŘÍKLAD 64. Nechť T je topologický prostor a nechť $X = C(T)$ s topologií τ stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T z Příkladu 9. Pro $K \subset T$ kompaktní a $f \in X$ položme $p_K(f) = \max_K |f|$. Pak systém pseudonorem $\mathcal{P} = \{p_K;\ K \subset T \text{ kompaktní}\}$ generuje τ, takže X je lokálně konvexní. Uvědomme si, že topologie bodové konvergence na X je slabší než τ, neboť jednobodové podmnožiny T jsou kompaktní. Speciálně, τ je Hausdorffova. Dále platí:

(a) Jestliže v T existuje posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ taková, že každá kompaktní $K \subset T$ je podmnožinou nějaké K_n, pak systém $\mathcal{Q} = \{p_{K_n};\ n \in \mathbb{N}\}$ také generuje τ.

(b) Je-li T lokálně kompaktní se spočetnou bází, pak X je Fréchetův prostor a topologie τ je topologií lokálně stejnoměrné konvergence.

Snadno nahlédneme, že p_K jsou pseudonormy. Dle Věty 60 tedy systém $\mathcal{P}$ generuje τ a τ je lokálně konvexní.

(a) Označme σ topologii generovanou systémem $\mathcal{Q}$. Jelikož $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, je zjevně $\sigma(0) \subset \tau(0)$. Je-li nyní $U \in \tau(0)$ dáno, pak existují kompakty $L_1, \dots, L_k \subset T$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{p_{L_1},\dots,p_{L_k},\varepsilon} \subset U$. Dále existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\bigcup_{j=1}^{k} L_j \subset K_n$. Snadno je vidět, že $U_{p_{K_n},\varepsilon} \subset U_{p_{L_1},\dots,p_{L_k},\varepsilon} \subset U$, a tedy $U \in \sigma(0)$.

(b) Dle Tvrzení 15.62 existuje posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ jako v (a), pro kterou navíc platí, že $K_n \subset K_{n+1}$. Nechť ρ je metrika z Lemmatu 63 daná pseudonormami $\{p_{K_n}\}$. Dle (a) tato metrika generuje τ. Ukažme, že ρ je úplná. Nechť $\{f_j\} \subset X$ je ρ-cauchyovská posloupnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak posloupnost $\{f_j \restriction_{K_n}\}_{j=1}^{\infty}$ cauchyovská v úplném prostoru $(C(K_n), \|\cdot\|_\infty)$, takže existuje funkce $g_n \in C(K_n)$ taková, že $f_j \restriction_{K_n} \rightrightarrows g_n$ na K_n. Jelikož je posloupnost $\{K_n\}$ neklesající, nutně platí, že $g_k \restriction_{K_n} = g_n$ pro $k > n$. Odtud snadno odvodíme existenci funkce $f\colon T \to \mathbb{K}$ takové, že $f_j \restriction_{K_n} \rightrightarrows f \restriction_{K_n}$ na K_n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně, $f \restriction_{K_n}$ je spojitá.

Tvrdíme, že $f \in C(T)$. Nechť $x \in T$ je dáno. Nechť V je kompaktní okolí bodu x a nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $V \subset K_n$. Jelikož f je spojitá na K_n, je spojitá na V, a tedy i v bodě x.

Konečně, dle úvah výše je $\lim_{j\to\infty} p_{K_n}(f_j - f) = \lim_{j\to\infty} p_{K_n}(f_j \restriction_{K_n} - f \restriction_{K_n}) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\rho(f_j, f) \to 0$, což znamená, že metrika ρ je úplná.

◇

PŘÍKLAD 65. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$. Pak prostor $H(\Omega)$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence je uzavřeným podprostorem $C(\Omega)$ z předchozího příkladu. Je to tedy také Fréchetův prostor. Stačí si uvědomit, že lokálně stejnoměrná limita posloupnosti holomorfních funkcí je opět holomorfní funkce. ◇

VĚTA 66 (A. N. Kolmogorov (1934)). *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak X je pseudonormovatelný (resp. normovatelný, je-li X Hausdorffův) právě tehdy, když v něm existuje omezené konvexní okolí* 0.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je konvexní a omezené. Dle Tvrzení 58 existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$, tedy V je omezené. Pak pseudonorma μ_V generuje τ. Vskutku, systém $\left\{U_{\mu_V,\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je bází okolí 0 v topologii generované pseudonormou μ_V. Ale $\left\{U_{\mu_V,\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}U_{\mu_V,1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}V\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (Fakt 48, Důsledek 53), což je báze $\tau(0)$ dle Lemmatu 21.

$\Rightarrow$ Je-li τ generována nějakou pseudonormou p na X, je $U_{p,1}$ konvexní okolí 0, které je τ-omezené dle Věty 60(b). □

Tento oddíl uzavřeme tvrzením, které se nám bude hodit později.

TVRZENÍ 67. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A omezená, je i množina $\operatorname{conv} A$ *omezená.*
(b) Je-li A totálně omezená, je i množina $\operatorname{conv} A$ *totálně omezená.*

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje konvexní $C \in \tau(0)$ takové, že $C \subset U$. Protože A je omezená, existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tC$. Množina vpravo je ovšem konvexní, což znamená, že $\operatorname{conv} A \subset tC \subset tU$.

(b) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Množina $\operatorname{conv} F$ je kompaktní, neboť je spojitým obrazem kompaktu $\left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n;\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\right\}$ při zobrazení $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$, kde $F = \{x_1, \dots, x_n\}$. Je tedy totálně omezená (Tvrzení 28), takže existuje $H \subset X$ konečná taková, že $\operatorname{conv} F \subset H + V$. Dle Faktu 43 je množina $(\operatorname{conv} F) + V$ konvexní, odkud plyne, že $\operatorname{conv} A \subset \operatorname{conv}(F + V) \subset (\operatorname{conv} F) + V \subset H + V + V \subset H + U$. □

Poznamenejme, že bez předpokladu lokální konvexity předchozí tvrzení neplatí – konvexní obal totálně omezené množiny nemusí být ani omezený:

PŘÍKLAD 68. Nechť $p \in (0,1)$ a $X = \ell_p = \left\{x = (x_n);\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\right\}$ s metrikou $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p$. Pak ρ je úplná translačně invariantní metrika na X, ve které je X topologický vektorový prostor. Tento prostor je lokálně omezený. Dále platí:

(a) Prostor X^* lze indentifikovat s prostorem ℓ_∞ pomocí lineární bijekce $I\colon \ell_\infty \to X^*$, $I(y) = f_y$, kde
$$f_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$
(b) Existuje kompaktní množina $K \subset X$, jejíž konvexní obal není omezený.

Prostor X není lokálně konvexní (Tvrzení 67 spolu s (b)), ale přesto má netriviální duál, který odděluje body X (stačí vzít souřadnicové funkcionály). Tedy X obsahuje mnoho netriviálních otevřených konvexních množin, nicméně ne dost na to, aby to byl lokálně konvexní prostor.

První část plyne z Příkladu 55, vezmeme-li za μ aritmetickou míru na $\mathbb{N}$.

(a) Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ je $\{x_n\}$ omezená a označíme-li $M = \|x\|_\infty$, pak
$$\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| = \sum_{n=1}^\infty M \left|\frac{x_n}{M} y_n\right| \le M\|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{x_n}{M}\right|^p = M^{1-p}\|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p, \tag{1}$$

neboť $\left|\frac{x_n}{M}\right| \leq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární. Tvrdíme, že je omezený na $U(0,1)$: Pro každé $x \in U(0,1)$ je $\|x\|_\infty \leq 1$, a tedy nerovnost (1) implikuje, že $|f_y(x)| \leq \|y\|_\infty$. To znamená, že f_y je spojitý lineární funkcionál (Věta 33).

Linearita zobrazení I je zřejmá. Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in X^*$. Stejně jako pro $p \geq 1$ definujeme kanonické bázové vektory $e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, a snadno si rozmyslíme, že pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ opět platí, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v metrice ρ. Vskutku, $\rho\big(x, \sum_{k=1}^n x_k e_k\big) = \sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p \to 0$. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Množina $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (snadno nahlédneme z definice), takže i posloupnost $\{y_n\}$ je omezená (Věta 33), neboli $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in X$. Pak $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^\infty x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n = f_y(x).$$

Konečně, protože $I(y)(e_n) = y_n$, je $\operatorname{Ker} I = \{0\}$, a tedy I je prosté.

(b) Zvolme nerostoucí posloupnost $\{c_n\} \subset (0, +\infty)$ konvergující k 0, pro kterou $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} c_n^p = +\infty$. (Stačí například položit $c_n = (1 + \log n)^{-1}$ nebo $c_n = n^{p-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.) Pak $c_n e_n \to 0$, neboť $\rho(c_n e_n, 0) = c_n^p \to 0$. Množina $K = \{c_n e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ je tedy kompaktní. Položíme-li však $x^m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{m} c_n e_n$ pro $m \in \mathbb{N}$, dostaneme prvky $\operatorname{conv} K$, které splňují

$$\rho(x^m, 0) = \sum_{n=1}^m \left|\frac{1}{m} c_n\right|^p \geq \frac{1}{m^p} \sum_{n=1}^m c_m^p = m^{1-p} c_m^p \to +\infty.$$

Dle Poznámky 18 je tak množina $\operatorname{conv} K$ neomezená v topologii generované metrikou ρ.

◇

7. Oddělovací věty

V tomto oddílu se budeme věnovat dalším zásadním důsledkům Hahnovy-Banachovy věty. Jednoduchým předchůdcem níže uvedených oddělovacích vět je Věta 2.7. Vzhledem ke znění Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3) není překvapivé, že hlavní roli zde hraje konvexita (vizte též Větu 54).

LEMMA 69. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $f \in X^* \setminus \{0\}$. Pak f je otevřené zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in f(G)$ je libovolný. Nechť dále $x \in G$ je takový, že $y = f(x)$. Pak existuje vyvážené $U \in \tau(0)$ takové, že $x + U \subset G$. Dále existuje $w \in X$, pro které $f(w) = 1$. Protože U je pohlcující, existuje $\delta > 0$ takové, že $\delta w \in U$. Pak díky vyváženosti U platí, že

$$\begin{aligned} U(y,\delta) = y + \{\lambda\delta;\ |\lambda| < 1\} &= f(x) + \{f(\lambda\delta w);\ |\lambda| < 1\} = \\ &= f\big(x + \{\lambda\delta w;\ |\lambda| < 1\}\big) \subset f(x+U) \subset f(G). \end{aligned}$$

Tedy $f(G)$ je otevřená.

□

VĚTA 70. [4] *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ *pro každé $x \in A$.*

(b) Je-li X lokálně konvexní, A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$. *Je-li navíc A absolutně konvexní, pak dokonce* $\sup_A |f| < \inf_B \operatorname{Re} f$.

[4] Tato věta byla dokázána v různě silných formulacích mnoha matematiky: První verze pochází od Stanisława Mazura (1933), který formuloval tvrzení podobné (a) v normovaných lineárních prostorech pro B podprostor X. Zobecnění Mazurovy věty do topologických vektorových prostorů provedl Jean Dieudonné (1941) a skupina Nicolas Bourbaki. Verzi pro B konvexní v normovaných lineárních prostorech dokázal Meier „Maks“ Eidelheit (1936). Námi uvedený důkaz, který v podstatě převádí konvexní případ na Mazurovu větu, podal John Wilder Tukey (1942).

DŮKAZ. Je-li A nebo B prázdná, pak tvrzení zřejmě triviálně platí. Můžeme tedy předpokládat, že A i B jsou neprázdné. Díky Tvrzení 2.1 stačí (a) a první část (b) dokázat pouze pro reálné prostory a v komplexním případě pak vzít funkcionál $h(x) = f(x) - if(ix)$.

(a) Zvolme $a \in A$ a $b \in B$ a označme $w = b - a$ a $C = w + A - B$. Pak C je otevřená konvexní množina (Tvrzení 11(a), Fakt 43), pro kterou $0 \in C$ a $w \notin C$ (neboť $A \cap B = \emptyset$). Podle Věty 50(c), (e) a (f) je μ_C sublineární funkcionál, $\mu_C \leq 1$ na C a $\mu_C(w) \geq 1$. Položíme-li $Y = \operatorname{span}\{w\}$ a $g(tw) = t$ pro $t \in \mathbb{R}$, pak g je spojitý lineární funkcionál na Y. Dále $g(tw) = t \leq t\mu_C(w) = \mu_C(tw)$ pro $t \geq 0$ a $g(tw) = t < 0 \leq \mu_C(tw)$ pro $t < 0$, tedy $g(x) \leq \mu_C(x)$ pro každé $x \in Y$. Podle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3(a)) existuje lineární forma f na X, která rozšiřuje g a splňuje $f \leq \mu_C$ na X. Speciálně $f(x) \leq \mu_C(x) \leq 1$ pro $x \in C$, tedy f je spojitý lineární funkcionál (Lemma 52), pro který $f(w) = g(w) = 1$.

Nechť nyní $x \in A$ a $y \in B$. Pak $x - y + w \in C$, takže $f(x) = f(y) + f(x - y + w) - f(w) \leq f(y) + \mu_C(x - y + w) - 1 \leq f(y)$. Odtud plyne, že $f(x) \leq \alpha = \inf_B f$ pro každé $x \in A$. Množina $f(A)$ je ovšem otevřená (Lemma 69), takže kdyby pro nějaké $x \in A$ bylo $f(x) = \alpha$, pak by existovalo $y \in A$, pro které by $f(y) > \alpha$, což nejde. Tím je nerovnost z (a) dokázána.

(b) Jelikož je X lokálně konvexní prostor, existuje díky Větě 10(a) a Důsledku 59 otevřené konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $(B + V) \cap A = \emptyset$. Množina $B + V$ je otevřená a konvexní (Tvrzení 11(a), Fakt 43). Dle (a) tedy existuje $g \in X^*$ takový, že $g(x) < \inf_A g$ pro každé $x \in B + V$. Díky kompaktnosti B existuje $x \in B$, pro které $\max_B g = g(x) < \inf_A g$. Funkcionál $f = -g$ tak splňuje inzerovanou nerovnost.

Konečně, předpokládejme, že je navíc A absolutně konvexní. Nechť $y \in A$ je libovolné. Pak existuje $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$ takové, že $|f(y)| = \alpha f(y) = f(\alpha y) = \operatorname{Re} f(\alpha y)$. Protože $\alpha y \in A$, je $|f(y)| = \operatorname{Re} f(\alpha y) \leq \sup_A \operatorname{Re} f$. Odtud plyne, že $\sup_A |f| \leq \sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.

□

Následující důsledek je analogií Důsledku 2.5 a Vět 2.7 a 2.4 pro lokálně konvexní prostory.

DŮSLEDEK 71. *Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X.
(b) Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \notin Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = 1$.
(c) Je-li Y podprostor X a $f \in Y^*$, pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F\restriction_Y = f$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x, y \in X$. Použitím Věty 70(b) pro $A = \{x\}$ a $B = \{y\}$ obdržíme $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$.

(b) Položme $A = Y$ a $B = \{x\}$. Dle Věty 70(b) existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_Y |f| < \operatorname{Re} f(x)$. Pak f je lineární funkcionál, který je omezený na celém vektorovém prostoru Y, a tedy je na Y nulový. Zjevně $f(x) \neq 0$, na závěr tedy stačí vynásobit f konstantou $\frac{1}{f(x)}$.

(c) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \neq 0$. Tedy existuje $x \in Y$, pro které $f(x) = 1$. Z hlediska prostoru X je množina $\operatorname{Ker} f$ relativně uzavřená v Y a $x \in Y \setminus \operatorname{Ker} f$. Odtud plyne, že $x \notin \overline{\operatorname{Ker} f}^X$, přičemž množina vpravo je uzavřený podprostor X. Dle (b) tedy existuje $F \in X^*$ takový, že $F(x) = 1$ a $F\restriction_{\operatorname{Ker} f} = 0$. Tvrdíme, že to znamená, že $F\restriction_Y = f$: Nechť $y \in Y$. Pak $y - f(y)x \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} F$, a tedy $F(y) = F(y - f(y)x) + F(f(y)x) = f(y)F(x) = f(y)$.

□

Následující příklady ukazují, že bez dodatečných předpokladů na množiny A, B ve Větě 70 se nelze obejít.

PŘÍKLAD 72. Nechť X je nekonečněrozměrný pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Pak v něm existuje kontinuum mnoho disjunktních konvexních množin (dokonce afinních podprostorů) $Z_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, z nichž každá je hustá v X. Žádné dvě tedy nelze oddělit spojitým lineárním funkcionálem.

Skutečně, dle Věty 40 existuje nespojitý lineární funkcionál $f\colon X \to \mathbb{K}$. Položme $Z_\alpha = f^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Existuje $w \in X$ takové, že $c = f(w) \neq 0$. Pak $Z_\alpha = \frac{\alpha}{c}w + \operatorname{Ker} f$, tedy Z_α je afinní podprostor. Zjevně Z_α a Z_β jsou disjunktní, je-li $\alpha \neq \beta$. Konečně, $Z_0 = \operatorname{Ker} f$ je hustý v X dle Věty 36 a ostatní Z_α jsou husté v X dle Tvrzení 5(a).

◇

PŘÍKLAD 73 (John Wilder Tukey (1942)). Existují disjunktní uzavřené konvexní množiny $A, B \subset \ell_2$ takové, že $A - B$ je hustá v ℓ_2. Tyto množiny tedy nelze oddělit spojitým nenulový lineárním funkcionálem ani v nejslabším smyslu, tj. neexistuje $f \in \ell_2^* \setminus \{0\}$ tak, aby $f(x) \geq f(y)$ pro libovolná $x \in A$, $y \in B$. Vskutku, to by znamenalo, že $f(A-B) \subset [0,+\infty)$, ale $\mathbb{R} = f(\ell_2) = f(\overline{A-B}) \subset \overline{f(A-B)} \subset [0,+\infty)$, což je spor.

Položme

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \ell_2;\ x_1 \geq n \cdot \left|x_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right| \text{ pro } n \geq 2\right\}, \\ B &= \{x \in \ell_2;\ x_n = 0 \text{ pro } n \geq 2\}. \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že A je konvexní a uzavřená (je to průnik uzavřených množin) a B je dokonce uzavřený jednorozměrný podprostor. Dále, je-li $x \in B$, pak pro $n \geq 2$ je $n\left|x_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right| = n^{\frac{1}{3}} \to +\infty$, takže $x \notin A$. Tedy A a B jsou disjunktní.

Zvolme nyní $z \in \ell_2$ a $\varepsilon > 0$ libovolně. Existuje $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ takové, že $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} < \frac{\varepsilon^2}{4}$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Definujme

$$x_n = \begin{cases} \max_{2 \leq j \leq k} j\left|z_j - \frac{1}{j^{\frac{2}{3}}}\right| & \text{pro } n = 1, \\ z_n & \text{pro } 2 \leq n \leq k, \\ \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} & \text{pro } n > k. \end{cases}$$

Snadno je vidět, že $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$. Dále položme $y = (x_1 - z_1, 0, 0, \dots) \in B$. Pak

$$\|z - (x-y)\| = \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(z_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2} + \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} < \varepsilon.$$

◇

8. Součiny prostorů, kvocienty, projekce a doplňky

■■■Podobně jako v kontextu normovaných lineárních prostorů, i topologické vektorové prostory lze kombinovat pomocí standardních množinových operací. Předvedeme v tomto oddíle několik nejzákladnějších konstrukcí a jejich vlastnosti.

TVRZENÍ 74. *Nechť X_γ, $\gamma \in \Gamma$ jsou topologické vektorové prostory. Pak $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ (se součinovou topologií) je topologický vektorový prostor. Pokud jsou X_γ, $\gamma \in \Gamma$ lokálně konvexní, je i X lokálně konvexní.*

DŮKAZ. Nechť $\{(f_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ je net v $X \times X$ konvergující k $(f, g) \in X \times X$. Pak $\lim_\alpha f_\alpha(\gamma) = f(\gamma)$ a $\lim_\alpha g_\alpha(\gamma) = g(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, takže ze spojitosti sčítání na každém prostoru X_γ plyne, že $\lim_\alpha (f_\alpha + g_\alpha)(\gamma) = \lim_\alpha \bigl(f_\alpha(\gamma) + g_\alpha(\gamma)\bigr) = f(\gamma) + g(\gamma) = (f+g)(\gamma)$, neboli $f_\alpha + g_\alpha \to f + g$ v X. Zcela analogicky dokážeme i spojitost násobení skalárem.

Předpokládejme nyní, že X_γ, $\gamma \in \Gamma$ jsou lokálně konvexní. Pro každé $\gamma \in \Gamma$ nechť $\mathcal{U}_\gamma$ je báze okolí 0 v X_γ sestávající z konvexních množin a obsahující X_γ. Z definice součinové topologie snadno plyne, že systém

$$\mathcal{U} = \left\{\prod_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma;\ U_\gamma \in \mathcal{U}_\gamma, U_\gamma \neq X_\gamma \text{ jen pro konečně mnoho } \gamma\right\}$$

je bází okolí 0 v X. Protože vektorové operace jsou definovány po složkách, je téměř zřejmé, že množiny v $\mathcal{U}$ jsou konvexní. Tedy X je lokálně konvexní.

□

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X. Uvažujme (vektorový) faktorprostor X/Y a kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$. Na prostoru X/Y uvažujme kvocientovou topologii σ, tj. topologii definovanou tak, že množina $G \subset X/Y$ je σ-otevřená právě tehdy, když $q^{-1}(G)$ je τ-otevřená. Prostor $(X/Y, \sigma)$ se nazývá faktorprostorem (též kvocientem) (X, τ) podle Y.

TVRZENÍ 75. *Nechť Y je podprostor topologického vektorového prostoru (X, τ). Na X/Y uvažujme výše zmíněnou kvocientovou topologii σ.*

(a) Kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojité lineární otevřené zobrazení, které je na. Dále platí, že $\sigma = \{q(G);\ G \in \tau\}$.
(b) X/Y je topologický vektorový prostor. Pokud X je lokálně konvexní, je i X/Y lokálně konvexní.
(c) X/Y je Hausdorffův, právě když Y je uzavřený.
(d) Je-li X normovaný lineární prostor a Y je uzavřený, je topologie na X/Y generována normou prostoru X/Y.

DŮKAZ. (a) Fakt, že q je lineární a na, je nám již dobře známý. Spojitost plyne z definice kvocientové topologie. Je-li nyní $G \subset X$ otevřená, pak $q^{-1}(q(G)) = G + Y$, což je otevřená množina v X. Dle definice je tedy $q(G)$ otevřená.

Dále, zobrazení q je otevřené, tedy $q(G) \in \sigma$ pro $G \in \tau$. Na druhou stranu, pro $H \in \sigma$ je $H = q(G)$, kde $G = q^{-1}(H) \in \tau$ díky spojitosti q.

(b) Z (a) snadno plyne, že $\sigma(0) = \{q(U);\ U \in \tau(0)\}$ a že je-li $\mathcal{U}$ báze $\tau(0)$, pak $\{q(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ je báze $\sigma(0)$. Vezmeme-li za $\mathcal{U}$ bázi $\tau(0)$ sestávající z vyvážených množin, pak snadno ověříme, že systém $\{q(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ splňuje podmínky (i)–(iii) z Věty 8. (Je $q(V + V) = q(V) + q(V)$ a dále $q(U)$ je pohlcující pro U pohlcující, neboť q je na.) Tedy σ je vektorová topologie. Je-li τ dokonce lokálně konvexní, pak q zobrazí bázi $\tau(0)$ sestávající z konvexních množin na bázi $\sigma(0)$ se stejnou vlastností. Tedy σ je pak také lokálně konvexní.

(c) $\Rightarrow$ Množina $\{\widehat{0}\}$ je uzavřená, takže $Y = q^{-1}(\{0\})$ je uzavřený dle (a).

$\Leftarrow$ Množina $X \setminus Y$ je otevřená, takže $(X/Y) \setminus \{\widehat{0}\} = q(X \setminus Y)$ je otevřená dle (a). Tedy $\{\widehat{0}\}$ je uzavřená.

(d) Systém $\{\frac{1}{n}U_X;\ n \in \mathbb{N}\}$ je bází $\tau(0)$ a tedy systém $\mathcal{V} = \{q(\frac{1}{n}U_X);\ n \in \mathbb{N}\}$ je bází $\sigma(0)$ (vizte důkaz (b)). Dle Tvrzení 1.69 je ale $\mathcal{V} = \{\frac{1}{n}U_{X/Y};\ n \in \mathbb{N}\}$, což je báze okolí 0 v prostoru $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$. (Alternativní argument pro znalce topologie: Zobrazení $q\colon (X, \tau) \to (X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je spojité a otevřené (plyne snadno z Tvrzení 1.69), takže $\|\cdot\|_{X/Y}$ generuje kvocientovou topologii.)

□

DŮSLEDEK 76. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $Y = \overline{\{0\}}$. Pak X/Y je Hausdorffův topologický vektorový prostor.*

DŮKAZ. Dle Tvrzení 12(d) je Y uzavřený podprostor X. Tvrzení 75(b) říká, že X/Y je topologický vektorový prostor, Tvrzení 75(c) pak implikuje, že X/Y je Hausdorffův.

□

TVRZENÍ 77. *Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ je podprostor a $P\colon X \to Y$ je spojitá lineární projekce X na Y. Pak P je otevřené zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in P(G)$. Nechť $x \in G$ je takové, že $P(x) = y$. Díky linearitě P je $P(G + y - x) = P(G) + P(y) - P(x) = P(G) + y - y = P(G)$. Dále $y \in G + y - x$, tedy $(G + y - x) \cap Y$ je relativně otevřené okolí y v Y. Ale $(G + y - x) \cap Y \subset P(G + y - x) = P(G)$, což znamená, že y leží ve vnitřku $P(G)$ vzhledem k Y. Tedy $P(G)$ je otevřená.

□

Pro topologické vektorové prostory definujeme pojmy topologického součtu a komplementovaného podprostoru zcela shodně jako v případě normovaných lineárních prostorů. Následující věta je analogií Věty 1.79.

VĚTA 78. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y, Z jsou jeho podprostory. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon Y \times Z \to X$, $T(y, z) = y + z$ je izomorfismus.*

DůKAZ. $\Rightarrow$ Zobrazení T je zjevně lineární a je spojité díky spojitosti sčítání. Dále pro zobrazení $S\colon X \to Y \times Z$, $S(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ platí, že $T \circ S = Id$ a $S \circ T = Id$, tedy T je bijekce. Zobrazení S je spojité díky spojitosti projekcí, tedy T je izomorfismus.

$\Leftarrow$ Zřejmě $Y + Z = X$ (T je na) a pokud $x \in Y \cap Z$, pak rovnost $T(x,0) = x = T(0,x)$ implikuje díky prostotě T, že $x = 0$. Tedy $X = Y \oplus Z$. Konečně, označíme-li $P\colon Y \times Z \to Y$ projekci na první souřadnici, tj. $P(y,z) = y$, pak zobrazení $P \circ T^{-1}$ je spojitá lineární projekce X na Y.

□

Podobně další věta je zobecněním Věty 2.8. Důkaz je zcela totožný, pouze místo Věty 1.66 použijeme Větu 40, místo Věty 2.4 použijeme Důsledek 71(c), a navíc ještě použijeme Tvrzení 75(c) a (a).

VĚTA 79. *Nechť X je lokálně konvexní prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný Hausdorffův podprostor X je komplementovaný.
(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

9. Slabé topologie a poláry

■■■Máme-li pro vektorový prostor X daný nějaký systém M lineárních forem na X, přirozeným způsobem lze na X zavést nejslabší topologii $\sigma(X,M)$, vůči níž jsou prvky M spojité. Pokud X je lokálně konvexní prostor a $M = X^*$, topologie $\sigma(X,X^*)$ se nazývá slabá topologie a velmi zajímavým způsobem interaguje s topologií původní (vizte Věty 93 a 94). Podobně lze na duálu X^* zavést slabou s hvězdičkou topologii. Důležitost obou topologií vysvitne zejména ve Větě 115, Důsledku 116 a Větě 120, které hovoří o kompaktnosti jistých množin vzhledem k těmto slabým topologiím.

9.1. Slabé topologie

Následující lemma je klíčovým tvrzením v teorii slabých vektorových topologií.

LEMMA 80. *Nechť X je vektorový prostor a $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na X. Pak $f \in \operatorname{span}\{f_1,\dots,f_n\}$ právě když $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f$.*

K důkazu využijeme následující faktorizační fakt z lineární algebry:

FAKT 81. *Nechť X, Y, Z jsou vektorové prostory a $L\colon X \to Y$ a $S\colon X \to Z$ jsou lineární zobrazení. Pak existuje lineární zobrazení $T\colon Z \to Y$ takové, že $L = T \circ S$, právě když $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} L$.*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "S"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}
$$

DůKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $x \in \operatorname{Ker} S$, pak $L(x) = T(S(x)) = T(0) = 0$.

$\Leftarrow$ Všimněme si, že jsou-li $x, y \in X$ taková, že $S(x) = S(y)$, pak $x - y \in \operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} L$, a tedy $L(x) = L(y)$. Můžeme tedy definovat $T\colon \operatorname{Rng} S \to Y$ předpisem $T(S(x)) = L(x)$ pro $x \in X$. Dále pro $x, y \in X$ a $c \in \mathbb{K}$ je $T(S(x)+S(y)) = T(S(x+y)) = L(x+y) = L(x)+L(y) = T(S(x))+T(S(y))$ a $T(cS(x)) = T(S(cx)) = L(cx) = cL(x) = c(T(S(x))$, tedy T je lineární. Nyní stačí rozšířit T libovolně na celé Z.

□

DůKAZ LEMMATU 80. $\Rightarrow$ Je-li $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ a $x \in \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$, pak $f(x) = 0$.

$\Leftarrow$ Definujme $S\colon X \to \mathbb{K}^n$ předpisem $S(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Pak S je zjevně lineární zobrazení a $\operatorname{Ker} S = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$. Dle Faktu 81 existuje lineární forma g na $\mathbb{K}^n$ taková, že $f = g \circ S$. Forma g je ovšem tvaru $g(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j$ pro nějaké konstanty $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Tedy $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$.

□

Učiňme ještě malou odbočku – důsledkem klíčového lemmatu je mimo jiné následující užitečný fakt z lineární algebry:

FAKT 82. *Nechť X je vektorový prostor a $f_1, \dots, f_n \in X^\#$ jsou lineárně nezávislé. Pak existují $x_1, \dots, x_n \in X$ takové, že $f_j(x_i) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$ (Kroneckerovo[5] delta).*

DŮKAZ. Vezměme libovolné $k \in \{1, \dots, n\}$. Dle Lemmatu 80 platí, že $\bigcap_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} \operatorname{Ker} f_j \not\subset \operatorname{Ker} f_k$. Tudíž existuje $x_k \in \bigcap_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} \operatorname{Ker} f_j$ takové, že $f_k(x_k) = 1$.

□

DEFINICE 83. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in M\}$.

Uvědomme si, že net $\{x_\gamma\} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v topologii $\sigma(X, M)$, právě když $f(x_\gamma) \to f(x)$ pro každé $f \in M$ (Věta 60(c)). Pro zpřehlednění zápisu budeme u značení kanonických bázových okolí 0 topologie $\sigma(X, M)$ vynechávat absolutní hodnoty, tj. budeme psát $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} = U_{|f_1|,\dots,|f_n|,\varepsilon}$.

TVRZENÍ 84. *Nechť X je vektorový prostor a $M, N \subset X^\#$ jsou neprázdné. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když* $\operatorname{span} M = \operatorname{span} N$. *Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \operatorname{span} M)$.*

DŮKAZ. Nejprve dokažme speciální případ. Inkluze $\subset$ je zřejmá. Na druhou stranu, pokud net $\{x_\gamma\} \subset X$ a $x \in X$ jsou takové, že $f(x_\gamma) \to f(x)$ pro každé $f \in M$, pak díky spojitosti sčítání a násobení v $\mathbb{K}$ je $g(x_\gamma) \to g(x)$ pro každé $g \in \operatorname{span} M$.

Ze speciálního případu ihned plyne implikace $\Leftarrow$ v hlavním tvrzení. Pro $\Rightarrow$ díky symetrii stačí ukázat, že $N \subset \operatorname{span} M$. Nechť tedy $f \in N$. Dle předpokladu je $U_{f,1}$ okolím 0 v topologii $\sigma(X, M)$, tedy existují $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset U_{f,1}$. Odtud dostáváme, že $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset U_{f,1}$. Funkcionál f je tedy omezený na podprostoru Z, což znamená, že je na něm nulový, neboli $Z \subset \operatorname{Ker} f$. Podle Lemmatu 80 je tak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subset \operatorname{span} M$.

□

Následující tvrzení je důsledkem Tvrzení 61. Stačí si uvědomit, že množina $M \subset X^\#$ odděluje body X, právě když pro každý $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $f \in M$ tak, že $f(x) \ne 0$.

TVRZENÍ 85. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M odděluje body X.*

VĚTA 86. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak $(X, \sigma(X, M))^* =$* $\operatorname{span} M$.

DŮKAZ. $\supset$ Je-li $f \in M$, je dle Věty 60(a) pseudonorma $|f|$ spojitá v topologii $\sigma(X, M)$, speciálně je omezená na nějakém okolí 0. Tedy f je též omezený na nějakém okolí 0, takže je spojitý (Věta 33). Konečně, libovolná lineární kombinace spojitých funkcionálů je též spojitá.

$\subset$ Nechť $f \in (X, \sigma(X, M))^*$. Pak f je omezený na nějakém bázovém okolí 0, tedy existují $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$ taková, že f je omezený na $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$. Tedy f je omezený i na podprostoru $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$, což znamená, že je na něm nulový, neboli $Z \subset \operatorname{Ker} f$. Dle Lemmatu 80 je tak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subset \operatorname{span} M$.

□

Uvědomme si, že z Věty 60(b) ihned plyne, že $A \subset X$ je $\sigma(X, M)$-omezená, právě když pro každé $f \in M$ je $f(A)$ omezená.

POZNÁMKA 87. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Jsou-li $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$, pak $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$. Pokud X je nekonečněrozměrný, pak $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$ je netriviální: v opačném případě by dle Lemmatu 80 každý prvek $X^\#$ byl lineární kombinací $f_1, \dots, f_n$. Tedy libovolné okolí 0 v topologii $\sigma(X, M)$ na nekonečněrozměrném X obsahuje netriviální podprostor X. Speciálně není omezené, pokud $M \ne \{0\}$. To mimo jiné znamená, že $\sigma(X, M)$ není pseudonormovatelná (Věta 66). Srovnejte též s Tvrzením 99 a Důsledkem 101.

[5] Leopold Kronecker

Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $x \in X$, pak stejně jako pro normované lineární prostory označíme ε_x evaluační funkcionál na X^* daný předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Z definice je zřejmé, že ε_x je lineární, je tedy $\varepsilon_x \in (X^*)^\#$. Uvědomme si, že na X^* (zatím) neuvažujeme žádnou topologii, tedy zde (zatím) nemá smysl hovořit o spojitosti ε_x. Dále podobně jako dříve zobrazení $\varepsilon\colon X \to (X^*)^\#$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ nazýváme kanonické zobrazení X do $(X^*)^\#$. Zobrazení ε je lineární zobrazení (vizte důkaz Tvrzení 2.26), které je prosté, pokud X^* odděluje body X (tj. např. je-li X Hausdorffův lokálně konvexní prostor (Důsledek 71(a))).

DEFINICE 88. Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (též w-topologií) na X.
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá slabou s hvězdičkou topologií (též w^*-topologií) na X^*.

Poznamenejme, že je-li zobrazení ε prosté, pak obvykle ztotožňujeme X a $\varepsilon(X)$, a píšeme tedy např. $w^* = \sigma(X^*, X)$. Dále si všimněme, že w^*-topologie na X^* je vždy Hausdorffova, neboť $\varepsilon(X)$ odděluje body X^* z definice. Slabá topologie na X je Hausdorffova například pokud X je lokálně konvexní Hausdorffův prostor (Důsledek 71(a)).

DŮSLEDEK 89. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:*
(a) $w \subset \tau$ *a* $(X, w)^* = X^*$.
(b) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

DŮKAZ. Jsou-li $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $\varepsilon > 0$, pak $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$ je τ-otevřené, odkud plyne, že $w(0) \subset \tau(0)$. Zbytek plyne z Věty 86.

□

Fakt z předchozího důsledku, že topologie w je slabší než topologie τ, osvětluje název slabé topologie. Často bývá slabá topologie ostře slabší než původní topologie:

PŘÍKLAD 90. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$ a nechť $\{e_n\}$ jsou kanonické bázové vektory v X. Pak $e_n \to 0$ slabě, ale $\|e_n\| = 1$, tedy $\{e_n\}$ nekonverguje v normě. Vskutku, je-li $f = (f_1, f_2, \dots) \in \ell_q = X^*$, kde $1 \le q < \infty$, libovolný funkcionál, pak $f(e_n) = f_n \to 0 = f(0)$.

◇

POZNÁMKA 91. Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Označme $Y = (X, \tau)^*$. Pak $(Y, w^*) = \big(Y, \sigma(Y, \varepsilon(X))\big)$, přičemž $\varepsilon\colon X \to Y^\#$. Dle Důsledku 89(b) je $(Y, w^*)^* = \varepsilon(X)$, takže $\big((Y, w^*), w\big) = \big(Y, \sigma(Y, (Y, w^*)^*)\big) = \big(Y, \sigma(Y, \varepsilon(X))\big)$. Tedy $\big((Y, w^*), w\big) = (Y, w^*)$, neboli slabá topologie na $(X, \tau)^*$ daná duálem k (X^*, w^*) splývá s w^*-topologií na $(X, \tau)^*$ (danou prostorem X).

TVRZENÍ 92. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X. Označme w_{XY} restrikci topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y. Pak $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$. Je-li X lokálně konvexní, pak $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$. Jinými slovy, v lokálně konvexním prostoru X splývá originální slabá topologie na Y se slabou topologií zděděnou z X.*

DŮKAZ. Označme $X^* \restriction_Y = \{f \restriction_Y;\ f \in X^*\}$. Pak $X^* \restriction_Y \subset Y^*$. Topologie w_{XY} je generována systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in X^* \restriction_Y\}$, tedy $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$ (Věta 60). Je-li X lokálně konvexní, pak pro každé $f \in Y^*$ existuje $F \in X^*$ takové, že $F \restriction_Y = f$ (Důsledek 71(c)). To znamená, že $X^* \restriction_Y = Y^*$, a tedy $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$.

□

VĚTA 93. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:*
(a) $\overline{A}^w = \overline{A}$.
(b) A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.
(c) Je-li X pseudometrizovatelný a $x_n \to x$ slabě, pak existují $y_n \in \operatorname{conv}\{x_j;\ j \ge n\}$ takové, že $y_n \to x$.

DŮKAZ. (a) Protože $w \subset \tau$, je $\overline{A} \subset \overline{A}^w$. Pro důkaz obrácené inkluze vezměme $x \notin \overline{A}$. Dle Tvrzení 12(e) je $\overline{A}$ konvexní, takže dle oddělovací věty (Věta 70(b)) existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) > \sup_{\overline{A}} \operatorname{Re} f \ge \sup_A \operatorname{Re} f$. Ze slabé spojitosti $\operatorname{Re} f$ ovšem plyne, že $\operatorname{Re} f(x) \notin \overline{\operatorname{Re} f(A)} \supset \operatorname{Re} f(\overline{A}^w)$, tedy $x \notin \overline{A}^w$.

(b) plyne ihned z (a).

(c) Nechť $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky (a) platí

$$x \in \overline{\{x_k;\ k \geq n\}}^w \subset \overline{\operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}}^w = \overline{\operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}}.$$

Nechť ρ je pseudometrika generující topologii X. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in \operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}$ takové, že $\rho(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Pak ovšem $y_n \to x$.

□

VĚTA 94 (George Whitelaw Mackey (1946)). *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když je slabě omezená.*

DŮKAZ. Vzhledem k tomu, že $w(0) \subset \tau(0)$, je každá τ-omezená množina i slabě omezená. Předpokládejme nyní, že A je slabě omezená. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$. Položme $Z = \mu_V^{-1}(0)$. Pak Z je podprostor X (Fakt 46(b)). Nechť $Y = X/Z$ je vektorový faktorprostor. Protože $\mu_V(x) = \mu_V(y)$ pokud $x, y \in X$, $x - y \in Z$ (Fakt 46(b)), můžeme na Y definovat funkci $\|\cdot\|$ předpisem $\|\widehat{x}\| = \mu_V(x)$ pro $x \in X$. Snadno si lze rozmyslet, že $\|\cdot\|$ je norma. Dále kanonické kvocientové zobrazení $q\colon (X, \tau) \to (Y, \|\cdot\|)$ je spojité, neboť $q^{-1}(U_Y) = \{x \in X;\ \|\widehat{x}\| < 1\} \supset \operatorname{Int} V$ (Tvrzení 51), tedy q je omezené na okolí 0 (Věta 33).

Prostor $Y^* = (Y, \|\cdot\|)^*$ je Banachův prostor. Je-li nyní $f \in Y^*$ libovolný, pak $f \circ q \in X^*$, a tedy dle předpokladu je $f(q(A)) = (f \circ q)(A)$ omezená množina. Označme $\varepsilon\colon Y \to Y^{**}$ kanonické vnoření a položme $\mathcal{A} = \varepsilon(q(A)) \subset \mathcal{L}(Y^*, \mathbb{K})$. Protože pro každé $f \in Y^*$ je $\sup_{F \in \mathcal{A}} |F(f)| = \sup_{y \in q(A)} |f(y)| < +\infty$, platí dle principu stejnoměrné omezenosti (Věta 3.1), že $\sup_{y \in q(A)} \|y\| = \sup_{F \in \mathcal{A}} \|F\| < +\infty$, neboli množina $q(A)$ je $\|\cdot\|$-omezená v Y.

Existuje tedy $t > 0$ takové, že $\mu_V(x) = \|q(x)\| < t$ pro každé $x \in A$. To znamená, že pro každé $x \in A$ je $\mu_V(\frac{x}{t}) < 1$, neboli $\frac{x}{t} \in V$ (Tvrzení 51). Tedy $A \subset tV \subset tU$. Množina A je tak τ-omezená.

□

Bez předpokladu lokální konvexity předchozí věta neplatí:

PŘÍKLAD 95. Nechť $p \in (0, 1)$, $X = \ell_p$ a $K \subset X$ je množina z Příkladu 68. Pak $\operatorname{conv} K$ je slabě omezená (dokonce slabě totálně omezená), ale není omezená. Vskutku, označíme-li τ topologii X, pak K je τ-kompaktní, a tedy i slabě kompaktní, neboť $w \subset \tau$. Dle Tvrzení 28 je tedy K slabě totálně omezená, čímž pádem je díky Tvrzení 67(b) slabě totálně omezená i množina $\operatorname{conv} K$.

◇

PŘÍKLAD 96. Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Posloupnost $\{f_n\} \subset C(K)$ konverguje slabě k $f \in C(K)$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ bodově na K.

Vskutku, pokud $f_n \to f$ slabě, pak $\{f_n\}$ je slabě omezená (Poznámka 29), a tedy i omezená (Věta 94). Dále pro každé $x \in K$ je $\delta_x \in C(K)^*$ (Diracova míra), takže $f_n(x) = \delta_x(f_n) \to \delta_x(f) = f(x)$. Na druhou stranu, je-li $\phi \in C(K)^*$, pak dle Rieszovy věty o reprezentaci (Věta 2.20) existuje $\mu \in M(K)$ taková, že $\phi(g) = \int_K g \, d\mu$ pro každou $g \in C(K)$. Z Lebesgueovy věty pro komplexní míry (Věta 15.97) pak plyne, že $\phi(f_n) = \int_K f_n \, d\mu \to \int_K f \, d\mu = \phi(f)$.

◇

V souvislosti s Větou 94 si uvědomme, že okamžitým důsledkem Principu stejnoměrné omezenosti je následující tvrzení.

TVRZENÍ 97. *Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X^*$. Pak A je omezená právě tehdy, když je w^*-omezená.*

DŮKAZ. Jelikož $A \subset X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, podle Principu stejnoměrné omezenosti (Věta 3.1) je A omezená (v normě) právě tehdy, když pro každé $x \in X$ je množina $\{|f(x)|;\ f \in A\} = \{|\varepsilon_x(f)|;\ f \in A\}$ omezená, neboli právě když A je w^*-omezená (Věta 60(b)).

□

Bez úplnosti ovšem předchozí tvrzení neplatí, vizte Příklad 3.3.

VĚTA 98. *Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Pak T je w–w spojité, tj. spojité jakožto zobrazení $T\colon (X, w) \to (Y, w)$.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ je net konvergující slabě k $x \in X$. Je-li $f \in Y^*$ libovolný, pak $f \circ T \in X^*$, a tedy $f \circ T(x_\gamma) \to f \circ T(x)$, neboli $f(T(x_\gamma)) \to f(T(x))$. To znamená, že $T(x_\gamma) \to T(x)$ slabě.

□

Přirozenou otázkou je, zdali jsou slabé topologie metrizovatelné, což by nám usnadnilo práci s nimi. Jak jsme již viděli v Poznámce 87, v netriviálním nekonečněrozměrném případě nejsou nikdy pseudonormovatelné.

TVRZENÍ 99. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když* span M *má spočetnou algebraickou bázi.*

DŮKAZ. Díky Tvrzení 84 je $\sigma(X, M) = \sigma(X, B)$, kde B je libovolná algebraická báze span M. Implikace $\Leftarrow$ tedy ihned plyne z Lemmatu 63.

$\Rightarrow$ Dle předpokladu existuje spočetná báze $\sigma(X, M)(0)$, řekněme $\{V_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $f_1^n, \dots, f_{k_n}^n \in M$ a $\varepsilon_n > 0$ tak, že $U_{f_1^n,\dots,f_{k_n}^n,\varepsilon_n} \subset V_n$. Topologie $\sigma(X, M)$ je tedy generována spočetným systémem $A = \bigcup_{n=1}^\infty \{f_1^n, \dots, f_{k_n}^n\}$, tj. $\sigma(X, M) = \sigma(X, A)$. Tvrzení 84 pak implikuje, že span M = span A, tedy span M má spočetnou algebraickou bázi.

□

TVRZENÍ 100. *Nechť X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.*

DŮKAZ. Nechť $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ je spočetná algebraická báze X. Položme $F_n = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Pak množiny F_n jsou uzavřené (Důsledek 15) a $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$, takže podle Baireovy věty (Důsledek 15.12) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek. Existuje tedy $x \in F_n$ a $V \in \tau(0)$ tak, že $x + V \subset F_n$. Protože ovšem $-x \in F_n$, je $V = (x + V) - x \subset F_n$. Jelikož V je pohlcující, znamená to, že $X = \operatorname{span} V \subset F_n$, což je ve sporu s nekonečnou dimenzí X.

□

DŮSLEDEK 101.

(a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (X, w) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný. V tom případě slabá topologie splývá s normovou.
(b) Nechť X je Fréchetův prostor. Pak (X^*, w^*) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný.

DŮKAZ. (a) Pokud $\dim X < \infty$, pak slabá topologie splývá s normovou dle Důsledku 41. V opačném případě X^* nemá dle Tvrzení 100 (a Tvrzení 2.27) spočetnou algebraickou bázi, takže (X, w) není metrizovatelný dle Tvrzení 99.

(b) Pokud $\dim X < \infty$, pak též $\dim X^* \le \dim X^\# < \infty$, a tedy (X^*, w^*) je normovatelný dle Důsledku 41. V opačném případě X nemá dle Tvrzení 100 spočetnou algebraickou bázi. Protože ε je dle předpokladu prosté, nemá spočetnou algebraickou bázi ani $\varepsilon(X)$, takže (X^*, w^*) není metrizovatelný dle Tvrzení 99.

□

Poznamenejme, že na rozdíl od slabých topologií na *celém* nekonečněrozměrném prostoru jejich restrikce na jednotkovou kouli metrizovatelné být mohou, vizte Tvrzení 119. Proto také musí být v následujícím příkladu množina A neomezená.

PŘÍKLAD 102. Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_2 a položme

$$A = \left\{\sqrt{n}e_n;\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \ell_2.$$

Pak $0 \in \overline{A}^w$, ale neexistuje posloupnost v A slabě konvergující k 0.

Druhé tvrzení dostaneme snadno: Libovolná posloupnost v množině A je neomezená nebo má konstantní nenulovou podposloupnost. V prvním případě nemůže podle Poznámky 29 a Věty 94 slabě konvergovat k ničemu, ve druhém případě pak nemůže slabě konvergovat k 0.

Dokažme nyní první tvrzení. Nechť U je libovolné slabé okolí 0. Pak existují $x_1, \dots, x_k \in \ell_2$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$V = \{x \in \ell_2;\ |\langle x, x_j \rangle| < \varepsilon, j = 1, \dots, k\} \subset U.$$

Označme $z_j = \big(|x_j(1)|, |x_j(2)|, \dots\big) \in \ell_2$ a položme $y = z_1 + \dots + z_k$. Množina $M = \{n \in \mathbb{N};\ |y(n)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}\}$ je nekonečná, neboť $y \in \ell_2$. Pro každé $n \in M$ a $j \in \{1, \dots, k\}$ tedy platí, že

$$\big|\big\langle \sqrt{n} e_n, x_j \big\rangle\big| = \big|\sqrt{n} x_j(n)\big| \le \sqrt{n} |y(n)| < \varepsilon,$$

neboli $\sqrt{n} e_n \in V \subset U$. Tedy $U \cap A \neq \emptyset$.

◇

9.2. Poláry

DEFINICE 103. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$. Absolutně konvexní obal množiny A definujeme jako

$$\operatorname{aconv} A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Povšimněme si, že výše uvedená definice je smysluplná, neboť systém, který se proniká, obsahuje alespoň celý prostor X. Snadno se nahlédne, že průnik libovolného systému absolutně konvexních množin je opět absolutně konvexní, a tedy absolutně konvexní obal je absolutně konvexní množina.

Následující charakterizace absolutně konvexního obalu je analogií Tvrzení 1.17 pro konvexní obal. Důkaz je *mutatis mutandis* stejný.

TVRZENÍ 104. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak*

$$\operatorname{aconv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \le 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Definice pojmů $\overline{\operatorname{span}}\, A$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ jsou totožné s definicemi příslušných pojmů v normovaných lineárních prostorech.

DEFINICE 105. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak definujeme uzavřený absolutně konvexní obal A jako $\overline{\operatorname{aconv}}\, A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je uzavřená absolutně konvexní}\}$.

Je zřejmé, že uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor, uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina a uzavřený absolutně konvexní obal je uzavřená absolutně konvexní množina. I následující tvrzení je shodné s analogickým Tvrzením 1.22 z teorie normovaných lineárních prostorů. Důkaz je zcela totožný, pouze místo Faktu 1.21 použijeme Tvrzení 12(d), (e), (f).

TVRZENÍ 106. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, A = \overline{\operatorname{span} A}$, $\overline{\operatorname{conv}}\, A = \overline{\operatorname{conv} A}$ a $\overline{\operatorname{aconv}}\, A = \overline{\operatorname{aconv} A}$.*

DEFINICE 107. Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (absolutní) poláru množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*;\ |f(x)| \le 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme zpětnou (absolutní) poláru jako

$$B_\circ = \{x \in X;\ |f(x)| \le 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Pojmy anihilátorů definujeme pro topologické vektorové prostory zcela identicky jako pro normované lineární prostory (Definice 2.10). Všimněme si, že platí $A^\perp \subset A^\circ$ a $B_\perp \subset B_\circ$. Dále, je-li X normovaný lineární prostor, pak z definice snadno vidíme, že $(B_X)^\circ = B_{X^*}$, a z duálního vyjádření normy (Důsledek 2.6) pak plyne, že $(B_{X^*})_\circ = B_X$.

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pojem poláry A° a zpětné poláry $B_\circ$ závisí na topologii τ, neboť ta určuje, jak vypadá prostor X^*. Na druhou stranu, prostor X^* zde vystupuje pouze jako množina, a můžeme na ní uvažovat libovolnou topologii, aniž by to ovlivnilo pojmy A° a $B_\circ$. V kontextu polár je nejpřirozenější uvažovat prostor X^* s topologií w^*. Pak $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$ (Důsledek 89(b)), a můžeme pracovat s polárami podmnožin (X^*, w^*) a zpětnými polárami podmnožin $\varepsilon(X)$. Platí následující fakt:

FAKT 108. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Uvažujeme-li na X^* topologii w^*, pak $A^\circ = \varepsilon(A)_\circ$, $\varepsilon(B_\circ) = B^\circ$ a $(B^\circ)_\circ = (B_\circ)^\circ$.*

DŮKAZ. Je

$$\varepsilon(A)_\circ = \{f \in X^*;\ |\varepsilon_x(f)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\} = A^\circ$$

a

$$B^\circ = \{F \in \varepsilon(X);\ |F(f)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\} = \{\varepsilon_x;\ x \in X, |\varepsilon_x(f)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\} = \varepsilon(B_\circ).$$

Konečně, $(B^\circ)_\circ = (\varepsilon(B_\circ))_\circ = (B_\circ)^\circ$ podle předchozích dvou rovností.

□

TVRZENÍ 109. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.
(b) Je-li A podprostor X, pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^*, pak $B_\circ = B_\perp$.
(c) $\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ a pokud X^* odděluje body X, pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.
(d) Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ a $(\lambda B)_\circ = \frac{1}{\lambda} B_\circ$.
(e) Je-li $A_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^\circ = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^\circ$. Je-li $B_\gamma \subset X^*$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)_\circ = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma)_\circ$.

DŮKAZ. (a) Je $A^\circ = \bigcap_{x\in A}\{f \in X^*;\ |f(x)| \leq 1\}$, přičemž množiny vpravo jsou absolutně konvexní a w^*-uzavřené, neboť jsou to podúrovňové množiny w^*-spojitých pseudonorem $|\varepsilon_x|$. Analogicky pro $B_\circ$.

(b) Víme, že $B_\perp \subset B_\circ$. Na druhou stranu, nechť $x \in B_\circ$. Pak lineární funkcionál ε_x je omezený na B, což je podprostor X^*, takže ε_x je na B nulový. Tedy $x \in B_\perp$. Pro A° je argumentace analogická.

(c) První tři rovnosti jsou ihned vidět z definice. Pokud X^* odděluje body X, pak pro $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq 0$, takže $x \notin (X^*)_\perp = (X^*)_\circ$ dle (b).

(d) Pro $x \in X$ je

$$x \in (\lambda B)_\circ \Leftrightarrow \forall f \in \lambda B\colon |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \forall g \in B\colon |(\lambda g)(x)| \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall g \in B\colon |g(\lambda x)| \leq 1 \Leftrightarrow \lambda x \in B_\circ \Leftrightarrow x \in \frac{1}{\lambda} B_\circ.$$

Vztah pro A° plyne obdobně, případně se můžeme odvolat na Fakt 108.

(e) Pro $x \in X$ je

$$x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)_\circ \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma\ \forall f \in B_\gamma\colon |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma\colon x \in (B_\gamma)_\circ \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (B_\gamma)_\circ.$$

Vztah pro dopřednou poláru plyne obdobně, případně se můžeme odvolat na Fakt 108.

□

VĚTA 110 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950)). *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^w A$ (= $\overline{\operatorname{aconv}} A$, pokud X je lokálně konvexní).
(b) Je-li $B \subset X^*$, pak $(B_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{w^*} B$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in A$, pak pro každé $f \in A^\circ$ máme $|f(x)| \leq 1$, a tedy $x \in (A^\circ)_\circ$. To znamená, že $A \subset (A^\circ)_\circ$. Z Tvrzení 109(a) tedy plyne, že $\overline{\operatorname{aconv}}^w A \subset (A^\circ)_\circ$. Na druhou stranu, je-li $x \in X \setminus \overline{\operatorname{aconv}}^w A$, pak díky oddělovací větě (Věta 70(b)) existuje $f \in (X, w)^* = X^*$ (Důsledek 89) takový, že $|f(y)| \leq 1$ pro $y \in \overline{\operatorname{aconv}}^w A$ a $\operatorname{Re} f(x) > 1$. Tedy $f \in A^\circ$, a přitom $|f(x)| > 1$, což znamená, že $x \notin (A^\circ)_\circ$. Konečně, fakt, že $\overline{\operatorname{aconv}}^w A = \overline{\operatorname{aconv}} A$ v případě lokálně konvexního X plyne z Tvrzení 106 a Věty 93.

(b) plyne z (a) aplikovaného na prostor (X^*, w^*) s použitím Faktu 108 a Poznámky 91.

□

Nyní již máme k dispozici příslušný pojmový aparát k tomu, abychom mohli uvést „správná znění" Lemmatu 2.12 a Věty 4.4.

LEMMA 111. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*
(a) $A^\perp$ je w^*-uzavřený podprostor X^*,
(b) $B_\perp$ je slabě uzavřený podprostor X,
(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}^w A$ ($= \overline{\operatorname{span}} A$, pokud X je lokálně konvexní),
(d) $(B_\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}^{w^*} B$.

DŮKAZ. Vše je snadným důsledkem Tvrzení 109(a), (b) a věty o bipoláře, uvědomíme-li si, že $A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp$ a $B_\perp = (\operatorname{span} B)_\perp$.

□

Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory. Je-li $T\colon X \to Y$ spojité lineární zobrazení, pak zobrazení $T^*\colon Y^* \to X^*$ definujeme stejným způsobem, jako pro normované lineární prostory. Toto zobrazení je zjevně dobře definováno.

TVRZENÍ 112. *Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory. Je-li $T\colon X \to Y$ spojité lineární zobrazení, pak $T^*\colon Y^* \to X^*$ je w^*–w^* spojité lineární zobrazení.*

DŮKAZ. Snadno je vidět, že T^* je lineární zobrazení. Je-li $\{f_\gamma\}$ net v Y^*, který konverguje k $f \in Y^*$ ve w^*, pak pro každé $x \in X$ platí, že $T^* f_\gamma(x) = f_\gamma(Tx) \to f(Tx) = T^* f(x)$, neboli $T^* f_\gamma \to T^* f$ ve w^*.

□

VĚTA 113. *Jsou-li X, Y topologické vektorové prostory takové, že Y^* odděluje body Y, a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení, pak platí, že*
(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T}^w = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*}^{w^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Důkaz této věty je shodný s důkazem Věty 4.4, pouze místo Lemmatu 2.12 použijeme Lemma 111.

VĚTA 114 (Herman Heine Goldstine (1938)). *Je-li X normovaný lineární prostor, pak $\overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

DŮKAZ. Označme $Y = (X^*, \|\cdot\|)$. Pak $\varepsilon(B_X) \subset X^{**} = Y^*$. Tedy dle věty o bipoláře použité na prostoru Y (Věta 110(b)) je $(\varepsilon(B_X)_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{(Y^*,w^*)} \varepsilon(B_X) = \overline{\varepsilon(B_X)}^{(Y^*,w^*)}$, přičemž poslední rovnost platí díky Tvrzení 106. Na druhou stranu, podle Faktu 108 je $(\varepsilon(B_X)_\circ)^\circ = ((B_X)^\circ)^\circ = (B_{X^*})^\circ = B_{X^{**}}$.

□

Uvědomme si, že z Goldstineovy věty speciálně plyne, že $X^{**} = \overline{\varepsilon(X)}^{w^*}$. Vskutku, násobení skalárem je w^*-homeomorfismus, takže $\overline{\varepsilon(rB_X)}^{w^*} = rB_{X^{**}}$ pro každé $r > 0$. Odtud dostáváme, že $X^{**} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_{X^{**}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\varepsilon(nB_X)}^{w^*} \subset \overline{\varepsilon(X)}^{w^*}$.

VĚTA 115 (Banach-Alaoglu-Bourbaki[6]). *Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li U okolí* 0 *v X, pak U° je w^*-kompaktní množina.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že (X^*, w^*) je dle Věty 60(c) podprostor topologického vektorového prostoru $\mathbb{K}^X$ se součinovou topologií (tj. topologií bodové konvergence). Protože U je pohlcující, ke každému $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $\lambda_x x \in U$. Položme $K = \prod_{x\in X} B_{\mathbb{K}}(0, \frac{1}{\lambda_x}) \subset \mathbb{K}^X$. Podle Tichonovovy věty[7] je K kompaktní. Dále pro každé $f \in U^\circ$ a $x \in X$ je $|f(x)| = \frac{1}{\lambda_x}|f(\lambda_x x)| \le \frac{1}{\lambda_x}$,

[6]Tento tradiční název je poněkud nepřesný; tato věta má dlouhou a složitou historii. Separabilní verze (tj. sekvenciální kompaktnost): základní myšlenku důkazu lze nalézt už u G. Ascoliho (1884), první náznaky věty se objevují u M. Frécheta (1906), různé protoformulace uvedli D. Hilbert (1906) pro ℓ_2 a F. Riesz (1909) pro ℓ_p a $L_p([0,1])$, první jasnou formulaci uvedl E. Helly (1912) pro $C([0,1])$, S. Banach (1929) zformuloval separabilní verzi v normovaných lineárních prostorech. Obecná verze byla nezávisle na sobě objevena mnoha matematiky: Leonidas Alaoglu (1938), J. Dieudonné a skupina N. Bourbaki (1938), Vitold Lvovič Šmuljan (Витольд Львович Шмульян) (1940), Šizuo Kakutani (角谷 静夫) (1940).

[7]A. N. Tichonov (1930) pro součin intervalů, obecnou verzi ukázal až Eduard Čech (1937).

což znamená, že $f \in K$. Tedy $U^\circ \subset K$. Ukážeme, že U° je uzavřená podmnožina K, odkud ihned plyne kompaktnost U° v topologii w^*.

Nechť tedy $f \in \overline{U^\circ}^K$. Pak f je lineární forma na X (Fakt 39). Dále pro každé $x \in U$ platí, že $|f(x)| \leq 1$: Pro každé $\varepsilon > 0$ totiž existuje $g \in U^\circ$ takové, že $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$, takže $|f(x)| \leq |g(x)|+|f(x)-g(x)| \leq 1 + \varepsilon$. To znamená, že f je omezená na okolí 0 v X, tudíž $f \in X^*$ (Věta 33), a tedy $f \in U^\circ$.

□

Následující speciální případ předchozí věty pro jeho velkou důležitost pro jistotu zdůrazníme zvlášť.

DŮSLEDEK 116. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak B_{X^*} je w^*-kompaktní.*

TVRZENÍ 117. *Nechť X je separabilní topologický vektorový prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je hustá v X. Je-li $U \subset X$ okolí 0, pak (U°, w^*) je topologický prostor metrizovatelný metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \min\{|(f-g)(x_n)|, 1\}.$$

DŮKAZ. Systém pseudonorem $\mathcal{P} = \{|\varepsilon_{x_n}|\}_{n=1}^\infty$ generuje na X^* lokálně konvexní topologii σ, která je zjevně slabší než w^*. Díky hustotě $\{x_n\}$ v X systém $\mathcal{P}$ odděluje body X^*, takže σ je Hausdorffova (Tvrzení 61). Dle Lemmatu 63 je σ metrizovatelná metrikou ρ. Podle Věty 115 je (U°, w^*) kompaktní, a protože σ je Hausdorffova a $\sigma \subset w^*$, je $(U^\circ, w^*) = (U^\circ, \sigma)$, neboť kompaktní topologie je nejslabší Hausdorffova topologie.

□

Následující fakt říká, že jinými slovy můžeme prostory (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$ ztotožnit pomocí kanonického vnoření.

FAKT 118. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je izomorfismem lokálně konvexních prostorů (X, w) a $(\varepsilon(X), w^*)$. Speciálně, ε je homeomorfismem topologických prostorů (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$.*

DŮKAZ. Označme $\pi\colon X^* \to X^{***}$ kanonické vnoření. Je-li $\{x_\gamma\} \subset X$ net a $x \in X$, pak

$$x_\gamma \overset{w}{\to} x \Leftrightarrow \forall f \in X^*\colon f(x_\gamma) \to f(x) \Leftrightarrow \forall f \in X^*\colon \pi_f(\varepsilon_{x_\gamma}) \to \pi_f(\varepsilon_x) \Leftrightarrow \varepsilon(x_\gamma) \overset{w^*}{\to} \varepsilon(x).$$

□

TVRZENÍ 119. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Je-li X separabilní a $\{x_n\}$ je hustá v S_X, pak (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} |(f-g)(x_n)|.$$

(b) Je-li X^* separabilní a $\{f_n\}$ je hustá v S_{X^*}, pak (B_X, w) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} |f_n(x-y)|.$$

DŮKAZ. (a) Snadno si lze rozmyslet, že ρ je translačně invariantní metrika na X^*. Dále $\rho = 2\rho_1$, kde $\rho_1(f, g) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} |(f-g)(\frac{1}{2}x_n)| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \min\{|(f-g)(\frac{1}{2}x_n)|, 1\}$ pro $f, g \in B_{X^*}$. Dle Lemmatu 63 je tedy topologie σ generovaná systémem pseudonorem $\{|\varepsilon_{\frac{1}{2}x_n}|\}_{n=1}^\infty$ metrizovatelná metrikou ρ. Zbytek důkazu je stejný jako pro Tvrzení 117.

(b) Stačí použít (a) na $(B_{X^{**}}, w^*)$ a díky Faktu 118 metriku přesunout na B_X pomocí kanonického vnoření ε.

□

Důsledkem předchozích výsledků je následující důležitá charakterizace reflexivních prostorů.

VĚTA 120. *Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li X reflexivní, pak pro kanonické vnoření ε platí, že $\varepsilon(B_X) = B_{X^{**}}$. Slabá kompaktnost B_X tedy plyne z Důsledku 116 (použitého na X^*) spolu s Faktem 118.

$\Leftarrow$ Dle předpokladu a Faktu 118 je $(\varepsilon(B_X), w^*)$ kompaktní. Protože w^*-topologie je Hausdorffova, plyne odtud (a z toho, že ε je izometrie), že $\varepsilon(B_X)$ je w^*-uzavřená podmnožina $B_{X^{**}}$. Z Goldstineovy věty (Věta 114) pak dostáváme, že $\varepsilon(B_X) = \overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$. Odtud a z linearity ε již snadno plyne, že X je reflexivní.

□

DŮSLEDEK 121. *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když slabá a w^* topologie na X^* splývají.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zjevná, neboť $w = \sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, \varepsilon(X)) = w^*$.

$\Leftarrow$ Dle Důsledku 116 je $(B_{X^*}, w) = (B_{X^*}, w^*)$ kompaktní, takže X^* je reflexivní dle Věty 120. Proto je reflexivní i X (Věta 2.31(c)).

□

VĚTA 122. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak B_X je slabě sekvenciálně kompaktní. Tedy z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\} \subset B_X$. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dle Věty 2.31(b) je Y reflexivní prostor, který je zřejmě separabilní. Podle Tvrzení 2.32 je Y^* separabilní, takže podle Věty 120 a Tvrzení 119(b) je (B_Y, w) metrizovatelný kompakt. Protože $\{x_n\} \subset B_Y$, lze z $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost, která konverguje v (B_Y, w), a tedy i v (Y, w), a tedy i v (X, w) dle Tvrzení 92.

□

TVRZENÍ 123. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x \restriction_{B_{X^*}}$ je lineární izometrie z X do $C((B_{X^*}, w^*))$. Tedy každý normovaný lineární prostor je izometrický podprostoru $C(K)$ pro nějaký Hausdorffův kompakt K.*

DŮKAZ. Pro každé $x \in X$ je ε_x je w^*-spojitý funkcionál na X^* (Důsledek 89). Zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x$ je lineární izometrie do X^{**} (Tvrzení 2.26). Zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x \restriction_{B_{X^*}}$ je tedy lineární izometrie z X do $C((B_{X^*}, w^*))$, neboť $\|\varepsilon_x \restriction_{B_{X^*}}\|_{C((B_{X^*}, w^*))} = \sup_{f \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(f)| = \|\varepsilon_x\|_{X^{**}} = \|x\|$. Druhá část je důsledkem první části a Důsledku 116.

□

PŘÍKLAD 124. Pro $p \in (0, 1]$ uvažujme ℓ_∞ jako duál k prostoru ℓ_p reprezentovaný standardní dualitou z Příkladu 68. Označme $w_p^* = \sigma(\ell_\infty, \ell_p)$ topologii w^* na ℓ_∞ danou touto dualitou (uvědomme si, že kanonické zobrazení $\varepsilon_p \colon \ell_p \to (\ell_\infty)^\#$ je prosté, neboť ℓ_∞ odděluje body ℓ_p). Pro $0 < p < q \le 1$ pak platí, že $w_p^* \subsetneqq w_q^*$, i když tyto topologie splývají na omezených podmnožinách ℓ_∞.

Prvky ℓ_p budeme ztotožňovat s funkcionály v $\varepsilon_p(\ell_p)$. Nejprve si rozmysleme, že $\ell_p \subset \ell_q$ (jakožto množiny), což znamená, že $w_p^* \subset w_q^*$. (Uvědomme si, že stavíme na faktu, že dualita je daná stejným vzorcem pro ℓ_p i ℓ_q. Je-li tedy $x \in \ell_p \subset \ell_q$, pak $\varepsilon_p(x) = \varepsilon_q(x)$.) Vskutku, je-li $x \in B_{\ell_p}$, platí pro každou souřadnici $n \in \mathbb{N}$ odhad $|x_n|^q \le |x_n|^p$, a tedy $x \in B_{\ell_q}$.

Ukažme, že $w_p^* \neq w_q^*$. Vezměme libovolný $x \in \ell_q \setminus \ell_p$. Pak $U_{x,1} \in w_q^*(0)$. Tvrdíme, že $U_{x,1} \notin w_p^*(0)$. V opačném případě by existovaly prvky $x_1, \dots, x_n \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} \subset U_{x,1}$. Pak $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} x_j \subset U_{x,1}$, tedy funkcionál x je omezený na podprostoru Z, což znamená, že $Z \subset \operatorname{Ker} x$. Dle Lemmatu 80 je tedy $x \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subset \ell_p$, což je spor.

Konečně, ukažme, že restrikce w_p^* a w_q^* na B_{ℓ_∞} se shodují. Dle Důsledku 116 je B_{ℓ_∞} kompaktní v topologii w_1^*. Protože w_p^* je Hausdorffova topologie slabší než w_1^*, jsou obě topologie na B_{ℓ_∞} shodné, jelikož kompaktní topologie je nejslabší Hausdorffova topologie.

◇

Kapitola 7

Teorie distribucí

Ve fyzice je často obtížné určit nějakou veličinu jakožto bodovou funkci (tj. určit konkrétní hodnotu v každém bodě definičního oboru), spíše jsme schopni určit (naměřit, předpovědět) její průměrné hodnoty – např. „okamžitá rychlost“ se často určuje jako průměrná rychlost za krátké časové okamžiky. To je jedna z motivací k tomu, chápat veličinu f nikoli jako bodově určenou funkci, ale pomocí její „akce“ na vhodné „testovací funkce“ φ, tj. jako integrální průměry $\int f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$ pro vhodné hustoty φ. Že to pro vhodně zvolenou množinu testovacích funkcí může fungovat nám napovídá následující lemma, které říká, že pomocí „akce“ na testovacích funkcích je již funkce určena jednoznačně (v příslušné třídě; např. ve třídě spojitých funkcí je určena bodově). Též to osvětluje název prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$.

LEMMA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

(a) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω. Jestliže $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.

(b) Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω.

(c) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

K důkazu se nám bude hodit následující „hladké oddělovací lemma“.

LEMMA 2. *Nechť $A, U \subset \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. Pak existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset U$ a $\varphi = 1$ na A.*

DŮKAZ. Nechť $\delta = \frac{1}{3}\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. Položme $B = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, A) \le \delta\}$ a $C = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, A) \le 2\delta\}$ a uvědomme si, že B i C jsou uzavřené (Fakt 15.5). Vezměme nějakou nezápornou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\operatorname{supp} g \subset B(0, \delta)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} g \,\mathrm{d}\lambda = 1$ a položme $\varphi = \chi_B * g$ (vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathbb{R}^d$). Pak $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Věta 5.11). Zjevně $\varphi \ge 0$ a $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_B(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) \le \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále $\operatorname{supp}\varphi \subset B + B(0,\delta) \subset C \subset U$ (Věta 5.7(b)). Konečně, je-li $x \in A$, pak pro každé $y \in B(0, \delta)$ platí $x - y \in B$, a tedy $\varphi(x) = \int_{B(0,\delta)} g(y)\chi_B(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{B(0,\delta)} g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$ (Věta 5.2(a)).

□

DŮSLEDEK 3. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G \supset K$. Pak existují $U \subset G$ otevřená, $U \supset K$ a $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na U.*

DŮKAZ. Položme $\delta = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus G)$. Dle Lemmatu 15.6 je $\delta > 0$. Položme dále $U = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, K) < \frac{\delta}{2}\}$ a $V = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, K) < \delta\}$. Pak U, V jsou otevřené (Fakt 15.5), $K \subset U \subset V \subset G$, V je omezená a $\operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^d \setminus V) \ge \frac{\delta}{2}$. Dle Lemmatu 2 existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ na U a $\operatorname{supp}\varphi \subset V$. Tedy φ má kompaktní nosič a $\varphi \in \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(G)$.

□

DŮKAZ LEMMATU 1. (a) Nechť $\mu \ne 0$. Pak existuje borelovská $A \subset \Omega$ taková, že $|\mu(A)| > 0$. Míra $|\mu|$ je konečná a těsná (Věta 15.84), existují tedy kompaktní $K \subset A$ a otevřená $A \subset G \subset \Omega$ takové, že $|\mu|(G \setminus K) < \frac{1}{2}|\mu(A)|$ (Lemma 15.80). Pak $|\mu(K)| = |\mu(A) - \mu(A \setminus K)| \ge |\mu(A)| - |\mu|(A \setminus K) > \frac{1}{2}|\mu(A)|$. Dle Důsledku 3 existuje $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na K. Dle předpokladu pak platí

$0 = \left|\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_G \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_K \varphi \,\mathrm{d}\mu + \int_{G\setminus K} \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \geq |\mu(K)| - \left|\int_{G\setminus K} \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \geq |\mu(K)| - \int_{G\setminus K} \varphi \,\mathrm{d}|\mu| \geq |\mu(K)| - |\mu|(G \setminus K) > \frac{1}{2}|\mu(A)| - |\mu|(G \setminus K) > 0$, což je spor.

(b) Předpokládejme, že $f \neq 0$ na nějaké množině kladné míry. Ke každému bodu $x \in \Omega$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(x,\delta) \subset \Omega$ a f je integrovatelná na $U(x,\delta)$. Z Lindelöfovy vlastnosti plyne, že Ω lze pokrýt spočetně mnoha příslušnými okolími $U(x,\delta)$. Existuje tedy $U(z,\delta)$ takové, že $U(z,\delta) \subset \Omega$, f je integrovatelná na $U(z,\delta)$ a f není nulová s. v. na $U(z,\delta)$. Proto existuje měřitelná množina $E \subset U(z,\delta)$ taková, že $\int_E f \,\mathrm{d}\lambda \neq 0$ ([R, Věta 1.39]).

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že E je borelovská ([R, Věta 2.20]). Definujme nyní borelovskou komplexní míru μ na $U(z,\delta)$ předpisem $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset U(z,\delta)$ (že je to míra plyne z Věty 15.94). Protože μ je nenulová ($\mu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\lambda \neq 0$), existuje dle (a) nezáporná funkce $\varphi \in \mathcal{D}(U(z,\delta),\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{R})$ taková, že $\int_{U(z,\delta)} \varphi \,\mathrm{d}\mu \neq 0$. Tedy dle Věty 15.94 máme $0 \neq \int_{U(z,\delta)} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_{U(z,\delta)} \varphi f \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \varphi f \,\mathrm{d}\lambda = 0$, což je spor s předpokladem.

(c) Stačí dokázat, že za daných předpokladů je $\mu \ll \lambda$. Pak totiž dle Radonovy-Nikodymovy věty existuje $h \in L_1(\lambda,\Omega)$ taková, že $\mu(A) = \int_A h \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou $A \subset \Omega$ borelovskou. Protože díky Větě 15.94 je $\int_\Omega \varphi h \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \varphi f \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, je dle (b) $f = h$ skoro všude.

Předpokládejme, že existuje $E \subset \Omega$ borelovská taková, že $\lambda(E) = 0$ a $\mu(E) \neq 0$. Dle Věty 15.84 je $|\mu|$ těsná a zevně regulární. Existuje tedy kompaktní $K \subset E$ taková, že $|\mu|(E\setminus K) = |\mu|(E) - |\mu|(K) < |\mu(E)|$. Pak $\delta = |\mu(K)| = |\mu(E) - \mu(E \setminus K)| \geq |\mu(E)| - |\mu(E \setminus K)| \geq |\mu(E)| - |\mu|(E \setminus K) > 0$. Dále díky kompaktnosti K existuje otevřená $U \supset K$ taková, že $\int_U |f| \,\mathrm{d}\lambda$ je konečný. Protože $\int_K |f| \,\mathrm{d}\lambda = 0$, z absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu a vnější regularity λ plyne existence otevřené $G \supset K$ takové, že $\int_G |f| \,\mathrm{d}\lambda < \frac{\delta}{2}$. Konečně, z vnější regularity $|\mu|$ plyne existence otevřené H takové, že $K \subset H \subset G$ a $|\mu|(H \setminus K) < \frac{\delta}{2}$. Dle Důsledku 3 existuje $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ taková, že $0 \leq \varphi \leq 1$ a $\varphi = 1$ na K. Dostáváme tak (s využitím Důsledku 15.96), že

$$\begin{aligned}\delta = |\mu(K)| &= \left|\int_K \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_H \varphi \,\mathrm{d}\mu - \int_{H\setminus K} \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \left|\int_H \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_{H\setminus K} \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \\ &\leq \left|\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| + \int_{H\setminus K} \varphi \,\mathrm{d}|\mu| = \left|\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda\right| + \int_{H\setminus K} \varphi \,\mathrm{d}|\mu| \leq \left|\int_H f\varphi \,\mathrm{d}\lambda\right| + |\mu|(H \setminus K) < \\ &< \int_H |f| \,\mathrm{d}\lambda + \frac{\delta}{2} < \delta,\end{aligned}$$

což je spor.

□

1. Slabé derivace

Pracujeme-li s funkcemi tak, jak bylo naznačeno v úvodu, tj. pomocí integrálních průměrů dle testovacích funkcí, pak by se nám hodilo v tomto systému vyvinout např. něco jako diferenciální kalkulus. Opět, nemusí nás zajímat, jak je derivace definována bodově (ani to nejde, neboť samotné funkce nejsou definovány bodově), spíše nás zajímá, jak se „něco jako derivace“ chová v průměru. Protože nemáme k dispozici bodové hodnoty, první potíží je, jakým způsobem vůbec „derivaci“ definovat. Samozřejmě pro hladké funkce by vše mělo fungovat jako v klasickém případě.

Následující pozorování nám dává nápovědu, jak k problému přistoupit. Též je vidět, proč je výhodné za prostor testovacích funkcí zvolit funkce hladké a s kompaktním nosičem.

TVRZENÍ 4. *Nechť* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in C^1((a,b))$. *Pak*

$$\int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$.

DŮKAZ. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Pro platnost vzorce je klíčový fakt, že $\operatorname{supp}\varphi$ leží uvnitř (a,b), tj. existuje uzavřený interval $[c,d] \subset (a,b)$ takový, že $\operatorname{supp}\varphi \subset [c,d]$. Funkce $f\varphi$ je tedy rovna 0 na (a,c) a (d,b), odkud plyne, že $\lim_{x\to a+} f\varphi(x) = \lim_{x\to b-} f\varphi(x) = 0$ a $\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_c^d f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda \in \mathbb{R}$. Funkce f, f', φ, φ' jsou spojité, podle věty o integraci per partes tedy máme $\int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda = [f\varphi]_a^b - \int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$. $\square$

DEFINICE 5. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$. Řekneme, že funkce $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Řekneme, že borelovská komplexní míra μ na (a,b) je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\mu = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$.

Následující věta plyne ihned z Lemmatu 1.

VĚTA 6. *Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je určena jednoznačně. Přesněji, jsou-li $g_1, g_2 \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ slabou derivací f, pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Jsou-li borelovské komplexní míry μ_1, μ_2 na (a,b) slabou derivací f, pak $\mu_1 = \mu_2$. Jsou-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ a borelovská komplexní míra μ na (a,b) slabou derivací f, pak $g \in L_1((a,b))$ a $\mu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset (a,b)$.*

PŘÍKLAD 7. Slabou derivací funkce $f(x) = |x|$ na $\mathbb{R}$ je funkce sgn: Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ libovolná, pak

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^0 -x\varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda + \int_0^\infty x\varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= [-x\varphi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 -\varphi(x) \,\mathrm{d}x + [x\varphi(x)]_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}\lambda.$$

Slabou derivací funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ je míra $2\delta_0$: Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ libovolná, pak

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^0 -\varphi' \,\mathrm{d}\lambda + \int_0^\infty \varphi' \,\mathrm{d}\lambda = [-\varphi]_{-\infty}^0 + [\varphi]_0^\infty = -\varphi(0) - \varphi(0) = -2\varphi(0) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi \,\mathrm{d}(2\delta_0).$$

$\diamond$

TVRZENÍ 8. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$. Pak f má nulovou slabou derivaci, právě když je s. v. konstantní (tj. existuje $c \in \mathbb{K}$ taková, že $f = c$ s. v. na (a,b)).*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je $\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b c\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = c[\varphi]_a^b = 0 = -\int_a^b 0\varphi \,\mathrm{d}\lambda$.

$\Rightarrow$ Nechť $\varphi_0 \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná funkce splňující $\int_a^b \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = 1$. Položme $c = \int_a^b f\varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda$. Ukážeme, že $f = c$ s. v. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná. Položme $\psi(x) = \int_a^x \varphi \,\mathrm{d}\lambda - \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_a^x \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda$ pro $x \in (a,b)$. Pak $\psi'(x) = \varphi(x) - \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \varphi_0(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Zjevně $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Nechť $\alpha, \beta \in (a,b)$ jsou taková, že $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\varphi_0 \subset [\alpha,\beta]$. Zjevně $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in (a,\alpha)$. Protože $\int_a^x \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda$ a $\int_a^x \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = 1$ pro každé $x \in (\beta,b)$, je též $\psi(x) = 0$ pro $x \in (\beta,b)$. Tedy $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$. Dle definice slabé derivace tak platí $\int_a^b f\psi' \,\mathrm{d}\lambda = 0$. Proto $\int_a^b f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f\big(\psi' + \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \varphi_0\big) \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_a^b f\varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b c\varphi \,\mathrm{d}\lambda$. Dle Lemmatu 1(b) odtud plyne, že $f = c$ s. v. $\square$

Z klasických výsledků reálné analýzy je znám následující výsledek:

VĚTA 9. *Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$.*

(a) *Je-li f absolutně spojitá na $[a,b]$, pak má vlastní derivaci s. v., $f' \in L_1((a,b))$ a f' je slabou derivací f. Obráceně, má-li f slabou derivaci $g \in L_1((a,b))$, pak existuje funkce f_0 absolutně spojitá na $[a,b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. Potom je $g = f_0'$ s. v.*

Obecněji, f má slabou derivaci v $L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$, právě když existuje funkce f_0 lokálně absolutně spojitá na (a,b) taková, že $f = f_0$ s. v.

(b) *Funkce f má slabou derivaci rovnou borelovské komplexní míře μ na (a,b), právě když existuje zleva spojitá funkce f_0 konečné variace na $[a,b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. V tom případě pro každé $x \in [a,b]$ platí $\mu([a,x)) = f_0(x) - f_0(a)$.*

DŮKAZ. (a) Uvažujme absolutně spojitou funkci f na $[a,b]$. Dle [R, Věta 7.20] je f diferencovatelná s.v., $f' \in L_1((a,b))$ a pro každé $x \in [a,b]$ platí vztah $f(x) - f(a) = \int_a^x f' \,\mathrm{d}\lambda$. Nechť tedy $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ je dáno. Pak $f\varphi$ je absolutně spojitá na $[a,b]$ dle [R, Cvičení 14] a $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$ ve všech bodech, kde f' existuje. Tedy dostáváme vztah

$$0 = [f\varphi]_a^b = \int_a^b (f\varphi)' \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda + \int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda.$$

Proto $\int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$ a f' je slabá derivace f.

Má-li f slabou derivaci $g \in L_1((a,b))$, položme $h(x) = \int_a^x g \,\mathrm{d}\lambda$, $x \in [a,b]$. Pak h je absolutně spojitá dle [R, Věta 7.11]. Dále je slabá derivace h rovna g. Vskutku, nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Pak pomocí Fubiniovy věty máme

$$\begin{aligned}\int_a^b h\varphi' \,\mathrm{d}\lambda &= \int_a^b \varphi'(x) \left(\int_a^x g(t) \,\mathrm{d}\lambda(t)\right) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_a^b g(t) \left(\int_t^b \varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda(x)\right) \mathrm{d}\lambda(t) \\ &= -\int_a^b g(t)\varphi(t) \,\mathrm{d}\lambda(t).\end{aligned}$$

Označíme-li Dh slabou derivaci funkce $L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$, pak je snadné si rozmyslet, že $D(h_1+h_2) = Dh_1+Dh_2$, kdykoliv pravá strana existuje v $L_1((a,b))$. Máme tak $D(f-h) = g - g = 0$. Podle Tvrzení 8 existuje $c \in \mathbb{K}$ splňující $f = h + c$ s.v. na $[a,b]$. Funkce $f_0 = h + c$ je tak hledanou absolutně spojitou funkcí.

Má-li nyní $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ slabou derivaci $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$, pak funkce $h(x) = \int_c^x g \,\mathrm{d}\lambda$, $x \in (a,b)$ (zde $c \in (a,b)$ je zvolený bod) je dle předešlého lokálně absolutně spojitá funkce a její slabá derivace Dh se dle předešlého kroku rovná g. Vskutku, je-li $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$, nalezneme interval $[\alpha,\beta]$ splňující $\operatorname{supp}\varphi \subset (\alpha,\beta) \subset [\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Aplikujeme-li předcházející krok na interval (α,β), dostáváme

$$\int_a^b g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_\alpha^\beta g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_\alpha^\beta h\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b h\varphi' \,\mathrm{d}\lambda.$$

Proto $Dh = g$ a jako výše odvodíme z Tvrzení 8 existenci $c \in \mathbb{K}$ splňujícího $f = h + c$ s.v. na (a,b).

Pokud na druhou stranu existuje lokálně absolutně spojitá funkce f_0 na (a,b) splňující $f = f_0$ s.v., tak f_0' existuje s.v. na (a,b), je obsažena v $L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ a jako výše obdržíme, že $Df_0 = f_0'$. Jelikož $f = f_0$ s.v., je $Df = Df_0 = f_0'$.

(b) Nechť slabá derivace Df funkce f je rovna komplexní míře μ na (a,b). Položme $h(x) = \mu([a,x))$, $x \in [a,b]$. Pak pro $x_n \nearrow x$ v $[a,b]$ platí $[a,x) = \bigcup_{n=1}^\infty [a,x_n)$, a tedy $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x)$. Funkce h je proto zleva spojitá na $[a,b]$. Dále pro dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ platí

$$\sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |\mu([x_{i-1},x_i))| \le \sum_{i=1}^n |\mu|([x_{i-1},x_i)) \le |\mu|([a,b]) \le \|\mu\|.$$

Tedy h má konečnou variaci, což dává její omezenost na $[a,b]$ a tedy příslušnost do prostoru $L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$. Dále platí, že $Dh = \mu$. Vskutku, nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je dáno. Pak při označení

$$H = \{(x,t) \in [a,b] \times [a,b] : a \le x \le b, a \le t < x\}$$

dle Fubiniovy věty platí

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} h(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{[a,b]} \mu([a,x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,x)} 1\,\mathrm{d}\mu(t)\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int_{[a,b]\times[a,b]} \varphi'(x)\chi_H(x,t)\,\mathrm{d}((\lambda\times\mu)(x,t))\\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} \varphi'(x)\chi_H(x,t)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\mu(t)\\ &= -\int_{[a,b]} \varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t).\end{aligned}$$

Tedy $Dh = \mu$. Dle Tvrzení 8 existuje $c \in \mathbb{K}$ takové, že $f = h + c$ na (a,b) s.v. Tedy $f_0 = h + c$ je hledaná zleva spojitá funkce konečné variace.

Pro důkaz obrácené implikace uvažujme zleva spojitou funkci f_0 konečné variace na $[a,b]$, která se rovná f s.v. Dle [R, Cvičení 7.13] existuje borelovská komplexní míra μ na $[a,b]$ splňující $f_0(x) - f_0(a) = \mu([a,x))$, $x \in [a,b]$. Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ platí pomocí výše uvedeného výpočtu vztah

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)} f\varphi'\,\mathrm{d}\lambda &= \int_{[a,b]} f_0(x)\varphi'\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[a,b]} (f_0(a) + \mu([a,x)))\varphi'(x()\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int_{[a,b]} f_0(a)\varphi'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) + \int_{[a,b]} \mu([a,x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= 0 - \int_{[a,b]} \varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t).\end{aligned}$$

Tedy μ je slabá derivace f.

Nechť borelovská komplexní míra μ je slabá derivace f. K dokončení důkazu je třeba ověřit, že $g(x) - g(a) = \mu([a,x))$, $x \in [a,b]$, kdykoliv g je zleva spojitá funkce konečné variace rovnající se f s.v. na (a,b). Pokud je však g taková funkce a ν je borelovská komplexní míra splňující $g(x) - g(a) = \nu([a,x))$, $x \in [a,b]$, pak ν je slabá derivace g, a tedy i f. Dle Věty 6 pak $\nu = \mu$. Pak ale máme

$$g(x) - g(a) = \nu([a,x)) = \mu([a,x)), \quad x \in [a,b].$$

Tím je důkaaz dokončen.

□

POZNÁMKA. Obecně neplatí, že má-li funkce f na (a,b) vlastní derivaci f' s. v., pak f' je slabou derivací f na (a,b): Je-li f Cantorova funkce na [0, 1], pak $f' = 0$ s. v., ale f nemá nulovou slabou derivaci na (0, 1), neboť by dle Tvrzení 8 musela být s. v. konstantní, což není. Na druhou stranu, f má konečnou variaci, a tedy dle Věty 9 je její slabou derivací jistá míra na (0, 1).

2. Prostor testovacích funkcí a distribuce

Při budování teorie distribucí vycházíme z prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ nekonečně hladkých funkcí s kompaktním nosičem v dané otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Tento prostor vybavíme vhodnou lokálně konvexní topologií τ a „zobecněné funkce“, tj. distribuce, pak chápeme jako spojité funkcionály na $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Operace na těchto zobecněných funkcí jsou pak prováděny jakožto akce zobecněných funkcí na příslušným způsobem transformované testovací funkce.

Než přistoupíme ve Větě 12 k zavedení požadované topologie τ, uveďme na scénu slabší topologii τ_ρ.

DEFINICE 10. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha|\le N} \|D^\alpha\varphi\|_\infty.$$

To je spočetný systém norem generující Hausdorffovu lokálně konvexní topologii na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, kterou označíme τ_ρ. Je totiž dle Lemmatu 6.63 metrizovatelná translačně invariantní metrikou ρ definovanou pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ jako
$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}.$$

Následující věta nás informuje o faktu, že $(\mathcal{D}(K), \tau_\rho)$ je Fréchetův prostor.

VĚTA 11. *Metrika ρ má následující vlastnosti:*

(a) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
   (i) $\varphi_n \to \varphi$ v metrice ρ.
   (ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.
   (iii) Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Je-li α multiindex délky d, pak zobrazení $\varphi \mapsto D^\alpha \varphi$ je spojité jakožto zobrazení z $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau_\rho)$ do $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau_\rho)$.

(c) Pro každou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ je $(\mathcal{D}(K), \rho)$ úplný metrický prostor.

Poznamenejme, že je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, pak na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ metrika ρ není úplná. To je zdrojem potíží, jak uvidíme dále.

DŮKAZ. (a) Ekvivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) plyne z Lemmatu 6.63 a Věty 6.60(c) a ekvivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iii) je zjevná.

Tvrzení (b) plyne snadno z (a) (iii).

(c) Nechť $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$ je cauchyovská posloupnost v metrice ρ. Snadno odvodíme, že $\{\varphi_n\}$ je cauchyovská v každé z norem $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}_0$. Vskutku, nechť $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon \in (0, 1)$ je dáno. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geq n_0$ platí $\rho(\varphi_n, \varphi_m) < \frac{\varepsilon}{2^N}$. Pak pro $n, m \geq n_0$ máme $\frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi_n - \varphi_m\|_N, 1\} < \frac{\varepsilon}{2^N}$, odkud plyne, že $\|\varphi_n - \varphi_m\|_N < \varepsilon$ pro $n, m \geq n_0$. Odtud plyne, že pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je posloupnost $\{D^\alpha \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v Banachově prostoru $C_b(\mathbb{R}^d)$. Tedy existuje funkce $\psi_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^d)$ taková, že $D^\alpha \varphi_n \to \psi_\alpha$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Speciálně, pro $\varphi = \psi_0$ platí, že $\varphi_n \to \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Podle klasické věty z analýzy (vizte Větu 15.2) je pak funkce $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a splňuje $D^\alpha \varphi = \psi_\alpha$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Tedy $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Protože $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je i $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, a tedy $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Konečně, z (a) plyne, že $\varphi_n \to \varphi$ v metrice ρ.

□

Posloupnost norem $\{\|\cdot\|_N\}_{N=1}^\infty$ tedy na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ generuje Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ_ρ metrizovatelnou metrikou ρ z Definice 10. (Poznamenejme, že často se za kanonickou metriku na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ bere metrika slabší než ρ, která dává jen lokálně stejnoměrnou konvergenci. Pro naše účely – vybudování základů teorie distribucí – na tom ovšem nezáleží, proto používáme jednodušší metriku stejnoměrné konvergence ρ.) Všimněme si, že díky definici norem $\|\cdot\|_N$ tvoří bázi okolí nuly v této topologii množiny $U_{\|\cdot\|_N, \varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Pro $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní označme τ_K topologii podprostoru na $\mathcal{D}(K)$ zděděnou z τ_ρ. Dle Věty 11(d) je $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ Fréchetův prostor. Pro účely teorie distribucí je ovšem topologie τ_ρ příliš slabá. Níže definujeme vhodnější lokálně konvexní topologii na prostoru testovacích funkcí.

VĚTA 12. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a neprázdná. Položme*
$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní, } U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\}.$$
Pak $\mathcal{U}$ je bází okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

(a) $\tau_\rho \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.

(b) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

(c) Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.

(d) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \to \varphi$ v τ, právě když existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(e) $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ *je první kategorie v sobě.*

DŮKAZ. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 6.8. Pokud $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, pak $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$: pro každý kompakt $K \subset \Omega$ platí $U \cap \mathcal{D}(K) = (U_1 \cap \mathcal{D}(K)) \cap (U_2 \cap \mathcal{D}(K)) \in \tau_K(0)$. Dále, nechť $U \in \mathcal{U}$. Pak pro $V = \frac{1}{2}U$ je $V \cap \mathcal{D}(K) = \frac{1}{2}(U \cap \mathcal{D}(K)) \in \tau_K(0)$, takže $V \in \mathcal{U}$, a díky konvexitě U je $V + V = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subset U$. Konečně, je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pak $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ pro nějakou kompaktní $K \subset \Omega$. Protože $U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0)$, je $U \cap \mathcal{D}(K)$ pohlcující v $\mathcal{D}(K)$, takže existuje $\lambda > 0$ takové, že $t\varphi \in U \cap \mathcal{D}(K) \subset U$ pro $t \in [0, \lambda]$. To znamená, že U je pohlcující v $\mathcal{D}(\Omega)$. Systém $\mathcal{U}$ je tedy bází okolí lokálně konvexní topologie τ na $\mathcal{D}(\Omega)$. Hausdorffovost τ je důsledkem (a) níže.

(a) Nechť $U \in \tau_\rho(0)$. Pak existuje absolutně konvexní $V \in \tau_\rho(0)$, $V \subset U$. Položme $V_\Omega = V \cap \mathcal{D}(\Omega)$. Pak pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní je $V_\Omega \cap \mathcal{D}(K) = V \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0)$, takže $V_\Omega \in \mathcal{U} \subset \tau(0)$. Tedy i $U \cap \mathcal{D}(\Omega) \in \tau(0)$.

(b) Ukážeme, že $\mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$ je τ-otevřená. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$. Pak existuje $x \in \Omega \setminus K$ takové, že $\delta = |\varphi(x)| > 0$. Položme $W = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \|\psi - \varphi\|_0 < \delta\}$. Množina W je otevřená v $\tau_\rho \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)}$, a je tedy dle (a) i τ-otevřená. Zjevně $\psi(x) \neq 0$ pro každé $\psi \in W$, takže $W \subset \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$.

Dále, podle (a) je $\tau_K(0) \subset \tau \restriction_{\mathcal{D}(K)}(0)$. Na druhou stranu, $\mathcal{U} \restriction_{\mathcal{D}(K)} \subset \tau_K(0)$ z definice $\mathcal{U}$, a tedy $\tau \restriction_{\mathcal{D}(K)}(0) \subset \tau_K(0)$.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $K_n = B(0, n) \cap \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$. Pak K_n jsou kompaktní podmnožiny Ω takové, že $K_n \subset K_{n+1}$ a pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset K_n$.

Pokračujme sporem: předpokládejme, že A neleží v žádném podprostoru $\mathcal{D}(K)$, $K \subset \Omega$ kompaktní. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují bod $x_n \in \Omega \setminus K_n$ a funkce $\varphi_n \in A$ tak, že $\varphi_n(x_n) \neq 0$. Položme

$$U = \left\{\psi \in \mathcal{D}(\Omega);\ |\psi(x_n)| < \frac{1}{n}|\varphi_n(x_n)| \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Pak $U \in \mathcal{U}$. Vskutku, snadno vidíme, že $\psi \mapsto |\psi(x_n)|$ jsou pseudonormy, takže U je absolutně konvexní, jakožto průnik absolutně konvexních množin. Dále, je-li $K \subset \Omega$ kompaktní, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset K_n$, a tedy $x_k \notin K$ pro $k \geq n$. Tedy

$$\begin{aligned} U \cap \mathcal{D}(K) &= \left\{\psi \in \mathcal{D}(K);\ |\psi(x_k)| < \tfrac{1}{k}|\varphi_k(x_k)| \text{ pro } 1 \leq k < n\right\} \supset \\ &\supset \left\{\psi \in \mathcal{D}(K);\ \|\psi\|_0 < \min_{1 \leq k < n} \tfrac{1}{k}|\varphi_k(x_k)|\right\} \in \tau_K(0). \end{aligned}$$

Z definice U ovšem vidíme, že je-li $t > 0$ libovolné, pak pro $n = \lceil t \rceil$ je $\frac{1}{t}\varphi_n \notin U$, takže $\varphi_n \notin tU$. Tedy A není τ-omezená, což je spor.

(d) $\Leftarrow$ Z předpokladu speciálně plyne, že $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, tvrzení tedy plyne z (b) a Věty 11(a).

$\Rightarrow$ Množina $\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi\}$ je omezená (Poznámka 6.29), tedy dle (c) existuje kompaktní $K \subset \Omega$ tak, že $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Zbytek plyne z (b) a Věty 11(a).

(e) Pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní má $\mathcal{D}(K)$ prázdný vnitřek v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$: pokud by tomu tak nebylo, pak by podprostor $\mathcal{D}(K)$ obsahoval τ-okolí 0, tedy pohlcující podmnožinu $\mathcal{D}(\Omega)$, což by znamenalo, že $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(\Omega)$. To ovšem není pravda, neboť existuje $x \in \Omega \setminus K$ a funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\varphi(x) \neq 0$, takže $\varphi \notin \mathcal{D}(K)$. Dle (b) jsou tedy podprostory $\mathcal{D}(K)$ řídké v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Konečně, jsou-li $K_n \subset \Omega$ kompaktní podmnožiny z důkazu (c), pak zjevně $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(K_n)$.

□

Všimněme si, že topologie indukovaná metrikou ρ je „nezávislá“ na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – stačí vzít prostě restrikci τ_ρ z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ na podprostor $\mathcal{D}(\Omega)$. To ale neplatí o výše zavedené topologii τ. Ta zásadním způsobem závisí právě na volbě množiny Ω. Označíme-li τ_Ω příslušnou topologii na $\mathcal{D}(\Omega)$, pak je snadno vidět, že $\tau_{\mathbb{R}^d} \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau_\Omega$. Na druhou stranu, vezmeme-li např. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\operatorname{supp} \varphi = B(0, 1)$, a položíme-li $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi\big(x - (1 - \frac{1}{n})e_1\big)$ a $\Omega = U(0, 2)$, pak $\varphi_n \to 0$ v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_{\mathbb{R}^d} \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)})$, ale nikoli v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_\Omega)$, neboť $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_n} \not\subset \Omega$. Tedy $\tau_{\mathbb{R}^d} \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subsetneq \tau_\Omega$.

Pro čtenáře se znalostí uniformních prostorů poznamenejme, že prostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ není metrizovatelný, což lze odvodit z toho, že je sekvenciálně úplný a první kategorie v sobě. Sekvenciální úplnost snadno dostaneme z Věty 12(b) a úplnosti prostoru $(\mathcal{D}(K), \rho)$ (Věta 11(d)).

TVRZENÍ 13. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, Y je lokálně konvexní prostor a $T\colon (\mathcal{D}(\Omega), \tau) \to Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.
(ii) Pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergující k 0 v τ je množina $\{T(\varphi_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.
(iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $T\restriction_{\mathcal{D}(K)}$ spojitá.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) dle Věty 6.33.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Protože $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$ (Věta 12(b)) a τ_K je metrizovatelná, plyne tato implikace též z Věty 6.33.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť V je absolutně konvexní okolí 0 v Y. Položme $U = T^{-1}(V)$. Pak U je absolutně konvexní množina v $\mathcal{D}(\Omega)$. Pro každý kompakt $K \subset \Omega$ díky předpokladu platí, že $U \cap \mathcal{D}(K) = \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ T(\varphi) \in V\} \in \tau_K(0)$, takže $U \in \tau(0)$. Tedy vzory okolí 0 v Y jsou okolí 0 v $\mathcal{D}(\Omega)$, což znamená, že T je spojité.

□

DEFINICE 14. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ se nazývají distribuce na Ω. Množinu všech distribucí na Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)^*$.

Z Tvrzení 13 plyne následující charakterizace distribucí.

DŮSLEDEK 15. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(ii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

DŮKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Jelikož $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, je pro danou kompaktní množinu $K \subset \Omega$ restrikce $\Lambda\colon \mathcal{D}(K) \to \mathbb{K}$ spojitá. Jelikož normy $\|\cdot\|_N$ generují topologii na $\mathcal{D}(K)$ a tvoří neklesající posloupnost, existuje $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq 1$ na množině $U_{\|\cdot\|_N,\varepsilon} = \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ \|\varphi\|_N \leq \varepsilon\}$. Pak ale $|\Lambda(\varphi)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|_N$, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dle Věty 13 stačí ověřit spojitost Λ na každém prostoru $\mathcal{D}(K)$ pro $K \subset \Omega$ kompaktní množinu. Nechť $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ jsou konstanty z (ii). Jelikož je $\|\cdot\|_N$ spojitá norma na $\mathcal{D}(K)$, z předpokládaného odhadu máme i spojitost Λ na $\mathcal{D}(K)$. Tedy $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

□

Konstanty N a C z (iii) v předchozí větě obecně závisejí na volbě kompaktní podmnožiny $K \subset \Omega$. Někdy se ovšem může stát, že hodnota N na volbě K nezávisí:

DEFINICE 16. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme řádem distribuce Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

PŘÍKLADY 17. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.

- Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Definujme
$$\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$
pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_f je distribuce na Ω řádu 0. Vskutku, pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je $|\Lambda_f(\varphi)| \leq \int_K |f\varphi| \,\mathrm{d}\lambda \leq \|\varphi\|_0 \int_K |f| \,\mathrm{d}\lambda$. Distribuce tohoto tvaru se nazývají regulární distribuce.
- Nechť μ je borelovská komplexní míra na Ω. Definujme
$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu$$
pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_μ je distribuce na Ω řádu 0. Vskutku, pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je $|\Lambda_\mu(\varphi)| \leq \int_\Omega |\varphi| \,\mathrm{d}|\mu| \leq \|\varphi\|_0 |\mu|(\Omega) = \|\mu\|\|\varphi\|_0$.

- Nechť $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \varphi^{(k)}(0)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu k. Vskutku, zjevně $|\Lambda(\varphi)| = |\varphi^{(k)}(0)| \leq \|\varphi\|_k$. Na druhou stranu, nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je taková, že $\varphi = 1$ na $(-1, 1)$. Položme $\psi_n(x) = \frac{1}{n^{k-1}} \sin(nx)$ pro k liché, resp. $\psi_n(x) = \frac{1}{n^{k-1}} \cos(nx)$ pro k sudé. Pak pro $\varphi_n = \varphi \cdot \psi_n \in \mathcal{D}(\operatorname{supp} \varphi)$ je $|\Lambda(\varphi_n)| = |\psi_n^{(k)}(0)| = n$, zatímco z Leibnizova[1] vzorce plyne, že posloupnost $\{\|\varphi_n\|_{k-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Tedy Λ není řádu $k - 1$.
- Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu ∞. Vskutku, nejprve si uvědomme, že funkcionál Λ je dobře definován, neboť pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ obsahuje řada v definici pouze konečně mnoho nenulových členů. Dále, je-li $K \subset \mathbb{R}$ kompaktní, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset [-N, N]$. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ pak platí $|\Lambda(\varphi)| = \left|\sum_{n=1}^{N} \varphi^{(n)}(n)\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |\varphi^{(n)}(n)| \leq N\|\varphi\|_N$. Konečně, pro libovolné pevné $N \in \mathbb{N}_0$ zkonstruujeme podobně jako v předchozím příkladu posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}([N + 1 - \frac{1}{2}, N + 1 + \frac{1}{2}])$ takovou, že $\|\varphi_n\|_N \leq 1$, ale $\Lambda(\varphi_n) = \varphi_n^{(N+1)}(N + 1) \to +\infty$. Tedy Λ není konečného řádu.

POZNÁMKA 18. Dle příkladu výše lze každou lokálně integrovatelnou funkci, resp. každou komplexní borelovskou míru na Ω chápat jako distribuci. V tomto smyslu jsou tedy distribuce zobecněním funkcí i zobecněním měr. Z Lemmatu 1 plynou následující pozorování:

- Jsou-li $f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ takové, že $\Lambda_f = \Lambda_g$, pak $f = g$ s. v.
- Jsou-li borelovské komplexní míry μ, ν na Ω takové, že $\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$, pak $\mu = \nu$.
- Jsou-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a borelovská komplexní míra μ na Ω takové, že $\Lambda_f = \Lambda_\mu$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

Jinými slovy, zobrazení $f \mapsto \Lambda_f$ a $\mu \mapsto \Lambda_\mu$ jsou prostá, neboli různé funkce (ve smyslu tříd ekvivalence s. v.) a různé míry určují různé distribuce.

PŘÍKLAD 19. Prostor $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná otevřená množina, není metrizovatelný. Vskutku, dle Tvrzení 6.99 je tento prostor metrizovatelný právě tehdy, když $\varepsilon(\mathcal{D}(\Omega))$ má spočetnou algebraickou bázi. Kanonické zobrazení $\varepsilon\colon \mathcal{D}(\Omega) \to (\mathcal{D}(\Omega)^*)^\#$ je prosté, neboť τ je Hausdorffova lokálně konvexní topologie. Stačí tedy ukázat, že $\mathcal{D}(\Omega)$ obsahuje nespočetnou lineárně nezávislou množinu.

Za tím účelem nalezněme $u, v \in \mathbb{R}^d$ a $r, \delta > 0$ tak, že $B(u + tv, r) \subset \Omega$ pro každé $t \in [0, \delta]$. Nechť $\psi_t \in \mathcal{D}(\Omega)$, $t \in [0, \delta]$ jsou funkce takové, že $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \psi_t(x) \neq 0\} = U(u + tv, r)$ (vizte Příklad 5.10). Pak množina $\{\psi_t;\ t \in [0, \delta]\}$ je lineárně nezávislá (a má mohutnost kontinua): Indukcí dle n ukážeme, že $\psi_{t_1}, \dots, \psi_{t_n}$, $t_j \in [0, \delta]$ jsou lineárně nezávislé. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Indukční krok: Bez újmy na obecnosti nechť $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Pak existuje $x \in U(u + t_1 v, r)$ takové, že $x \notin U(u + t_j v, r)$, $j \in \{2, \dots, n\}$. Je-li $\alpha_1 \psi_{t_1} + \cdots + \alpha_n \psi_{t_n} = 0$, pak $\alpha_1 \psi_{t_1}(x) = 0$, a tedy $\alpha_1 = 0$. Z indukčního předpokladu pak plyne, že $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

◇

3. Operace s distribucemi

Základní motivací při zavádění distribucí byla možnost realizovat diferenciální operace na distribucích pomocí akce na derivovaných testovacích funkcí. Ty jsou nekonečně hladké, takže diferenciální kalkulus pro distribuce se vlastně odehrává na testovacích funkcích.

Jako motivace pro definici derivací distribuce nám bude sloužit následující lemma.

LEMMA 20. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má všechny derivace až do řádu k omezené a nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \, \mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz

DŮKAZ. Důkaz provedeme indukcí dle $|\alpha|$. Pro $|\alpha| = 0$ je vzorec triviálně platný. Nechť nyní $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $0 < |\alpha| \leq k$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ takové, že $|\beta| < |\alpha|$. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$. Je-li tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak díky Lemmatu 5.24 a s využitím indukčního předpokladu obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial D^{\alpha - e_j} f}{\partial x_j} \varphi \, d\lambda = - \int_{\mathbb{R}^d} D^{\alpha - e_j} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\lambda =$$
$$= -(-1)^{|\alpha|-1} \int_{\mathbb{R}^d} f D^{\alpha - e_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \, d\lambda,$$

přičemž poslední rovnost platí díky větě o záměnnosti parciálních derivací.

□

DEFINICE 21. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme derivaci D^α distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme součin funkce f a distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

V případě, že $d = 1$, používáme pro derivace distribucí klasické značení, tj. $D^1 \Lambda = \Lambda'$, $D^2 \Lambda = \Lambda''$, $D^k \Lambda = \Lambda^{(k)}$, apod.

Uvědomme si, že pro konstantní funkci $f(x) = c$ je $f\Lambda(\varphi) = \Lambda(f\varphi) = \Lambda(c\varphi) = c(\Lambda(\varphi)) = (c\Lambda)(\varphi)$, kde úplně vpravo je násobení prvku vektorového prostoru skalárem. Značení je tedy konzistentní.

TVRZENÍ 22. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:*
(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.
(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.
(e) Je-li $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ a $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, pak
- *$\Lambda_g' = \Lambda_h$, kde $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, právě když h je slabou derivací g;*
- *$\Lambda_g' = \Lambda_\mu$, kde μ je borelovská komplexní míra na (a, b), právě když μ je slabou derivací g.*

Pro důkaz (b) budeme potřebovat následující kvalitativní verzi Leibnizova vzorce:

FAKT 23. *Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak existují konstanty $c_{\beta,\gamma}^\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^d$, $|\beta| + |\gamma| \leq |\alpha|$ takové, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a každé $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ platí*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c_{\beta,\gamma}^\alpha D^\beta f D^\gamma g.$$

DŮKAZ. Důkaz se snadno provede indukcí dle $|\alpha|$. Pro $|\alpha| = 0$ je vzorec triviálně platný s konstantou $c_{0,0}^0 = 1$. Nechť nyní $|\alpha| > 0$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro multiindexy menšího řádu. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$, a tedy dle indukčního předpokladu máme

$$D^\alpha(fg) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Bigg(\sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|-1}} c_{\beta,\gamma}^{\alpha - e_j} D^\beta f D^\gamma g \Bigg) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|-1}} c_{\beta,\gamma}^{\alpha - e_j} \frac{\partial (D^\beta f D^\gamma g)}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|-1}} c_{\beta,\gamma}^{\alpha - e_j} \big(D^{\beta + e_j} f D^\gamma g + D^\beta f D^{\gamma + e_j} g \big),$$

přičemž poslední rovnost platí díky větě o záměnnosti parciálních derivací. Odtud již snadno plyne požadovaný vzorec.

□

DŮKAZ TVRZENÍ 22. (a) Funkcionál $D^\alpha\Lambda$ je zjevně lineární. Dále použijeme charakterizaci z Důsledku 15. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ jsou příslušné konstanty pro distribuci Λ. Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ máme $|(D^\alpha\Lambda)(\varphi)| = |(-1)^\alpha\Lambda(D^\alpha\varphi)| \leq C\|D^\alpha\varphi\|_N \leq C\|\varphi\|_{N+|\alpha|}$. Tedy $D^\alpha\Lambda$ též splňuje podmínku (iii).

(b) Funkcionál $f\Lambda$ je zjevně lineární. Dále použijeme charakterizaci z Důsledku 15. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ jsou příslušné konstanty pro distribuci Λ. Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ díky Faktu 23 platí

$$|(f\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda(f\varphi)| \leq C\|f\varphi\|_N = C\max_{|\alpha|\leq N}\|D^\alpha(f\varphi)\|_\infty \leq C\max_{|\alpha|\leq N}\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}\|D^\beta f D^\gamma\varphi\|_\infty \leq$$
$$\leq C\|\varphi\|_N\max_{|\alpha|\leq N}\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}\max_{x\in K}|D^\beta f(x)|.$$

Tedy $f\Lambda$ též splňuje podmínku (iii).

(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak i $fg \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí $(f\Lambda_g)(\varphi) = \Lambda_g(f\varphi) = \int_\Omega gf\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_{fg}(\varphi)$.

(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, a tedy $\Lambda_{D^\alpha g}$ je definována. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je libovolná. Dle Důsledku 3 existují $U \subset \Omega$ otevřená, $U \supset \operatorname{supp}\varphi$ a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Definujme $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ předpisem $\tilde{g} = \psi g$ na Ω a $\tilde{g} = 0$ mimo Ω. Snadno nahlédneme, že $\tilde{g} \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$, neboť je nulová na otevřené množině $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\psi$ obsahující $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dále $\operatorname{supp}\tilde{g} \subset \operatorname{supp}\psi$, tedy $\tilde{g}$ má kompaktní nosič, odkud plyne, že všechny parciální derivace $\tilde{g}$ až do řádu $|\alpha|$ jsou omezené. Uvědomíme-li si ještě, že $\tilde{g} = g$ na U a díky otevřenosti U je i $D^\alpha\tilde{g} = D^\alpha g$ na U, můžeme využít Lemma 20 k výpočtu

$$\begin{aligned}D^\alpha\Lambda_g(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}\Lambda_g(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega gD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|}\int_U gD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_U \tilde{g}D^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{g}D^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha\tilde{g}\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \\ &= \int_U D^\alpha\tilde{g}\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_U D^\alpha g\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega D^\alpha g\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_{D^\alpha g}(\varphi).\end{aligned}$$

(e) Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Pak $\Lambda_g'(\varphi) = -\Lambda_g(\varphi') = -\int_a^b g\varphi'\,\mathrm{d}\lambda$. Na druhou stranu, pro $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je $\Lambda_h(\varphi) = \int_a^b h\varphi\,\mathrm{d}\lambda$. Tedy $\Lambda_g' = \Lambda_h$, právě když pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je $\int_a^b h\varphi\,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b g\varphi'\,\mathrm{d}\lambda$, neboli právě když h je slabou derivací g. Analogicky pro borelovskou komplexní míru μ.

□

PŘÍKLAD 24. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $\Lambda \in \mathcal{D}((a,b))^*$ je taková, že $\Lambda' = 0$. Pak $\Lambda = \Lambda_c$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$ (tj. Λ je regulární distribuce reprezentující konstantní funkci ve smyslu Příkladu 17).

Důkaz je téměř shodný s důkazem Tvrzení 8: Nechť $\varphi_0 \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná funkce splňující $\int_a^b \varphi_0\,\mathrm{d}\lambda = 1$. Položme $c = \Lambda(\varphi_0)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná. Položíme-li $\psi(x) = \int_a^x \varphi\,\mathrm{d}\lambda - \int_a^b \varphi\,\mathrm{d}\lambda\cdot\int_a^x\varphi_0\,\mathrm{d}\lambda$ pro $x \in (a,b)$, pak $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$ (vizte důkaz Tvrzení 8). Tedy

$$0 = \Lambda'(\psi) = -\Lambda(\psi') = -\Lambda\Big(\varphi - \big(\textstyle\int_a^b\varphi\,\mathrm{d}\lambda\big)\varphi_0\Big) = -\Lambda(\varphi) + \big(\textstyle\int_a^b\varphi\,\mathrm{d}\lambda\big)\Lambda(\varphi_0) = -\Lambda(\varphi) + \textstyle\int_a^b c\varphi\,\mathrm{d}\lambda.$$

◇

PŘÍKLAD 25. Nechť $\Lambda_{\log|x|}$ je regulární distribuce na $\mathbb{R}$ určená lokálně integrovatelnou funkcí $x \mapsto \log|x|$. Pak její derivace $\Lambda'_{\log|x|}$ je distribuce $\Lambda_{\frac{1}{x}}$ daná předpisem

$$\Lambda_{\frac{1}{x}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(Upozorněme, že symbol $\Lambda_{\frac{1}{x}}$ zde neznačí regulární distribuci reprezentující funkci $\frac{1}{x}$, neboť tato funkce není lokálně integrovatelná na $\mathbb{R}$ a integrál $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda$ obecně existuje pouze ve smyslu hlavní hodnoty.) Dále je

$$x\Lambda_{\frac{1}{x}} = \Lambda_1,$$

kde symbol „x" zcela vlevo značí poněkud nepřesně (ale zato čitelně) funkci $x \mapsto x$.

Vskutku, pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{\log|x|}(\varphi) &= -\Lambda_{\log|x|}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\log|x|\,\mathrm{d}\lambda = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \varphi'(x)\log|x|\,\mathrm{d}\lambda = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left([-\varphi(x)\log(-x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda + [-\varphi(x)\log x]_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda\right) + \lim_{\varepsilon\to 0+}\big(-\varphi(-\varepsilon)\log\varepsilon + \varphi(\varepsilon)\log\varepsilon\big) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda + \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\log\varepsilon\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda + \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\log\varepsilon\cdot\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)+\varphi(0)-\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda + 0\cdot 2\varphi'(0) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

přičemž jsme použili Důsledek 15.74 a integraci per partes (buďto pro Newtonův integrál spolu se vztahem Newtonova a Lebesgueova integrálu, nebo pro absolutně spojité funkce s využitím kompaktnosti nosiče φ). Všimněme si též, že z předchozího výpočtu čteného zprava doleva lze odvodit existenci vlastní limity $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda$. Dále pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je

$$x\Lambda_{\frac{1}{x}}(\varphi) = \Lambda_{\frac{1}{x}}\big(x \mapsto x\varphi(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda\right) = \int_{\mathbb{R}}\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_1(\varphi).$$

◇

PŘÍKLAD 26. Na $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ nelze zavést násobení $\cdot\colon \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, které je asociativní, komutativní a splňuje to, že $\Lambda_f \cdot \Lambda = f\Lambda$ pro každé $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.

Vskutku, předpokládejme, že $\cdot$ je násobení s uvedenými vlastnostmi. Nechť Λ_{δ_0} je distribuce určená Diracovou mírou v bodě 0 a $\Lambda_{\frac{1}{x}}$ je distribuce z Příkladu 25. Pak $x\Lambda_{\delta_0}(\varphi) = \Lambda_{\delta_0}(x \mapsto x\varphi(x)) = 0$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tedy

$$\begin{aligned}
0 = 0\Lambda_{\frac{1}{x}} &= \Lambda_0\cdot\Lambda_{\frac{1}{x}} = (x\Lambda_{\delta_0})\cdot\Lambda_{\frac{1}{x}} = (\Lambda_x\cdot\Lambda_{\delta_0})\cdot\Lambda_{\frac{1}{x}} = (\Lambda_{\delta_0}\cdot\Lambda_x)\cdot\Lambda_{\frac{1}{x}} = \Lambda_{\delta_0}\cdot(\Lambda_x\cdot\Lambda_{\frac{1}{x}}) = \\
&= \Lambda_{\delta_0}\cdot(x\Lambda_{\frac{1}{x}}) = \Lambda_{\delta_0}\cdot\Lambda_1 = \Lambda_1\cdot\Lambda_{\delta_0} = 1\Lambda_{\delta_0} = \Lambda_{\delta_0},
\end{aligned}$$

což je spor.

◇

TVRZENÍ 27. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

(a) Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $g \in C^\infty(\Omega)$. Pak zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha\Lambda$ a $\Lambda \mapsto g\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení prostoru $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$ do sebe.

(b) Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K|f_n - f|\,\mathrm{d}\lambda \to 0$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

(c) Zobrazení $\varphi \mapsto \Lambda_\varphi$ je spojité prosté zobrazení $\mathcal{D}(\Omega)$ do $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$.

(d) Je-li $1 \le p \le \infty$ a $f_n \to f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

DŮKAZ. (a) Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a tedy je zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha \varphi)$ spojité na $\mathcal{D}(\Omega)^*$. Podobně, pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $g\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a tedy je zobrazení $\Lambda \mapsto (g\Lambda)(\varphi) = \Lambda(g\varphi)$ spojité.

(b) Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $|\Lambda_{f_n}(\varphi) - \Lambda_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f_n\varphi \, d\lambda - \int_\Omega f\varphi \, d\lambda\right| \le \int_{\operatorname{supp}\varphi}|f_n - f||\varphi| \, d\lambda \le \|\varphi\|_\infty \int_{\operatorname{supp}\varphi}|f_n - f| \, d\lambda \to 0$.

(c) Je třeba ověřit, že zobrazení $T(\varphi) = \Lambda_\varphi(\psi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je spojité na $\mathcal{D}(\Omega)$ pro každé $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. To však plyne z (b) a Tvrzení 13, neboť pro kompakt $K \subset \Omega$ a $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}(K)$ dostáváme stejnoměrnou konvergenci $\{\varphi_n\}$ k φ na $\mathbb{R}^d$. Tedy T je spojité na $\mathcal{D}(K)$.

Prostota zobrazení $\varphi \mapsto \Lambda_\varphi$ pak plyne z Poznámky 18.

(d) plyne ihned z (b), neboť pro $K \subset \Omega$ kompaktní platí díky Hölderově nerovnosti (pro $1 < p < \infty$) $\int_K |f_n - f| \, d\lambda = \int_K |f_n - f| \cdot 1 \, d\lambda \le \left(\int_K |f_n - f|^p \, d\lambda\right)^{1/p}\left(\int_K 1^q \, d\lambda\right)^{1/q} \le \|f_n - f\|_{L_p}\lambda(K)^{1/q}$, kde q je sdružený exponent k p. Uvědomme si, že nerovnost mezi výrazy zcela vlevo a zcela vpravo platí i v případě, že $p = 1$ nebo $p = \infty$.

□

VĚTA 28. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\{\Lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)^*$ taková, že pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje $\Lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.*

DŮKAZ. Díky linearitě distribucí Λ_n a větě o aritmetice limit snadno nahlédneme, že Λ je lineární forma na $\mathcal{D}(\Omega)$. Spojitost Λ je přímým důsledkem Baireovy věty o bodech spojitosti funkcí 1. Baireovy třídy. Zde podáme alternativní důkaz pomocí charakterizace z Důsledku 15. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme $A_k = \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ |\Lambda_n(\varphi)| \le k \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ |\Lambda_n(\varphi)| \le k\}$. Každá z množin A_k je uzavřená v $(\mathcal{D}(K), \rho)$, neboť $\Lambda_n \restriction_{\mathcal{D}(K)}$ jsou spojité. Dále $\mathcal{D}(K) = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, neboť pro pevné $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je posloupnost $\{\Lambda_n(\varphi)\}$ konvergentní, a tedy omezená. Prostor $(\mathcal{D}(K), \rho)$ je úplný (Věta 11(d)), podle důsledku Baireovy věty (Důsledek 15.12) tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že A_k má neprázdný vnitřek. Nechť $\psi \in \mathcal{D}(K)$ a $\delta > 0$ jsou taková, že $B(\psi, \delta) \subset A_k$.

Uvědomme si, že je-li $\varphi \in A_k$, pak $|\Lambda(\varphi)| \le k$. Nalezněme $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\sum_{j=N+1}^\infty \frac{1}{2^j} < \frac{\delta}{2}$. Nechť nyní $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $\varphi \ne 0$. Položme $\tilde\varphi = \frac{\delta}{4\|\varphi\|_N}\varphi$. Pak $\rho(\pm\tilde\varphi, 0) \le \sum_{j=0}^N \frac{1}{2^j}\|\tilde\varphi\|_j + \sum_{j=N+1}^\infty \frac{1}{2^j} 1 \le 2\|\tilde\varphi\|_N + \frac{\delta}{2} = \delta$, takže $\psi \pm \tilde\varphi \in B(\psi, \delta) \subset A_k$. Odtud plyne, že $|\Lambda(\tilde\varphi)| = \left|\Lambda\left(\frac{1}{2}(\tilde\varphi + \psi + \tilde\varphi - \psi)\right)\right| \le \frac{1}{2}\left(|\Lambda(\psi + \tilde\varphi)| + |\Lambda(\psi - \tilde\varphi)|\right) \le k$, a tedy $|\Lambda(\varphi)| = \frac{4}{\delta}\|\varphi\|_N |\Lambda(\tilde\varphi)| \le \frac{4k}{\delta}\|\varphi\|_N$.

□

DEFINICE 29. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je nulová pro Λ, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

VĚTA 30. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Množina $G = \bigcup\{H \subset \Omega;\ H \text{ je nulová pro } \Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ, tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ, pak $H \subset G$.*

DŮKAZ. Množina G je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, pak díky kompaktnosti $\operatorname{supp}\varphi$ existují otevřené množiny $H_1, \dots, H_n \subset \Omega$ nulové pro Λ takové, že $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup_{j=1}^n H_j$. Stačí tedy ukázat, že konečné sjednocení množin nulových pro Λ je opět nulová množina pro Λ. Díky principu matematické indukce to stačí ukázat pro dvě množiny H_1, H_2.

Nechť tedy $\varphi \in \mathcal{D}(H_1 \cup H_2)$. Položme $K = \operatorname{supp}\varphi \setminus H_2$. Pak K je kompaktní a $K \subset H_1$. Dle Důsledku 3 existují $U \subset H_1$ otevřená, $U \supset K$ a $\psi \in \mathcal{D}(H_1)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Funkce $(1 - \psi)\varphi$ je nulová na U, a protože $\mathbb{R}^d \setminus U$ je uzavřená, je $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus U) \cap \operatorname{supp}\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus K) \cap \operatorname{supp}\varphi \subset H_2$. Tedy $\psi\varphi \in \mathcal{D}(H_1)$ a $(1 - \psi)\varphi \in \mathcal{D}(H_2)$, odkud dostáváme, že $\Lambda(\varphi) = \Lambda\big((1 - \psi)\varphi + \psi\varphi\big) = \Lambda\big((1 - \psi)\varphi\big) + \Lambda(\psi\varphi) = 0 + 0 = 0$.

To, že G je největší nulová pro Λ plyne přímo z definice G.

□

DEFINICE 31. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Nosič distribuce Λ definujeme jako $\operatorname{supp}\Lambda = \Omega \setminus G$, kde G je největší nulová množina pro Λ.

■■■

POZNÁMKA 32. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Všimněme si, že pokud $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ splňuje $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\Lambda = \emptyset$, pak $\Lambda(\varphi) = 0$. Vskutku, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp}\Lambda$ a z Věty 30 plyne, že $\Omega \setminus \operatorname{supp}\Lambda$ je nulová množina.

Připomeňme, že je-li μ borelovská komplexní míra na Ω, pak její nosič je definován jako $\operatorname{supp}\mu = \Omega \setminus \bigcup\{G \subset \Omega \text{ otevřená; } |\mu|(G) = 0\}$.

VĚTA 33. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω.*

(a) Je-li $f \in C(\Omega)$, pak $\operatorname{supp}\Lambda_f = \operatorname{supp} f$.

(b) Je-li μ borelovská komplexní míra na Ω, pak $\operatorname{supp}\Lambda_\mu = \operatorname{supp}\mu$.

(c) Pokud je $\operatorname{supp}\Lambda$ *kompaktní, pak existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Speciálně, Λ je konečného řádu.*

(d) $\operatorname{supp}\Lambda = \{z\}$ *pro $z \in \Omega$, právě když $\Lambda = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_z}$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a konstanty c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$ ne všechny nulové.*

DŮKAZ. (a) Nechť $G \subset \Omega$ je největší nulová pro Λ_f. Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} f)$, pak $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$, tedy $\Omega \setminus \operatorname{supp} f \subset G$, neboli $\operatorname{supp}\Lambda_f \subset \operatorname{supp} f$. Na druhou stranu $\Lambda_f \restriction_{\mathcal{D}(G)} = 0$, a tedy dle jednoznačnosti (vizte Poznámku 18) je $f = 0$ s. v. na G. Ze spojitosti pak plyne, že $f = 0$ na G, neboli $\operatorname{supp} f \subset \Omega \setminus G = \operatorname{supp}\Lambda_f$.

(b) Nechť $G \subset \Omega$ je největší nulová pro Λ_μ a nechť $H = \bigcup\{U \subset \Omega \text{ otevřená; } |\mu|(U) = 0\}$. Je-li $U \subset \Omega$ otevřená taková, že $|\mu|(U) = 0$, a je-li $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, pak $|\Lambda_\mu(\varphi)| \leq \int_\Omega |\varphi| \,\mathrm{d}|\mu| = 0$, a tedy $U \subset G$. Odtud plyne, že $H \subset G$. Na druhou stranu $\Lambda_\mu \restriction_{\mathcal{D}(G)} = 0$, a tedy dle jednoznačnosti (vizte Poznámku 18) je $\mu \restriction_G = 0$, neboli $G \subset H$. Tedy $\operatorname{supp}\Lambda_\mu = \Omega \setminus G = \Omega \setminus H = \operatorname{supp}\mu$.

(c) Dle Důsledku 3 existují $U \subset \Omega$ otevřená, $U \supset \operatorname{supp}\Lambda$ a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Dle Důsledku 15 existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\operatorname{supp}\psi)$. Z Faktu 23 analogicky jako v důkazu Tvrzení 22(b) plyne existence $D \geq 0$ takového, že $\|\psi\varphi\|_N \leq D\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Nechť nyní $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je libovolná. Funkce $1 - \psi$ je nulová na U, a protože $\mathbb{R}^d \setminus U$ je uzavřená, je $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus U) \cap \operatorname{supp}\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\Lambda) \cap \Omega = \Omega \setminus \operatorname{supp}\Lambda$. Tedy $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\operatorname{supp}\psi)$ a $(1-\psi)\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp}\Lambda)$, odkud dostáváme, že $|\Lambda(\varphi)| = \big|\Lambda\big((1-\psi)\varphi + \psi\varphi\big)\big| = \big|\Lambda\big((1-\psi)\varphi\big) + \Lambda(\psi\varphi)\big| = |\Lambda(\psi\varphi)| \leq C\|\psi\varphi\|_N \leq CD\|\varphi\|_N$.

■■■(d) Nechť $\operatorname{supp}\Lambda = \{z\}$, přičemž zjevně můžeme předpokládat, že $z = 0$. Dle (c) existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ukážeme, že $\Lambda \in \operatorname{span}\{D^\alpha\Lambda_{\delta_0};\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N\}$. Dle Lemmatu 6.80 stačí ověřit, že každá funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ splňující $D^\alpha(\varphi) = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$ též splňuje $\Lambda(\varphi) = 0$. Nechť tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ splňuje předpoklad.

Zvolme $r \in (0, \frac{1}{2})$ takové, že $B(0,2r) \subset \Omega$ a nalezneme $\psi \in \mathcal{D}(U(0,2r))$ splňující $\psi = 1$ na $U(0,r)$. Pro $\delta > 0$ uvažujme funkce $\psi_\delta(x) = \psi(\delta x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $\psi_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi_\delta = 1$ na okolí $U(0,\delta^{-1})$ bodu 0 a $\operatorname{supp}\psi_\delta \subset U(0, \frac{2r}{\delta})$.

Dle Poznámky 32 platí $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi_\delta\varphi)$ pro každé $\delta > 0$. Tedy

$$|\Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\psi_\delta\varphi)| \leq C\|\psi_\delta\varphi\|_N.$$

Jelikož

$$0 = D^\alpha\Lambda_{\delta_0}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda_{\delta_0}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\varphi(0)$$

pro každý multiindex α splňující $|\alpha| \leq N$ a φ je nekonečně hladká, z věty o Taylorově polynomu pro funkce více proměnných máme vztah

$$D^\alpha\varphi(x) = o(\|x\|^{N-|\alpha|}), \quad \|x\| \to 0, \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N.$$

Zvolme $\eta > 0$ libovolné. Pak existuje $\xi > 0$ takové, že

$$\forall x \in B(0,\xi)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N : |D^\alpha\varphi(x)| \leq \eta\|x\|^{N-|\alpha|}.$$

Zvolme $\delta > 1$ splňující $\frac{2r}{\delta} < \xi$. Pak pro multiindex α splňující $|\alpha| \leq N$ a $x \in U(0, \frac{2r}{\delta})$ platí

$$|D^\alpha(\psi_\delta\varphi)(x)| = |\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma} D^\beta\varphi(x)D^\gamma\psi_\delta(x)| = |\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma} D^\beta\varphi(x)\delta^{|\gamma|}D^\gamma\psi(\delta x)|$$
$$\leq \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}\eta\|x\|^{N-|\beta|}\delta^{|\gamma|}\|\psi\|_N \leq \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}\eta(\frac{2r}{\delta})^{N-|\beta|}\delta^{|\gamma|}\|\psi\|_N$$
$$\leq \eta\|\psi\|_N \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}(2r)^{N-|\beta|}\delta^{|\beta|+|\gamma|-N} \leq \eta\|\psi\|_N \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}(1)^{N-|\beta|}\delta^{|\alpha|-N}$$
$$\leq \eta\|\psi\|_N \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}.$$

Odtud při označení

$$D = \max\{\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma};\ \alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\leq N\}$$

dostáváme odhad

$$\|\psi_\delta\varphi\|_N \leq \eta\|\psi\|_N \max\{\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma};\ \alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\leq N\} = D\eta\|\psi\|_N.$$

Dokázali jsem tak, že pro každé $\eta > 0$ platí odhad

$$|\Lambda(\varphi)| \leq CD\eta\|\psi\|_N.$$

Tedy $\Lambda(\varphi) = 0$. Proto $\Lambda = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha D^\alpha\Lambda_{\delta_z}$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a konstanty c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$. Jelikož je Λ nenulová distribuce, ne všechny koeficienty c_α jsou nulové.

Jelikož obrácená implikace je zřejmá, je důkaz dokončen.

□

4. Schwartzův prostor

V tomto a následujícím oddílu budeme pracovat s prostorem $\mathbb{R}^d$ s eukleidovskou normou a $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Je-li α multiindex délky d pak pro $t \in \mathbb{C}^d$ budeme používat zkratku $t^\alpha = t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}$. Připomeňme, že každý polynom $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $P(t) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\leq k} c_\alpha t^\alpha$, $t \in \mathbb{R}^d$, kde $c_\alpha \in \mathbb{C}$ jsou příslušné koeficienty. Toto vyjádření je jednoznačné až na nulové koeficienty. Každý polynom na $\mathbb{R}^d$ lze pomocí tohoto vyjádření jednoznačně rozšířit na polynom na $\mathbb{C}^d$ prostým dosazováním komplexních čísel. Daný polynom v d proměnných lze tedy chápat jako polynom na $\mathbb{R}^d$ i jako polynom na $\mathbb{C}^d$.

Tvrzení (e) a (f) ve Větě 5.21 ukazují, že Fourierova transformace převádí derivování na násobení a opačně. To může být výhodné například při řešení diferenciálních rovnic. Nicméně k praktickému využití by bylo třeba umět najít k transformované funkci $\widehat{f}$ zpětně její předlohu f. Potíž spočívá v tom, že obraz $L_1(\mu_d)$ při Fourierově transformaci je obtížně identifikovatelný. Jednou z možností, jak se této potíži vyhnout, je najít vhodnější prostor, pro který jeho obraz najdeme snadněji. Dále by se nám hodilo při derivování pracovat s hladkými funkcemi. Prozkoumáme-li předpoklady tvrzení (e) a (f), potřebovali bychom, aby derivace všech řádů byly integrovatelné (tj. něco jako „menší než $\frac{1}{x}$ v nekonečnu“), a též aby byly integrovatelné funkce $x \mapsto x^\alpha f(x)$ pro libovolný multiindex α délky d (tj. aby funkce f byla „menší než převrácená hodnota libovolného polynomu“). Tyto požadavky vedou relativně přirozeně k definici Schwartzova prostoru níže.

Další motivací je pak Fourierova transformace distribucí. Vzhledem k tomu, jak se s distribucemi pracuje, přirozeně se nabízí definovat Fourierovu transformaci distribuce jako akci na Fourierovu transformaci testovací funkce. Ovšem Fourierova transformace testovací funkce už nemusí být testovací funkce! (Vizte Příklad 5.33.) Proto bychom rádi nalezli nějaký prostor příbuzný testovacím funkcím, který bude stabilní na Fourierovu transformaci. Nejprve si ale ještě dokažme lemma, které nám pomůže při porovnávání „polynomiální rychlosti růstu“.

LEMMA 34. *Pro* $N \in \mathbb{N}$ *je funkce* $x \mapsto (1+\|x\|^2)^N$ *polynom na* $\mathbb{R}^d$. *Pro každý polynom* P *na* $\mathbb{R}^d$ *existují* $N \in \mathbb{N}$ *a* $C > 0$ *taková, že* $|P(x)| \le C(1+\|x\|^2)^N$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$.

DŮKAZ. První tvrzení je vidět z rozpisu $(1+\|x\|^2)^N = \left(1+\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^N$. Dále nechť $P(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k} c_\alpha x^\alpha$ Položme $C = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k}|c_\alpha|$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $j \in \{1,\dots,d\}$ máme $|x_j| \le \|x\| \le 1+\|x\|^2$ (poslední nerovnost ověříme zvlášť pro $\|x\| \le 1$ a zvlášť pro $\|x\| > 1$). Tedy $|P(x)| \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k}|c_\alpha||x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_d|^{\alpha_d} \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k}|c_\alpha|(1+\|x\|^2)^{|\alpha|} \le C(1+\|x\|^2)^k$.

□

Vidíme tedy, že polynomiální rychlost růstu stačí testovat pouze pomocí speciálních polynomů $(1+\|x\|^2)^N$, $N \in \mathbb{N}$.

DEFINICE 35. Schwartzův[2] prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C});\ PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d\right\}.$$

Všimněme si, že díky Lemmatu 34 lze v definici Schwartzova prostoru testovat pouze polynomy tvaru $x \mapsto (1+\|x\|^2)^N$.

Ihned je vidět, že $\mathcal{S}_d$ je podprostor vektorového prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ a je to také vektorový podprostor $C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$. Naopak, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je podprostor $\mathcal{S}_d$. Dále je zjevné, že $f \in \mathcal{S}_d$, právě když f je hladká a pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a každé $N \in \mathbb{N}$ existuje $C_{\alpha,N} > 0$ takové, že $|D^\alpha f(x)| \le \frac{C_{\alpha,N}}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Jinými slovy, funkce f a všechny její parciální derivace „jdou v nekonečnu k nule“ rychleji než převrácená hodnota libovolného polynomu.

PŘÍKLAD 36. Nechť $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $f \in \mathcal{S}_d \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Zjevně $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dále f je kladná na $\mathbb{R}^d$, a tedy $f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Abychom ukázali, že $f \in \mathcal{S}_d$, uvědomme si nejprve, že je-li P libovolný polynom na $\mathbb{R}^d$ a $j \in \{1,\dots,d\}$, pak $\frac{\partial Pf}{\partial x_j}(x) = Q(x)f(x)$, kde $Q(x) = \frac{\partial P}{\partial x_j}(x) - 2x_jP(x)$ je opět polynom na $\mathbb{R}^d$. Odtud snadno indukcí plyne, že pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ existuje polynom P na $\mathbb{R}^d$ takový, že $D^\alpha f = Pf$. Stačí tedy ukázat, že pro každý polynom R na $\mathbb{R}^d$ je funkce Rf omezená. Podle Lemmatu 34 existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|R(x)| \le C(1+\|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Tedy $|R(x)f(x)| \le C(1+\|x\|^2)^N e^{-\|x\|^2}$, takže si stačí rozmyslet, že funkce $g(t) = (1+t)^N e^{-t}$ je omezená na $[0,+\infty)$. To ovšem plyne z její spojitosti a toho, že $\lim_{x\to+\infty} g(t) = 0$.

◇

LEMMA 37. *Nechť* $d \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ *a* $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ *pro* $x \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $h \in L_p(\mu_d)$.

[2] Laurent Schwartz

DŮKAZ. Podle věty o substituci použité na sférické souřadnice (vizte [Z, Příklad 2.137]) a dále podle Fubiniovy věty (integrujeme spojitou nezápornou funkci) platí

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(1+\|x\|^2)^N} \right)^p \mathrm{d}\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{pN}} \,\mathrm{d}\lambda_d = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{(0,+\infty)\times(0,\pi)^{d-2}\times(0,2\pi)} \frac{1}{(1+r^2)^{pN}} r^{d-1} \sin^{d-2}\varphi_1 \sin^{d-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{d-2} \,\mathrm{d}\lambda_d = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}} \sin^{d-2}\varphi_1 \sin^{d-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{d-2} \,\mathrm{d}\varphi_{d-1}\,\mathrm{d}\varphi_{d-2} \cdots \mathrm{d}\varphi_1 \,\mathrm{d}r = \\
&= C_d \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}} \,\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

kde konstanta $C_d > 0$ závisí jen na dimenzi d. Poslední integrál ovšem konverguje, neboť $2pN - d + 1 > 1$. □

TVRZENÍ 38. *Schwartzův prostor má následující vlastnosti:*

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1\le p<\infty} L_p(\mu_d)$.
(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ *a* $h(x) = f(ax+b)$, *pak* $h \in \mathcal{S}_d$.
(c) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a* α *multiindex délky* d, *pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.
(d) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a jestliže* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li* $g \in \mathcal{S}_d$*), pak* $fg \in \mathcal{S}_d$.
(e) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a* $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *polynom, pak* $Pf \in \mathcal{S}_d$.

DŮKAZ. (a) Vztahy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ již známe. Nechť $1 \le p < \infty$. Podle Lemmatu 37 existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že funkce $x \mapsto \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ leží v $L_p(\mu_d)$. Je-li nyní $f \in \mathcal{S}_d$, pak existuje $C > 0$ takové, že $|f(x)|^p \le \frac{C^p}{(1+\|x\|^2)^{pN}}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, takže podle srovnávacího kritéria $f \in L_p(\mu_d)$.

(b) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak $P(x)D^\alpha h(x) = P(x)a^{|\alpha|}D^\alpha f(ax+b) = Q(ax+b)D^\alpha f(ax+b)$, kde $Q(y) = a^{|\alpha|}P(\frac{1}{a}(y-b))$ je polynom na $\mathbb{R}^d$. Tedy $PD^\alpha h$ je omezená na $\mathbb{R}^d$.

(c) Je-li $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak $PD^\beta(D^\alpha f) = PD^{\alpha+\beta} f$, což je omezená funkce, neboť $f \in \mathcal{S}_d$.

(d) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 23 je $PD^\alpha(fg) = \sum_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d, |\beta|+|\gamma|=|\alpha|} c_{\beta,\gamma} PD^\beta f D^\gamma g$ pro nějaké konstanty $c_{\beta,\gamma}$. Funkce vpravo je ovšem omezená, neboť $f \in \mathcal{S}_d$.

(e) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a Q polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 23 je $QD^\alpha(Pf) = \sum_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d, |\beta|+|\gamma|=|\alpha|} c_{\beta,\gamma} QD^\beta PD^\gamma f$ pro nějaké konstanty $c_{\beta,\gamma}$. Funkce vpravo je ovšem omezená díky tomu, že $QD^\beta P$ je polynom a $f \in \mathcal{S}_d$. □

Na Schwartzově prostoru nyní zavedeme topologii. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha|\le N} \left\| x \mapsto (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \right\|_\infty.$$

Snadno nahlédneme, že každá z funkcí ν_N je normou na $\mathcal{S}_d$. Hausdorffovu lokálně konvexní topologii na $\mathcal{S}_d$ generovanou systémem $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ označíme σ. Tato topologie je metrizovatelná metrikou z Lemmatu 6.63. Dále není obtížné si rozmyslet, že pro každé $f \in \mathcal{S}_d$ je posloupnost $\{\nu_N(f)\}_{N=0}^\infty$ neklesající. Odtud plyne, že bázi $\sigma(0)$ tvoří množiny $U_{\nu_N,\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$.

VĚTA 39. *Metrika z Lemmatu 6.63 příslušná systému* $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ *je úplná. Prostor* $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ *je tedy Fréchetův prostor. Topologie* σ *má následující vlastnosti:*

(a) Nechť $\{f_n\}$ *je posloupnost v* $\mathcal{S}_d$ *a* $f \in \mathcal{S}_d$. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
  (i) $f_n \to f$ *v topologii* σ.
  (ii) Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ *a každý multiindex* α *délky* d *platí, že* $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.
  (iii) Pro každý polynom P *a každý multiindex* α *délky* d *platí, že* $PD^\alpha f_n \to PD^\alpha f$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.

(b) Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \le p < \infty$.
(c) Je-li α multiindex délky d, P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.

DŮKAZ. (a) (i)$\Leftrightarrow$(ii) plyne z Věty 6.60(c) a monotonie posloupnosti $\{\nu_N\}$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) je triviální a (ii)$\Rightarrow$(iii) plyne z Lemmatu 34.

Označme nyní metriku z Lemmatu 6.63 jako ρ a dokažme její úplnost. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v metrice ρ. Z nerovnosti $\nu_N(f-g) \le 2^N \rho(f,g)$ platné pro $f, g \in \mathcal{S}_d$, $\rho(f,g) < \frac{1}{2^N}$ plyne, že $\{f_n\}$ je cauchyovská v každé z norem ν_N, $N \in \mathbb{N}_0$. Odtud plyne, že pro každé $N \in N_0$ a každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je posloupnost $\left\{(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n\right\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v Banachově prostoru $C_b(\mathbb{R}^d)$. Tedy existuje funkce $g_{N,\alpha} \in C_b(\mathbb{R}^d)$ taková, že $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to g_{N,\alpha}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Z toho speciálně plyne, že posloupnost $\{D^\alpha f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}^d$. Tedy také, pro $f = g_{0,0}$ platí, že $f_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Podle klasické věty (vizte Větu 15.2) pak $D^\alpha f_n \to D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Je-li nyní $N \in N_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f$ bodově na $\mathbb{R}^d$. Zároveň ale $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to g_{N,\alpha}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$, odkud plyne, že $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f = g_{N,\alpha}$ a $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Protože $g_{N,\alpha} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, dostáváme (též díky Větě 15.1), že $f \in \mathcal{S}_d$. Podle (a) to pak znamená, že $f_n \to f$ v metrice ρ.

(b) Nechť $f_n \to f$ v topologii σ a $1 \le p < \infty$. Podle Lemmatu 37 existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{Np}} \, d\mu_d < +\infty$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $|(f_n - f)(x)| \le \frac{\nu_N(f_n - f)}{(1+\|x\|^2)^N}$, a tedy $\|f_n - f\|_p \le C^{1/p} \nu_N(f_n - f) \to 0$.

(c) Díky faktům $D^\alpha f_n - D^\alpha f = D^\alpha(f_n - f)$, $Pf_n - Pf = P(f_n - f)$ a $gf_n - gf = g(f_n - f)$ stačí ukázat, že $D^\alpha f_n \to 0$, $Pf_n \to 0$ a $gf_n \to 0$, jestliže $f_n \to 0$ v topologii σ. To ukážeme pomocí (a) (iii). Nechť Q je polynom a $\beta \in \mathbb{N}_0^d$. Pak $QD^\beta(D^\alpha f_n) = QD^{\alpha+\beta} f_n \to 0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Dále, podle Faktu 23 je $QD^\beta(Pf_n)$ rovno konečnému součtu $\sum_{\gamma,\delta} Q_\gamma D^\delta f_n$, kde Q_γ jsou polynomy. Každá z funkcí v této sumě ovšem konverguje k 0 stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Konečně, podle Faktu 23 je $QD^\beta(gf_n)$ rovno konečnému součtu $\sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma,\delta} QD^\gamma g D^\delta f_n$, kde $c_{\gamma,\delta}$ jsou konstanty. Protože funkce $D^\gamma g$ jsou omezené, konverguje opět každá z funkcí v sumě k 0 stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

□

PŘÍKLAD 40. Prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ není normovatelný. Vskutku, v opačném případě dle Věty 6.66 existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon > 0$ taková, že $U_{\nu_N,\varepsilon}$ je omezené. Existuje tedy $t > 0$, pro které je $U_{\nu_N,\varepsilon} \subset tU_{\nu_{2N+1},1}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ nyní vezměme funkce

$$f_n(x) = \varphi(x) \frac{\sin(nx_1)}{n^{2N}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

kde $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je taková, že $\varphi = 1$ na nějakém okolí 0. Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \le N$, pak podle Faktu 23 existují konstanty $c_\beta^\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že pro $x \in \mathbb{R}^d$ je

$$D^\alpha f_n(x) = \frac{1}{n^{2N}} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta| \le |\alpha|}} c_\beta^\alpha D^\beta \varphi(x) n^{|\alpha|-|\beta|} \sin^{(|\alpha|-|\beta|)}(nx_1).$$

Tedy $|D^\alpha f_n(x)| \le \frac{1}{n^N} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta| \le |\alpha|} c_\beta^\alpha |D^\beta \varphi(x)|$. Díky kompaktnosti nosiče φ odtud plyne, že $\lim_n \nu_N(f_n) = 0$, takže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $f_n \in U_{\nu_N,\varepsilon}$ pro $n \ge n_0$. Na druhou stranu, díky tomu, že $f_n(x) = \frac{\sin(nx_1)}{n^{2N}}$ na nějakém okolí 0, dostáváme odhad

$$\nu_{2N+1}(f_n) \ge \left| \frac{\partial^{2N+1} f_n}{\partial x_1^{2N+1}}(0) \right| = n^{2N+1} \frac{\cos 0}{n^{2N}} = n.$$

Tedy pokud $f_n \in tU_{\nu_{2N+1},1}$, pak $n < t$, což je spor.

◇

Funkce z $\mathcal{S}_d$ jsou integrovatelné (Tvrzení 38(a)), takže mají Fourierovu transformaci. Díky vlastnostem Schwartzova prostoru jsou pro funkce z $\mathcal{S}_d$ automaticky splněny předpoklady pro derivování Fourierovy transformace, takže na $\mathcal{S}_d$ je kalkulus Fourierovy transformace snadno zformulovatelný:

TVRZENÍ 41. *Nechť $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(b) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

DŮKAZ. (a) Vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z Věty 5.21(e), přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $D^\beta f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ pro každé $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ dle Tvrzení 38(c) a (a).

(b) Vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z Věty 5.21(f), přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ dle Tvrzení 38(e) a (a).

□

Následující věta hovoří o tom, že Schwartzův prostor se chová výborně vzhledem k inverzní Fourierově transformaci.

VĚTA 42. *Fourierova transformace je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ na sebe. Navíc pro $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad a \quad \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f.$$

DŮKAZ. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ dle Tvrzení 41(b) platí, že $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{h}$ pro nějakou funkci $h \in \mathcal{S}_d$ (Tvrzení 38(e)). Protože $\widehat{h}$ je spojitá dle Věty 5.21(a), plyne odtud s pomocí Věty 15.1, že $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dále, je-li $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, pak použijeme-li Tvrzení 41(b) a (a), dostaneme $t^\beta D^\alpha \widehat{f}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}}(it)^\beta \widehat{m_\alpha f}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}} \widehat{D^\beta(m_\alpha f)}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ (uvědomme si, že $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d$ dle Tvrzení 38(e)). Funkce napravo je ovšem omezená (Věta 5.21(a)). Odtud snadno plyne, že $PD^\alpha \widehat{f}$ je omezená pro libovolný polynom P a libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, což znamená, že $\widehat{f} \in \mathcal{S}_d$. Tedy Fourierova transformace zobrazuje $\mathcal{S}_d$ do $\mathcal{S}_d$.

Již víme, že Fourierova transformace je prosté lineární zobrazení (Důsledek 5.28). Pro důkaz spojitosti stačí dle Věty 6.33 ukázat, že $\widehat{f_n} \to 0$ v σ kdykoli $f_n \to 0$ v σ. Nechť tedy $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ jdoucí k 0 v topologii σ. Nechť dále $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$. Stejně jako výše obdržíme, že $t^\beta D^\alpha \widehat{f_n}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}} \widehat{D^\beta(m_\alpha f_n)}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Dvojnásobnou aplikací Věty 39(c) dostaneme, že $D^\beta(m_\alpha f_n) \to 0$ v σ. Podle Věty 39(b) tedy $D^\beta(m_\alpha f_n) \to 0$ v prostoru $L_1(\mu_d)$. Díky Větě 5.21(a) tak platí, že $\widehat{D^\beta(m_\alpha f_n)} \to 0$ v prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$, tj. stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Protože to platí pro každý multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, plyne odtud, že $PD^\alpha \widehat{f_n} \to 0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$. Věta 39(a) konečně říká, že to znamená, že $\widehat{f_n} \to 0$ v σ.

Pro lepší přehlednost označme $\mathcal{F}: \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$, $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ a dále $\mathcal{F}^n = \overbrace{\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \dots \circ \mathcal{F}}^{n \text{ krát}}$. Z věty o inverzi (Věta 5.27) dostáváme, že $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ a každé $x \in \mathbb{R}^d$. Aplikujeme-li předchozí vztah na $\mathcal{F}^2 f$ místo na f, dostaneme, že $\mathcal{F}^4 f(x) = \mathcal{F}^2(\mathcal{F}^2 f)(x) = \mathcal{F}^2 f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Odtud dále plyne, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^3 = Id$, což implikuje, že $\mathcal{F}$ je na a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. Tedy $\mathcal{F}^{-1}$ je také spojité.

□

5. Temperované distribuce

Následující tvrzení nám osvětlí vztah prostorů $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau)$ a $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, což nám umožní vybudovat teorii Fourierovy transformace i pro distribuce.

LEMMA 43. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní. Pak $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.*

DŮKAZ. Funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ je na K omezená, což znamená, že normy ν_N a $\|\cdot\|_N$ jsou na $\mathcal{D}(K)$ ekvivalentní. Odtud snadno plyne, že $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

□

TVRZENÍ 44. *Podprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ a pro topologii τ platí, že $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \subset \tau$. Jinými slovy, vnoření $Id\colon (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojité a na hustou podmnožinu.*

DŮKAZ. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Vezměme nějakou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\varphi = 1$ na $B(0,1)$ (vizte např. Lemma 2), a položme $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{1}{n}x)$ a $f_n = \varphi_n f$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tvrdíme, že $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$. Vskutku, je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 23 je

$$PD^\alpha(f - f_n) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c_{\beta,\gamma} PD^\beta f D^\gamma (1 - \varphi_n)$$

pro nějaké konstanty $c_{\beta,\gamma}$. Protože $D^\gamma \varphi_n(x) = \frac{1}{n^{|\gamma|}} D^\gamma \varphi(\frac{1}{n}x)$, je pro pevné γ posloupnost funkcí $\{D^\gamma(1 - \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ stejně omezená na $\mathbb{R}^d$. Dále je $D^\gamma(1 - \varphi_n)(x) = 0$ pro $x \in B(0,n)$. Dle Tvrzení 38(c), (e) a (a) je $PD^\beta f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, odkud plyne, že posloupnost $\{PD^\beta f D^\gamma(1 - \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně k 0 na $\mathbb{R}^d$. Tedy $f_n \to f$ v $\mathcal{S}_d$ (Věta 39(a)).

Je-li $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak dle Lemmatu 43 je $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$, takže $Id\colon (\mathcal{D}(K), \tau_K) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojitá. Dle Tvrzení 13 je tedy $Id\colon (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ spojitá.

□

Připomeňme, že prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je metrizovatelný úplnou metrikou, řekněme ρ_σ. Pak z Tvrzení 44 plyne, že prostor $(\mathcal{S}_d, \rho_\sigma)$ je zúplněním prostoru $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho_\sigma)$. Dále z Tvrzení 44 plyne, že je-li $\Phi \in (\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, pak $\Phi \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau)^*$, neboli restrikce Φ na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$.

DEFINICE 45. Distribuce na $\mathbb{R}^d$, které jsou restrikcemi funkcionálů z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, se nazývají temperované distribuce.

Protože díky hustotě $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ jsou spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ určeny jednoznačně svými restrikcemi na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, je obvyklé ztotožňovat temperované distribuce s funkcionály z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$. Zkráceně budeme též psát $(\mathcal{S}_d, \sigma)^* = \mathcal{S}_d^*$.

Nechť ρ_σ je translačně invariantní úplná metrika indukující σ. Je-li distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ spojitá v topologii σ, pak je i stejnoměrně spojitá v σ (Věta 6.33), a tedy díky translační invarianci i v metrice ρ_σ. To ovšem znamená, že existuje její spojité rozšíření Φ z prostoru $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho_\sigma)$ na prostor $(\mathcal{S}, \rho_\sigma)$ (Věta 15.9). Analogicky jako v důkazu Věty 1.62 si lze rozmyslet, že Φ je lineární. Tedy $\Phi \in (\mathcal{S}_d, \sigma)^*$ a $\Lambda = \Phi \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$. Dostáváme tak, že distribuce na $\mathbb{R}^d$ je temperovaná, právě když je spojitá i v (slabší) topologii σ.

PŘÍKLADY 46. Uveďme následující příklady temperovaných distribucí:

- Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$ je distribuce s kompaktním nosičem. Zvolme libovolnou $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\psi = 1$ na otevřené množině obsahující $\operatorname{supp} \Lambda$, a označme $L = \operatorname{supp} \psi$. Pak $Q\colon (\mathcal{S}_d, \sigma) \to (\mathcal{D}(L), \tau_L)$, $Q(f) = \psi f$ je spojité lineární zobrazení (linearita je zřejmá, spojitost plyne z Věty 39(c) a Lemmatu 43). Položíme-li $\Phi(f) = \Lambda(Q(f))$ pro $f \in \mathcal{S}_d$, pak $\Phi \in \mathcal{S}_d^*$. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pak platí, že $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \subset \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp} \Lambda$, takže $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi\varphi + (1-\psi)\varphi) = \Lambda(\psi\varphi) + \Lambda((1-\psi)\varphi) = \Phi(\varphi)$. Tedy Λ je temperovaná distribuce.
- Nechť μ je nezáporná borelovská míra na $\mathbb{R}^d$ taková, že $\int (1 + \|x\|^2)^{-N} \, \mathrm{d}\mu = C < +\infty$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$. Definujme
$$\Lambda_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}\mu$$
pro $f \in \mathcal{S}_d$. Pak Λ_μ je temperovaná distribuce. Vskutku,
$$|\Lambda_\mu(f)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left\| y \mapsto (1 + \|y\|^2)^N f(y) \right\|_\infty (1 + \|x\|^2)^{-N} \, \mathrm{d}\mu(x) \leq C \nu_N(f).$$
Odtud snadno plyne, že $\Lambda_\mu \in \mathcal{S}_d^*$.

- Nechť g je měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$ taková, že $x \mapsto (1+\|x\|^2)^{-N} g(x) \in L_p(\mu_d)$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a $1 \le p \le \infty$. (Toto speciálně platí pro funkce z $L_p(\mu_d)$ nebo pro funkce majorizované nějakým polynomem.) Definujme
$$\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{R}^d} fg \, \mathrm{d}\mu_d$$
pro $f \in \mathcal{S}_d$. Pak Λ_g je temperovaná distribuce. Vskutku, nechť q je sdružený exponent k p. Označme $s(x) = 1 + \|x\|^2$. Dle Lemmatu 37 existuje $M \in \mathbb{N}_0$ takové, že $s^{N-M} \in L_q(\mu_d)$. Pak díky Hölderově nerovnosti je
$$\begin{aligned}|\Lambda_g(f)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |fg| \, \mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} |s^M f| \cdot |s^{-N} g| \cdot |s^{N-M}| \, \mathrm{d}\mu_d \le \\ &\le \|s^M f\|_\infty \|s^{-N} g\|_p \|s^{N-M}\|_q \le \|s^{-N} g\|_p \|s^{N-M}\|_q \nu_M(f).\end{aligned}$$
Odtud snadno plyne, že $\Lambda_g \in \mathcal{S}_d^*$.

Následující věta charaterizuje ty distribuce $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$, které jsou temperované.

VĚTA 47. *Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$. Pak Λ je temperovaná distribuce, právě když existují $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ splňující $|\Lambda(\varphi)| \le C\nu_N(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že Λ je temperovaná distribuce. Nechť $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{S}^*$ je rozšíření Λ na $(\mathcal{S}, \sigma)$. Jelikož množiny $U_{\nu_N,\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$ tvoří bázi okolí 0 v topologii σ, existuje $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $|\tilde{\Lambda}(\varphi)| \le 1$ pro funkce $\varphi \in U_{\nu_N,\varepsilon} \subset \mathcal{S}$. Pak ale $|\tilde{\Lambda}(\varphi)| \le \frac{1}{\varepsilon}\nu_N(\varphi)$. Distribuce Λ tak splňuje požadovanou nerovnost pro nalezené N a $C = \frac{1}{\varepsilon}$.

Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že existují $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ splňující $|\Lambda(\varphi)| \le C\nu_N(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak z Hahnovy-Banachovy věty 2.3 můžeme Λ rozšířit z podprostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ na celý prostor $\mathcal{S}_d$ tak, že toto rozšíření $\tilde{\Lambda}$ splňuje $|\tilde{\Lambda}(f)| \le C\nu_N(f)$, $f \in \mathcal{S}_d$. Toto rozšíření $\tilde{\Lambda}$ je pak zřejmě prvek $\mathcal{S}_d^*$, a tedy Λ je temperovaná distribuce.

□

TVRZENÍ 48. *Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $D^\alpha \Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce*

- $D^\alpha \Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha f)$,
- $(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ *a*
- $(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$. Dále zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda$, $\Lambda \mapsto g\Lambda$ a $\Lambda \mapsto P\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení z prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ do sebe.

DŮKAZ. Všechna uvedená tvrzení snadno plynou z Věty 39(c), výše uvedených vzorců a vlastností w^*-topologie.

□

Poznamenejme že dle Důsledku 6.101(b) není $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ metrizovatelný, neboť $\mathcal{S}_d$ je zjevně nekonečněrozměrný.

Pro temperované distribuce nyní můžeme zavést jejich Fourierovu transformaci, jak bylo avizováno v úvodu předchozího oddílu.

DEFINICE 49. Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Z Věty 42 plyne, že Fourierova transformace temperované distribuce je opět temperovaná distribuce. První část následující věty říká, že definice Fourierovy transformace je konzistentní ve smyslu ztotožňování funkce f a příslušné distribuce Λ_f.

VĚTA 50.

(a) Je-li $g \in L_1(\mu_d)$, pak $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$. Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty (Věta 5.31).

(b) Je-li Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak
- *$\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, kde $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, a*
- *$D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.*

(c) Fourierova transformace $\mathcal{F}$ temperovaných distribucí je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ na sebe. Platí pro ni, že $\mathcal{F}^4 = Id$.

DŮKAZ. (a) Nechť $g \in L_1(\mu_d)$. Pak $\widehat{g} \in C_0(\mathbb{R}^d) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (Věta 5.21(a)), a tedy $\Lambda_{\widehat{g}}$ je distribuce. (Mohli bychom použít faktu, že $\widehat{g} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, takže $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná, ale obejdeme se bez toho – temperovanost vyplyne z rovnosti níže.) Pro $f \in \mathcal{S}_d$ pak díky Větě 5.21(h) platí, že

$$\widehat{\Lambda_g}(f) = \Lambda_g(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \, \mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \widehat{g} \, \mathrm{d}\mu_d = \Lambda_{\widehat{g}}(f).$$

Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak lze postupovat analogicky, jako výše, pouze je třeba ověřit, že $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \, \mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f F(g) \, \mathrm{d}\mu_d$ pro každou $f \in \mathcal{S}_d$: Označme $L_2 = L_2(\mu_d)$ a $L_1 = L_1(\mu_d)$. Protože $L_2 \cap L_1$ je hustá v L_2 (vizte důkaz Věty 5.31), existuje posloupnost $\{g_n\} \subset L_2 \cap L_1$ taková, že $g_n \to g$ v L_2. Podle Věty 5.31 je tedy $\widehat{g_n} = F(g_n) \to F(g)$ v L_2. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Protože $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} hf \, \mathrm{d}\mu_d$ a $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h\widehat{f} \, \mathrm{d}\mu_d$ jsou spojité lineární funkcionály na L_2 (Věta 2.15, Tvrzení 38(a), Věta 42), platí s využitím Věty 5.21(h), že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \, \mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g_n \, \mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \widehat{g_n} \, \mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f F(g) \, \mathrm{d}\mu_d.$$

(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, pak díky Tvrzení 48, Tvrzení 41(b) a linearitě $\widehat{\Lambda}$ platí, že

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha \Lambda}(f) &= D^\alpha \Lambda(\widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(\widehat{m_\alpha f}) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \widehat{\Lambda}(m_\alpha f) = \widehat{\Lambda}(s_\alpha f) = (s_\alpha \widehat{\Lambda})(f).\end{aligned}$$

Podobně, díky Tvrzení 48, Tvrzení 41(a) a linearitě Λ platí, že

$$\begin{aligned}(D^\alpha \widehat{\Lambda})(f) &= (-1)^{|\alpha|} \widehat{\Lambda}(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(\widehat{D^\alpha f}) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(s_\alpha \widehat{f}) = \\ &= \Lambda(m_\alpha \widehat{f}) = (m_\alpha \Lambda)(\widehat{f}) = \widehat{m_\alpha \Lambda}(f).\end{aligned}$$

(c) Snadno je vidět, že $\mathcal{F}$ je lineární. Nechť $\{\Phi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{S}_d^*$ je net, který w^*-konverguje k $\Phi \in \mathcal{S}_d^*$. Pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ pak $\mathcal{F}(\Phi_\gamma)(f) = \Phi_\gamma(\widehat{f}) \to \Phi(\widehat{f}) = \mathcal{F}(\Phi)(f)$. Tedy $\mathcal{F}$ je spojité. Dále pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ je dle Věty 42

$$\mathcal{F}^4(\Phi)(f) = \mathcal{F}^3(\Phi)(\widehat{f}) = \cdots = \Phi(\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}) = \Phi(f),$$

neboli $\mathcal{F}^4 = Id$. Odtud dále plyne, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^3 = Id = \mathcal{F}^3 \circ \mathcal{F}$, což implikuje, že $\mathcal{F}$ je bijekce a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. Tedy $\mathcal{F}^{-1}$ je také spojité.

□

Kapitola 8

Bochnerův integrál

■■■Jedním ze základních úkolů v nekonečněrozměrné analýze je integrace funkcí s vektorovými hodnotami. V této kapitole se tohoto úkolu ujmeme pomocí teorie Bochnerova integrálu, což je konstrukce vektorového integrálu analogická konstrukci integrálu Lebesgueova. Stejně jako ve skalární teorii hrají důležitou roli měřitelná zobrazení, přičemž jejich charakterizace daná Větou 17 umožňuje v řadě případů ověřit silnou měřitelnost potřebnou k bochnerovské integraci. Poznamenejme ještě, že klíčovou roli bude v celé teorii hrát úplnost uvažovaného měřitelného prostoru.

1. Měřitelná zobrazení

Připomeňme, že jsou-li $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ měřitelné prostory, pak $f : X \to Y$ se nazývá měřitelné, pokud $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$ pro každou $T \in \mathcal{T}$. Je-li X topologický prostor, pak pokud není řečeno jinak, uvažujeme na X borelovskou σ-algebru.

Následující tvrzení je zobecněním základní věty z teorie míry pro měřitelné (komplexní či numerické) funkce.

TVRZENÍ 1. *Nechť Ω je měřitelný prostor a X je metrický prostor. Pak bodová limita posloupnosti měřitelných zobrazení z Ω do X je měřitelné zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $f_n : \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost měřitelných zobrazení, která bodově konverguje k $f : \Omega \to X$. Vezměme libovolnou uzavřenou $F \subset X$. Položme $G_k = \{x \in X;\ \operatorname{dist}(x, F) < \frac{1}{k}\}$. Pak G_k jsou otevřené množiny takové, že $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{G_k}$. Tvrdíme, že

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k),$$

odkud plyne měřitelnost f, neboť množina vpravo je zjevně měřitelná. Vskutku, nechť $t \in f^{-1}(F)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je G_k okolí $f(t)$, takže existuje $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $f_n(t) \in G_k$ pro $n \geq n_k$. Tedy $t \in \bigcap_{n=n_k}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$. To znamená, že $t \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Na druhou stranu, je-li $t \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje n_k takové, že $f_n(t) \in G_k$ pro $n \geq n_k$. To znamená, že $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) \in \overline{G_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, neboli $f(t) \in F$.

□

Víme, že v teorii integrace skalárních funkcí hrají důležitou roli jednoduché funkce. Tento koncept bude zásadní i pro teorii vektorového integrálu.

DEFINICE 2. Nechť Ω a X jsou množiny. Zobrazení $f : \Omega \to X$ se nazývá jednoduché, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina.

Snadno je vidět, že jsou-li Ω, X měřitelné prostory a $f : \Omega \to X$ jednoduché zobrazení takové, že $f^{-1}(x)$ je měřitelná množina pro každé $x \in f(\Omega)$, pak f je měřitelné.

VĚTA 3. *Nechť Ω je měřitelný prostor a X je separabilní metrický prostor. Pak $f : \Omega \to X$ je měřitelné, právě když je bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ plyne ihned z Tvrzení 1.

$\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá v (X, ρ). Zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$. Definujme množiny $A^n_{(k,j)} \subset X$, kde $(k, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ s lexikografickým uspořádáním, následovně:

$$A^n_{(k,j)} = U(x_j, \tfrac{1}{n+1-k}) \setminus \bigcup_{(r,s)<(k,j)} U(x_s, \tfrac{1}{n+1-r}).$$

Tyto množiny jsou zjevně borelovské a po dvou disjunktní. Pro $t \in \Omega$ definujme $f_n(t) = x_j$, je-li $f(t) \in A^n_{(k,j)}$ pro nějaké $(k, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $f_n(t) = x_1$ jinak. Pak f_n je jednoduché měřitelné zobrazení.

Je-li nyní $t \in \Omega$ a $m \in \mathbb{N}$, pak existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(f(t), x_j) < \frac{1}{m}$, tj. $f(t) \in U(x_j, \frac{1}{m})$. Položme $n_0 = \max\{m, j\}$. Nechť $n \geq n_0$. Pak existuje $(r, s) \in \{1, \dots, n\}^2$ minimální takové, že $f(t) \in U(x_s, \frac{1}{n+1-r})$ a navíc platí, že $(r, s) \leq (n + 1 - m, j)$. To znamená, že $f(t) \in A^n_{(r,s)}$ a $r \leq n + 1 - m$. Odtud plyne, že $f_n(t) = x_s$, a tedy $\rho(f_n(t), f(t)) = \rho(x_s, f(t)) < \frac{1}{n+1-r} \leq \frac{1}{m}$. Tím jsme dokázali, že $f_n(t) \to f(t)$.

□

Pro měřitelná zobrazení do neseparabilních prostorů může dojít k nepříjemnému jevu – součet měřitelných zobrazení nemusí být měřitelné zobrazení.

PŘÍKLAD 4. Nechť X je normovaný lineární prostor takový, že card $X > \mathfrak{c}$ (např. $\ell_2(2^{\mathfrak{c}})$). Definujme zobrazení $f, g\colon X \times X \to X$ předpisy $f(x, y) = x$, $g(x, y) = -y$. Vezměme dále na X borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}$ a na $X \times X$ součinovou σ-algebru $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Pak snadno nahlédneme, že f i g jsou měřitelná zobrazení, ale $h = f + g$ není měřitelné, neboť $h^{-1}(0) = \{(x, x);\ x \in X\}$, což dle Lemmatu 15.73 není měřitelná množina.

◇

Abychom se vyhnuli výše uvedenému jevu, mohli bychom se omezit pouze na zobrazení se separabilním oborem hodnot. Nicméně pro vybudování teorie integrálu se z formálních důvodů zdá výhodné umět integrovat také zobrazení, která se na množině nulové míry mohou chovat jakkoliv. Protože je potřeba, aby integrované zobrazení bylo zároveň měřitelné v klasickém smyslu (abychom dostali měřitelnost funkce $t \mapsto \|f(t)\|$), je nezbytné v celé teorii pracovat s úplnými mírami.

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a M je množina, pak symbolem $Æ(\Omega, M)$ označíme množinu všech zobrazení definovaných μ-s. v. na Ω s hodnotami v M.

DEFINICE 5 (Salomon Bochner (1933)). Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou a X je metrický prostor. Zobrazení z $Æ(\Omega, X)$ nazveme silně měřitelným (též bochnerovsky měřitelným) vzhledem k μ, pokud je μ-s. v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.

LEMMA 6. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné, právě když je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.*

Poznamenejme, že úplnost μ je zde naprosto zásadní.

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Existují jednoduchá měřitelná zobrazení $f_n\colon \Omega \to X$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f_n \to f$ na $\Omega \setminus E$. Dle Tvrzení 1 je $f \restriction_{\Omega\setminus E}$ měřitelné. Díky úplnosti μ je tedy f měřitelné. Dále $f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega)}$, přičemž množina vpravo je zjevně separabilní (je to uzávěr spočetné množiny).

$\Leftarrow$ Dle Věty 3 je $f \restriction_{\Omega\setminus E}$ bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení definovaných na $\Omega \setminus E$. Nyní stačí tato jednoduchá zobrazení dodefinovat konstantní hodnotou na E.

□

Speciálně, pro zobrazení do separabilních metrických prostorů pojmy měřitelnosti a silné měřitelnosti splývají. Tedy například spojité zobrazení ze separabilního metrického prostoru s mírou, která je zúplněním borelovské míry, do metrického prostoru je silně měřitelné.

PŘÍKLAD 7. Nechť Γ je nespočetná množina a μ je aritmetická míra na Γ. Definujme $f : \Gamma \to c_0(\Gamma)$ předpisem $f(\gamma) = e_\gamma = \chi_{\{\gamma\}}$. Pak f je měřitelné, neboť každá podmnožina Γ je μ-měřitelná, ale dle Lemmatu 6 není f silně měřitelné, neboť $f(\Gamma)$ je neseparabilní a míru 0 má pouze prázdná množina. Poznamenejme, že existence podobného příkladu pro σ-konečnou míru již úzce souvisí s axiomy teorie množin (vizte též Tvrzení 14.11).

◇

DŮSLEDEK 8. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. k $f \in Æ(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné.*

DŮKAZ. Dle předpokladu existuje $H \subset \Omega$ taková, že $\mu(\Omega \setminus H) = 0$ a $f_n \to f$ bodově na H. Dle Lemmatu 6 jsou $f_n \restriction_H$ měřitelná, a tedy i $f \restriction_H$ je měřitelné (Tvrzení 1). Díky úplnosti μ je tedy f měřitelné. Dále existují $E_n \subset \Omega$ takové, že $\mu(E_n) = 0$ a $f_n(\Omega \setminus E_n)$ je separabilní. Položme $E = (\Omega \setminus H) \cup \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Pak $\mu(E) = 0$. Protože $f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^\infty f_n(\Omega \setminus E_n)}$, je $f(\Omega \setminus E)$ separabilní. Dle Lemmatu 6 je tedy f silně měřitelné.

□

LEMMA 9. *Nechť Ω a X jsou je měřitelné prostory, X je zároveň vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \colon \Omega \to X$ jsou jednoduchá měřitelná zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou jednoduchá měřitelná zobrazení.*

DŮKAZ. Zobrazení $f + g$ je jednoduché, neboť $(f + g)(\Omega) \subset f(\Omega) + g(\Omega)$, kde vpravo je konečná množina. Dále, je-li $x \in (f + g)(\Omega)$, pak

$$(f+g)^{-1}(x) = \bigcup_{\substack{u \in f(\Omega) \\ v \in g(\Omega) \\ u+v=x}} f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v),$$

což je měřitelná množina, neboť sjednocení vpravo je konečné. Tedy $f + g$ je měřitelné.

Je-li $\alpha = 0$, pak je tvrzení o αf triviální. Pro $\alpha \neq 0$ je $(\alpha f)(\Omega) = \alpha(f(\Omega))$ a $(\alpha f)^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{1}{\alpha}x)$, odkud tvrzení ihned plyne.

□

Z definice silné měřitelnosti a Lemmatu 9 ihned plyne následující důsledek:

DŮSLEDEK 10. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in Æ(\Omega, X)$ jsou silně měřitelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou silně měřitelná zobrazení.*

Pro praktické ověření silné měřitelnosti není ovšem definice příliš vhodná a i použití Lemmatu 6 přináší nemalé obtíže. Dále si proto ukážeme praktičtější charakterizaci silně měřitelných zobrazení.

DEFINICE 11 (Izrail Moisejevič Gelfand[1] (1938), Billy James Pettis (1938)). Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f \in Æ(\Omega, X)$ nazveme slabě měřitelným, pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f$ měřitelná funkce.

Zjevně každé měřitelné zobrazení do normovaného lineárního prostoru je slabě měřitelné.

PŘÍKLAD 12. Nechť $\Omega = [0, 1]$ s Lebesgueovou mírou a $X = \ell_2([0, 1])$. Definujme zobrazení $f \colon [0, 1] \to X$ předpisem $f(t) = e_t$ (připomeňme, že $e_t = \chi_{\{t\}}$). Pak f je slabě měřitelné, ale není měřitelné (a tedy ani silně měřitelné).

Nechť $\phi \in \ell_2([0, 1])^*$ je dáno. Dle Věty 2.15(c) existuje $y \in \ell_2([0, 1])$ takové, že

$$\phi(x) = \sum_{s \in [0,1]} x(s) y(s) \quad \text{pro } x \in \ell_2([0, 1]).$$

Odtud vidíme, že $\phi \circ f(t) = \phi(e_t) = y(t)$ pro každé $t \in [0, 1]$. Jelikož $\sum_{t \in [0,1]} |y(t)|^2 < +\infty$, je množina $\{t \in [0, 1];\ y(t) \neq 0\}$ spočetná. Tedy funkce $\phi \circ f$ je s. v. rovna 0, takže je měřitelná.

[1] Израиль Моисеевич Гельфанд

Na druhou stranu, je-li $E \subset [0,1]$ Lebesgueovy míry 0, pak existuje neměřitelná $A \subset [0,1] \setminus E$ ([R, Věta 2.22]). Položíme-li nyní $G = \bigcup_{t \in A} U(e_t, 1) \subset X$, pak G je otevřená množina a $f^{-1}(G) = A$. Tedy f není měřitelné.

◇

DEFINICE 13. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující, pokud $\|x\| = \sup_{f \in A} |f(x)|$ pro každé $x \in X$.

Samotná množina B_{X^*} je 1-normující díky duálnímu vyjádření normy (Důsledek 2.6). Dokonce jen S_{X^*} je 1-normující (Důsledek 2.5).

LEMMA 14. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li $A \subset B_{X^*}$ množina w^*-hustá v B_{X^*}, pak A je 1-normující.*

DŮKAZ. Nechť $x \in X$ a nechť $f \in B_{X^*}$ je takové, že $f(x) = \|x\|$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $g \in A$ takové, že $g \in f + U_{x,\varepsilon}$, tj. $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pak ovšem $g(x) = f(x) + g(x) - f(x) > \|x\| - \varepsilon$.

□

LEMMA 15. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_\circ = B_X$. Dokonce pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že $B(x,r) = \bigcap_{f \in A} \{y \in X;\ |f(y) - f(x)| \le r\}$.*

DŮKAZ. Je-li $x \in A_\circ$, pak $|f(x)| \le 1$ pro každé $f \in A$, takže $\|x\| = \sup_{f \in A} |f(x)| \le 1$, neboli $x \in B_X$. Na druhou stranu $B_X = (B_{X^*})_\circ \subset A_\circ$.

Obecnější tvrzení plyne z následujícího výpočtu (využívajícího Tvrzení 6.109(d)):

$$
\begin{aligned}
B(x,r) &= x + rB_X = x + rA_\circ = x + \left(\tfrac{1}{r}A\right)_\circ = x + \bigcap_{g \in \frac{1}{r}A} \{z \in X;\ |g(z)| \le 1\} = \\
&= x + \bigcap_{f \in A} \{z \in X;\ |\tfrac{1}{r} f(z)| \le 1\} = \bigcap_{f \in A} \{x + z;\ z \in X, |f(z)| \le r\} = \\
&= \bigcap_{f \in A} \{y \in X;\ |f(y - x)| \le r\}.
\end{aligned}
$$

□

Nechť A je podmnožina vektorového prostoru na $\mathbb{K}$. Označme jako $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ množinu všech lineárních kombinací prvků A s racionálními koeficienty (v případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ míněno s racionální reálnou i imaginární částí).

LEMMA 16. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustý v $\operatorname{span} A$ a $B_X \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustá v $B_X \cap \operatorname{span} A$.*

DŮKAZ. Nechť $x \in \operatorname{span} A$. Pak $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$, kde $x_1, \dots, x_n \in A$. Nechť dále $\varepsilon > 0$. Položme $M = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$. Pak existují $\beta_j \in \mathbb{Q}$ (resp. $\beta_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) tak, že $|\beta_j - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{M}$, a tedy $\left\|x - \sum_{j=1}^n \beta_j x_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j) x_j\right\| \le \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \beta_j| \|x_j\| < \varepsilon$.

Je-li nyní $x \in B_X \cap \operatorname{span} A$, pak dle předchozího existuje $\{x_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ taková, že $x_n \to x$ a $\|x_n\| \le 1 + \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{n}{n+1} x_n \in B_X \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ a $x_n \to x$.

□

Nyní již můžeme snadno dokázat větu charakterizující silnou měřitelnost. Implikaci (iii)⇒(i) se říká Pettisova věta[2].

VĚTA 17. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je silně měřitelné.

(ii) f je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.

[2]B. J. Pettis (1938), v podstatě totéž tvrdil i I. M. Gelfand (1938).

(iii) *f je slabě měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.*
(iv) *Existují $E \subset \Omega$, $Y \subset X$ separabilní podprostor a $A \subset B_{Y^*}$ spočetná tak, že $\mu(E) = 0$, $f(\Omega \setminus E) \subset Y$, $B_{Y^*} \cap \operatorname{span} A$ je w^*-hustá v B_{Y^*} a $\phi \circ f$ je měřitelná pro každé $\phi \in A$.*

DŮKAZ. (i)$\Leftrightarrow$(ii) plyne z Lemmatu 6. (ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Položme $Y = \operatorname{span} f(\Omega \setminus E)$. Pak Y je separabilní dle Lemmatu 16. Dále dle Důsledku 6.116 a Tvrzení 6.119(a) je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt. Tedy je to separabilní prostor a existuje spočetná $A \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*}.

(iv)$\Rightarrow$(ii) Ukažme, že $g = f\restriction_{\Omega \setminus E}$ je měřitelné. Protože Y je separabilní, existuje spočetná $\{y_n\}$ hustá v Y. Pak každá otevřená množina v Y je spočetným sjednocením koulí tvaru $B(y_n, \frac{1}{k})$, $n, k \in \mathbb{N}$. Stačí tedy ukázat, že $g^{-1}(B(x,r))$ je měřitelná pro každé $x \in Y$ a $r > 0$. Díky předpokladu je dle Lemmatu 16 množina $M = B_{Y^*} \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ w^*-hustá v B_{Y^*} (w^*-topologie je slabší, než normová), takže dle Lemmatu 14 je M 1-normující. Protože M je spočetná, stačí díky Lemmatu 15 ukázat, že pro každé $x \in Y$, $r > 0$ a $\phi \in M$ je množina $g^{-1}(\{y \in Y;\ |\phi(y) - \phi(x)| \le r\}) = \{t \in \Omega \setminus E;\ \phi \circ f(t) \in B_{\mathbb{K}}(\phi(x), r)\}$ měřitelná. To je ale zřejmé, neboť $\phi \circ f$ je dle předpokladu měřitelná pro každé $\phi \in M$.

□

TVRZENÍ 18. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f = 0$ s. v., pak $f = 0$ s. v.*

DŮKAZ. Dle Lemmatu 6 existují $E \subset \Omega$ míry 0 a Y separabilní podprostor X tak, že $f(\Omega \setminus E) \subset Y$. Dále existuje spočetná množina $\{\phi_n\} \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*} (vizte důkaz Věty 17), a tedy 1-normující (Lemma 14). Označme $\tilde{\phi}_n$ rozšíření funkcionálů ϕ_n na X z Hahnovy-Banachovy věty. Dle předpokladu existují $E_n \subset \Omega$ nulové míry takové, že $\tilde{\phi}_n \circ f = 0$ na $\Omega \setminus E_n$. Položme $A = E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pak $\mu(A) = 0$ a pro $t \in \Omega \setminus A$ je $f(t) \in Y$, takže $\|f(t)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\phi_n(f(t))| = 0$.

□

2. Bochnerův integrál

■■■Samotná definice Bochnerova integrálu ze silně měřitelné funkce je zavedena pomocí limity posloupnosti integrálů ze schodovitých funkcí, tedy podobně jako ve skalárním případu. Než však onu definice uvedeme na scénu, je třeba připravit několik pomocných tvrzení.

DEFINICE 19. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f\colon \Omega \to X$ se nazývá schodovité, jestliže je jednoduché, měřitelné a pro každé $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

DEFINICE 20. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je schodovité. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{x \in f(\Omega) \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E) x.$$

Uvědomme si, že pro $X = \mathbb{R}$ nebo $X = \mathbb{C}$ je Bochnerův integrál ze schodovité funkce roven Lebesgueovu integrálu. (Pro nezáporné funkce je to přímo definice, pro ostatní si to lze snadno rozmyslet.)

Dále si všimněme, že je-li $f\colon \Omega \to X$ schodovité a $E \subset \Omega$ měřitelná, pak $\chi_E f$ je též schodovité a pro $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $(\chi_E f)^{-1}(x) = f^{-1}(x) \cap E$. Tedy

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{x \in f(\Omega) \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E) x = \sum_{x \in f(\Omega) \setminus \{0\}} \mu\big((\chi_E f)^{-1}(x)\big) x = \int_\Omega \chi_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

LEMMA 21. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je schodovité. Jsou-li $A, B \subset \Omega$ disjunktní měřitelné podmnožiny, pak $\int_{A \cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ.

$$\int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu\big(f^{-1}(x)\cap(A\cup B)\big)x = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \big(\mu(f^{-1}(x)\cap A)+\mu(f^{-1}(x)\cap B)\big)x =$$

$$= \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x)\cap A)x + \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x)\cap B)x = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B f\,\mathrm{d}\mu.$$

□

VĚTA 22. *Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f,g\colon\Omega\to X$ jsou schodovitá zobrazení a $\alpha\in\mathbb{K}$. Pak $f+g$ a αf jsou schodovitá a $\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E\subset\Omega$.*

DŮKAZ. Dle Lemmatu 9 jsou $f+g$ a αf jednoduchá měřitelná zobrazení. Protože pro $y\in(f+g)(\Omega)\setminus\{0\}$ je $(f+g)^{-1}(y)\subset\bigcup_{u\in f(\Omega)\setminus\{0\}} f^{-1}(u)\cup\bigcup_{v\in g(\Omega)\setminus\{0\}} g^{-1}(v)$, je $f+g$ schodovité. Vzorec stačí zjevně dokázat pro $E=\Omega$. Označme $E_{u,v}=f^{-1}(u)\cap g^{-1}(v)$ pro $u,v\in X$. Pak $\Omega=\bigcup_{u\in f(\Omega),v\in g(\Omega)} E_{u,v}$ je měřitelný disjunktní rozklad Ω. S pomocí Lemmatu 21 tedy dostáváme, že

$$\int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_\Omega \chi_{E_{u,v}}\cdot(f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})(u+v) =$$

$$= \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})u + \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})v = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} f\,\mathrm{d}\mu + \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} g\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu,$$

přičemž ve třetí a páté rovnosti jsme využili definici integrálu a toho, že integrál z nulového zobrazení je nula.

Konečně, podívejme se na tvrzení o násobku f. Je-li $\alpha=0$, pak tvrzení zřejmě platí. Je-li $\alpha\neq 0$, pak tvrzení plyne téměř ihned z definice a z toho, že $(\alpha f)^{-1}(\alpha x)=f^{-1}(x)$ pro $x\in X$.

□

Uvědomme si, že z věty výše speciálně plyne indukcí, že je-li $f=\sum_{j=1}^n \chi_{A_j}x_j$ libovolné vyjádření schodovitého zobrazení takové, že $\mu(A_j)<+\infty$ pro všechna $j\in\{1,\dots,n\}$, pak $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{j=1}^n \mu(A_j\cap E)x_j$.

Je-li (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\in Æ(\Omega,X)$ je měřitelné zobrazení, pak funkce $t\mapsto\|f(t)\|$ je měřitelná na Ω, neboť je složením spojité funkce $\|\cdot\|$ a měřitelného zobrazení f. Tuto funkci budeme značit $\|f\|$. Následující příklad ukazuje, že slabá měřitelnost f ještě měřitelnost $\|f\|$ nezaručí.

PŘÍKLAD 23. Nechť $\Omega=[0,1]$ s Lebesgueovou mírou a $X=\ell_2([0,1])$. Zobrazení f z Příkladu 12 není měřitelné, ale je slabě měřitelné a $\|f(t)\|=1$ pro každé $t\in[0,1]$, takže funkce $\|f\|$ je měřitelná. Nechť $E\subset[0,1]$ je lebesgueovsky neměřitelná množina a definujme zobrazení $g\colon[0,1]\to X$ předpisem $g(t)=\chi_E(t)f(t)=\chi_E(t)e_t$. Pak g je slabě měřitelné (argument je zcela stejný, jako pro f), ale funkce $\|g\|$ měřitelná není, neboť $\|g\|=\chi_E$.

◇

LEMMA 24. *Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon\Omega\to X$ je jednoduché měřitelné zobrazení. Pak f je schodovité, právě když $\int_\Omega\|f\|\,\mathrm{d}\mu<+\infty$. V tom případě je $\left\|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right\|\le\int_E\|f\|\,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E\subset\Omega$.*

Uvědomme si, že na levé straně nerovnosti je Bochnerův integrál, zatímco na pravé straně je Lebesgueův integrál.

DŮKAZ. Nechť $f = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j$, kde A_j jsou po dvou disjunktní a x_j jsou po dvou různé a nenulové. Pak $\|f\| = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} \|x_j\|$, a tedy $\int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\|x_j\|$. Odtud již první tvrzení snadno plyne. Dále, pro $E \subset \Omega$ měřitelnou je $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap E)x_j\right\| \le \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap E)\|x_j\| = \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$. □

LEMMA 25. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $f \in \mathcal{AE}(\Omega, X)$ je silně měřitelné a $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\| \,\mathrm{d}\mu(t) = 0$. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ existuje $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. Navíc je-li $g_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ posloupnost schodovitých zobrazení se stejnou vlastností, jako má $\{f_n\}$, pak $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ je díky Větě 22, Lemmatu 24 a Důsledku 10

$$\left\|\int_E f_m \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\right\| = \left\|\int_E (f_m - f_n) \,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_E \|f_m - f_n\| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_m - f_n\| \,\mathrm{d}\mu \le$$
$$\le \int_\Omega \|f_m - f\| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|f - f_n\| \,\mathrm{d}\mu.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská v X, a protože X je úplný, má tam limitu.

Dokažme nyní druhou část tvrzení. Posloupnost $\{h_n\}$ definovaná jako $h_{2n-1} = f_n$, $h_{2n} = g_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ má stejnou vlastnost jako $\{f_n\}$, podle první části tedy posloupnost $\{\int_E h_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ má limitu v X. Posloupnosti $\{\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ a $\{\int_E g_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ jsou z ní ovšem vybrané, takže musejí mít stejnou limitu. □

Poznamenejme, že z předpokladů předchozího lemmatu plyne, že posloupnost funkcí $t \mapsto \|f_n - f\|(t)$ konverguje k 0 v prostoru $L_1(\mu)$, takže existuje vybraná posloupnost z $\{f_{n_k}\}$ taková, že $\|f_{n_k} - f\| \to 0$ bodově s. v., neboli $f_{n_k} \to f$ bodově s. v. ([R, Věta 3.12]). Tedy předpoklad, že f je silně měřitelné, je nutný.

Předchozí lemma nám umožňuje definovat Bochnerův integrál jako limitu integrálů ze schodovitých zobrazení.

DEFINICE 26. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{AE}(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Řekneme, že je f je bochnerovsky integrovatelné, pokud existuje posloupnost $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ pak definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Díky Lemmatu 25 je definice korektní, neboť limita existuje a je nezávislá na volbě posloupnosti $\{f_n\}$.

VĚTA 27. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{AE}(\Omega, X)$ jsou bochnerovsky integrovatelná, $\alpha \in \mathbb{K}$ a $E \subset \Omega$ je měřitelná.*

(a) Zobrazení $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a $\int_E (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_E g \,\mathrm{d}\mu$ a $\int_E \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

(b) $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ jsou posloupnosti schodovitých zobrazení takové, že $\int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$ a $\int_\Omega \|g_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. Zobrazení $f + g$ a αf jsou silně měřitelná dle Důsledku 10; zobrazení $f_n + g_n$ a αf_n jsou schodovitá dle Věty 22. Dále $\int_\Omega \|f_n + g_n - (f + g)\| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|g_n - g\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$ a $\int_\Omega \|\alpha f_n - \alpha f\| \,\mathrm{d}\mu = |\alpha| \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. Odtud plyne, že $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a (též s využitím Věty 22) že platí příslušné vzorce.

(b) Funkce $\|f\|$ je nezáporná měřitelná, tedy integrál vpravo existuje. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je konečný. Dále $\left\|\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_E \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ dle Lemmatu 24. Výraz vlevo konverguje dle definice k $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\|$. Pro výraz vpravo je $\left|\int_E \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu - \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_E \big|\|f_n\| - \|f\|\big| \,\mathrm{d}\mu \le \int_E \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. □

Následující věta udává užitečnou charakterizaci bochnerovsky integrovatelných funkcí.

VĚTA 28. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega,X)$ je silně měřitelné. Pak f je bochnerovsky integrovatelné, právě když $\|f\|$ je lebesgueovsky integrovatelná.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Funkce $\|f\|$ je nezáporná měřitelná, tedy její Lebesgueův integrál existuje. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení z definice $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, takže $\int_\Omega \|f\|\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_n\|\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, přičemž konečnost předposledního integrálu plyne z Lemmatu 24.

$\Leftarrow$ Nechť $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost jednoduchých měřitelných zobrazení a $E \subset \Omega$ nulové míry taková, že $f_n \to f$ bodově na $\Omega \setminus E$. Pro $t \in \Omega$ definujme

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{pokud } \|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pak g_n je zjevně jednoduché měřitelné zobrazení (množina $\{t \in \Omega;\ \|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|\}$ je měřitelná), pro které $\|g_n\| \le 2\|f\|$. Odtud plyne, že $\|g_n\|$ je lebesgueovsky integrovatelná, a tedy g_n je schodovité (Lemma 24). Snadno si rozmyslíme, že $\|g_n(t) - f(t)\| \to 0$ pro $t \in \Omega \setminus E$: Je-li $f(t) = 0$, pak $g_n(t) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak je $\|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|$ pro všechna dost velká n, a tedy pro tato n je $g_n(t) = f_n(t) \to f(t)$. Jelikož $\|g_n - f\| \le \|g_n\| + \|f\| \le 3\|f\|$, z Lebesgueovy věty plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\|\,\mathrm{d}\mu = 0$.

□

Je-li $X = \mathbb{K}$, pak pojem silně měřitelné a měřitelné funkce do X splývá. Z předchozí věty a z nerovnosti $\left|\int f_n\,\mathrm{d}\mu - \int f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu$ pro *Lebesgueův* integrál tedy speciálně plyne, že ve skalárním případě je Bochnerův integrál totéž jako Lebesgueův.

VĚTA 29. *Nechť (Ω,μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega,X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega,X)$ je bochnerovsky integrovatelné takové, že $f_n \to f$ stejnoměrně s. v. na Ω. Pak $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Nechť $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ a $f_n \to f$ stejnoměrně na E. Dále nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sup_E \|f_n - f\| \le 1$ pro $n \ge n_0$. Pak pro $n \ge n_0$ je $\int_\Omega \|f_n\|\,\mathrm{d}\mu = \int_E \|f_n\|\,\mathrm{d}\mu \le \int_E (\|f\| + 1)\,\mathrm{d}\mu = \int_E \|f\|\,\mathrm{d}\mu + \mu(E)$, a tedy f_n je bochnerovsky integrovatelné (Věta 28). Tedy pro $n \ge n_0$ díky Větě 27 platí, že $\left\|\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu = \int_E \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu \le \mu(E)\sup_E \|f_n - f\| \to 0$.

□

VĚTA 30 (o majorizované konvergenci). *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega,X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega,X)$ je takové, že $f_n \to f$ bodově s. v., a nechť $g \in L_1(\mu)$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu = 0$. Speciálně, $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Zobrazení f je silně měřitelné dle Důsledku 8. Snadno nahlédneme, že $\|f(t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Tedy zobrazení f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná dle Věty 28. Jelikož pro s. v. $t \in \Omega$ platí, že $\|f_n(t) - f(t)\| \le 2g(t)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tvrzení plyne ihned z Lebesgueovy věty. Poslední část věty plyne z odhadu $\left\|\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu$, který platí díky Větě 27.

□

Z Vět 27(b) a 28 a z absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu ([R, cvičení 1.12]) ihned dostáváme následující větu:

VĚTA 31 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu). *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega,X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\left\|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right\| < \varepsilon$ kdykoli $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(E) < \delta$.*

VĚTA 32. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X a Y jsou Banachovy prostory, $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak $T \circ f$ je bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$\int_E T \circ f \,\mathrm{d}\mu = T\Big(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\Big).$$

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že f je schodovité. Nechť $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$, kde A_j jsou po dvou disjunktní a x_j jsou po dvou různé a nenulové. Pak $T \circ f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} T(x_j)$, odkud snadno plyne, že $T \circ f$ je schodovité. Dále $\int_E T \circ f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap E) T(x_j) = T\big(\sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap E) x_j\big) = T\big(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\big)$.

Dokažme nyní obecný případ. Díky spojitosti T snadno nahlédneme, že zobrazení $T \circ f$ je silně měřitelné. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení z definice $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$. Pak $\{T \circ f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení a

$$\int_\Omega \|T \circ f_n - T \circ f\| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \|T(f_n(t) - f(t))\| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|T\| \cdot \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = \|T\| \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

Zobrazení $T \circ f$ je tedy bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ díky předchozímu odstavci a spojitosti T dostáváme, že

$$\int_E T \circ f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E T \circ f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} T\Big(\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\Big) = T\Big(\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\Big) = T\Big(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\Big).$$

□

FAKT 33. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $x \in X$ a $f \in L_1(\mu)$. Pak $\int_E f(t) x \,\mathrm{d}\mu(t) = \big(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\big) x$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

DŮKAZ. Definujme $T : \mathbb{K} \to X$ předpisem $T(s) = sx$. Pak $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, X)$. Tvrzení tedy plyne z Věty 32.

□

PŘÍKLAD 34. Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou a $f \in Æ(\Omega, \mathbb{K}^n)$. Označme $f_1, \dots, f_n \in Æ(\Omega, \mathbb{K})$ komponenty zobrazení f, tj. $f = (f_1, \dots, f_n)$. Pak f je silně měřitelné, právě když $f_1, \dots, f_n$ jsou měřitelné a f je bochnerovsky integrovatelné, právě když $f_1, \dots, f_n \in L_1(\mu)$. V tom případě pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \big(\int_\Omega f_1 \,\mathrm{d}\mu, \dots, \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\big)$.

Vskutku, předně si uvědomme, že $\mathbb{K}^n$ je separabilní, a tedy pojmy silné měřitelnosti a měřitelnosti splývají. Označme $e_1, \dots, e_n$ kanonickou bázi $\mathbb{K}^n$ a $\phi_1, \dots, \phi_n$ souřadnicové funkcionály na $\mathbb{K}^n$. Je-li f měřitelné, pak $f_j = \phi_j \circ f$ je též měřitelná díky spojitosti ϕ_j. Je-li navíc f bochnerovsky integrovatelné, pak integrovatelnost f_j spolu se vzorcem pro $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ plyne z Věty 32.

Obráceně, jsou-li $f_1, \dots, f_n$ měřitelné, pak $t \mapsto f_j(t) e_j$ je měřitelné, neboť $s \mapsto s e_j$ je spojité. Protože $f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t) e_j$, je f (silně) měřitelné, jakožto součet (silně) měřitelných zobrazení (Věta 10). Jsou-li navíc $f_1, \dots, f_n \in L_1(\mu)$, pak z Faktu 33 plyne bochnerovská integrovatelnost zobrazení $t \mapsto f_j(t) e_j$ a integrovatelnost f plyne z linearity Bochnerova integrálu (Věta 27(a)).

◇

PŘÍKLAD 35. Nechť Γ je libovolná neprázdná množina, μ je aritmetická míra na Γ a X je Banachův prostor. Pak $f : \Gamma \to X$ je bochnerovsky integrovatelné, právě když je řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$ absolutně konvergentní. V tom případě je $\int_\Gamma f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$.

Vskutku, je-li řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$ konvergentní, pak dle Věty 1.33(d) je množina $\{\gamma \in \Gamma;\ f(\gamma) \neq 0\}$ spočetná; nechť $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ je libovolná prostá posloupnost obsahující všechny její prvky. Položme $f_n = \chi_{\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}} f$. Pak f_n jsou schodovitá zobrazení a $f_n \to f$ bodově. Tedy f je silně měřitelné. Dále funkce

$\|f\|$ je nezáporná a měřitelná, Lebesgueův integrál $\int_\Gamma \|f\|\,\mathrm{d}\mu$ tedy existuje a[3]

$$\int_\Gamma \|f\|\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_\Gamma s\,\mathrm{d}\mu;\ s\colon \Gamma \to [0,+\infty) \text{ jednoduchá, } s \le \|f\|\right\} =$$
$$= \sup\left\{\int_\Gamma \chi_F \|f\|\,\mathrm{d}\mu;\ F \subset \Gamma \text{ konečná}\right\} = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F}\|f(\gamma)\|;\ F \subset \Gamma \text{ konečná}\right\} = \sum_{\gamma\in\Gamma}\|f(\gamma)\|.$$

■

Odtud spolu s Větou 28 plyne první tvrzení. Předpokládejme nyní, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$ je absolutně konvergentní. Protože $\|f_n(\gamma)\| \le \|f(\gamma)\|$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, dle Vět 30 a 1.33(e) je $\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\mu = \lim \int_\Gamma f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim \sum_{j=1}^n f(\gamma_j) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$.

◇

VĚTA 36. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Je-li $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$, pak $f = 0$ s. v.*

DŮKAZ. Nechť $\phi \in X^*$. Pak dle Věty 32 je $\phi\circ f \in L_1(\mu)$ a $\int_E \phi\circ f\,\mathrm{d}\mu = \phi\bigl(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\bigr) = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$. To znamená, že $\phi\circ f = 0$ s. v. ([R, Věta 1.39(b)]). Tedy $f = 0$ s. v. dle Tvrzení 18.

□

VĚTA 37. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každou $E \subset \Omega$ kladné míry je*

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\, f(E).$$

DŮKAZ. Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tj. $x = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu \notin \overline{\operatorname{conv}}\, f(E)$. Dle Věty 6.70(b) existuje $\phi \in X^*$ takové, že $\alpha = \sup_E \operatorname{Re}\phi\circ f < \operatorname{Re}\phi(x)$. Je-li $\mu(E) < +\infty$, pak díky Větě 32 platí, že

$$\alpha < \operatorname{Re}\phi(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E \phi\circ f\,\mathrm{d}\mu\right) = \frac{1}{\mu(E)}\int_E \operatorname{Re}\phi\circ f\,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{\mu(E)}\int_E \alpha\,\mathrm{d}\mu = \alpha,$$

což je spor. Je-li $\mu(E) = +\infty$, pak $x = 0$, takže $\alpha < \phi(0) = 0$. Je tedy (znovu díky Větě 32)

$$-\infty < \int_E \operatorname{Re}\phi\circ f\,\mathrm{d}\mu \le \int_E \alpha\,\mathrm{d}\mu = -\infty,$$

což je opět spor.

□

VĚTA 38. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, Y je Banachův prostor, P je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $f\colon P\times\Omega \to Y$. Předpokládejme, že $t \mapsto f(x,t)$ je silně měřitelné pro každé $x \in P$ a $x \mapsto f(x,t)$ je spojité v x_0 pro s. v. $t \in \Omega$. Dále předpokládejme, že existuje $g \in L_1(\mu)$ taková, že pro každé $x \in P$ je $\|f(x,t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak zobrazení $F\colon P \to Y$, $F(x) = \int_\Omega f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ je spojité v x_0.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\} \subset P$ je libovolná posloupnost konvergující k x_0. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $f_n\colon \Omega \to Y$ předpisem $f_n(t) = f(x_n, t)$. Pak zobrazení f_n jsou silně měřitelná, $f_n(t) \to f(x_0,t)$ pro s. v. $t \in \Omega$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Dle Věty 30 je tedy $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega f(x_0,t)\,\mathrm{d}\mu(t) = F(x_0)$.

□

VĚTA 39 (Fubiniova věta pro Bochnerův integrál). *Nechť (Ω_1,μ_1) a (Ω_2,μ_2) jsou prostory se σ-konečnými úplnými mírami a nechť ν je zúplněním součinové míry $\mu_1\times\mu_2$. Nechť X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega_1\times\Omega_2, X)$ je bochnerovsky integrovatelné vzhledem k ν. Potom pro μ_1-s. v. $s \in \Omega_1$ je zobrazení $t \mapsto f(s,t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_2, pro μ_2-s. v. $t \in \Omega_2$ je zobrazení $s \mapsto f(s,t)$ bochnerovsky*

[3] Je třeba rozšířit definici zobecněné řady nezáporných čísel i na součet $+\infty$.

integrovatelné na Ω_1; zobrazení $\psi_1(s) = \int_{\Omega_2} f(s,t)\,\mathrm{d}\mu_2(t)$ a $\psi_2(t) = \int_{\Omega_1} f(s,t)\,\mathrm{d}\mu_1(s)$ definovaná s. v. na Ω_1, resp. Ω_2 jsou bochnerovsky integrovatelná a

$$\int_{\Omega_1} \psi_1\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,\mathrm{d}\nu = \int_{\Omega_2} \psi_2\,\mathrm{d}\mu_2.$$

DŮKAZ. Zjevně stačí dokázat část věty týkající se ψ_1, které budeme nadále značit ψ. Řezy zobrazení budeme značit takto: $f^s(t) = f(s,t)$ pro $s \in \Omega_1$. Podle Lemmatu 6 existují separabilní uzavřený podprostor $Y \subset X$ a množina $N \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ tak, že $\nu(N) = 0$ a $f(\Omega_1 \times \Omega_2 \setminus N) \subset Y$. Dle Důsledku 6.116 a Tvrzení 6.119(a) je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt, tedy existuje spočetná $\{\phi_n\} \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*}. Díky Fubiniově větě pro Lebesgueův integrál použité na funkce χ_N a $\|f\|$ existuje $E_0 \subset \Omega_1$ taková, že $\mu_1(\Omega_1 \setminus E_0) = 0$ a pro každé $s \in E_0$ platí, že $\mu_2(N^s) = 0$, kde $N^s = \{t \in \Omega_2;\ (s,t) \in N\}$, funkce $\|f\|^s$ je integrovatelná na Ω_2 a funkce $g(s) = \int_{\Omega_2} \|f\|^s\,\mathrm{d}\mu_2$ je integrovatelná na Ω_1. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $\phi_n \circ f$ měřitelná vzhledem k ν, a tedy existuje $E_n \subset \Omega_1$ taková, že $\mu_1(\Omega_1 \setminus E_n) = 0$ a $\phi_n \circ f^s = (\phi_n \circ f)^s$ je μ_2-měřitelná pro každé $s \in E_n$. Položme $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$. Pak $\mu_1(\Omega_1 \setminus E) = 0$. Je-li $s \in E$, pak $f^s(\Omega_2 \setminus N^s) \subset Y$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\phi_n \circ f^s$ měřitelná. Tedy dle Věty 17 je f^s silně měřitelné na Ω_2. Dále je $\|f^s\| = \|f\|^s$, a tedy f^s je bochnerovsky integrovatelné na Ω_2 dle Věty 28.

Pro $s \in E$ je $\psi(s) = \int_{\Omega_2} f^s\,\mathrm{d}\mu_2 = \int_{\Omega_2\setminus N^s} f^s\,\mathrm{d}\mu_2 \in Y$. Je-li nyní $\phi \in X^*$, pak dle Věty 32 je $\phi\circ\psi(s) = \int_{\Omega_2} \phi\circ f^s\,\mathrm{d}\mu_2 = \int_{\Omega_2} (\phi\circ f)^s\,\mathrm{d}\mu_2$ pro $s \in E$. Na druhou stranu, $\phi\circ f \in L_1(\nu)$ (Věta 32), a tedy dle Fubiniovy věty pro Lebesgueův integrál je funkce $\psi_\phi(s) = \int_{\Omega_2} (\phi\circ f)^s\,\mathrm{d}\mu_2$ definovaná s. v. na Ω_1, je tam integrovatelná a $\int_{\Omega_1} \psi_\phi\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} \phi\circ f\,\mathrm{d}\nu$. Tedy speciálně $\phi\circ\psi = \psi_\phi$ s. v. na Ω_1, odkud plyne, že $\phi\circ\psi$ je měřitelná na Ω_1. Dle Věty 17 je tedy ψ silně měřitelné na Ω_1. Dále je $\|\psi(s)\| \le \int_{\Omega_2} \|f^s\|\,\mathrm{d}\mu_2 = g(s)$ pro $s \in E$, odkud plyne, že ψ je bochnerovsky integrovatelné (Věta 28).

Konečně, pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi\big(\int_{\Omega_1} \psi\,\mathrm{d}\mu_1\big) = \int_{\Omega_1} \phi\circ\psi\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1} \psi_\phi\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} \phi\circ f\,\mathrm{d}\nu = \phi\big(\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,\mathrm{d}\nu\big)$, přičemž jsme dvakrát využili Větu 32. Protože X^* odděluje body X, plyne odtud, že $\int_{\Omega_1} \psi\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,\mathrm{d}\nu$.

□

3. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

■■■Jelikož Lebesgueova míra přirozeně vede na konstrukci skalárních Lebesgueových L_p-prostorů, není příliš překvapivé, že Bochnerův integrál umožňuje definovat analogické prostory pro vektorové funkce.

DEFINICE 40. Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \le p \le \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z Æ(Ω, X) takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ-s. v.

Dále pro $f \in L_p(\mu, X)$ definujeme $\|f\|_{L_p(\mu,X)} = \big\|t \mapsto \|f(t)\|\big\|_{L_p(\mu)}$.

Všimněme si, že podle Věty 28 je $L_1(\mu, X)$ množina všech bochnerovsky integrovatelných zobrazení z Æ(Ω, X).

VĚTA 41. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \le p \le \infty$.*
(a) $L_p(\mu, X)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{L_p(\mu,X)}$.
(b) Je-li X Hilbertův prostor, pak $L_2(\mu, X)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle_{L_2(\mu,X)} = \int_\Omega \langle f(t), g(t)\rangle\,\mathrm{d}\mu.$$

DŮKAZ. (a) Nechť $f, g \in L_p(\mu, X)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Zobrazení $f+g$ a αf jsou silně měřitelná (Důsledek 10). Dále si všimněme, že norma na $L_p(\mu)$ je tzv. svazová, tj. má následující vlastnost: jsou-li $u, v \in L_p(\mu)$ a $0 \le u \le v$, pak $\|u\|_{L_p(\mu)} \le \|v\|_{L_p(\mu)}$. Odtud plyne, že $\big\|\|f+g\|\big\|_{L_p(\mu)} \le \big\|\|f\| + \|g\|\big\|_{L_p(\mu)} \le$

$\big\| \|f\| \big\|_{L_p(\mu)} + \big\| \|g\| \big\|_{L_p(\mu)}$ a $\big\| \|\alpha f\| \big\|_{L_p(\mu)} = \big\| |\alpha| \|f\| \big\|_{L_p(\mu)} = |\alpha| \big\| \|f\| \big\|_{L_p(\mu)}$. To znamená, že $L_p(\mu, X)$ je vektorový prostor a $f \mapsto \|f\|_{L_p(\mu,X)}$ je norma na $L_p(\mu, X)$. Důkaz úplnosti je slovo od slova stejný jako důkaz pro $L_p(\mu)$ v [R, Věta 3.11], zaměníme-li všechny výskyty absolutní hodnoty za normu v X.

(b) Zvolme pevně $f, g \in L_2(\mu, X)$ a ukažme, že funkce $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ je měřitelná. Díky spojitosti funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ (Tvrzení 1.84(b)) stačí ukázat měřitelnost zobrazení $\Psi \colon \Omega \to X \times X$, $\Psi(t) = (f(t), g(t))$. Po odstranění množiny nulové míry a přejmenování můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že f, g jsou měřitelná ve smyslu σ-algeber a zobrazují po řadě do separabilních podprostorů Y a Z. Prostor $Y \times Z$ je separabilní metrický prostor, má tedy bázi otevřených množin skládající se ze spočetného systému množin tvaru $U(x,r) \times U(y,r)$. Stačí tedy ukázat, že vzor libovolné množiny $U(x,r) \times U(y,r) \subset Y \times Z$ při zobrazení Ψ je měřitelná množina. To je ale zřejmé z toho, že $\Psi^{-1}(U(x,r) \times U(y,r)) = f^{-1}(U(x,r)) \cap g^{-1}(U(y,r))$.

Dále z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti (Tvrzení 1.81) dostáváme, že $|\langle f(t), g(t) \rangle| \leq \|f(t)\| \|g(t)\|$ pro každé $t \in \Omega$. Z Hölderovy nerovnosti tedy plyne, že $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle \in L_1(\mu)$, takže výraz $\langle f, g \rangle_{L_2(\mu,X)}$ je dobře definován. Fakt, že uvedený vzorec dává skalární součin, který navíc generuje kanonickou normu na $L_2(\mu, X)$, je nyní snadno vidět.

□

VĚTA 42. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p < \infty$.*

(a) Množina schodovitých zobrazení z Ω do X je hustá v $L_p(\mu, X)$.
(b) Jsou-li X i $L_p(\mu)$ separabilní, je $L_p(\mu, X)$ také separabilní.

DŮKAZ. (a) Důkaz je prakticky shodný s důkazem Věty 28, kde se vlastně dokazuje případ $p = 1$: Nechť $f \in L_p(\mu, X)$. Nechť $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost jednoduchých měřitelných zobrazení a $E \subset \Omega$ nulové míry taková, že $f_n \to f$ bodově na $\Omega \setminus E$. Pro $t \in \Omega$ definujme

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{pokud } \|f_n(t)\| \leq 2\|f(t)\|, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak g_n je zjevně jednoduché měřitelné zobrazení, pro které $\|g_n\| \leq 2\|f\|$. Odtud plyne, že $\|g_n\|^p$ je lebesgueovsky integrovatelná, a tedy podobně jako v Lemmatu 24 si lze rozmyslet, že g_n je schodovité. Dále $\|f(t) - g_n(t)\| \to 0$ pro $t \in \Omega \setminus E$: Je-li $f(t) = 0$, pak $g_n(t) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak je $\|f_n(t)\| \leq 2\|f(t)\|$ pro všechna dost velká n, a tedy pro tato n je $g_n(t) = f_n(t) \to f(t)$. Jelikož $\|f - g_n\|^p \leq (\|f\| + \|g_n\|)^p \leq 3^p \|f\|^p$, z Lebesgueovy věty plyne, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\|^p \, d\mu = 0$.

(b) Množina $\mathcal{A} = \{\chi_E;\ E \subset \Omega, \mu(E) < +\infty\}$ je podmnožina separabilního metrického prostoru $L_p(\mu)$, tedy existuje spočetná $\mathcal{E} \subset \{E \subset \Omega;\ \mu(E) < +\infty\}$ taková, že $\{\chi_E;\ E \in \mathcal{E}\}$ je hustá v $\mathcal{A}$ v metrice prostoru $L_p(\mu)$. Dále existuje spočetná $Q \subset X$ hustá v X. Snadno nahlédneme, že množina všech schodovitých zobrazení z Ω do X tvaru $\sum_{j=1}^n \chi_{E_j} x_j$, kde $E_j \in \mathcal{E}$ a $x_j \in Q$, je spočetná. Dle (a) stačí ukázat, že tato množina je hustá v množině všech schodovitých zobrazení z Ω do X v metrice prostoru $L_p(\mu, X)$.

Nechť tedy $f \colon \Omega \to X$ je schodovité, $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$, kde $\mu(A_j) < +\infty$, a nechť $\varepsilon \in (0,1)$. Položme $M = \max\big\{\|x_1\| + 1, \dots, \|x_n\| + 1, \|\chi_{A_1}\|_{L_p(\mu)}, \dots, \|\chi_{A_n}\|_{L_p(\mu)}\big\}$. Pak existují $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ a $y_1, \dots, y_n \in Q$ tak, že $\|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_{L_p(\mu)} < \frac{\varepsilon}{2Mn}$ a $\|x_j - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2Mn}$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$.

Využijeme-li svazovosti normy na $L_p(\mu)$, dostaneme, že

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_j} y_j \right\|_{L_p(\mu,X)} &= \left\| \sum_{j=1}^{n} (\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j) \right\|_{L_p(\mu,X)} = \left\| \left\| \sum_{j=1}^{n} (\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j) \right\| \right\|_{L_p(\mu)} \leq \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \| \chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j \| \right\|_{L_p(\mu)} \leq \sum_{j=1}^{n} \big\| \| \chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j \| \big\|_{L_p(\mu)} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \big\| \| \chi_{A_j} x_j - \chi_{A_j} y_j \| + \| \chi_{A_j} y_j - \chi_{B_j} y_j \| \big\|_{L_p(\mu)} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \big\| \| x_j - y_j \| \chi_{A_j} + \| y_j \| \cdot | \chi_{A_j} - \chi_{B_j} | \big\|_{L_p(\mu)} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \big(\| x_j - y_j \| \cdot \| \chi_{A_j} \|_{L_p(\mu)} + \| y_j \| \cdot \| \chi_{A_j} - \chi_{B_j} \|_{L_p(\mu)} \big) < \\
&< \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{2Mn} M + M \frac{\varepsilon}{2Mn} \right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitola 9

Banachovy algebry

■■■Řada klasických Banachových prostorů přirozeným způsobem připouští kromě vektorových operací i operaci násobení, například $C(K)$, kde násobení dvou funkcí je definováno bodově. Podobně Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$ všech spojitých operátorů na Banachově prostoru X připouští za násobení operaci skládání operátorů. V obou těchto případech tak dostáváme matematickou strukturu, která je algebraicky bohatší než pouhý vektorový prostor, dostáváme totiž algebru. Aby výsledný koncept Banachovy algebry byl dobře použitelný, je třeba svázat násobení s normou. V této kapitole uvidíme, jak mocným nástrojem teorie Banachových algeber je.

1. Základní vlastnosti

DEFINICE 1. Řekneme, že $(A, +, -, 0, \cdot_s, \cdot)$ je algebra nad $\mathbb{K}$, pokud $(A, +, -, 0, \cdot_s)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $(A, +, -, \cdot, 0)$ je okruh, a navíc platí, že $(\alpha \cdot_s a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot_s b) = \alpha \cdot_s (a \cdot b)$ pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Algebra nad $\mathbb{K}$ se nazývá komutativní, pokud je její okruhové násobení $\cdot$ komutativní.

Jak je zvykem, znak pro násobení skalárem vynecháváme, tj. píšeme $\alpha \cdot_s a = \alpha a$ pro $\alpha \in \mathbb{K}$ a $a \in A$. Podobně, znak pro násobení prvků A budeme též obvykle vynechávat, tj. budeme psát $a \cdot b = ab$ pro $a, b \in A$. Dále budeme často místo „algebra nad $\mathbb{K}$" říkat pouze (nepřesně) algebra.

Podalgebra algebry je její podmnožina uzavřená na algebrové operace, tj. je to vektorový podprostor uzavřený na okruhové násobení. Snadno je vidět, že průnik libovolného systému podalgeber je opět podalgebra.

Připomeňme, že má-li okruh (dokonce stačí monoid) levou i pravou jednotku, pak jsou si tyto prvky rovny a jsou (oboustrannou) jednotkou. Tedy jednotka v okruhu, existuje-li, je určena jednoznačně. Tuto okruhovou jednotku v algebře budeme obvykle značit e a budeme jí říkat jednotka algebry.

Následující tvrzení říká, že pokud algebra jednotku neobsahuje, můžeme ji přirozeně vnořit do algebry s jednotkou.

TVRZENÍ 2. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Položme $A_e = A \times \mathbb{K}$ a definujme vektorové operace na A_e obvyklým způsobem (tj. po složkách) a dále násobení prvků A_e pomocí vzorce*

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \quad \text{pro } a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pak A_e je algebra s jednotkou $(0, 1)$ a A lze identifikovat s její podalgebrou $A \times \{0\}$. Je-li A komutativní, je A_e též komutativní.

DŮKAZ. Víme, že A_e je vektorový prostor. Ověřme nyní vlastnosti násobení prvků A_e. Asociativita: pro libovolná $a, b, c \in A$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ je

$$\big((a,\alpha)(b,\beta)\big)(c,\gamma) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)(c,\gamma) = (abc + \alpha bc + \beta ac + \alpha\beta c + \gamma ab + \alpha\gamma b + \beta\gamma a, \alpha\beta\gamma),$$

$$(a,\alpha)\big((b,\beta)(c,\gamma)\big) = (a,\alpha)(bc + \beta c + \gamma b, \beta\gamma) = (abc + \beta ac + \gamma ab + \alpha bc + \alpha\beta c + \alpha\gamma b + \beta\gamma a, \alpha\beta\gamma),$$

odkud asociativita plyne. Distributivita: pro libovolná $a, b, c \in A$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ je

$$\begin{aligned}(a,\alpha)\big((b,\beta) + (c,\gamma)\big) &= (a,\alpha)(b + c, \beta + \gamma) = (ab + ac + \alpha b + \alpha c + \beta a + \gamma a, \alpha\beta + \alpha\gamma) = \\ &= (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) + (ac + \alpha c + \gamma a, \alpha\gamma) = (a,\alpha)(b,\beta) + (a,\alpha)(c,\gamma), \\ \big((b,\beta) + (c,\gamma)\big)(a,\alpha) &= (b + c, \beta + \gamma)(a,\alpha) = (ba + ca + \beta a + \gamma a + \alpha b + \alpha c, \alpha\beta + \alpha\gamma) = \\ &= (ba + \beta a + \alpha b, \alpha\beta) + (ca + \gamma a + \alpha c, \alpha\gamma) = (b,\beta)(a,\alpha) + (c,\gamma)(a,\alpha).\end{aligned}$$

Konečně, pro libovolná $a, b \in A$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ je

$$\begin{aligned}\gamma\big((a,\alpha)(b,\beta)\big) &= \gamma(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta) = (\gamma ab+\alpha\gamma b+\beta\gamma a,\alpha\beta\gamma) = \\ &= (\gamma a,\alpha\gamma)(b,\beta) = \big(\gamma(a,\alpha)\big)(b,\beta) = \\ &= (a,\alpha)(\gamma b,\beta\gamma) = (a,\alpha)\big(\gamma(b,\beta)\big).\end{aligned}$$

Dále $(0,1)(a,\alpha) = (0a + 1a + \alpha 0, 1\alpha) = (a,\alpha)$ a $(a,\alpha)(0,1) = (a0 + \alpha 0 + 1a, \alpha 1) = (a,\alpha)$ pro každé $a \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, a tedy $(0,1)$ je jednotka v A_{e}. Fakt, že $A \times \{0\}$ je podalgebra, je snadno vidět. Je-li A komutativní, pak komutativita A_{e} plyne ihned z definice násobení.

□

Poznamenejme, že pokud již algebra A obsahuje jednotku e, pak z jednoznačnosti jednotky plyne, že prvek $(e,0)$ již není jednotkou v A_{e}.

Nechť A, B jsou algebry nad $\mathbb{K}$. (Algebrový) homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ je zobrazení, které je homomorfismem mezi příslušnými vektorovými prostory (tj. je lineární) a zároveň je homomorfismem mezi příslušnými okruhy (tj. je multiplikativní, neboli $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$). Ihned vidíme, že $\operatorname{Rng}\Phi$ je podalgebra B. Snadno nahlédneme, že je-li C podalgebra B, pak $\Phi^{-1}(C)$ je podalgebra A. Jako obvykle, Φ nazýváme (algebraickým) izomorfismem algeber A a B, pokud Φ je bijekce. Dále připomeňme fakt z univerzální algebry, že je-li Φ algebraickým izomorfismem algeber A a B, pak $\Phi^{-1}\colon B \to A$ je opět algebrovým homomorfismem.

FAKT 3. *Nechť A je algebra, B je algebra s jednotkou e a $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus. Pak $\widetilde{\Phi}\colon A_{\mathrm{e}} \to B$, $\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x) + \lambda e$ je homomorfismus rozšiřující Φ.*

DŮKAZ. Linearita $\widetilde{\Phi}$ je zjevná. Dále pro $a, b \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ platí, že

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}\big((a,\alpha)(b,\beta)\big) &= \widetilde{\Phi}(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta) = \Phi(ab+\alpha b+\beta a)+\alpha\beta e = \\ &= \Phi(a)\Phi(b)+\alpha\Phi(b)+\beta\Phi(a)+\alpha\beta e = (\Phi(a)+\alpha e)(\Phi(b)+\beta e) = \widetilde{\Phi}(a,\alpha)\widetilde{\Phi}(b,\beta).\end{aligned}$$

□

TVRZENÍ 4. *Nechť A je algebra s jednotkou a B je podalgebra A neobsahující e. Pak $C = B + \operatorname{span}\{e\}$ je podalgebra A a zobrazení $\Phi\colon B_{\mathrm{e}} \to C$, $\Phi(x,\lambda) = x + \lambda e$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. Všimněme si, že Φ je rozšířením $Id\colon B \to C$ z Faktu 3. Tedy Φ je homomorfismus. Fakt, že Φ je bijekce, je snadno vidět.

□

DEFINICE 5. [1] Dvojici $(A, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaná algebra, pokud A je algebra, $(A, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, a pro každé $a, b \in A$ platí, že $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$. Je-li metrika generovaná $\|\cdot\|$ úplná, pak $(A, \|\cdot\|)$ se nazývá Banachovou algebrou.

TVRZENÍ 6. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Násobení prvků A je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojité) jakožto zobrazení z $A \times A$ do A.*

DŮKAZ. Zvolme $R > 0$ a $(x,y), (u,v) \in A \times A$ splňující $\rho((x,y),0) \le R$, $\rho((u,v),0) \le R$, kde ρ je součinová metrika na $A \times A$. Pak

$$\begin{aligned}\|xy-uv\| &\le \|xy-xv\| + \|xv-uv\| = \|x(y-v)\| + \|(x-u)v\| \le \|x\|\|y-v\| + \|v\|\|x-u\| \le \\ &\le R\big(\|x-u\|+\|y-v\|\big) \le 2R\rho\big((x,y),(u,v)\big).\end{aligned}$$

□

DŮSLEDEK 7. *Nechť A je normovaná algebra a B je podalgebra A. Pak $\overline{B}$ je též podalgebra A.*

[1] Koncept okruhu operátorů se objevuje u J. von Neumanna (1930), který teorii dále rozpracoval s Francisem J. Murraym (1936–43), vše v kontextu operátorů na Hilbertově prostoru, což bylo pro jejich teorii zásadní. Abstraktní přístup k Banachovým algebrám zavedla sovětská škola: I. M. Gelfand, Mark Aronovič Najmark (Марк Аронович Наймарк), Dmitrij Abramovič Rajkov (Дмитрий Абрамович Райков), Georgij Jevgeněvič Šilov (Георгий Евгеньевич Шилов). Název Banachova algebra navrhl patrně M. A. Zorn.

DŮKAZ. Nechť $x, y \in \overline{B}$. Pak existují $\{x_n\} \subset B$, $\{y_n\} \subset B$ takové, že $x_n \to x$ a $y_n \to y$. Jelikož $x_n y_n \in B$ a $x_n y_n \to xy$, platí, že $xy \in \overline{B}$.

□

DŮSLEDEK 8. *Pro každou normovanou algebru A existuje její zúplnění, tj. Banachova algebra taková, že A je její hustá podalgebra. Toto rozšíření je určeno jednoznačně až na izometrii. Má-li algebra A jednotku e, pak e je i jednotkou v zúplnění A.*

DŮKAZ. Podle Věty 2.28 existuje Banachův prostor $\widehat{A}$, který je zúplněním normovaného lineárního prostoru A. Rozšíření násobení z A na $\widehat{A}$ tak, aby $\widehat{A}$ byla normovaná algebra, se provede zcela analogicky, jako rozšíření skalárního součinu v důkazu Věty 2.28. Zachování jednotky plyne také ze spojitosti násobení.

□

PŘÍKLADY 9. (a) Je-li Γ neprázdná množina, pak prostor $\ell_\infty(\Gamma)$ s násobením prvků definovaným bodově (tj. $xy(\gamma) = x(\gamma)y(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$) je komutativní Banachova algebra s jednotkou (tou je vektor $x(\gamma) = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$). Všimněme si, že v této algebře platí $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in \ell_\infty(\Gamma)$.

(b) Je-li T topologický prostor, pak prostorem $C_b(T) = C_b(T, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na T s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in T}|f(x)|$. Snadno je vidět, že $C_b(T)$ je podalgebra $\ell_\infty(T)$ a z věty o stejnoměrné limitě posloupnosti spojitých funkcí plyne, že $C_b(T)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $\ell_\infty(T)$, a tedy je to komutativní Banachova algebra s jednotkou. Speciálně, je-li K kompaktní prostor, pak $C_b(K) = C(K)$.

(c) Je-li L je lokálně kompaktní topologický prostor, pak prostorem $C_0(L) = C_0(L, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na L takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in L;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompaktní. Na $C_0(L)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in L}|f(x)|$. Všimněme si, že je-li L kompaktní, pak $C_0(L) = C(L)$. Je-li L nekompaktní, pak můžeme alternativně popsat $C_0(L)$ následovně: Je-li K Alexandrovova kompaktifikace[2] L, tj. $K = L \cup \{\infty\}$, pak $C_0(L) = \{f\restriction_L;\ f \in C(K), f(\infty) = 0\}$. Odtud je snadno vidět, že $C_0(L)$ je uzavřenou podalgebrou $C_b(L)$, tedy je to komutativní Banachova algebra.

Dále snadno nahlédneme, že $C_c(L) = \{f \in C(L);\ \operatorname{supp} f \text{ kompaktní}\}$ je podalgebrou $C_0(L)$, tedy je to komutativní normovaná algebra. Je-li L Hausdorffův, pak $C_c(L)$ je hustá v $C_0(L)$: Nechť $f \in C_0(L)$ a $\varepsilon > 0$. Pak $K = \{x \in L;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ je kompaktní podmnožina L, a tedy dle Lemmatu 15.57 existuje $g \in C_c(L, [0, 1])$ taková, že $g = 1$ na K. Pak $fg \in C_c(L)$ a $\|fg - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Je-li L nekompaktní, pak může platit, že $C_c(L) \subsetneqq C_0(L)$ (např. pro $L = \mathbb{R}^n$, vizte str. 79); může ale také i v netriviálním případě být $C_c(L) = C_0(L)$ (např. pro $L = [0, \omega_1)$).

Je-li L Hausdorffův a nekompaktní, pak algebry $C_0(L)$ a $C_c(L)$ nemají jednotku: Nechť e je jednotka v některé z těchto algeber. Ukážeme, že pak $e(x) = 1$ pro každé $x \in L$, což nelze. Nechť tedy $x \in L$ je dáno. Pak existuje kompaktní okolí V bodu x. Protože L je úplně regulární, existuje $f \in C(L)$ taková, že $f(x) = 1$ a $f = 0$ na $L \setminus \operatorname{Int} V$. Tedy $\operatorname{supp} f \subset V$, takže $f \in C_c(L)$. Pak $e(x)f(x) = (ef)(x) = f(x)$, a tedy $e(x) = 1$.

(d) Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, pak prostor $H^\infty(\Omega)$ všech omezených holomorfních funkcí na Ω je uzavřená podalgebra $C_b(\Omega)$, tedy je to komutativní Banachova algebra s jednotkou.

(e) Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená omezená, pak $A = \{f \in C(\overline{\Omega});\ f\restriction_\Omega \in H(\Omega)\}$ je uzavřená podalgebra $C(\overline{\Omega})$, tedy je to komutativní Banachova algebra s jednotkou. Lze ji též chápat jako podalgebru $H^\infty(\Omega)$ těch funkcí, které mají spojité rozšíření na $\overline{\Omega}$.

PŘÍKLAD 10. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X)$ s násobením definovaným jako skládání operátorů, tj. $ST = S \circ T$, je algebra s jednotkou Id: Pro libovolná $S, T, U \in \mathcal{L}(X)$, $\alpha \in \mathbb{K}$

[2] Pavel Sergejevič Alexandrov (Павел Сергеевич Александров), 1924

a $x \in X$ platí, že

$$((ST)U)x = (ST)(Ux) = S(T(Ux)) = S((TU)x) = (S(TU))x,$$

$$(S(T+U))x = S((T+U)x) = S(Tx+Ux) = S(Tx)+S(Ux) = (ST)x+(SU)x = (ST+SU)x,$$

$$((T+U)S)x = (T+U)(Sx) = T(Sx)+U(Sx) = (TS)x+(US)x = (TS+US)x,$$

$$(\alpha(ST))x = \alpha((ST)x) = \alpha(S(Tx)) = (\alpha S)(Tx) = ((\alpha S)T)x = S(\alpha(Tx)) = S((\alpha T)x) = (S(\alpha T))x. \blacksquare$$

Dle Faktu 1.47 je tedy $\mathcal{L}(X)$ normovaná algebra s jednotkou. Je-li X Banachův, pak $\mathcal{L}(X)$ je Banachova algebra (Věta 1.48).

Dále, dle Věty 4.12(d), (c) je $\mathcal{K}(X)$ podalgebra $\mathcal{L}(X)$, která je uzavřená, a tedy Banachova, v případě, že X je Banachův. S využitím Věty 4.12(b) pak snadno nahlédneme, že $\mathcal{F}(X)$ je podalgebra $\mathcal{K}(X)$.

Pokud $\dim X > 1$, pak žádná z těchto tří normovaných algeber není komutativní: Nechť $u, v \in X$ jsou lineárně nezávislé. Dle Hahnovy-Banachovy věty existuje $f \in X^*$ tak, že $f(u) = 1$. Definujme $S, T \in \mathcal{F}(X)$ následovně: $S(x) = f(x)u$ a $T(x) = f(x)v$. Pak $ST(u) = S(v) = f(v)u \neq v = T(u) = TS(u)$.

Pokud $\dim X = \infty$, pak $\mathcal{K}(X)$ ani $\mathcal{F}(X)$ nemá jednotku: Předpokládejme, že $E \in \mathcal{K}(X)$, resp. $E \in \mathcal{F}(X)$ je jednotka. Nechť $x \in X \setminus \{0\}$ je libovolné. Pak dle Hahnovy-Banachovy věty existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) = 1$. Definujme $T \in \mathcal{F}(X)$ předpisem $T(y) = f(y)x$. Všimněme si, že $T(x) = x$, a tedy $E(x) = E(T(x)) = (ET)(x) = T(x) = x$. To znamená, že $E = Id$, což je spor s předpokladem nekonečné dimenze X (Věta 1.66). Uvědomme si, že tento argument je zcela analogický jako v Příkladu 9(c), neboť Hahnova-Banachova věta je vlastně lineární verzí úplné regularity.

◇

PŘÍKLAD 11. Je-li Γ neprázdná množina, pak prostor $\ell_1(\Gamma)$ s násobením prvků definovaným bodově (tj. $xy(\gamma) = x(\gamma)y(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$) je komutativní Banachova algebra. Vskutku, pro $x, y \in \ell_1(\Gamma)$ a libovolnou $F \subset \Gamma$ konečnou je

$$\sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)y(\gamma)| = \sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)||y(\gamma)| \leq \left(\sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)|\right) \sum_{\gamma \in F} |y(\gamma)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Odtud plyne, že násobení je dobře definováno a $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. Tato algebra má jednotku, právě když Γ je konečná, neboť jediným kandidátem na jednotku je vektor $e(\gamma) = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.

◇

PŘÍKLAD 12. Na prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ definujeme násobení jako konvoluci, tj. $fg = f * g$. (Přesněji, pro $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ definujeme $fg = \tilde{f} * \tilde{g}$, kde $\tilde{f}$, resp. $\tilde{g}$ jsou libovolné reprezentanty tříd f, g definované všude na $\mathbb{R}^d$. To, že takto definované násobení nezávisí na volbě reprezentantů, plyne z Věty 13.15(c).) Dle Vět 5.7(d) a 5.2 je $L_1(\mathbb{R}^d)$ s tímto násobením komutativní Banachovou algebrou (vizte též Větu 13.17). Tato algebra nemá jednotku: Předpokládejme, že $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ je jednotka. Položme $g = c\chi_{B(0,1)}$, kde $c > 0$ je zvoleno tak, aby g bylo regularizační jádro. Dále položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $g_n \to 0$ bodově s. v. Dle Věty 5.13(b) platí, že $g_n = f * g_n \xrightarrow{L_1} f$, takže existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$, která konverguje bodově s. v. k f ([R, Věta 3.12]). To znamená, že $f = 0$ s. v., což není možné.

Jiný argument pro komplexní případ (zde je ovšem, alespoň formálně, nutno pracovat s mírou μ_d z oddílu 5.2): Předpokládejme, že $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ je jednotka a nechť $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ je funkce z Příkladu 5.25. Pak $\widehat{g} = \widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$ dle Věty 5.21(g). Protože $\widehat{g}$ je kladná na $\mathbb{R}^d$, plyne odtud, že $\widehat{f} = 1$ na $\mathbb{R}^d$. To ale není možné dle Věty 5.21(a).

◇

Následující příklad ukazuje, že podalgebra může mít jednotku různou od jednotky původní algebry. (Pro jiný příklad tohoto jevu v abstraktní situaci vizte též poznámku za Tvrzením 2.)

PŘÍKLAD 13. Nechť $A = C([0,1] \cup [2,3])$ a $B = \{f \in A;\ \operatorname{supp} f \subset [0,1]\}$. Pak B je uzavřená podalgebra A. Dále A má jednotku $\chi_{[0,1]\cup[2,3]}$, která nepatří do B. Na druhou stranu, B má jednotku $\chi_{[0,1]}$, která není jednotkou v A.

◇

TVRZENÍ 14. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Definujeme-li na A_e normu předpisem $\|(a,\alpha)\|_{A_e} = \|a\| + |\alpha|$ (tj. $A_e = A \oplus_1 \mathbb{K}$), pak A_e s touto normou je normovaná algebra. Je-li $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra, je i A_e s výše uvedenou normou Banachova algebra.*

DŮKAZ. Fakt, že $(A_e, \|\cdot\|_{A_e})$ je normovaný lineární (resp. Banachův) prostor je ukázán v oddílu 1.5. Konečně, pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ platí, že

$$\begin{aligned}\|(a,\alpha)(b,\beta)\|_{A_e} &= \|(ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)\|_{A_e} = \|ab + \alpha b + \beta a\| + |\alpha\beta| \leq \\ &\leq \|ab\| + |\alpha|\|b\| + |\beta|\|a\| + |\alpha||\beta| \leq \|a\|\|b\| + |\alpha|\|b\| + |\beta|\|a\| + |\alpha||\beta| = \\ &= \big(\|a\| + |\alpha|\big)\big(\|b\| + |\beta|\big) = \|(a,\alpha)\|_{A_e}\|(b,\beta)\|_{A_e},\end{aligned}$$

takže $(A_e, \|\cdot\|_{A_e})$ je normovaná algebra.

□

DEFINICE 15. Nechť A a B jsou normované algebry a $\Phi\colon A \to B$ je (algebrový) homomorfismus. Říkáme, že Φ je izomorfismus normovaných algeber A a B (nebo jen izomorfismus), pokud Φ je homeomorfismus A na B; říkáme, že Φ je izomorfismus A do B (nebo jen izomorfismus do), pokud Φ je izomorfismus A na $\operatorname{Rng}\Phi$.

Připomeňme, že jednou ze základních reprezentačních vět pro grupy je tvrzení, že každou grupu G lze vnořit do grupy všech bijekcí na G s operací skládání. Následující věta je analogií této reprezentace v kontextu normovaných algeber. (Připomeňme též Příklad 1.59.)

VĚTA 16. *Nechť A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a\colon A \to A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$. Má-li A jednotku e, pak I je izomorfismus do a $I(e) = Id$. Platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$ (např. je-li A podalgebra $\ell_\infty(\Gamma)$), pak I je izometrie do.*

DŮKAZ. Díky vlastnostem násobení v A je vidět, že L_a je lineární, z nerovnosti $\|L_a(x)\| = \|ax\| \leq \|a\|\|x\|$ pak plyne spojitost L_a a fakt, že $\|L_a\| \leq \|a\|$. Dále $L_{a+b}(x) = (a+b)x = ax + bx = L_a(x) + L_b(x) = (L_a + L_b)(x)$, $L_{\alpha a}(x) = (\alpha a)x = \alpha(ax) = \alpha L_a(x)$, a $L_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = L_a(bx) = L_a \circ L_b(x)$ pro libovolná $a, b, x \in A$, $\alpha \in \mathbb{K}$, a tedy I je algebrový homomorfismus, který je spojitý díky nerovnosti výše.

Předpokládejme nyní, že A má jednotku e. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A je netriviální (tj. $A \neq \{0\}$), a tedy $e \neq 0$. Pak $\|I(a)\| = \|L_a\| \geq \big\|L_a\big(\frac{1}{\|e\|}e\big)\big\| = \frac{1}{\|e\|}\|ae\| = \frac{1}{\|e\|}\|a\|$ pro každé $a \in A$, takže I je izomorfismus do (Tvrzení 1.60(a)). Fakt, že $I(e) = Id$ je zřejmý z definice I.

Konečně, platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$, pak $\|a\| \geq \|I(a)\| = \|L_a\| \geq \big\|L_a\big(\frac{1}{\|a\|}a\big)\big\| = \frac{1}{\|a\|}\|a^2\| = \|a\|$ pro každé $a \in A \setminus \{0\}$.

□

Je-li A netriviální (tj. $A \neq \{0\}$) normovaná algebra s jednotkou, pak $\|e\| \geq 1$. Vskutku, $\|e\| = \|ee\| \leq \|e\|\|e\|$, a tedy buď $e = 0$, nebo $\|e\| \geq 1$. Je-li ovšem $e = 0$, pak pro libovolný prvek $x \in A$ je $x = ex = 0x = 0$. Všimněme si, že pro algebru $\ell_1(\{1, \dots, n\})$ z Příkladu 11 je $\|e\| = n$.

DŮSLEDEK 17. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je netriviální normovaná algebra s jednotkou. Pak na A existuje ekvivalentní norma $|||\cdot|||$ taková, že $(A, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra a $|||e||| = 1$.*

DŮKAZ. Nechť $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$ je vnoření z Věty 16. Pro $x \in A$ položme $|||x||| = \|I(x)\|$. Protože I je izomorfismus do, je $|||\cdot|||$ ekvivalentní norma na A. Navíc je $|||xy||| = \|I(xy)\| = \|I(x)I(y)\| \leq \|I(x)\|\|I(y)\| = |||x||| \cdot |||y|||$, a tedy $(A, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra. Konečně, $I(e) = Id$, a tedy $|||e||| = \|Id\| = 1$ (poslední rovnost plyne z toho, že A není triviální).

□

Má-li algebra A nad $\mathbb{K}$ jednotku, pak můžeme studovat její invertovatelné prvky vzhledem k násobení. Připomeňme, že v okruhu s jednotkou (stačí dokonce v monoidu) jsou inverzní prvky k invertovatelným prvkům jednoznačně učeny a invertovatelné prvky tvoří grupu, tj. jsou-li $x, y \in A$ invertovatelné, pak i xy je invertovatelný a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Tuto grupu invertovatelných prvků budeme značit $A^\times$. Všimněme si, že je-li $x \in A^\times$, pak $\lambda x \in A^\times$ pro každé $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ a platí, že $(\lambda x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}x^{-1}$. Následující fakt je zřejmý.

FAKT 18. *Nechť A je algebra s jednotkou a B je její podalgebra obsahující e. Pak $B^\times \subset A^\times \cap B$.*

PŘÍKLADY 19. Nechť Γ je neprázdná množina. Snadno lze nahlédnout, že

$$\ell_\infty(\Gamma)^\times = \big\{x \in \ell_\infty(\Gamma);\ \text{existuje } \delta > 0 \text{ tak, že } |x(\gamma)| \geq \delta \text{ pro každé } \gamma \in \Gamma\big\}.$$

Je-li X Banachův prostor, pak dle Tvrzení 4.15 je $\mathcal{L}(X)^\times = \{T \in \mathcal{L}(X);\ T \text{ je bijekce}\}$.

Nechť $A = C([0,1])$ a nechť B je algebra všech polynomů na $[0,1]$. Pak B je podalgebra A obsahující jednotku A. Zjevně je $1 + x \in A^\times \cap B$, ale $1 + x \notin B^\times$.

Dále budeme používat následující konvenci: je-li x libovolný prvek algebry s jednotkou, pak definujeme symbol $x^0 = e$.

LEMMA 20. *Nechť A je normovaná algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li řada $\sum_{n=0}^\infty x^n$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^\infty x^n = (e-x)^{-1}$.*

Konvergentní řadě $\sum_{n=0}^\infty x^n$ se říká Neumannova řada[3].

DŮKAZ. Z předpokladu plyne, že $x^n \to 0$. Díky spojitosti násobení pak platí, že

$$(e-x)\sum_{n=0}^\infty x^n = (e-x)\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^k x^n = \lim_{k\to\infty}(e-x)\sum_{n=0}^k x^n = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^k x^n - \sum_{n=1}^{k+1} x^n\right) = $$
$$= \lim_{k\to\infty}(e - x^{k+1}) = e \quad \text{a}$$
$$\left(\sum_{n=0}^\infty x^n\right)(e-x) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^k x^n\right)(e-x) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^k x^n - \sum_{n=1}^{k+1} x^n\right) = \lim_{k\to\infty}(e-x^{k+1}) = e.$$

□

LEMMA 21. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.*

(a) Pokud $x \in U_A$, pak řada $\sum_{n=0}^\infty x^n$ konverguje absolutně, a tedy $\sum_{n=0}^\infty x^n = (e-x)^{-1}$.

(b) Nechť $x \in A^\times$ a nechť $h \in A$ je takové, že $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Pak $x + h \in A^\times$. Pokud navíc $\|h\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, pak $\big\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\big\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2$.

DŮKAZ. (a) Jelikož $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, je řada $\sum_{n=0}^\infty x^n$ absolutně konvergentní. Díky úplnosti A je tedy tato řada konvergentní a můžeme použít Lemma 20.

(b) Jelikož $\|-x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| < 1$, je $e + x^{-1}h$ invertovatelný díky (a), a tedy $x + h = x(e + x^{-1}h) \in A^\times$ a $(x+h)^{-1} = (e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$. Dále si povšimněme, že je-li $y \in U_A$, pak z (a) dostáváme, že

$$\|(e+y)^{-1} - e + y\| = \left\|\sum_{n=0}^\infty (-1)^n y^n - e + y\right\| = \left\|\sum_{n=2}^\infty (-1)^n y^n\right\| \leq \sum_{n=2}^\infty \|y^n\| \leq \sum_{n=2}^\infty \|y\|^n = \frac{\|y\|^2}{1 - \|y\|}.$$

Je-li tedy $\|h\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, pak $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| \leq \frac{1}{2}$, a tedy

$$\big\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\big\| = \big\|\big((e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\big)x^{-1}\big\| \leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\| \leq$$
$$\leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2.$$

□

DEFINICE 22. Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Řekneme, že (G,τ) je topologická grupa, pokud jsou grupové operace (tj. násobení $\cdot\colon G \times G \to G$ a inverze ${}^{-1}\colon G \to G$) spojité.

[3] Zárodky tohoto objektu používal Carl Gottfried Neumann (1877) (pro konkrétní integrální operátor a bodovou konvergenci), v abstraktnější verzi (pro maticové operátory) ji pak poprvé použil pak Alfred Cardew Dixon (1901)

VĚTA 23. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak $A^\times$ je otevřená podmnožina A a je to topologická grupa.*

DŮKAZ. Otevřenost množiny $A^\times$ plyne z Lemmatu 21(b). Spojitost násobení v $A^\times$ je zřejmá (Tvrzení 6). Spojitost inverze pak plyne z odhadu

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| + \|x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2 + \|x^{-1}\|^2\|h\|,$$

který platí díky Lemmatu 21(b) na vhodném okolí bodu $x \in A^\times$.

□

TVRZENÍ 24. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a B je její uzavřená podalgebra obsahující e. Pak $(\partial_B B^\times) \cap A^\times = \emptyset$ a*

$$B^\times = \bigcup \{C \subset B;\ C \text{ je komponenta } A^\times \cap B \text{ protínající } B^\times\}.$$

DŮKAZ. Dle Faktu 18 je $B^\times \subset A^\times \cap B$. Definujme $g\colon A^\times \to A^\times$ jako $g(x) = x^{-1}$. Pak g je spojité (Věta 23). Dále $g\restriction_{B^\times}$ zobrazuje do $B^\times$ a je-li $x \in (A^\times \cap B) \setminus B^\times$, pak $g(x) \notin B$. Je-li tedy $x \in \partial_B B^\times = \overline{B^\times}^B \setminus B^\times$, pak $x \notin A^\times \cap B$. V opačném případě by totiž ze spojitosti g plynulo, že $g(x) \in \overline{B^\times}^A \subset \overline{B}^A = B$.

Druhá část tvrzení pak plyne z první části pomocí Lemmatu 15.68 aplikovaného na $X = B$.

□

2. Spektrální teorie

■■■Základní informací, kterou máme o matici na $\mathbb{K}^n$, je znalost spektra. Podobně i pro prvky Banachových algeber je znalost jejich spektra zcela klíčová.

DEFINICE 25. Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou. Pro $x \in A$ definujeme rezolventní množinu prvku x jako

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda e - x \in A^\times\},$$

a spektrum prvku x jako

$$\sigma(x) = \mathbb{K} \setminus \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak pro $x \in A$ definujeme výše uvedené pojmy vzhledem k algebře A_e.

Bude-li nutné uvést, vzhledem k jaké algebře bereme výše uvedené pojmy, budeme psát např. $\sigma_A(x)$ pro spektrum x vzhledem k algebře A.

PŘÍKLADY 26. (a) Nechť T je topologický prostor. Pak prostor $C(T) = C(T, \mathbb{K})$ s násobením prvků definovaným bodově je komutativní algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou (tou je funkce konstantní 1). Je-li $f \in C(T)$, pak $\sigma(f) = \operatorname{Rng} f$. Vskutku, funkce $\lambda - f$ je invertovatelná, právě když existuje $g \in C(T)$ takové, že $(\lambda - f(x))g(x) = 1$ pro každé $x \in T$, neboli právě když $g = \frac{1}{\lambda - f} \in C(T)$. To nastane, právě když $f(x) \neq \lambda$ pro každé $x \in T$, neboli $\lambda \notin \operatorname{Rng} f$.

(b) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a nechť $A = \{f \in C(\overline{\Omega});\ f\restriction_\Omega \in H(\Omega)\}$. Pak A je podalgebra $C(\overline{\Omega})$, tedy je to komutativní algebra s jednotkou. Je-li $f \in A$, pak $\sigma(f) = \operatorname{Rng} f$. Argumentace je stejná, jako v případě (a).

(c) Nechť Γ je neprázdná množina. Je-li $f \in \ell_\infty(\Gamma)$, pak $\sigma(f) = \overline{\operatorname{Rng} f}$. Vskutku, dle Příkladu 19 je funkce $\lambda - f$ invertovatelná v $\ell_\infty(\Gamma)$, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že $|\lambda - f(\gamma)| \geq \delta$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, neboli právě když $\lambda \notin \overline{\operatorname{Rng} f}$.

DEFINICE 27. Prvek x grupoidu se nazývá idempotentní, pokud $x^2 = x$.

Příkladem idempotentních prvků jsou charakteristické funkce podmnožin Γ v $\ell_\infty(\Gamma)$ nebo projekce v $\mathcal{L}(X)$.

Následující příklad je téměř formálním zobecněním Příkladu 4.18.

PŘÍKLAD 28.

(a) Netriviální idempotent v monoidu (tj. různý od jednotky) nemá levý ani pravý invers.
(b) Je-li x nenulový idempotent v okruhu s jednotkou, pak $e - x$ nemá levý ani pravý invers.
(c) Nechť x je idempotent v algebře nad $\mathbb{K}$ s jednotkou. Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, pak $(\lambda e - z)^{-1} = \frac{1}{\lambda} e + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} z$. Je-li tedy x netriviální (tj. $x \neq 0$ a $x \neq e$), pak $\sigma(x) = \{0, 1\}$.

Dokažme postupně výše uvedená tvrzení.

(a) Je-li $yx = e$, pak $x = ex = (yx)x = y(xx) = yx = e$. Podobně, pokud $xy = e$, pak $x = xe = xxy = xy = e$.

(b) Je-li $(e-x)y = e$, pak $x = xe = x(e-x)y = (x-x^2)y = 0y = 0$. Podobně, pokud $y(e-x) = e$, pak $x = ex = y(e-x)x = y(x-x^2) = y0 = 0$.

(c) Předpokládejme, že $(\lambda e - x)y = e$. Pak $\lambda y - xy = e$, takže $xy = \lambda y - e$. Dále $x = xe = x(\lambda e - x)y = (\lambda x - x)y = (\lambda - 1)xy = (\lambda - 1)(\lambda y - e)$. Odtud plyne, že $y = \frac{1}{\lambda}\big(\frac{1}{\lambda-1}x + e\big)$. Pro takto definované y je pak $(\lambda e - x)y = \frac{1}{\lambda-1}x + e - \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}x - \frac{1}{\lambda}x = e$ a podobně $y(\lambda e - x) = e$.

◇

Následující fakt bychom mohli zformulovat pouze v kontextu algeber, je nicméně užitečné si uvědomit, že z poměrně komplikované algebraické struktury algeber není potřeba vůbec nic.

FAKT 29. *Nechť A, B jsou pologrupy, $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus na a nechť A je navíc monoid s jednotkou e. Pak B je monoid s jednotkou $\Phi(e)$ a je-li $x \in A$ invertovatelný, pak $\Phi(x)$ je invertovatelný a $\Phi(x)^{-1} = \Phi(x^{-1})$. Je-li navíc Φ bijekce, pak $\Phi\restriction_{A^\times}$ je izomorfismus grup $A^\times$ a $B^\times$.*

DŮKAZ. Nechť $y \in B$ a nechť $x \in A$ je takové, že $y = \Phi(x)$. Pak $y\Phi(e) = \Phi(x)\Phi(e) = \Phi(xe) = \Phi(x) = y$ a $\Phi(e)y = \Phi(e)\Phi(x) = \Phi(ex) = \Phi(x) = y$. Dále pro $x \in A^\times$ je $\Phi(x)\Phi(x^{-1}) = \Phi(xx^{-1}) = \Phi(e) = \Phi(x^{-1}x) = \Phi(x^{-1})\Phi(x)$, a tedy $\Phi(A^\times) \subset B^\times$. Je-li Φ bijekce, pak pro opačnou inkluzi stačí aplikovat předchozí úvahu na zobrazení Φ^{-1}.

□

DŮSLEDEK 30. *Nechť A, B jsou algebry a $\Phi\colon A \to B$ je algebraický izomorfismus. Pak $\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.*

DŮKAZ. Nemá-li A jednotku, pak ani B nemá jednotku (Fakt 29 pro Φ^{-1}). V tom případě snadno nahlédneme, že rozšíření $\widetilde{\Phi}\colon A_{\mathrm{e}} \to B_{\mathrm{e}}$, $\widetilde{\Phi}(x, \lambda) = (\Phi(x), \lambda)$ z Faktu 3 je též izomorfismus. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Pro každé $x \in A$ díky Faktu 29 platí, že $\lambda\Phi(e) - \Phi(x) = \Phi(\lambda e - x) \in B^\times$, právě když $\lambda e - x \in A^\times$. Odtud požadovaná rovnost ihned plyne.

□

LEMMA 31. *Nechť M je monoid a $x, y \in M$. Jsou-li alespoň dva z prvků x, y, xy a yx invertovatelné, pak jsou invertovatelné všechny čtyři.*

DŮKAZ. Nechť $I \subset M$ je grupa invertovatelných prvků v M. Je-li $x, y \in I$, pak i $xy \in I$ a $yx \in I$. Je-li $x, xy \in I$, pak $y = x^{-1}(xy) \in I$, a tedy i $yx \in I$. Podobně je-li $x, yx \in I$, pak opět $y = (yx)x^{-1} \in I$. Konečně, je-li $xy, yx \in I$, pak $(yx)^{-1}y$ je levý invers k x, neboť $\big((yx)^{-1}y\big)x = (yx)^{-1}(yx) = e$, a podobně $y(xy)^{-1}$ je pravý invers k x. Tedy $x \in I$ a dle předchozího pak i $y \in I$.

□

TVRZENÍ 32. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.*

(a) Je-li A netriviální, pak $\sigma(0) = \{0\}$.
(b) Má-li A jednotku, pak $\sigma(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta\sigma(x)$ pro každé $x \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
(c) Je-li $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda \in \sigma(x)$, pak $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.
(d) Je-li $x \in A^\times$, pak $\lambda \in \sigma(x)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(x^{-1})$.
(e) Jsou-li $x, y \in A$, pak množiny $\sigma(xy)$ a $\sigma(yx)$ se liší nejvýše o prvek 0.
(f) Je-li $z \in A^\times$, pak $\sigma(x) = \sigma(zxz^{-1})$ pro každé $x \in A$.

DŮKAZ. (a) Prvek $\lambda e - 0 = \lambda e$ je invertovatelný tehdy a jen tehdy, pokud $\lambda \neq 0$.

(b) Je-li A triviální, pak je na obou stranách rovnosti prázdná množina. Předpokládejme nyní, že A je netriviální. Je-li $\beta \neq 0$, pak $\lambda e-(\alpha e+\beta x) = \beta\bigl(\frac{\lambda-\alpha}{\beta}e-x\bigr)$, a tedy $\lambda \in \sigma(\alpha e+\beta x)$, právě když $\frac{\lambda-\alpha}{\beta} \in \sigma(x)$, odkud rovnost ihned plyne. Je-li $\beta = 0$, pak dle předchozího a (a) je $\sigma(\alpha e + \beta x) = \sigma(\alpha e + 1 \cdot 0) = \alpha + 1 \cdot \{0\} = \{\alpha\} = \alpha + \beta\sigma(x)$.

(c) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Snadno ověříme, že

$$\lambda^n e-x^n = (\lambda e-x)(\lambda^{n-1}e+\lambda^{n-2}x+\cdots+\lambda x^{n-2}+x^{n-1}) = (\lambda^{n-1}e+\lambda^{n-2}x+\cdots+\lambda x^{n-2}+x^{n-1})(\lambda e-x).$$

Je-li tedy $\lambda^n \in \rho(x^n)$, pak dle Lemmatu 31 je $\lambda e - x$ invertovatelný, neboli $\lambda \in \rho(x)$.

(d) Nejprve si uvědomme, že $0 \notin \sigma(x)$. Dále zjevně stačí dokázat pouze implikaci $\Leftarrow$ a tu pak aplikovat na x^{-1} a $\frac{1}{\lambda}$. Nechť tedy $\lambda \in \rho(x)$, $\lambda \neq 0$. Pak $\frac{1}{\lambda}e - x^{-1} = \bigl(\frac{1}{\lambda}e - x^{-1}\bigr)xx^{-1} = \bigl(\frac{1}{\lambda}x - e\bigr)x^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(\lambda e - x)x^{-1} \in A^\times$, a tedy $\frac{1}{\lambda} \in \rho(x^{-1})$.

(e) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Nechť $\lambda \in \rho(xy) \setminus \{0\}$. Položme $z = (\lambda e - xy)^{-1}$. Pak

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\lambda}(e + yzx)(\lambda e - yx) &= e - \tfrac{1}{\lambda}yx + yzx - \tfrac{1}{\lambda}yzxyx = e - \tfrac{1}{\lambda}yx + \tfrac{1}{\lambda}yz(\lambda x - xyx) = \\ &= e - \tfrac{1}{\lambda}yx + \tfrac{1}{\lambda}yz(\lambda e - xy)x = e - \tfrac{1}{\lambda}yx + \tfrac{1}{\lambda}yex = e\end{aligned}$$

a $(\lambda e-yx)\frac{1}{\lambda}(e+yzx) = e-\frac{1}{\lambda}yx+yzx-\frac{1}{\lambda}yxyzx = e-\frac{1}{\lambda}yx+\frac{1}{\lambda}y(\lambda e-xy)zx = e$, a tedy $\lambda \in \rho(yx)$. Pro opačnou inkluzi stačí vyměnit roli x a y.

Poznamenejme, že na vzorec pro inverzní prvek k $e - yx$ lze přijít následovně: předpokládáme-li, že A je Banachova algebra a $x, y \in U_A$, pak dle Lemmatu 21(a) je $e - yx$ invertovatelný a $(e - yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(yx)^n = e + \sum_{n=1}^{\infty} y(xy)^{n-1}x = e + y\bigl(\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\bigr)x = e + yzx$, přičemž jsme využili spojitosti násobení.

(f) Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\lambda e - zxz^{-1} = z(\lambda e)z^{-1} - zxz^{-1} = z(\lambda e - x)z^{-1}$, takže $\lambda e - zxz^{-1}$ je invertovatelný, právě když $\lambda e - x$ je invertovatelný.

□

PŘÍKLAD 33. Nechť $A = \mathcal{L}(\ell_2)$, $L \in A$ je posun doleva, tj. $L(x) = (x_2, x_3, \dots)$ a $R \in A$ je posun doprava, tj. $R(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Pak snadno zjistíme, že $\sigma(LR) = \sigma(Id) = \{1\}$ a $\sigma(RL) = \{0, 1\}$.

◇

Následující tvrzení rozšiřuje Tvrzení 32(f) pro případ algebry operátorů.

TVRZENÍ 34. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $S\colon X \to Y$ je lineární izomorfismus. Pak pro operátor $S \circ T \circ S^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$ platí, že $\sigma(S \circ T \circ S^{-1}) = \sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(S \circ T \circ S^{-1}) = \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

DŮKAZ. Položme $U = S \circ T \circ S^{-1}$. Pak $T = S^{-1} \circ U \circ S$, takže stačí ukázat, že $\sigma(U) \subset \sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(U) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Dále pro $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\lambda I_Y - U = S \circ (\lambda I_X - T) \circ S^{-1}$. Odtud plyne, že je-li $\lambda \in \rho(T)$, pak i $\lambda \in \rho(U)$ (Fakt 1.61), a je-li $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, pak i $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(U)$.

□

Je-li A algebra, pak ideálem v A rozumíme vektorový podprostor B v A, který je zároveň okruhovým ideálem, tj. platí, že $ab \in B$ a $ba \in B$ pro každé $a \in A$ a $b \in B$. Každý ideál je zjevně podalgebra.

Všimněme si, že A je ideálem v A_{e}. Jiným příkladem ideálu je $\mathcal{K}(X)$ v $\mathcal{L}(X)$ pro normovaný lineární prostor X (Věta 4.12). Dále si uvědomme, že vlastní ideál v algebře A nikdy neobsahuje její jednotku, a tedy žádný prvek vlastního ideálu v A není invertovatelný v A.

FAKT 35. *Nechť A je algebra a B je ideál v A. Pak B je ideál i v A_{e}.*

DŮKAZ. Jsou-li $a \in A$, $b \in B$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, pak $(a,\alpha)(b,0) = (ab + \alpha b, 0) \in B$ a $(b,0)(a,\alpha) = (ba + \alpha b, 0) \in B$.

□

TVRZENÍ 36. *Nechť A je algebra.*

(a) Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_{\mathrm{e}}}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.

(b) *Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.*
(c) *Nechť A má jednotku, B je podalgebra A neobsahující e a $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$.*
(d) *Nechť B je podalgebra A a $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostaních případech je $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.*
(e) *Je-li B vlastní ideál v A, pak $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$.*

DŮKAZ. (a) Tvrzení ihned plyne z faktu, že $x \in A$ nemá inverzi v A_e, neboť A je vlastní ideál v A_e.

(b) Nechť e je jednotka v A a označme $u = (0, 1)$ jednotku v A_e. Nechť $x \in A$ je dáno. Dle (a) je $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Je-li $\lambda \in \rho_A(x) \setminus \{0\}$, pak existuje $y \in A$ takové, že $y(\lambda e - x) = (\lambda e - x)y = e$. Pak

$$(\lambda u - x)\left(y - \tfrac{1}{\lambda}e + \tfrac{1}{\lambda}u\right) = \lambda uy - ue + u^2 - xy + \tfrac{1}{\lambda}xe - \tfrac{1}{\lambda}xu = \lambda y - e + u - xy + \tfrac{1}{\lambda}x - \tfrac{1}{\lambda}x =$$
$$= \lambda ey - xy - e + u = (\lambda e - x)y - e + u = e - e + u = u \quad \text{a}$$
$$\left(y - \tfrac{1}{\lambda}e + \tfrac{1}{\lambda}u\right)(\lambda u - x) = \lambda y - e + u - yx + \tfrac{1}{\lambda}x - \tfrac{1}{\lambda}x = y(\lambda e - x) - e + u = u,$$

a tedy $\lambda \in \rho_{A_e}(x)$.

Na druhou stranu, je-li $\lambda \in \rho_{A_e}(x)$, pak existuje $y \in A_e$ takové, že $y(\lambda u - x) = u = (\lambda u - x)y$. Vynásobíme-li obě rovnosti prvkem e zleva i zprava, obdržíme $ey(\lambda ue - xe) = eue = (\lambda eu - ex)ye$, neboli $(ey)(\lambda e - x) = e = (\lambda e - x)(ye)$. Protože $e \in A$ a A je ideál v A_e, je $ey \in A$ a $ye \in A$, a tedy $ey = eye = ye \in A$ je prvek inverzní k $\lambda e - x$ v A, což znamená, že $\lambda \in \rho_A(x)$.

(c) Dle Tvrzení 4 je C podalgebra A a existuje izomorfismus $\Phi\colon B_e \to C$, který je identitou na B. Tedy $\sigma_C(x) = \sigma_C(\Phi(x)) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$ dle Důsledku 30.

(d) Mají-li A a B společnou jednotku, pak inkluze $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ plyne z Faktu 18. Nemají-li A a B společnou jednotku, pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku (označme ji e), neboť jinak je $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ a B je podalgebra A_e, která s ní nemá společnou jednotku. Položme $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ dle první části a (c). To znamená, že pokud B nemá jednotku, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_{B_e}(x) = \sigma_B(x)$ z definice; pokud B má jednotku, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_{B_e}(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$ dle (b).

(e) Díky Faktu 35 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku e. Dle předpokladu je $e \notin B$. Položme $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Nechť $x \in B$. Dle (c) je $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_C(x)$. Dle (d) je $\sigma_A(x) \subset \sigma_C(x)$. Na druhou stranu, nechť $\lambda \in \rho_A(x)$. Pak existuje $y \in A$ takové, že $y(\lambda e - x) = (\lambda e - x)y = e$. Pokud $\lambda = 0$, pak $e = -yx \in B$, což je spor. Tedy $\lambda \neq 0$. Protože $e = \lambda ye - yx = \lambda y - yx$, je $y = \frac{1}{\lambda}e + \frac{1}{\lambda}yx \in C$, a tedy y je inverzní k $\lambda e - x$ v C. To znamená, že $\lambda \in \rho_C(x)$.

□

PŘÍKLAD 37. Nechť A a B jsou algebry z Příkladu 13. Snadno nahlédneme, že B je vlastní ideál v A. Položme $f = c\chi_{[0,1]} \in B$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$. Pak $\sigma_B(f) = \{c\}$ (Tvrzení 32(b)) a $\sigma_A(f) = \sigma_{B_e}(f) = \{c, 0\}$ (Tvrzení 36(b), (e)).

◇

TVRZENÍ 38. *Nechť A, B jsou algebry, $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus a $x \in A$. Má-li A jednotku e a $\Phi(e)$ není jednotkou v B, pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že A má jednotku. Označme $C = \Phi(A)$. Je-li $\lambda \in \rho_A(x)$, pak $\lambda e - x \in A^\times$, a tedy dle Faktu 29 je $\lambda\Phi(e) - \Phi(x) = \Phi(\lambda e - x) \in C^\times$, tj. $\lambda \in \rho_C(\Phi(x))$. To znamená, že $\sigma_C(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$. Je-li nyní $\Phi(e)$ jednotkou v B, pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_C(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$, jinak je $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_C(\Phi(x)) \cup \{0\} \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$ (Tvrzení 36(d)).

V případě, že A nemá jednotku, vezměme rozšíření $\widetilde{\Phi}\colon A_e \to B_e$ z Faktu 3. Podle Tvrzení 36(b) a předchozího případu je pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_{B_e}(\Phi(x)) = \sigma_{B_e}(\widetilde{\Phi}(x)) \subset \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x)$.

□

DEFINICE 39. Nechť A je algebra. Pro $x \in A$ definujeme spektrální poloměr prvku x jako

$$r(x) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

VĚTA 40. *Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\rho(x)$ je otevřená, $\sigma(x)$ je kompaktní a*

$$r(x) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Uvědomme si, že speciálně platí $r(x) \le \|x\|$. V důkazu využijeme následující lemma.

LEMMA 41. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.*
(a) Pokud $a_{m+n} \le a_m + a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} < +\infty$.
(b) Pokud $\{a_n\}$ je nezáporná a $a_{m+n} \le a_m a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$.

DŮKAZ. (a) Indukcí snadno obdržíme, že $a_{pq} \le q a_p$ pro všechna $p, q \in \mathbb{N}$. Zvolme pevně libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ existují $q_m, r_m \in \mathbb{N}_0$ taková, že $m = q_m n + r_m$ a $r_m < n$. Pak

$$\frac{a_m}{m} = \frac{a_{q_m n + r_m}}{m} \le \frac{q_m a_n + a_{r_m}}{m} = \frac{a_n}{n} \cdot \frac{n q_m}{m} + \frac{a_{r_m}}{m} = \frac{a_n}{n}\left(1 - \frac{r_m}{m}\right) + \frac{a_{r_m}}{m}$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$. Posloupnosti $\{r_m\}$ a $\{a_{r_m}\}$ jsou omezené, neboť množina $\{r_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ je konečná. Platí tedy

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \le \limsup_{m\to\infty} \left(\frac{a_n}{n}\left(1 - \frac{r_m}{m}\right) + \frac{a_{r_m}}{m}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{a_n}{n}\left(1 - \frac{r_m}{m}\right) + \frac{a_{r_m}}{m}\right) = \frac{a_n}{n}.$$

Tento odhad platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, odkud již tvrzení plyne.

(b) Je-li $a_m = 0$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, pak $0 \le a_{m+n} \le 0 a_n = 0$, tedy $a_n = 0$ pro $n \ge m$ a tvrzení platí. Předpokládejme nyní, že $\{a_n\}$ je kladná. Položme $b_n = \log a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $b_{m+n} = \log a_{m+n} \le \log(a_m a_n) = \log a_m + \log a_n = b_m + b_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy aplikovat (a) na posloupnost $\{b_n\}$. Pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \exp \frac{b_n}{n} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \exp \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \exp \frac{b_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$.

□

DŮKAZ VĚTY 40. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Zobrazení $g\colon \mathbb{K} \to A$, $g(\lambda) = \lambda e - x$ je spojité a $\rho(x) = g^{-1}(A^\times)$. Otevřenost $\rho(x)$ tedy plyne z otevřenosti $A^\times$ (Věta 23). Dále, splňuje-li $\lambda \in \mathbb{K}$ nerovnost $|\lambda| > \|x\|$, je prvek $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$ invertovatelný dle Lemmatu 21(a), takže $\lambda \in \rho(x)$. Odtud plyne, že $r(x) \le \|x\|$ a $\sigma(x)$ je kompaktní.

Konečně, je-li $\lambda \in \sigma(x)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ (Tvrzení 32(c)), a tedy dle předchozího odhadu je $|\lambda|^n = |\lambda^n| \le r(x^n) \le \|x^n\|$. Odtud plyne, že $r(x) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Zbytek tvrzení pak plyne z Lemmatu 41(b) aplikovaného na posloupnost $\{\|x^n\|\}$, neboť $\|x^{m+n}\| \le \|x^m\|\|x^n\|$.

□

VĚTA 42. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:*
(a) $\partial\rho_B(x) \subset \partial\rho_A(x)$ a

$$\rho_B(x) = \bigcup\{C \subset \mathbb{K};\ C \text{ je komponenta } \rho_A(x) \text{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

(b) Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$. Dále je $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$.
(c) Je-li $\rho_A(x)$ souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.
(d) Má-li $\sigma_B(x)$ prázdný vnitřek, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

DŮKAZ. (a) Z Tvrzení 36(d) plyne, že $\rho_B(x) \subset \rho_A(x)$. Nechť $\lambda \in \partial\rho_B(x)$. Pak existují posloupnosti $\{\alpha_n\} \subset \rho_B(x)$ a $\{\beta_n\} \subset \sigma_B(x)$ takové, že $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = \lambda$. Tedy $\alpha_n e - x \in B^\times$ a $\beta_n e - x \in B \setminus B^\times$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože $\lim(\alpha_n e - x) = \lim(\beta_n e - x) = \lambda e - x$, plyne odtud, že $\lambda e - x \in \partial_B B^\times$. Tvrzení 24 pak implikuje, že $\lambda e - x \notin A^\times$, a tedy $\lambda \notin \rho_A(x)$. Aplikací Lemmatu 15.68 nyní obdržíme požadovanou rovnost.

Dále, $\partial\rho_B(x) \subset \overline{\rho_B(x)} \subset \overline{\rho_A(x)}$, a tedy $\partial\rho_B(x) \subset \overline{\rho_A(x)} \setminus \rho_A(x) \subset \partial\rho_A(x)$.

(b) je jen jiná formulace (a).

(c) plyne z (a).

(d) Množina $\rho_A(x) \subset \mathbb{K}$ je otevřená (Věta 40), takže každá její komponenta je otevřená (toto platí i obecně v lokálně souvislých topologických prostorech). Z (b) tedy plyne, že $\rho_A(x) \cap \sigma_B(x) = \emptyset$, neboli $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$. Opačná inkluze je v Tvrzení 36(d).

□

Předchozí větu lze neformálně popsat takto: Množinu $\sigma_B(x)$ obdržíme z množiny $\sigma_A(x)$ tak, že „zalepíme některé její omezené díry“.

PŘÍKLAD 43. Označme U, resp. D, otevřený, resp. uzavřený, jednotkový kruh v $\mathbb{C}$ a $\mathbb{T}$ jednotkovou kružnici v $\mathbb{C}$. Nechť $A = \{F \in C(D);\ F\restriction_U \in H(U)\}$, $C = C(\mathbb{T})$ a $B = \{f \in C;\ f$ má rozšíření $F \in A\}$. Pak B je podalgebra C. Zobrazení $\psi\colon A \to B$, $\psi(F) = F\restriction_{\mathbb{T}}$ je zjevně homomorfismus A na B. Dále díky principu maxima modulu ([R, Věta 10.24]) pro každé $F \in A$ platí, že $\|\psi(F)\| = \max_{\mathbb{T}}|F| = \max_D|F| = \|F\|$, neboli ψ je izometrie.

Položme $F(z) = z$ pro $z \in D$ a $f = F\restriction_{\mathbb{T}} \in B$. Pak $\sigma_C(f) = f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ dle Příkladu 26(a) a $\sigma_B(f) = \sigma_B(\psi(F)) = \sigma_A(F) = F(D) = D$ dle Důsledku 30 a Příkladu 26(b).

◇

DEFINICE 44. Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in Y$, pak tuto limitu nazýváme derivací zobrazení f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Důležitým faktem je, že spojité lineární funkcionály komutují s derivací:

FAKT 45. *Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Pokud existuje $f'(a)$, pak pro každé $\phi \in Y^*$ je $(\phi \circ f)'(a) = \phi(f'(a))$.*

DŮKAZ.

$$(\phi\circ f)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\phi\circ f(x) - \phi\circ f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \phi\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \phi\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \phi(f'(a)).$$

□

FAKT 46. *Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Existuje-li $f'(a)$, pak f je spojité v bodě a.*

DŮKAZ. Díky spojitosti násobení skalárem je $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - f(a)\big) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.$ □

DEFINICE 47. Nechť A je algebra s jednotkou a $x \in A$. Na $\rho(x)$ definujeme rezolventu (též rezolventní zobrazení) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak definujeme rezolventu vzhledem k algebře A_{e}.

TVRZENÍ 48. *Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak zobrazení $\lambda \mapsto R_x(\lambda)$ má derivaci v každém bodě množiny $\rho(x)$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Je-li $\lambda \in \rho(x)$, pak díky Lemmatu 21(b) pro $t \in \mathbb{K}$, $0 < |t| \le \frac{1}{2\|e\|\|(\lambda e - x)^{-1}\|}$ platí, že

$$\begin{aligned}\left\|\frac{R_x(\lambda+t) - R_x(\lambda)}{t} + \big((\lambda e - x)^{-1}\big)^2\right\| &= \frac{1}{|t|}\left\|(\lambda e - x + te)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1} + (\lambda e - x)^{-1} te (\lambda e - x)^{-1}\right\| \le \\ &\le \frac{1}{|t|} 2\|(\lambda e - x)^{-1}\|^3 \|te\|^2 = 2|t|\|(\lambda e - x)^{-1}\|^3\|e\|^2.\end{aligned}$$

Odtud ihned plyne, že $R_x'(\lambda) = -\big((\lambda e - x)^{-1}\big)^2 = -R_x(\lambda)^2$.

□

DEFINICE 49. Nechť Y je komplexní normovaný lineární prostor, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f\colon \Omega \to Y$. Řekneme, že f je holomorfní na Ω, jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$.

Díky Faktu 45 a Větě 8.32 lze celkem bez problémů přenášet většinu tvrzení o holomorfních funkcích na holomorfní zobrazení do Banachova prostoru. Jako příklad může sloužit následující věta.

VĚTA 50 (Liouvilleova věta). *Nechť Y je komplexní normovaný lineární prostor a $f : \mathbb{C} \to Y$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Je-li f omezené, pak je konstantní.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že f není konstantní. Pak existují $u, v \in \mathbb{C}$ takové, že $f(u) \neq f(v)$. Dle Důsledku 2.5 existuje $\phi \in Y^*$ takový, že $\phi(f(u)) \neq \phi(f(v))$. Funkce $\phi \circ f$ je ovšem dle Faktu 45 celá omezená funkce, a tedy je dle Liouvilleovy věty pro skalární funkce[4] ([R, Věta 10.23]) konstantní. To je spor.

□

VĚTA 51. *Nechť A je komplexní Banachova algebra a $x \in A$.*
(a) Rezolventní zobrazení R_x je holomorfní na $\rho(x)$.
(b) Je-li A netriviální, pak $\sigma(x) \neq \emptyset$.
(c) $r(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ (tzv. Beurlingův-Gelfandův vzorec[5]).

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku.

(a) plyne z Tvrzení 48.

Dle Lemmatu 21(a) je

$$R_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \tag{1}$$

pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|x\|$.

(b) Předpokládejme, že $\sigma(x) = \emptyset$, tj. $\rho(x) = \mathbb{C}$. Podle (a) je zobrazení R_x holomorfní na $\mathbb{C}$. Pro $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $|\lambda| > \|x\|$ platí dle (1), že

$$\|R_x(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}.$$

Odtud plyne, že $\lim_{|\lambda|\to+\infty} R_x(\lambda) = 0$. To znamená, že R_x je omezené a holomorfní na $\mathbb{C}$, a tedy dle Liouvilleovy věty (Věta 50) konstantní. Jelikož $\lim_{|\lambda|\to+\infty} R_x(\lambda) = 0$, je $R_x = 0$ na $\mathbb{C}$. Speciálně, $R_x(0) = 0$, neboli $x^{-1} = 0$. To však není možné, neboť A je netriviální, a tedy 0 není invertovatelný.

(c) Díky Větě 40 stačí ukázat, že $r(x) \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Nechť $r > r(x)$ a nechť $\phi \in A^*$ je libovolný. Podle (a) a Faktu 45 je funkce $f(\lambda) = \lambda \cdot \phi \circ R_x(\lambda)$ holomorfní na $\rho(x)$, a tedy i na mezikruží $P = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > r(x)\}$. Dle (1) platí $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(x^n)}{\lambda^n}$ pro $|\lambda| > \|x\|$. Díky jednoznačnosti rozvoje funkce f v Laurentovu[6] řadu na P platí předchozí rovnost i pro $\lambda \in P$. Speciálně, z rozvoje $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi\left(\frac{x^n}{r^n}\right)$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} \phi\left(\frac{x^n}{r^n}\right) = 0$.

Dokázali jsme tedy, že $\frac{x^n}{r^n} \to 0$ slabě, což znamená, že posloupnost $\left\{\frac{x^n}{r^n}\right\}$ je slabě omezená, a tedy omezená (Věta 6.94). Nechť $C > 0$ je takové, že $\left\|\frac{x^n}{r^n}\right\| \leq C$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r\sqrt[n]{C}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r$. Jelikož $r > r(x)$ bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

□

Může se zdát zvláštní, že definice spektrálního poloměru závisí pouze na algebraické struktuře Banachovy algebry A, zatímco Beurlingův-Gelfandův vzorec závisí na normě algebry. Nicméně tato norma je úzce svázána s algebraickou strukturou pomocí nerovnosti $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. Na první pohled je též vidět, že výsledek Beurlingova-Gelfandova vzorce se nezmění přechodem k ekvivalentní normě.

Dále si všimněme, že je-li A komplexní Banachova algebra, B její uzavřená podalgebra a $x \in B$, pak se může stát, že $\sigma_A(x) \subsetneqq \sigma_B(x)$. Nicméně z Věty 51(c) plyne, že $r_A(x) = r_B(x)$, což znamená, že obě spektra mají stejnou „opsanou kružnici“. To je i v souladu s Větou 42, která říká, že přechod od $\sigma_A(x)$ k $\sigma_B(x)$ může nanejvýš „zalepit vnitřní díry“.

Následující důsledek je drobným zobecněním Lemmatu 21(a).

[4] Joseph Liouville ve skutečnosti dokázal jeden z důsledků (1847), přímo tvrzení Liouvilleovy věty dokázal A.-L. Cauchy (1844).

[5] Arne Karl-August Beurling (pro jisté konvoluční algebry; kolem 1938), I. M. Gelfand (1941)

[6] Pierre Alphonse Laurent

DŮSLEDEK 52. *Je-li A komplexní Banachova algebra, $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(x)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$ konverguje absolutně. Má-li tedy A jednotku, pak $R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.*

DŮKAZ. Nalezněme $q \in (0,1)$ takové, že $r(x) < q|\lambda|$. Dle Věty 51(c) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{\|x^n\|} < q|\lambda|$, neboli $\left\|\frac{x^n}{\lambda^n}\right\| < q^n$. Odtud plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$. Z Lemmatu 20 tedy dostáváme, že $R_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(e - \frac{x}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$.

□

VĚTA 53 (S. Mazur (1938), I. M. Gelfand (1941)). *Nechť A je netriviální komplexní Banachova algebra s jednotkou. Pokud $A^\times = A \setminus \{0\}$, pak A je izomorfní $\mathbb{C}$. Pokud navíc $\|e\| = 1$, pak A je izometricky izomorfní $\mathbb{C}$.*

DŮKAZ. Definujme $\psi\colon \mathbb{C} \to A$ předpisem $\psi(\lambda) = \lambda e$. Snadno nahlédneme, že ψ je algebrový homomorfismus. Dále $\|\psi(\lambda)\| = |\lambda|\|e\|$, a tedy ψ je izomorfismus do (popřípadě izometrie, pokud $\|e\| = 1$). Konečně, je-li $x \in A$, pak dle Věty 51(b) existuje $\lambda \in \sigma(x)$. Dle předpokladu je pak $\lambda e - x = 0$, neboli $x = \lambda e$. To znamená, že ψ je na.

□

3. Holomorfní kalkulus

Pomocí algebraických operací (sčítání a násobení) na reálných nebo komplexních číslech a limitních přechodů lze definovat složitější funkce – např. $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Na Banachově algebře máme k dispozici základní stavební kameny pro tvorbu takovýchto funkcí (algebraické operace a limitní přechody), nabízí se tedy otázka, zda lze smysluplně definovat podobné složitější funkce i na Banachových algebrách, a zda budou mít tyto funkce obvyklé vlastnosti (tj. zda bude platit vhodný „kalkulus“ pro počítání s takovýmito funkcemi). Pro komplexní Banachovy algebry je jedním z vhodných nástrojů k takovémuto rozšíření Cauchyův vzorec.

Nechť X je komplexní Banachův prostor. Je-li $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta a $f\colon \langle\gamma\rangle \to X$ spojité zobrazení, pak zobrazení $t \mapsto \gamma'(t) f(\gamma(t))$ je po částech spojité (a tedy silně měřitelné a omezené) na $[a,b]$, můžeme tedy definovat integrál f podél γ předpisem

$$\int_\gamma f = \int_{[a,b]} \gamma'(t) f(\gamma(t))\,\mathrm{d}\lambda(t),$$

kde vpravo je Bochnerův integrál. Dále stejně jako pro komplexní funkce definujeme integrál podél řetězce $\Gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n$ v $\mathbb{C}$ ze spojitého zobrazení $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ předpisem

$$\int_\Gamma f = \int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f.$$

LEMMA 54. *Nechť Γ je řetězec v $\mathbb{C}$, X je komplexní Banachův prostor, $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ je spojité a $\phi \in X^*$. Pak $\phi\big(\int_\Gamma f\big) = \int_\Gamma \phi \circ f$.*

DŮKAZ. Nechť $\Gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n$, kde $\gamma_j\colon [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ jsou cesty. Pak dle Věty 8.32 je

$$\begin{aligned}
\phi\bigg(\int_\Gamma f\bigg) &= \phi\bigg(\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f\bigg) = \sum_{j=1}^n \phi\bigg(\int_{\gamma_j} f\bigg) = \sum_{j=1}^n \phi\bigg(\int_{[a_j,b_j]} \gamma_j'(t) f(\gamma_j(t))\,\mathrm{d}\lambda(t)\bigg) = \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{[a_j,b_j]} \phi\big(\gamma_j'(t) f(\gamma_j(t))\big)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{j=1}^n \int_{[a_j,b_j]} \gamma_j'(t) \phi \circ f(\gamma_j(t))\,\mathrm{d}\lambda(t) = \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \phi \circ f = \int_\Gamma \phi \circ f.
\end{aligned}$$

□

Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak řekneme, že cykl Γ obíhá K v Ω, pokud $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega \setminus K$, $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ pro $z \in K$ a $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Z komplexní analýzy víme, že takový cykl vždy existuje.

Jako ilustraci metody, jak převádět věty z teorie komplexních funkcí na zobrazení z $\mathbb{C}$ do Banachova prostoru uveďme následující verzi Cauchyovy věty:

VĚTA 55. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, X je komplexní Banachův prostor a $f : \Omega \to X$ je holomorfní. Jsou-li Γ_1, Γ_2 dva cykly v Ω takové, že $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}(z) = \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, pak $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.*

DŮKAZ. Nechť $\phi \in X^*$ je libovolný. Pak je funkce $\phi \circ f$ holomorfní na Ω. Dále položme $\Gamma = \Gamma_1 \dot{-} \Gamma_2$. Pak $\operatorname{ind}_\Gamma(z) = 0$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, podle Cauchyovy věty je tudíž $\int_\Gamma \phi \circ f = 0$. Dle Lemmatu 54 je tedy $\phi\big(\int_\Gamma f\big) = 0$ pro každé $\phi \in X^*$. Protože X^* odděluje body X, je $\int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f = \int_\Gamma f = 0$.

□

Předchozí věta nám umožňuje zavést následující definici.

DEFINICE 56. Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak definujeme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f R_x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\alpha)(\alpha e - x)^{-1} \, \mathrm{d}\alpha,$$

kde Γ je libovolný cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω.

Dříve, než ukážeme, že s takto definovanými funkcemi lze pracovat pomocí přirozeného kalkulu, uvedeme některá pomocná počtářská tvrzení.

LEMMA 57. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, A je Banachova algebra a $f \in L_1(\mu, A)$. Pak pro každé $x \in A$ a každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$x\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E x f(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \quad a \quad \left(\int_E f \, \mathrm{d}\mu\right) x = \int_E f(t) x \, \mathrm{d}\mu(t).$$

DŮKAZ. Nechť $x \in A$. Operátor levé translace $L_x \colon A \to A$, $L_x(y) = xy$ patří do $\mathcal{L}(A)$. Dle Věty 8.32 tedy pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že

$$x\left(\int_E f d\mu\right) = L_x\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E L_x(f(t)) \, \mathrm{d}\mu(t) = \int_E x f(t) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Obdobně odvodíme druhou rovnost.

□

FAKT 58. *Nechť G je grupa. Jsou-li $u, v \in G$ takové, že $uv = vu$, pak i $u^{-1}v^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, $uv^{-1} = v^{-1}u$ a $u^{-1}v = vu^{-1}$.*

DŮKAZ. Tvrzení plyne z následujících výpočtů:

$$\begin{aligned} u^{-1}v^{-1} &= (vu)^{-1} = (uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}, \\ uv^{-1} &= v^{-1}vuv^{-1} = v^{-1}uvv^{-1} = v^{-1}u, \\ u^{-1}v &= vv^{-1}u^{-1}v = vu^{-1}v^{-1}v = vu^{-1}. \end{aligned}$$

□

LEMMA 59. *Nechť A je algebra s jednotkou, $x \in A$ a $\mu, \nu \in \rho(x)$.*

(a) $R_x(\mu)R_x(\nu) = R_x(\nu)R_x(\mu)$.
(b) $R_x(\mu) - R_x(\nu) = (\nu - \mu)R_x(\mu)R_x(\nu)$ (tzv. rezolventní identita).

DŮKAZ. Snadno vidíme, že prvky $\mu e - x$ a $\nu e - x$ spolu vzájemně komutují. Tvrzení (a) tedy plyne z Faktu 58. Podobně díky Faktu 58 platí, že spolu vzájemně komutují prvky $R_x(\mu)^{-1}$ a $R_x(\nu)$, a tedy

$$\begin{aligned} R_x(\mu) - R_x(\nu) = & R_x(\mu)R_x(\nu)R_x(\nu)^{-1} - R_x(\mu)R_x(\mu)^{-1}R_x(\nu) = \\ & = R_x(\mu)R_x(\nu)R_x(\nu)^{-1} - R_x(\mu)R_x(\nu)R_x(\mu)^{-1} = \\ & = R_x(\mu)R_x(\nu)\big(R_x(\nu)^{-1} - R_x(\mu)^{-1}\big) = \\ & = R_x(\mu)R_x(\nu)(\nu - \mu)e = (\nu - \mu)R_x(\mu)R_x(\nu). \end{aligned}$$

□

VĚTA 60 (holomorfní kalkulus). *Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 56, má následující vlastnosti:*

(a) Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.
(b) Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.
(c) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.
(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).
(e) Pokud $g \in H(\Omega_1)$, kde Ω_1 je otevřené okolí $f(\sigma(x))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
(f) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.
(g) Je-li $z \in A^\times$, pak $f(zxz^{-1}) = zf(x)z^{-1}$.
Navíc pokud zobrazení $\Psi\colon H(\Omega) \to A$ splňuje (a) a (b), pak $\Psi = \Phi$.

DŮKAZ. (a) Linearitu Φ obdržíme snadno z linearity integrálu podél řetězce. Ukažme nyní multiplikativitu. Nechť $g \in H(\Omega)$. Nalezněme otevřenou množinu $U \subset \mathbb{C}$ takovou, že $\sigma(x) \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$ a $\overline{U}$ je kompaktní. Dále nechť Γ je cykl obíhající $\sigma(x)$ v U a nechť Λ je cykl obíhající $\overline{U}$ v Ω. Pak Γ i Λ obíhají $\sigma(x)$ v Ω, takže

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma fR_x\right)g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)R_x(t)g(x)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)R_x(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda g(s)R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda f(t)g(s)R_x(t)R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda f(t)g(s)\frac{R_x(t) - R_x(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(t)\,\mathrm{d}s - \int_\Lambda \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(t)\left(\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)R_x(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(t)\left(\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)R_x(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Lambda\left(\int_\Gamma \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(s)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(t)\left(\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)R_x(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Lambda g(s)\left(\int_\Gamma \frac{f(t)}{s-t}\,\mathrm{d}t\right)R_x(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)g(t)R_x(t)\,\mathrm{d}t = (fg)(x), \end{aligned}$$

přičemž druhá a čtvrtá rovnost plynou z Lemmatu 57, pátá rovnost plyne z rezolventní identity (Lemma 59(b)) díky disjunktnosti $\langle\Gamma\rangle$ a $\langle\Lambda\rangle$, sedmá rovnost plyne z linearity vnějšího integrálu a z Faktu 8.33, osmá rovnost plyne z Fubiniovy věty (Věta 8.39), a devátá rovnost plyne z Faktu 8.33. Konečně, desátá rovnost plyne z toho, že podle Cauchyovy věty je $\int_\Gamma \frac{f(t)}{s-t}\,\mathrm{d}t = 0$ pro $s \in \langle\Lambda\rangle$, neboť pro tato s je funkce $t \mapsto \frac{f(t)}{s-t}$ holomorfní na U, a dále podle Cauchyova vzorce je $\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s = 2\pi i g(t)$ pro $t \in \overline{U}$.

Abychom ukázali poslední vlastnost Φ, vezměmě $k \in \mathbb{N}_0$ a položme $g(u) = u^k$ pro $u \in \mathbb{C}$. Pak $g \in H(\mathbb{C})$. Dále vezměme $r > \|x\|$ a položme $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak γ obíhá $\sigma(x)$ v $\mathbb{C}$, neboť $r > \|x\| \geq r(x)$, a je-li Γ cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω, pak $g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma gR_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma gR_x$ (Věta 55 použitá na množinu $\rho(x)$). Platí tedy

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(u)R_x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{u^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma'(t)\gamma(t)^k\frac{x^n}{\gamma(t)^{n+1}}\,\mathrm{d}\lambda(t) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,2\pi]}\gamma'(t)\gamma(t)^k\frac{x^n}{\gamma(t)^{n+1}}\,\mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u^k}{u^{n+1}}\,\mathrm{d}u\right)x^n = x^k,$$

přičemž jsme postupně použili Důsledek 52, Větu 8.29 spolu s faktem, že příslušná řada konverguje absolutně stejnoměrně na $[0, 2\pi]$, a Fakt 8.33. Dosazením $k = 0$, resp. $k = 1$, dostáváme kýžený vztah.

(b) Nechť $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_k$ je cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω a nechť $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f(x)\| &= \left\|\int_\Gamma \big(f_n(u) - f(u)\big)R_x(u)\,\mathrm{d}u\right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j}|\gamma_j'(t)|\cdot|f_n(\gamma_j(t)) - f(\gamma_j(t))|\cdot\|R_x(\gamma_j(t))\|\,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \sup_{\langle\Gamma\rangle}|f_n(u) - f(u)|\sum_{j=1}^{k}\int_{a_j}^{b_j}|\gamma_j'(t)|\cdot\|R_x(\gamma_j(t))\|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $f_n(x) \to f(x)$, neboť $\langle\Gamma\rangle$ je kompaktní podmnožina Ω.

(c) $\Rightarrow$ Nechť $f(\lambda) = 0$ pro nějaké $\lambda \in \sigma(x)$. Pak existuje $g \in H(\Omega)$ tak, že $f(u) = (\lambda - u)g(u)$ pro $u \in \Omega$. Dle (a) je tedy $(\lambda e - x)g(x) = f(x) = g(x)(\lambda e - x)$. Pak $f(x) \notin A^\times$ dle Lemmatu 31, neboť $\lambda e - x \notin A^\times$.

$\Leftarrow$ Díky kompaktnosti $\sigma(x)$ existuje otevřená $\Omega_1 \subset \Omega$ taková, že $\sigma(x) \subset \Omega_1$ a $f \neq 0$ na Ω_1. Pak $\frac{1}{f} \in H(\Omega_1)$ a dle (a) použitého na funkce z $H(\Omega_1)$ je $e = (f\frac{1}{f})(x) = f(x)\frac{1}{f}(x)$.

(d) Použijeme-li postupně (a) a (c), obdržíme, že

$$\lambda \in \sigma(f(x)) \Leftrightarrow \lambda e - f(x) \notin A^\times \Leftrightarrow (\lambda - f)(x) \notin A^\times \Leftrightarrow \exists\mu \in \sigma(x)\colon \lambda - f(\mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in f(\sigma(x)).$$

(e) Množina $f(\sigma(x))$ je kompaktní, existuje tedy otevřená $V \subset \mathbb{C}$ taková, že $f(\sigma(x)) \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega_1$ a $\overline{V}$ je kompaktní. Položme $U = f^{-1}(V)$. Pak U je otevřené okolí $\sigma(x)$, a tedy existuje cykl Γ obíhající $\sigma(x)$ v U. Nechť Γ_1 je cykl obíhající $\overline{V}$ v Ω_1. Pro každé $v \in \langle\Gamma_1\rangle$ je funkce $u \mapsto \frac{1}{v - f(u)}$ holomorfní na U, podle (a) a (c) je tedy

$$R_{f(x)}(v) = (ve - f(x))^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{v - f(u)}R_x(u)\,\mathrm{d}u.$$

Protože Γ_1 dle (d) obíhá $\sigma(f(x))$ v Ω_1, je

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} gR_{f(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(v)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{v - f(u)}R_x(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\left(\int_\Gamma \frac{g(v)}{v - f(u)}R_x(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_{\Gamma_1}\frac{g(v)}{v - f(u)}R_x(u)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_{\Gamma_1}\frac{g(v)}{v - f(u)}\,\mathrm{d}v\right)R_x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(f(u))R_x(u)\,\mathrm{d}u = (g \circ f)(x),\end{aligned}$$

přičemž jsme postupně použili Fubiniovu větu (Věta 8.39), Fakt 8.33, Cauchyův vzorec pro body z množiny $f(\langle\Gamma\rangle) \subset V$ a fakt, že $g \circ f$ je holomorfní na U.

(f) Nechť y komutuje s x. Snadno vidíme, že pak y komutuje i s $\lambda e - x$ pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$, dle Faktu 58 tedy komutuje i s $R_x(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \rho(x)$. Nechť Γ je cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω. Díky Lemmatu 57 dostáváme, že $yf(x) = y\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma fR_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(u)yR_x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(u)R_x(u)y\,\mathrm{d}u = \big(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma fR_x\big)y = f(x)y$.

Konečně, nechť $\Psi\colon H(\Omega) \to A$ splňuje (a) a (b). Nejprve si všimněme, že vzorec v (c) plyne pouze z (a), zobrazení Ψ tedy splňuje i (c). Nechť $f \in H(\Omega)$. Dle Rungeovy věty[7] ([R, Věta 13.9]) existuje posloupnost racionálních funkcí $\{R_n\}$ s póly mimo množinu Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně k f na Ω. Z pravidel kalkulu (a) a (c) snadno obdržíme, že $\Psi(R_n) = \Phi(R_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Použitím vlastnosti (b) pak dostaneme, že $\Psi(f) = \Phi(f)$.

(g) Dle Tvrzení 32(f) je $\sigma(zxz^{-1}) = \sigma(x)$. Nechť Γ je cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω. S využitím Lemmatu 57 pak dostáváme, že

$$\begin{aligned} f(zxz^{-1}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)(\alpha e - zxz^{-1})^{-1}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)\big(z(\alpha e - x)z^{-1}\big)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)z(\alpha e - x)^{-1}z^{-1}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2\pi i}z\left(\int_\Gamma f(\alpha)(\alpha e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\right)z^{-1} = zf(x)z^{-1}. \end{aligned}$$

□

Dle předchozí věty je již definice $f(x)$ jednoznačně určena přirozenými vlastnostmi kalkulu (a) a (b). Pokud bychom tedy například ke konstrukci $f(x)$ použili metodu Taylorových řad naznačenou v úvodu, pak bychom dospěli ke stejné hodnotě, jako pomocí Cauchyova vzorce výše: Jsou-li $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ a $R > 0$ takové, že $\sigma(x) \subset U(\lambda_0, R)$, a je-li f holomorfní na $U(\lambda_0, R)$ a je zde vyjádřena mocninnou řadou $f(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty a_n(\lambda - \lambda_0)^n$, pak

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x - \lambda_0 e)^n.$$

Vskutku, pro polynom $p_N(\lambda) = \sum_{n=0}^N a_n(\lambda - \lambda_0)^n$ z (a) plyne, že $p_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n(x - \lambda_0 e)^n$. Protože $p_N \to f$ lokálně stejnoměrně na $U(\lambda_0, R)$, plyne vzorec pro $f(x)$ z (b).

PŘÍKLAD 61 (holomorfní kalkulus pro nilpotentní prvky). Nechť A je netriviální komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$ je nilpotentní, tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x^n = 0$. Pak $\sigma(x) = \{0\}$ a pro f holomorfní na okolí 0 je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k.$$

Vskutku, dle Věty 51(c) je $r(x) = 0$, díky neprázdnosti spektra (Věta 51(b)) je tedy $\sigma(x) = \{0\}$. Zbytek plyne z poznámky za Větou 60 a z toho, že $x^k = 0$ pro $k \geq n$.

◇

PŘÍKLAD 62 (holomorfní kalkulus pro matice). Ztotožníme-li obvyklým způsobem komplexní matice z $M(n \times n)$ s operátory z $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, pak $M(n \times n)$ se standardními maticovými operacemi je komplexní Banachova algebra s jednotkou. Nechť $A \in M(n \times n)$ a f je holomorfní na okolí $\sigma(A)$ (tj. množiny vlastních čísel). Pak existují matice $Q, J \in M(n \times n)$ takové, že Q je regulární, J je Jordanova, $A = QJQ^{-1}$ a prvky na diagonále J patří do $\sigma(A)$. Označíme-li pro $B \in M(r \times r)$ a $C \in M(s \times s)$ jako $B \oplus C$ matici $\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right) \in M(r + s \times r + s)$, pak $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m$ pro nějaké Jordanovy buňky $J_1, \ldots, J_m$. Protože $\sigma(J_l) \subset \sigma(A)$, $l = 1, \ldots, m$, je f holomorfní na okolí $\sigma(J_l)$ a máme tak definovánu matici $f(J_l)$ (vše se odehrává v algebře $M(k \times k)$, kde k je řád buňky J_l). Pro $f(A)$ pak platí vzorec

$$f(A) = Q\big(f(J_1) \oplus \cdots \oplus f(J_m)\big)Q^{-1},$$

[7] Carl David Tolmé Runge (1885)

přičemž pro Jordanovu buňku $J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \\ \dots & 0 & \lambda & 1 \\ \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M(k \times k)$, $\lambda \in \sigma(A)$ je

$$f(J_{\lambda,k}) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \dots\dots\dots & & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vskutku, z Věty 60(g) plyne, že $f(A) = Qf(J)Q^{-1}$.

Dále, pro $B, D \in M(r \times r)$ a $C, E \in M(s \times s)$ je snadné ověřit, že $(B \oplus C)(D \oplus E) = (BD \oplus CE)$. Odtud ihned dostáváme, že jsou-li B a C regulární, pak $B \oplus C$ je regulární a $(B \oplus C)^{-1} = B^{-1} \oplus C^{-1}$.

Je-li $B\colon L \to M(r \times r)$ maticová funkce na intervalu $L \subset \mathbb{R}$, pak dle Příkladu 8.34 platí, že

$$\int_L B(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \left(\int_L b_{ij}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\right)_{i,j=1..r},$$

je-li jedna ze stran rovnosti definována. Odtud snadno plyne, že je-li navíc $C\colon L \to M(s \times s)$, pak $\int_L \big(B(t) \oplus C(t)\big)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \big(\int_L B(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\big) \oplus \int_L C(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$, je-li jedna ze stran rovnosti definována. Jsou-li nyní $D \in M(r \times r)$ a $E \in M(s \times s)$ takové, že $\sigma(D) \cup \sigma(E) \cup \sigma(D \oplus E) \subset \sigma(A)$, je-li Γ cykl obíhající $\sigma(A)$ v definičním oboru funkce f a označíme-li I_k jednotkovou matici v $M(k \times k)$, pak

$$\begin{aligned} f(D \oplus E) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)(\alpha I_{r+s} - D \oplus E)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)\big((\alpha I_r - D) \oplus (\alpha I_s - E)\big)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)\big((\alpha I_r - D)^{-1} \oplus (\alpha I_s - E)^{-1}\big)\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \big(f(\alpha)(\alpha I_r - D)^{-1}\big) \oplus \big(f(\alpha)(\alpha I_s - E)^{-1}\big)\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)(\alpha I_r - D)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\right) \oplus \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)(\alpha I_s - E)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\right) = f(D) \oplus f(E). \end{aligned}$$

Odtud již indukcí snadno plyne, že $f(J) = f(J_1) \oplus \dots \oplus f(J_m)$.

Konečně, pro Jordanovu buňku $J_{\lambda,k}$, $\lambda \neq 0$ snadno spočteme, že

$$J_{\lambda,k}{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \dots & (-1)^{k-1}\frac{1}{\lambda^k} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \dots & (-1)^{k-2}\frac{1}{\lambda^{k-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \dots\dots & & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Tedy pro α z definičního oboru f a $\lambda \neq \alpha$ je

$$f(\alpha)(\alpha I_k - J_{\lambda,k})^{-1} = -f(\alpha)J_{\lambda-\alpha,k}{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{f(\alpha)}{\alpha-\lambda} & \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\lambda)^2} & \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\lambda)^3} & \dots & \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\lambda)^k} \\ 0 & \frac{f(\alpha)}{\alpha-\lambda} & \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\lambda)^2} & \dots & \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\lambda)^{k-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{f(\alpha)}{\alpha-\lambda} & \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\lambda)^2} \\ 0 & \dots\dots & & 0 & \frac{f(\alpha)}{\alpha-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Protože pro $\lambda \in \sigma(A)$ a kružnici Γ obíhající $\{\lambda\}$ v definičním oboru f podle Cauchyova vzorce platí, že $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\lambda)^l} = \frac{f^{(l-1)}(\lambda)}{(l-1)!}$, vzorec pro $f(J_{\lambda,k})$ odtud ihned plyne.

◇

Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$ a f, g jsou holomorfní na otevřeném okolí $\sigma(x)$. Pokud $f = g$ na okolí $\sigma(x)$, pak $f(x) = g(x)$ (Věta 55). Pokud platí jen $f = g$ na $\sigma(x)$, pak nemusí být $f(x) = g(x)$:

PŘÍKLAD 63. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$. Pak $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0, 1\}$. Položme $f(z) = z$ a $g(z) = z^2$. Pak $f = g$ na $\sigma(A)$, ale $f(A) = A$ a $g(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

◇

4. Multiplikativní lineární funkcionály

■■■Naším nejbližším důležitým cílem je Gelfandova transformace komutativních Banachových algeber. Ta umožňuje řadu problémů v obecných (i nekomutativních) algebrách převést do kontextu spojitých funkcí na lokálně kompaktním topologickém prostoru. Úhelným kamenem pro Gelfandovu transformaci je konstrukce funkcionálů zachovávajících násobení.

DEFINICE 64. Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Homomorfismus $\varphi\colon A \to \mathbb{K}$ nazýváme multiplikativním lineárním funkcionálem (tedy φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in A$). Množinu všech nenulových multiplikativních lineárních funkcionálů na A značíme $\Delta(A)$.

Uvědomme si, že je-li $\varphi \in \Delta(A)$, pak φ je na. Má-li tedy A jednotku, pak $\varphi(e) = 1$, a je-li $x \in A^\times$, pak $\varphi(x) \neq 0$ a $\varphi(x^{-1}) = \frac{1}{\varphi(x)}$ (Fakt 29). Dále si všimněme, že jádro multiplikativního lineárního funkcionálu na A je ideálem v A, neboť jádro okruhového homomorfismu je okruhovým ideálem.

Kanonickým příkladem multiplikativních lineárních funkcionálů jsou Diracovy míry na $[0, 1]$ jakožto funkcionály na algebře $C([0, 1])$. Vizte též Příklad 80. Na druhou stranu se může stát, že na Banachově algebře žádné netriviální multiplikativní lineární funkcionály neexistují:

PŘÍKLAD 65. Nechť X je konečněrozměrný Banachův prostor s $\dim X > 1$. Pak $\Delta(\mathcal{L}(X)) = \emptyset$.

Nechť $n = \dim X$. Z lineární algebry víme, že prostor $\mathcal{L}(X)$ lze reprezentovat jako prostor čtvercových matic řádu n. Pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$ označme jako E^{ij} matici, která je nulová kromě hodnoty 1 na pozici (i, j). Pak $\{E^{ij};\ i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ je báze prostoru $\mathcal{L}(X)$. Přímočarým výpočtem obdržíme, že

$$E^{ij}E^{kl} = \begin{cases} E^{il}, & \text{pokud } j = k,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Nechť φ je multiplikativní lineární funkcionál na $\mathcal{L}(X)$. Pak $\varphi(T) = \sum_{i,j=1}^n T_{ij}\varphi(E^{ij})$ pro každé $T \in \mathcal{L}(X)$, kde $T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij}E^{ij}$, $T_{ij} \in \mathbb{K}$. Pro $i \neq j$ je $\varphi(E^{ij})\varphi(E^{ij}) = \varphi(E^{ij}E^{ij}) = \varphi(0) = 0$, a tedy $\varphi(E^{ij}) = 0$. Pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ je $\varphi(E^{ii}) = \varphi(E^{in}E^{ni}) = \varphi(E^{in})\varphi(E^{ni}) = 0$ dle předchozího případu. Konečně, $\varphi(E^{nn}) = \varphi(E^{n1}E^{1n}) = \varphi(E^{n1})\varphi(E^{1n}) = 0$. Odtud plyne, že $\varphi = 0$.

◇

Jak uvidíme později, alespoň pro komplexní komutativní Banachovy algebry A s jednotkou je množina $\Delta(A)$ neprázdná.

TVRZENÍ 66. *Nechť A je alegbra nad $\mathbb{K}$. Pak $\Delta(A)$ je lineárně nezávislá množina.*

DŮKAZ. Matematickou indukcí ukážeme, že každá n-prvková podmnožina $\Delta(A)$ je lineárně nezávislá. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$, předpokládejme, že pro toto n tvrzení platí, a nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \in \Delta(A)$ jsou po dvou různé. Jsou-li $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ lineárně závislé, pak dle indukčního předpokladu existují $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ takové, že $\varphi_{n+1} = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$. Dále dle Faktu 6.82 existují $x_1, \dots, x_n \in A$ takové, že $\varphi_k(x_j) = \delta_{k,j}$, $k, j = 1, \dots, n$. Pak $\varphi_{n+1}(x_k) = c_k$, $k = 1, \dots, n$.

Je-li $n = 1$, pak $\varphi_1(x_1^2) = \varphi_1(x_1)^2 = 1$, takže $c_1^2 = \varphi_2(x_1^2) = c_1\varphi_1(x_1^2) = c_1$. Tedy $c_1 = 0$, nebo $c_1 = 1$. První možnost je ve sporu s nenulovostí prvků $\Delta(A)$, druhá je ve sporu s tím, že $\varphi_2 \neq \varphi_1$.

Je-li $n > 1$, položme $z = x_1x_2\cdots x_n$. Pak $\varphi_j(z) = \varphi_j(x_1)\cdots\varphi_j(x_n) = 0$, $j = 1,\dots,n$. Odtud dostáváme, že $c_1\cdots c_n = \varphi_{n+1}(x_1)\cdots\varphi_{n+1}(x_n) = \varphi_{n+1}(z) = c_1\varphi_1(z) + \cdots + c_n\varphi_n(z) = 0$, neboli alespoň jeden z koeficientů $c_1,\dots,c_n$ je nulový. To je ovšem spor s indukčním předpokladem.

□

TVRZENÍ 67. *Nechť A je algebra. Každý multiplikativní lineární funkcionál φ na A má jednoznačné rozšíření $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$ dané vzorcem $\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x) + \lambda$ a $\Delta(A_e) = \{\widetilde{\varphi};\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$.*

DŮKAZ. Nechť φ je multiplikativní lineární funkcionál na A. Vzorec pro rozšíření plyne z Faktu 3. Jelikož $\widetilde{\varphi}((0,1)) = 1$, je $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$. Jednoznačnost rozšíření plyne z toho, že je-li $\psi \in \Delta(A_e)$, pak $\psi((x,\lambda)) = \psi\big((x,0) + (0,\lambda)\big) = \psi(x) + \lambda\psi((0,1)) = \psi(x) + \lambda\psi(e) = \psi(x) + \lambda$. Tvar $\Delta(A_e)$ pak plyne z toho, že je-li $\psi \in \Delta(A_e)$, pak $\varphi = \psi\restriction_A$ je multiplikativní lineární funkcionál na A a $\psi = \widetilde{\varphi}$.

□

TVRZENÍ 68. *Nechť A je algebra a $\varphi \in \Delta(A)$. Pro každé $x \in A$ je $\varphi(x) \in \sigma(x)$, a tedy $|\varphi(x)| \leq r(x)$.*

DŮKAZ. Má-li A jednotku a je-li $\lambda \in \rho(x)$, pak $\lambda e - x \in A^\times$, a tedy $0 \neq \varphi(\lambda e - x) = \lambda\varphi(e) - \varphi(x) = \lambda - \varphi(x)$, neboli $\varphi(x) \neq \lambda$. Proto je $\varphi(x) \in \sigma(x)$.

Nemá-li A jednotku, vezměme $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$. Pak dle předchozího je $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \in \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x)$.

□

DŮSLEDEK 69. *Nechť A je Banachova algebra. Pak $\Delta(A) \subset B_{A^*}$ (speciálně, každý multiplikativní lineární funkcionál na A je automaticky spojitý). Pokud A má jednotku, pak $\|\varphi\| \geq \frac{1}{\|e\|}$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Speciálně, je-li $\|e\| = 1$, pak $\Delta(A) \subset S_{A^*}$.*

DŮKAZ. Je-li $\varphi \in \Delta(A)$, pak dle Tvrzení 68 a Věty 40 je $|\varphi(x)| \leq r(x) \leq \|x\|$ pro každé $x \in A$, takže φ je spojitý a $\|\varphi\| \leq 1$. Má-li A jednotku, pak $\|\varphi\| \geq \left|\varphi\big(\frac{e}{\|e\|}\big)\right| = \frac{1}{\|e\|}$.

□

Naším cílem nyní bude dokázat rozšiřovací/oddělovací větu Hahnova-Banachova typu (Věta 2.7) pro multiplikativní lineární funkcionály (Důsledek 75). Hlavním technickým nástrojem pro tento účel pro nás budou ideály (připomeňme, že jádro multiplikativního lineárního funkcionálu je ideál), dokážeme si tedy nejprve několik pomocných tvrzení o ideálech. Příklad 65 ukazuje, že rozšiřovací věta nemůže platit pro obecné algebry. My ji dokážeme pro komutativní algebry, přičemž klíčovou roli zde hraje fakt, že v komutativní algebře existují hlavní ideály (Lemma 73).

Nejprve si všimněme, že jsou-li A, B algebry, $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus a $I \subset B$ je ideál v B, pak $\Phi^{-1}(I)$ je ideál v A. Vskutku, $\Phi^{-1}(I)$ je podprostor A a je-li $x \in \Phi^{-1}(I)$ a $a \in A$, pak $\Phi(ax) = \Phi(a)\Phi(x) \in I$, a tedy $ax \in \Phi^{-1}(I)$ a analogicky pro xa.

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ a I je ideál v A. Pak A/I je vektorový prostor a zároveň též okruh, kde násobení je dáno vzorcem $\widehat{x}\widehat{y} = \widehat{xy}$. Je-li nyní $x, y \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, pak $(\alpha\widehat{x})\widehat{y} = \widehat{\alpha x}\widehat{y} = \widehat{(\alpha x)y} = \widehat{x(\alpha y)} = \widehat{x}\widehat{\alpha y} = \widehat{x}(\alpha\widehat{y}) = \widehat{\alpha(xy)} = \alpha\widehat{xy} = \alpha(\widehat{x}\widehat{y})$. To znamená, že A/I s příslušnými operacemi je algebra nad $\mathbb{K}$, tzv. faktoralgebra algebry A podle ideálu I. Má-li A jednotku, pak $\widehat{e}$ je zjevně jednotka v A/I. Z definice ihned vidíme, že kanonické kvocientové zobrazení $q\colon A \to A/I$ je algebrový homomorfismus na.

Nechť nyní A je normovaná algebra a I je uzavřený ideál v A. Pak $(A/I, \|\cdot\|_{A/I})$, kde $\|\cdot\|_{A/I}$ je kanonická kvocientová norma, je normovaná algebra: Je-li $x, y \in A$ a $\varepsilon > 0$, pak existují $u, v \in I$ takové, že $\|x + u\| \leq \|\widehat{x}\|_{A/I} + \varepsilon$ a $\|y + v\| \leq \|\widehat{y}\|_{A/I} + \varepsilon$. Pak $uy + xv + uv \in I$, a tedy

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}\widehat{y}\|_{A/I} &= \|\widehat{xy}\|_{A/I} \leq \|xy + uy + xv + uv\| = \|(x+u)(y+v)\| \leq \|x+u\|\|y+v\| \leq \\ &\leq (\|\widehat{x}\|_{A/I} + \varepsilon)(\|\widehat{y}\|_{A/I} + \varepsilon).\end{aligned}$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\|\widehat{x}\widehat{y}\|_{A/I} \leq \|\widehat{x}\|_{A/I}\|\widehat{y}\|_{A/I}$. Je-li navíc A Banachova algebra, pak A/I je též Banachova algebra (Věta 1.70).

DEFINICE 70. Nechť A je algebra. Maximálním ideálem v A nazveme takový vlastní ideál v A, který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.

Je-li A algebra a $\varphi \in \Delta(A)$, pak $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} \varphi = 1$ (Lemma 1.121), a tedy $\operatorname{Ker} \varphi$ je maximální ideál v A.

TVRZENÍ 71. *Nechť A je algebra s jednotkou. Pak každý vlastní ideál v A je obsažen v nějakém maximálním ideálu v A.*

DŮKAZ. Nechť I je vlastní ideál v A. Položme

$$\mathcal{J} = \{J \subset A;\ J \text{ je vlastní ideál a } I \subset J\}.$$

Pak $\mathcal{J}$ je neprázdná množina částečně uspořádaná inkluzí. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu: Je-li $\mathcal{R}$ řetězec v $\mathcal{J}$, pak je snadno vidět, že $R = \bigcup_{J \in \mathcal{R}} J$ je ideál v A obsahující I. Protože pro každé $J \in \mathcal{R}$ je $e \notin J$, je také $e \notin R$, a tedy R je vlastní a je to horní závora $\mathcal{R}$ v $\mathcal{J}$. Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $J \in \mathcal{J}$.

□

TVRZENÍ 72. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li I vlastní ideál v A, je i $\overline{I}$ vlastní ideál v A. Tedy každý maximální ideál v A je uzavřený.*

DŮKAZ. Víme, že $\overline{I}$ je podprostor A (Fakt 1.21). Dále nechť $x \in \overline{I}$ a $a \in A$. Pak existuje posloupnost $\{x_n\} \subset I$ taková, že $x_n \to x$. Protože $x_n a \in I$ a $a x_n \in I$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a protože násobení je spojitá operace (Tvrzení 6), takže $a x_n \to a x$ a $x_n a \to x a$, je $a x \in \overline{I}$ a $x a \in \overline{I}$. To znamená, že $\overline{I}$ je ideál v A.

Konečně, I je vlastní, a tedy $I \cap A^{\times} = \emptyset$. Protože $A^{\times}$ je otevřená (Věta 23), je i $\overline{I} \cap A^{\times} = \emptyset$. Speciálně, $e \notin \overline{I}$, a tedy $\overline{I}$ je vlastní.

□

Je-li A komutativní algebra nad $\mathbb{K}$ a $x \in A$, pak xA je okruhový ideál (tzv. hlavní ideál). Protože pro každé $a \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\alpha(xa) = x(\alpha a) \in xA$, je xA podprostorem A, a tedy je to i algebrový ideál.

LEMMA 73. *Nechť A je komutativní algebra s jednotkou a $x \in A$ není invertovatelný. Pak hlavní ideál xA je vlastní.*

DŮKAZ. Protože x není invertovatelný, je $xa \neq e$ pro každé $a \in A$. Tedy $e \notin xA$.

□

VĚTA 74. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Pak zobrazení $\Phi\colon \varphi \mapsto \operatorname{Ker} \varphi$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v A.*

DŮKAZ. Ukažme nejprve, že Φ je prosté. Nechť $\varphi, \psi \in \Delta(A)$ jsou takové, že $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$. Pak $\psi = c\varphi$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$ (Lemma 6.80). Jelikož $1 = \psi(e) = c\varphi(e) = c$, dostáváme, že $\varphi = \psi$.

Nyní ukážeme, že Φ je na. Nechť I je maximální ideál v A. Dle Tvrzení 72 je I uzavřený, a tedy A/I je komutativní Banachova algebra s jednotkou $\widehat{e}$. Nechť $q\colon A \to A/I$ je kanonické kvocientové zobrazení. Tvrdíme, že každý nenulový prvek v $C = A/I$ je invertovatelný: Předpokládejme že $x \in A \setminus I$ je takový, že $\widehat{x}$ není invertovatelný. Dle Lemmatu 73 je hlavní ideál $\widehat{x}C$ vlastní, takže $\widehat{e} \notin \widehat{x}C$, a dále $\widehat{x} = \widehat{x}\widehat{e} \in \widehat{x}C$. Pak $q^{-1}(\widehat{x}C)$ je ideál v A, který je vlastní, neboť $e \notin q^{-1}(\widehat{x}C)$, obsahuje I, neboť $0 \in \widehat{x}C$, a je větší než I, neboť $x \in q^{-1}(\widehat{x}C)$. To je však spor s maximalitou I.

Dle Mazurovy-Gelfandovy věty (Věta 53) je tedy A/I izomorfní $\mathbb{C}$. Označíme-li $j\colon A/I \to \mathbb{C}$ tento izomorfismus, pak $\varphi = j \circ q \in \Delta(A)$, neboť j i q jsou na. Konečně, $x \in \operatorname{Ker} \varphi$, právě když $q(x) = 0$, což je, právě když $x \in I$. Našli jsme tedy funkcionál $\varphi \in \Delta(A)$, pro který je $\operatorname{Ker} \varphi = I$.

□

DŮSLEDEK 75. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou a I je vlastní ideál v A. Pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi\restriction_I = 0$.*

DŮKAZ. Stačí použít Tvrzení 71 a Větu 74.

□

Je-li A Banachova algebra, pak dle Důsledku 69 je $\Delta(A) \subset B_{A^*}$. Nebude-li řečeno jinak, pak na $\Delta(A)$ budeme vždy uvažovat topologii w^* zděděnou z A^*.

VĚTA 76. *Nechť A je Banachova algebra a $M = \Delta(A) \cup \{0\} \subset (B_{A^*}, w^*)$ je množina všech lineárních multiplikativních funkcionálů na A. Pak M je kompaktní, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní a má-li A jednotku, pak $\Delta(A)$ je kompaktní. Není-li $\Delta(A)$ kompaktní, pak M je Alexandrovova kompaktifikace $\Delta(A)$.*

Zobrazení $\Phi\colon M \to \Delta(A_e)$, kde $\Phi(\varphi) = \widetilde{\varphi}$ je jednoznačné rozšíření φ na prvek $\Delta(A_e)$, je homeomorfismus.

DŮKAZ. Analogicky jako ve Faktu 6.39 se ukáže, že M je w^*-uzavřená. Dle Důsledku 69 je $M \subset B_{A^*}$, a tedy dle Důsledku 6.116 je M kompaktní podmnožina (B_{A^*}, w^*). Množina $\Delta(A)$ je otevřená v M (má uzavřený doplněk), takže je lokálně kompaktní. Má-li A jednotku, pak $\Delta(A) = \{\varphi \in M;\ \varphi(e) = 1\} = \{\varphi \in M;\ \varepsilon_e(\varphi) = 1\}$, což je w^*-uzavřená podmnožina M. V tomto případě je tedy $\Delta(A)$ kompaktní.

Konečně, Φ je bijekce dle Tvrzení 67. Je-li $\{\varphi_\gamma\}$ net v M konvergující (ve w^*-topologii) k $\varphi \in M$, pak pro každé $(x, \lambda) \in A_e$ platí, že $\widetilde{\varphi_\gamma}((x, \lambda)) = \varphi_\gamma(x) + \lambda \to \varphi(x) + \lambda = \widetilde{\varphi}((x, \lambda))$. Zobrazení Φ je tedy spojité. Protože M je kompaktní, je Φ homeomorfismus.

□

Následující příklad ukazuje, že $\Delta(A)$ může být kompaktní i v případě, že A nemá jednotku.

PŘÍKLAD 77. Na $A = (\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_1)$ definujme násobení vzorcem $(a, b)(c, d) = \big((a + b)(c + d), 0\big)$ pro $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Pak A je komutativní Banachova algebra bez jednotky a $\Delta(A) = \{(1, 1)\}$ (a tedy $\Delta(A)$ je kompaktní).

Vskutku, komutativita je zjevná. Dále pro každé $a, b, c, d, e, f, \lambda \in \mathbb{K}$ platí, že

$$\begin{aligned}\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) &= \big((a + b)(c + d), 0\big)(e, f) = \big((a + b)(c + d)(e + f), 0\big) = \\ &= (a, b)\big((c + d)(e + f), 0\big) = (a, b)\big((c, d)(e, f)\big);\\ (a, b)\big((c, d) + (e, f)\big) &= (a, b)(c + e, d + f) = \big((a + b)(c + d + e + f), 0\big) = \\ &= \big((a + b)(c + d), 0\big) + \big((a + b)(e + f), 0\big) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f);\\ \lambda\big((a, b)(c, d)\big) &= \lambda\big((a + b)(c + d), 0\big) = \big(\lambda(a + b)(c + d), 0\big) = (\lambda a, \lambda b)(c, d) = \big(\lambda(a, b)\big)(c, d);\end{aligned}$$

zbytek vlastností násobení plyne z komutativity. Konečně, $\|(a, b)(c, d)\|_1 = |a + b||c + d| \le (|a| + |b|)(|c| + |d|) = \|(a, b)\|_1 \|(c, d)\|_1$. Tedy A je komutativní Banachova algebra. Dále A nemá jednotku, neboť pro libovolný $(a, b) \in A$ je $(0, 1)(a, b) = (a + b, 0) \neq (0, 1)$.

Označme e_1, e_2 kanonické bázové vektory v A. Pak $e_1^2 = e_2^2 = e_1 e_2 = e_1$. Je-li tedy $\varphi \in \Delta(A)$, pak $\varphi(e_1)^2 = \varphi(e_1^2) = \varphi(e_1)$ a $\varphi(e_2)^2 = \varphi(e_2^2) = \varphi(e_1)$. Protože $\varphi \neq 0$, plyne odtud, že $\varphi(e_1) = 1$. Konečně, z rovnosti $\varphi(e_1)\varphi(e_2) = \varphi(e_1 e_2) = \varphi(e_1)$ dostáváme, že i $\varphi(e_2) = 1$, neboli $\varphi = (1, 1) \in (\mathbb{K}^2)^*$.

◇

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^\#\colon Y^\# \to X^\#$ předpisem $T^\# f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^\#$ a $x \in X$. Snadno nahlédneme, že $T^\#$ opravdu zobrazuje do $X^\#$ a že je to lineární zobrazení. Důkaz následujícího lemmatu je *mutatis mutandis* stejný jako důkaz Věty 4.6(b) pro spojitý případ.

LEMMA 78. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární bijekce. Pak $T^\#$ je bijekce a $(T^\#)^{-1} = (T^{-1})^\#$.*

TVRZENÍ 79. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry a $\Phi\colon A \to B$ je algebraický izomorfismus. Pak zobrazení $\Psi = \Phi^\# \restriction_{\Delta(B)}$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\Delta(A)$.*

DŮKAZ. Pro každé $\varphi \in \Delta(B)$ je $\Phi^\#(\varphi)$ složením homomorfismů, a tedy je to multiplikativní lineární funkcionál. Dle Lemmatu 78 je $\Phi^\#$ bijekce, a tedy Ψ zobrazuje do $\Delta(A)$. Je-li $\{\varphi_\gamma\}$ net v $\Delta(B)$ konvergující k $\varphi \in \Delta(B)$ ve w^*-topologii, pak pro každé $x \in A$ je $\Psi(\varphi_\gamma)(x) = \varphi_\gamma(\Phi x) \to \varphi(\Phi x) = \Psi(\varphi)(x)$, a tedy $\Psi(\varphi_\gamma) \to \Psi(\varphi)$ ve w^*-topologii. Aplikujeme-li nyní předešlé úvahy na $(\Phi^\#)^{-1} = (\Phi^{-1})^\#$, dostaneme, že $(\Phi^\#)^{-1}$ zobrazuje spojitě $\Delta(A)$ do $\Delta(B)$, a tedy $\Psi^{-1} = (\Phi^\#)^{-1} \restriction_{\Delta(A)}$.

□

PŘÍKLAD 80. Nechť L je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $A = C_0(L)$. Definujme $\delta\colon L \to \Delta(A)$ předpisem $\delta(x) = \delta_x$. Pak δ je homeomorfismus.

Předpokládejme nejprve, že L je kompaktní. Zobrazení δ je prosté, neboť L je $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, a tedy $C(L)$ odděluje body L. Ukažme, že je na. Předpokládejme, že existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi \neq \delta_x$ pro každé $x \in L$. Pak pro každé $x \in L$ existuje $g_x \in C(L)$ takové, že $\varphi(g_x) \neq \delta_x(g_x)$. Položme $f_x = g_x - \varphi(g_x)$. Pak $\varphi(f_x) = \varphi(g_x) - \varphi(g_x)\varphi(1) = 0$ a $f_x(x) = \delta_x(f_x) = \delta_x(g_x) - \varphi(g_x)\delta_x(1) \neq 0$. Existuje tedy U_x otevřené okolí x takové, že $f_x \neq 0$ na U_x. Díky kompaktnosti L existují $x_1, \dots, x_n \in L$ tak, že $L \subset \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$. Položíme-li nyní $h = \sum_{j=1}^n |f_{x_j}|^2$, pak $h \in C(L)$ a $h > 0$ na L, a tedy $h \in A^\times$. To znamená, že $\varphi(h) \neq 0$. Na druhou stranu ale $\varphi(h) = \sum_{j=1}^n \varphi(f_{x_j})\varphi\big(\overline{f_{x_j}}\big) = 0$, což je spor.

Dále je-li $\{x_\gamma\}$ net v L konvergující k $x \in L$, pak pro každou $f \in C(L)$ platí, že $\delta_{x_\gamma}(f) = f(x_\gamma) \to f(x) = \delta_x(f)$, tj. $\delta(x_\gamma) \to \delta(x)$ ve w^*-topologii. Zobrazení δ je tedy homeomorfismus díky kompaktnosti L.

Nechť nyní L není kompaktní a označme $K = L \cup \{\infty\}$ Alexandrovovu kompaktifikaci L. Snadno nahlédneme, že $C(K) = C_0(L) \oplus \mathrm{span}\{1\}$. Dle Tvrzení 4 je tedy $\Phi\colon A_\mathrm{e} \to C(K)$, $\Phi(f, \lambda) = f + \lambda$ algebraický izomorfismus. Nechť dále $\eta\colon K \to \Delta(C(K))$ je homeomorfismus z předchozí části a $\Psi\colon \Delta(A_\mathrm{e}) \to \Delta(A) \cup \{0\}$, $\Psi(\psi) = \psi\restriction_A$ je homeomorfismus z Věty 76. Definujme $\delta = \Psi \circ \Phi^\# \circ \eta$. Pak dle Tvrzení 79 je δ homeomorfismus K na $\Delta(A) \cup \{0\}$. Protože pro každé $x \in K$ a $f \in A$ je $\Phi^\#(\delta_x)(f, 0) = \delta_x(\Phi(f, 0)) = \delta_x(f)$, plyne odtud, že $\Phi^\#(\delta_x)\restriction_A = \delta_x\restriction_A$, a tedy $\delta(x) = \Psi(\Phi^\#(\delta_x)) = \delta_x\restriction_A$. Speciálně, $\delta(\infty) = 0$, což znamená, že $\delta\restriction_L$ je homeomorfismus L na $\Delta(A)$.

◇

TVRZENÍ 81. *Nechť S, T jsou topologické prostory a $h\colon S \to T$ je spojité a na. Pak $\Phi\colon C_\mathrm{b}(T) \to C_\mathrm{b}(S)$, $\Phi(f) = f \circ h$ je izometrický izomorfismus Banachovy algebry $C_\mathrm{b}(T)$ do Banachovy algebry $C_\mathrm{b}(S)$. Jsou-li S a T lokálně kompaktní Hausdorffovy prostory a h je homeomorfismus, pak $\Phi\restriction_{C_0(T)}$ je izometrický izomorfismus Banachových algeber $C_0(T)$ a $C_0(S)$.*

DŮKAZ. Pro $f \in C_\mathrm{b}(T)$ je $f \circ h$ spojitá a omezená, a tedy $f \circ h \in C_\mathrm{b}(S)$. Snadno nahlédneme, že Φ je algebrový homomorfismus. Dále $\|\Phi(f)\| = \sup_S |f \circ h| = \sup_T |f| = \|f\|$ pro každé $f \in C_\mathrm{b}(T)$.

Nechť nyní S a T jsou lokálně kompaktní a h je homeomorfismus. Je-li $f \in C_0(T)$ a $\varepsilon > 0$, pak $\{x \in S;\ |f \circ h(x)| \geq \varepsilon\} = h^{-1}(\{y \in T;\ |f(y)| \geq \varepsilon\})$ je kompaktní. Tedy $f \circ h \in C_0(S)$. Konečně, $\Phi\restriction_{C_0(T)}$ zobrazuje na $C_0(S)$, neboť pro každé $g \in C_0(S)$ je (stejně jako výše) $g \circ h^{-1} \in C_0(T)$ a $\Phi(g \circ h^{-1}) = g$.

□

VĚTA 82. *Nechť K, L jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Banachovy algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou izometricky izomorfní.
(ii) Algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou algebraicky izomorfní.
(iii) Prostory K a L jsou homeomorfní.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) je triviální, (ii)⇒(iii) plyne z Tvrzení 79 a Příkladu 80, (iii)⇒(i) plyne z Tvrzení 81.

□

PŘÍKLAD 83. Uvažujme komplexní algebru $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$ z Příkladu 12. Pak $\Delta(L_1(\mathbb{R})) = \{x \mapsto e^{-itx};\ t \in \mathbb{R}\} \subset L_\infty(\mathbb{R})$ a zobrazení $t \mapsto e^{-itx}$ je homeomorfismem $\mathbb{R}$ na $\Delta(L_1(\mathbb{R}))$. Důkaz lze nalézt v kapitole 13 (Příklad 13.32(c) a Věta 13.22).

◇

Připomeňme, že díky Hahnově-Banachově větě X^* odděluje body normovaného lineárního prostoru X, což má význam například pro vnoření X do X^{**}. Podobný význam pro Banachovu algebru A má situace, kdy $\Delta(A)$ odděluje body A. Uvědomme si, že je-li A algebra a $\Delta(A)$ odděluje body A, pak A je již nutně komutativní: Vskutku, pokud $xy \neq yx$ pro nějaká $x, y \in A$, pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \neq \varphi(yx) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(y)$, což je spor.

DEFINICE 84. Komutativní algebra A se nazývá polojednoduchá, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. pokud $\bigcap\{\mathrm{Ker}\,\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Následující věta je zobecněním Důsledku 69.

VĚTA 85. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Pokud B je komutativní a polojednoduchá, pak každý homomorfismus z A do B je automaticky spojitý.*

DŮKAZ. Nechť $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus. Použijeme větu o uzavřeném grafu (Věta 3.13). Ověřme tedy, že Φ má uzavřený graf. Nechť posloupnost $\{x_n\} \subset A$ konverguje k $x \in A$ a $\Phi(x_n) \to y$ pro nějaké $y \in B$. Vezměme libovolné $\varphi \in \Delta(B)$. Pak $\varphi \circ \Phi \in \Delta(A) \cup \{0\} \subset A^*$, a tedy

$$\varphi(y) = \varphi\big(\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\Phi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \varphi \circ \Phi(x_n) = \varphi \circ \Phi(x) = \varphi(\Phi(x)).$$

Tedy $\varphi(y) = \varphi(\Phi(x))$ pro každé $\varphi \in \Delta(B)$. Jelikož $\Delta(B)$ odděluje body B, plyne odtud, že, $y = \Phi(x)$.

□

DŮSLEDEK 86. *Nechť A je komutativní polojednoduchá algebra. Pak všechny normy na A, ve kterých je A Banachova algebra, jsou ekvivalentní.*

DŮKAZ. Nechť $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na A, se kterými je A Banachova algebra. Pak jsou $Id\colon (A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_2)$ a $Id\colon (A, \|\cdot\|_2) \to (A, \|\cdot\|_1)$ spojité dle Věty 85. Můžeme tedy aplikovat Větu 1.13.

□

5. Gelfandova transformace

■■■Pro motivaci tohoto oddílu je vhodné si zopakovat Tvrzení 6.123. Již tam je naznačeno, jak interpretovat Banachův prostoru jako podprostor spojitých funkcí na vhodném kompaktním prostoru. Zvolíme-li pro Banachovu algebru A za onen topologický prostor $\Delta(A)$, je možné s prvky A pracovat jako se spojitými funkcemi na $\Delta(A)$, což má řadu zajímavých důsledků.

DEFINICE 87. Nechť A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$. Pro $x \in A$ definujeme $\widehat{x}\colon \Delta(A) \to \mathbb{K}$ předpisem $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\widehat{x} = \varepsilon_x \restriction_{\Delta(A)}$. Funkci $\widehat{x}$ říkáme Gelfandova transformace prvku x.

Pro $x \in A$ je $\widehat{x}$ spojitá funkce, což je snadno vidět z definice topologie w^*. Není-li $\Delta(A)$ kompaktní, pak z Věty 76 dostáváme, že $\Delta(A) \cup \{0\}$ je Alexandrovova kompaktifikace $\Delta(A)$. Protože $\widehat{x}(0) = 0$, plyne odtud, že $\widehat{x} \in C_0(\Delta(A))$. Tvrzení 68 pak dává, že $\operatorname{Rng} \widehat{x} \subset \sigma(x)$.

VĚTA 88. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Má-li A jednotku, pak* $\operatorname{Rng} \widehat{x} = \sigma(x)$. *Nemá-li A jednotku, pak $\sigma(x) \setminus \{0\} \subset \operatorname{Rng} \widehat{x} \subset \sigma(x)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že A má jednotku. Pokud $\lambda \in \sigma(x)$, pak $\lambda e - x$ není invertovatelný, a tedy dle Lemmatu 73 je $(\lambda e - x)A$ vlastní ideál. Dle Důsledku 75 tedy existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi = 0$ na $(\lambda e - x)A$. To znamená, že $0 = \varphi(\lambda e - x) = \lambda - \varphi(x)$, neboli $\varphi(x) = \lambda$. Odtud plyne, že $\operatorname{Rng} \widehat{x} = \sigma(x)$.

Nechť nyní A nemá jednotku. Označme $\widehat{(x,0)}$ Gelfandovu transformaci prvku $x = (x, 0) \in A_e$. Dle předchozího kroku je $\widehat{(x,0)}(\Delta(A_e)) = \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x)$. Jelikož $\Delta(A_e) = \{\widetilde{\varphi};\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$, kde $\widetilde{\varphi}$ je rozšíření z Tvrzení 67, dostáváme, že $\widehat{(x,0)}(\Delta(A_e)) = \{\psi(x);\ \psi \in \Delta(A_e)\} = \big\{\widetilde{\varphi}(x);\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\big\} = \big\{\varphi(x);\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\big\} = \widehat{x}(\Delta(A)) \cup \{0\}$. Odtud již plynou uvedené inkluze.

□

DŮSLEDEK 89. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\|\widehat{x}\| = r(x)$.*

DŮKAZ. Dle Věty 88 platí, že

$$\|\widehat{x}\| = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \operatorname{Rng} \widehat{x}\} = \sup\big\{|\lambda|;\ \lambda \in \{0\} \cup \operatorname{Rng} \widehat{x}\big\} = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\} = r(x).$$

□

PŘÍKLADY 90. (a) Nechť L je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $A = C_0(L)$. Dle Příkladu 80 je lze $\Delta(A)$ ztotožnit s L pomocí zobrazení $x \mapsto \delta_x$. Pak pro $f \in A$ a $x \in L$ je $\widehat{f}(x) = \delta_x(f) = f(x)$, a tedy Gelfandova transformace je identita (modulo ztotožnění L a $\Delta(A)$).

(b) Nechť $A = L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$ je komplexní algebra z Příkladu 83 a nechť $\eta\colon \mathbb{R} \to \Delta(A)$, $\eta(t) = x \mapsto e^{-itx}$ je tam uvedený homeomorfismus. Pak pro $f \in A$ a $t \in \mathbb{R}$ je $\widehat{f}(\eta(t)) = \eta(t)(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1$, neboli Gelfandova transformace je vlastně Fourierova transformace (modulo ztotožnění $\mathbb{R}$ a $\Delta(A)$).

DEFINICE 91. Nechť A je Banachova algebra. Zobrazení $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$, $\Gamma(x) = \widehat{x}$ nazýváme Gelfandovou transformací algebry A.

TVRZENÍ 92. *Nechť A je Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Γ je homomorfismus.
(b) Podalgebra $\Gamma(A) \subset C_0(\Delta(A))$ odděluje body $\Delta(A)$.
(c) Γ je prostá, právě když $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. právě tehdy, pokud A je komutativní a polojednoduchá.

DŮKAZ. (a) Linearita Γ plyne z linearity zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x$. Dále pro $x, y \in A$ a každé $\varphi \in \Delta(A)$ je $\Gamma(xy)(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \Gamma(x)(\varphi)\Gamma(y)(\varphi) = \big(\Gamma(x)\Gamma(y)\big)(\varphi)$.

(b) Pokud $\varphi, \psi \in \Delta(A)$, $\varphi \neq \psi$, pak existuje $x \in A$ takové, že $\varphi(x) \neq \psi(x)$, neboli $\Gamma(x)(\varphi) \neq \Gamma(x)(\psi)$.

(c) Stačí si uvědomit, že $\operatorname{Ker}\Gamma = \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\}$.

□

VĚTA 93. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Γ je spojitý homomorfismus a $\|\Gamma\| \leq 1$.
(b) Γ je izomorfismus do, právě když existuje $K > 0$ takové, že $\|x^2\| \geq K\|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
(c) Γ je izometrie do právě tehdy, když $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

Poznamenejme, že pokud nastane (b) v předchozí větě, pak se Gelfandova transformace nazývá Gelfandovou reprezentací. V tom případě totiž můžeme algebru A reprezentovat jako jistou uzavřenou podalgebru komutativní algebry spojitých funkcí na kompaktu.

DŮKAZ. (a) plyne z Tvrzení 92(a) a Důsledku 89.

(b), (c) $\Rightarrow$ Nechť $C > 0$ je takové, že $\|\widehat{x}\| \geq C\|x\|$ pro každé $x \in A$; v případě (c) můžeme vzít a vezměme $C = 1$. Pak pro každé $x \in A$ dle (a) platí, že $\|x^2\| \geq \big\|\widehat{x^2}\big\| = \|\widehat{x}^2\| = \|\widehat{x}\|^2 \geq C^2\|x\|^2$ (pro klíčovou druhou rovnost vizte též poznámku v Příkladu 9(a)). V případě (b) tedy vezmeme $K = C^2$, v případě (c) pak obdržíme $\|x^2\| = \|x\|^2$, neboť opačná nerovnost platí automaticky.

(b), (c) $\Leftarrow$ V případě (c) položme $K = 1$. Nechť $x \in A$. Indukcí obdržíme nerovnost $\|x^{2^n}\| \geq K^{2^n-1}\|x\|^{2^n}$, neboli $\sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} \geq K^{1-2^{-n}}\|x\|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky Důsledku 89 a Větě 51(c) tak dostáváme, že $\|\widehat{x}\| = r(x) \geq K\|x\|$.

□

Gelfandova transformace má zaručeny rozumné vlastnosti pouze v komutativním případě. Pro některé lokální výsledky v nekomutativních algebrách lze ovšem využít Gelfandovu transformaci pro vhodně zvolenou komutativní podalgebru. K tomu nám pomůže následující pojem.

DEFINICE 94. Nechť A je grupoid a $M \subset A$. Pak množina $M^{\mathrm{c}} = \{a \in A;\ ax = xa \text{ pro každé } x \in M\}$, tj. množina všech prvků A komutujících s každým prvkem M, se nazývá komutant množiny M.

Řekneme, že podmnožina grupoidu komutuje, pokud všechny její prvky spolu vzájemně komutují.

TVRZENÍ 95. *Nechť A je grupoid a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $M \subset (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$.
(b) Množina $M^{\mathrm{c}} \cap (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ komutuje.
(c) Pokud komutuje M, pak komutuje též $(M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in M$. Pro každé $a \in M^{\mathrm{c}}$ platí, že $ax = xa$, a tedy $x \in (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$.

(b) Pokud $x, y \in M^{\mathrm{c}} \cap (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$, pak $x \in M^{\mathrm{c}}$ a $y \in (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$, což znamená, že $yx = xy$.

(c) Pokud M komutuje, pak $M \subset M^{\mathrm{c}}$, odkud plyne, že $M^{\mathrm{c}} \supset (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$. Proto $(M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = M^{\mathrm{c}} \cap (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ komutuje dle (b).

$\square$

TVRZENÍ 96. *Nechť A je algebra a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) M^{c} je podalgebra A.
(b) Má-li A jednotku, pak $e \in M^{\mathrm{c}}$.
(c) Je-li A normovaná, pak M^{c} je uzavřená.

DŮKAZ. (a) Zjevně $0 \in M^{\mathrm{c}}$, a tedy M^{c} je neprázdná. Nechť $a, b \in M^{\mathrm{c}}$ a $\lambda \in \mathbb{K}$. Pro každé $x \in M$ platí, že $(a+b)x = ax + bx = xa + xb = x(a+b)$, a tedy $a + b \in M^{\mathrm{c}}$. Podobně, $(\lambda a)x = \lambda(ax) = \lambda(xa) = x(\lambda a)$ a $(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$, a tedy M^{c} je podalgebra.

(b) Pro každé $x \in M$ je $ex = x = xe$, a tedy $e \in M^{\mathrm{c}}$.

(c) Nechť $\{a_n\} \subset M^{\mathrm{c}}$ je posloupnost s limitou $a \in A$. Pro libovolné $x \in M$ díky spojitosti násobení platí, že $ax = \lim_{n\to\infty} a_n x = \lim_{n\to\infty} x a_n = xa$. Tedy M^{c} je uzavřená množina.

$\square$

TVRZENÍ 97. *Nechť A je algebra s jednotkou e a nechť $M \subset A$ komutuje. Pak $B = (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ je komutativní algebra s jednotkou e, $M \subset B$ a $B^\times = A^\times \cap B$. Tedy pro každé $x \in B$ platí, že $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

DŮKAZ. Dle Tvrzení 95(a), (c) a 96(a), (b) je B komutativní algebra s jednotkou e a $M \subset B$. Nechť $x \in A^\times \cap B$. Pak platí $xa = ax$ pro každé $a \in M^{\mathrm{c}}$. Vynásobíme-li tuto rovnost zleva i zprava prvkem x^{-1}, obdržíme, že $ax^{-1} = x^{-1}a$ pro každé $a \in M^{\mathrm{c}}$, což znamená, že $x^{-1} \in B$. Proto je $x \in B^\times$. Opačná inkluze je obsažena ve Faktu 18.

$\square$

VĚTA 98. *Nechť A je komplexní Banachova algebra a $x, y \in A$ spolu komutují. Pak platí následující:*

(a) $\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ a $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.
(b) $r(x+y) \le r(x) + r(y)$ a $r(xy) \le r(x)r(y)$.

DŮKAZ. (a) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Položme $B = (\{x, y\}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$. Dle Tvrzení 95(c) a 96 je B komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Uvažujme Gelfandovu transformaci na B. Pak dle Tvrzení 97, Věty 88 a Tvrzení 92(a) je

$$\sigma_A(x+y) = \sigma_B(x+y) = \operatorname{Rng} \widehat{x+y} = \operatorname{Rng}(\hat{x}+\hat{y}) \subset \operatorname{Rng} \hat{x} + \operatorname{Rng} \hat{y} = \sigma_B(x) + \sigma_B(y) = \sigma_A(x) + \sigma_A(y),$$

$$\sigma_A(xy) = \sigma_B(xy) = \operatorname{Rng} \widehat{xy} = \operatorname{Rng}(\hat{x}\hat{y}) \subset (\operatorname{Rng} \hat{x})(\operatorname{Rng} \hat{y}) = \sigma_B(x)\sigma_B(y) = \sigma_A(x)\sigma_A(y).$$

(b) ihned plyne z (a).

$\square$

PŘÍKLAD 99. Nechť $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ reprezentují prvky komplexní Banachovy algebry $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Pak $A + B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $BA = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Z lineární algebry víme, že $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ pro každé $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Dále $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B) = \lambda^2$, $\det\bigl(\lambda I - (A+B)\bigr) = \lambda^2 - 1$ a $\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA) = \lambda(\lambda - 1)$, takže $\sigma(A) = \sigma(B) = \{0\}$, $\sigma(A+B) = \{-1, 1\}$ a $\sigma(AB) = \sigma(BA) = \{0, 1\}$. Nejsou tedy splněny vztahy z Věty 98.

$\diamond$

6. B*-algebry

Začněme nejprve motivací, která vede k abstraktnímu pojmu B*-algebry. Nechť H je Hilbertův prostor. Vezmeme-li v potaz identifikaci H^* s H z Věty 1.120, pak s duálním operátorem ke spojitému lineárnímu operátoru $T\colon H \to H$ lze pracovat opět jako s operátorem na H. Přesnější význam této kryptické poznámky osvětlí následující věta a definice.

VĚTA 100. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí*

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y\rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j \colon H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Věty 1.120.

DŮKAZ. Nechť $y \in H_2$ je dáno. Položme $g(x) = \langle Tx, y\rangle$ pro $x \in H_1$. Pak $g \in H_1^*$, neboť je to složenina T a funkcionálu $f_y \in H_2^*$ z Věty 1.120, a tedy dle Věty 1.120 existuje právě jeden prvek $z \in H_1$ splňující

$$\langle Tx, y\rangle = g(x) = \langle x, z\rangle$$

pro každé $x \in H_1$. Označíme-li $z = T^\star y$, pak jsme právě dokázali existenci a jednoznačnost zobrazení $T^\star$. Jeho linearita a spojitost plyne z formule ve druhé části věty, kterou nyní dokážeme: Pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí, že

$$\langle x, I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2 y\rangle = \big(I_1(I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2 y)\big)(x) = \big(T^*(I_2 y)\big)(x) = (I_2 y)(Tx) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle.$$

Z jednoznačnosti tedy plyne, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$.

□

DEFINICE 101. Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Uvědomme si, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí též

$$\langle T^\star y, x\rangle = \overline{\langle x, T^\star y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

Připomeňme, že je-li $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ reprezentovaný maticí A, pak dle Příkladu 4.3 je $T^\star$ reprezentovaný maticí $\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

POZNÁMKA. Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \colon X \to Y$ sdruženě lineární zobrazení, pak snadno nahlédneme, že i pro T platí Tvrzení 1.44. (Používá se pouze to, že T je aditivní, nezáporně homogenní, a $T(-x) = -T(x)$ pro každé $x \in X$.) Dále definujeme-li pro T normu stejným způsobem, jako pro lineární operátory, pak pro ni bude platit Lemma 1.45 a Fakt 1.47.

VĚTA 102. *Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.*
(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$.
(b) Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.
(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $(Id_{H_1})^\star = Id_{H_1}$.
(d) Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $\|T^\star \circ T\| = \|T \circ T^\star\| = \|T\|^2$.
(e) $T^\star$ je izomorfismus, právě když T je izomorfismus.
(f) $T^\star$ je kompaktní, právě když T je kompaktní.

DŮKAZ. (a) Pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí, že $\langle T^{\star\star}x, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y\rangle_{H_1} = \langle Tx, y\rangle_{H_2}$. Díky Lemmatu 1.93 tedy $T^{\star\star} = T$.

(b) Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a α je skalár. Pak pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí, že

$$\begin{aligned}\langle x, (S+T)^\star y\rangle &= \langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx + Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle x, S^\star y\rangle + \langle x, T^\star y\rangle = \\ &= \langle x, S^\star y + T^\star y\rangle = \langle x, (S^\star + T^\star)y\rangle\end{aligned}$$

a

$$\langle x, (\alpha T)^\star y\rangle = \langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle \alpha(Tx), y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle x, T^\star y\rangle = \langle x, \overline{\alpha}(T^\star y)\rangle = \langle x, (\overline{\alpha}T^\star)y\rangle.$$

Díky Lemmatu 1.93 tedy $(S+T)^\star = S^\star + T^\star$ a $(\alpha T)^\star = \overline{\alpha}T^\star$, takže zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární. To, že je izometrické, plyne z Vět 100 a 4.2 pomocí odhadu $\|T^\star\| \le \|I_1^{-1}\|\|T^*\|\|I_2\| = \|T\| = \|T^*\| = \|I_1 \circ T^\star \circ I_2^{-1}\| \le \|I_1\|\|T^\star\|\|I_2^{-1}\| = \|T^\star\|$. Konečně, zobrazení $T \mapsto T^\star$ je na: Pro dané $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ položíme $T = S^\star \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $T^\star = S^{\star\star} = S$ podle (a).

(c) Pro každé $y \in H_3$ a $x \in H_1$ máme $\langle x, (S \circ T)^\star y\rangle_{H_1} = \langle S \circ Tx, y\rangle_{H_3} = \langle S(Tx), y\rangle_{H_3} = \langle Tx, S^\star y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star \circ S^\star y\rangle_{H_1}$, a tedy díky Lemmatu 1.93 je $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$.

Konečně, pro každé $y, x \in H_1$ je $\langle x, (Id_{H_1})^\star y\rangle = \langle Id_{H_1} x, y\rangle = \langle x, y\rangle$, tedy $(Id_{H_1})^\star y = y$.

(d) Dle (b) je $\|T^\star \circ T\| \leq \|T^\star\|\|T\| = \|T\|^2$. Na druhou stranu,

$$\|T\|^2 = \sup_{x \in B_{H_1}} \|Tx\|^2 = \sup_{x \in B_{H_1}} |\langle Tx, Tx\rangle| = \sup_{x \in B_{H_1}} |\langle x, T^\star \circ Tx\rangle| \leq \sup_{x \in B_{H_1}} \|x\|\|T^\star \circ Tx\| \leq \|T^\star \circ T\|.$$

Konečně, položme $S = T^\star$. Pak dle (a), předchozího a (b) je $\|T \circ T^\star\| = \|T^{\star\star} \circ T^\star\| = \|S^\star \circ S\| = \|S\|^2 = \|T\|^2$.

(e) Plyne z Vět 100 a 4.6(b) a dále z (a).

(f) Plyne z Vět 100 a 4.13, argument se skládáním je analogický jako v důkazu Věty 4.12(d).

□

Výše zmíněné vlastnosti hilbertovsky adjungovaných operátorů z $\mathcal{L}(H)$ jsou extrahovány do následující abstraktní definice:

DEFINICE 103. Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $^\star\colon A \to A$ se nazývá algebrová involuce, pokud má následující vlastnosti:

- $(x + y)^\star = x^\star + y^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(\lambda x)^\star = \overline{\lambda} x^\star$ pro každé $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $(xy)^\star = y^\star x^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(x^\star)^\star = x$ pro každé $x \in A$ (tj. zobrazení * je involuce).

Algebře, na které je definována algebrová involuce, budeme říkat algebra s involucí.

Všimněme si, že $0^\star = (0 - 0)^\star = 0^\star - 0^\star = 0$.

Existence algebrové involuce vynucuje na algebře jistou symetrii. Jednoduchým příkladem algebry s involucí jsou komplexní čísla, kde involuce je komplexní sdružení. Věta 102 pak říká, že $\mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor, je algebra s involucí danou adjungovaným zobrazením $T \mapsto T^\star$.

FAKT 104. *Nechť A je algebra s involucí. Pak $(a, \alpha)^\star = (a^\star, \overline{\alpha})$ pro $(a, \alpha) \in A_{\mathrm{e}}$ je involuce na A_{e} rozšiřující involuci z A.*

DŮKAZ. Stačí rozepsat definice:

$$\begin{aligned}
\big((a,\alpha) + (b,\beta)\big)^\star &= (a + b, \alpha + \beta)^\star = \big((a + b)^\star, \overline{\alpha + \beta}\big) = (a^\star + b^\star, \overline{\alpha} + \overline{\beta}) = (a^\star, \overline{\alpha}) + (b^\star, \overline{\beta}) = \\
&= (a,\alpha)^\star + (b,\beta)^\star, \\
\big(\lambda(a,\alpha)\big)^\star &= (\lambda a, \lambda\alpha)^\star = \big((\lambda a)^\star, \overline{\lambda\alpha}\big) = (\overline{\lambda} a^\star, \overline{\lambda}\overline{\alpha}) = \overline{\lambda}(a^\star, \overline{\alpha}) = \overline{\lambda}(a,\alpha)^\star, \\
\big((a,\alpha)(b,\beta)\big)^\star &= \big((ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)\big)^\star = \big((ab + \alpha b + \beta a)^\star, \overline{\alpha\beta}\big) = (b^\star a^\star + \overline{\alpha} b^\star + \overline{\beta} a^\star, \overline{\alpha}\overline{\beta}) = \\
&= (b^\star, \overline{\beta})(a^\star, \overline{\alpha}) = (b,\beta)^\star (a,\alpha)^\star, \\
\big((a,\alpha)^\star\big)^\star &= \big((a^\star, \overline{\alpha})\big)^\star = (a,\alpha).
\end{aligned}$$

□

TVRZENÍ 105. *Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li e levá nebo pravá jednotka v A, pak e je jednotka a $e^\star = e$.

(b) Nechť A má jednotku. Pak $x \in A^\times$ právě tehdy, když $x^\star \in A^\times$. V tomto případě pak $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$.

(c) $\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma(x^\star)$.

DŮKAZ. (a) Je-li $e \in A$ levá jednotka, pak pro každé $x \in A$ je $xe^\star = (ex^\star)^\star = (x^\star)^\star = x$, a tedy $e^\star$ je pravá jednotka. To znamená, že $e^\star = e$ je oboustranná jednotka. Pro pravou jednotku je argument analogický.

(b) Je-li $x \in A^\times$, pak dle (a) je $(x^{-1})^\star x^\star = (xx^{-1})^\star = e^\star = e$ a $x^\star (x^{-1})^\star = (x^{-1}x)^\star = e^\star = e$. Tedy $x^\star \in A^\times$ a $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$. Pokud $x^\star \in A^\times$, pak dle předchozího je $x = (x^\star)^\star \in A^\times$.

(c) Díky Faktu 104 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Tvrzení pak plyne z (a) a (b), neboť $\lambda \in \rho(x) \Leftrightarrow \lambda e - x \in A^\times \Leftrightarrow \overline{\lambda} e - x^\star = (\lambda e - x)^\star \in A^\times \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(x^\star)$.

□

TVRZENÍ 106. *Nechť A je komutativní polojednoduchá Banachova algebra. Pak každá involuce na A je spojitá.*

DŮKAZ. Nechť * je involuce na A. Díky komutativitě A je zobrazení $\Phi\colon A_{\mathbb{R}} \to A_{\mathbb{R}}$, $\Phi(x) = x^\star$ algebrový homomorfismus. Proto je Φ spojité dle Věty 85.

□

Silnější strukturu pochopitelně dostaneme, pokud bude v normované algebře involuce svázána s normou (podobně jako je svázáno s normou násobení). Pokud nám jako model slouží algebra $\mathcal{L}(H)$, pak můžeme využít vlastnost (d) z Věty 102, která imituje vlastnost komplexně sdružených čísel v algebře $\mathbb{C}$: $|\overline{\alpha}\alpha| = |\alpha|^2$.

DEFINICE 107. Banachova algebra A s involucí se nazývá B*-algebra[8], pokud pro každé $x \in A$ je

$$\|x^\star x\| = \|x\|^2.$$

Všimněme si, že v netriviální B*-algebře s jednotkou je $\|e\| = 1$, neboť dle Tvrzení 105(a) je $\|e\| = \|e^\star e\| = \|e\|^2$.

PŘÍKLADY 108. (a) Komplexní čísla s involucí $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ jsou komutativní B*-algebra.

(b) $\mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor, s involucí $T \mapsto T^\star$ je B*-algebra (Věta 102). Její uzavřená podalgebra $\mathcal{K}(H)$ (Věta 4.12) je uzavřená na involuci (Věta 102(f)), a tedy je to též B*-algebra.

(c) Je-li Γ neprázdná množina, pak algebra $\ell_\infty(\Gamma)$ s bodovým násobením a s involucí $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mapsto (\overline{x_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ je komutativní B*-algebra.

(d) Je-li L lokálně kompaktní topologický prostor, je $C_0(L)$ s involucí $f^\star(x) = \overline{f(x)}$, $x \in L$ komutativní B*-algebra.

(e) Na Banachově algebře $H^\infty(U)$, kde U je otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{C}$, definujme $f^\star(z) = \overline{f(\overline{z})}$ pro $f \in H^\infty(U)$ a $z \in U$. Pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek ověříme, že $f^\star \in H^\infty(U)$: Podle definice je $f_1^\star(x,y) = f_1(x,-y)$ a $f_2^\star(x,y) = -f_2(x,-y)$. Tedy $\frac{\partial f_1^\star}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial f_2^\star}{\partial y}(x,y)$ a $\frac{\partial f_1^\star}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,-y) = -\frac{\partial f_2^\star}{\partial x}(x,y)$. Dále snadno vidíme, že * je algebrová involuce, která navíc splňuje $\|f^\star\| = \|f\|$ (vizte Lemma 109). Tato algebra s involucí nicméně není B*-algebra.

Vskutku, nechť $f(z) = \exp(iz)$. Pak pro $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, je

$$|f(z)| = |\exp(iz)| = |\exp(ix - y)| = |\exp(ix)||\exp(-y)| = \exp(-y) \quad \text{a}$$

$$|f^\star(z)| = \left|\overline{\exp(i\overline{z})}\right| = |\exp(ix + y)| = |\exp(ix)||\exp y| = \exp y,$$

takže $|f(z)f^\star(z)| = |f(z)||f^\star(z)| = 1$ pro $z \in U$. Na druhou stranu, $|f(-i)| = \exp 1$. Tedy $\|f^\star f\| = 1 < \exp 2 \le \|f\|^2$.

(f) Položme $A = \mathbb{K}^3$ s bodovým násobením a definujme normu na A předpisem $\|x\| = \max\{|x_{-1}|, |x_0|\} + |x_1|$ pro $x = (x_{-1}, x_0, x_1) \in A$. Bez problémů lze ověřit, že A je Banachova algebra. Definujme dále na A operaci * předpisem $x_n^\star = \overline{x_{-n}}$. Opět snadno nahlédneme, že * je algebrová involuce. Nicméně neplatí, že $\|x^\star\| = \|x\|$, neboť $\|(0,1,1)\| = 2$ a $\|(0,1,1)^\star\| = \|(1,1,0)\| = 1$.

LEMMA 109. *Nechť A je normovaná algebra s involucí. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\|x^\star x\| \ge \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

---

[8] Někteří autoři používají též termín C*-algebra. Historie těchto pojmů je následující: Objekt B*-algebry definovali I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943), název B*-algebra pro něj zavedl Charles Earl Rickart (1946). Ve svojí přelomové práci Gelfand a Najmark dokázali reprezentační větu (vizte Větu 151) v následující formě: Je-li komplexní B*-algebra taková, že pro každý její prvek x je $e + x^\star x$ invertovatelný, pak ji lze reprezentovat jako uzavřenou *-podalgebru $\mathcal{L}(H)$, kde H je Hilberův prostor. Ve stejné práci uvedli domněnku, že podmínka invertovatelnosti $e + x^\star x$ je nadbytečná. Irving Ezra Segal (1947) zavedl pro uzavřené *-podalgebry $\mathcal{L}(H)$ název C*-algebra. Že je podmínka Gelfanda a Najmarka vskutku nadbytečná dokázal Irving Kaplansky (1953) (Věta 141). To znamená, že každou komplexní B*-algebru lze reprezentovat jako C*-algebru.

(ii) $\|xx^\star\| \ge \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.
(iii) $\|x^\star x\| = \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.
(iv) $\|xx^\star\| = \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

Ve všech případech je pak $\|x^\star\| = \|x\|$ *pro každé* $x \in A$.

DŮKAZ. Ukážeme nejprve, že kterékoli tvrzení implikuje rovnost $\|x^\star\| = \|x\|$. Nechť $x \in A$. Z (i) nebo (iii), resp. (ii) nebo (iv), dostáváme, že $\|x\|^2 \le \|x^\star x\| \le \|x^\star\|\|x\|$, resp. $\|x\|^2 \le \|xx^\star\| \le \|x^\star\|\|x\|$. Odtud plyne, že ve všech případech je $\|x\| \le \|x^\star\|$. Aplikujeme-li nyní stejný odhad na $x^\star$, obdržíme, že $\|x^\star\| \le \|(x^\star)^\star\| = \|x\|$, a tedy $\|x^\star\| = \|x\|$.

S využitím tohoto faktu nyní snadno dokážeme ekvivalenci všech tvrzení:

(i)$\Rightarrow$(iii) Pro $x \in A$ je $\|x^\star x\| \le \|x^\star\|\|x\| = \|x\|^2$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Pro $x \in A$ je $\|xx^\star\| = \|(x^\star)^\star x^\star\| = \|x^\star\|^2 = \|x\|^2$.

(iv)$\Rightarrow$(ii) je triviální.

(ii)$\Rightarrow$(i) Pro $x \in A$ je $\|x^\star x\| = \|x^\star(x^\star)^\star\| \ge \|x^\star\|^2 = \|x\|^2$.

□

Důsledkem předchozího lemmatu je fakt, že pokud A je B*-algebra, pak její involuce * je sdruženě lineární izometrie A na A, neboť $\|x^\star - y^\star\| = \|(x-y)^\star\| = \|x - y\|$ pro každé $x, y \in A$.

TVRZENÍ 110. *Nechť A je B*-algebra bez jednotky. Pak na A_{e} s involucí z Faktu 104 existuje norma $|||\cdot|||$ rozšiřující původní normu na A (a ekvivalentní normě z Tvrzení 14) taková, že A_{e} je B*-algebra.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že A má konečnou kodimenzi v A_{e}, takže libovolné dvě normy na A_{e} rozšiřující normu z A jsou ekvivalentní (Věty 2.8 a 1.79).

Nechť $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$ je homomorfismus z Věty 16. Pro každé $a \in A$ je pak $\|L_a\| \le \|a\|$ a na druhou stranu $\|a\|^2 = \|aa^\star\| = \|L_a(a^\star)\| \le \|L_a\|\|a^\star\| = \|L_a\|\|a\|$, tedy I je izometrie do. Nechť dále $\widetilde{I}\colon A_{\mathrm{e}} \to \mathcal{L}(A)$ je rozšíření z Faktu 3. Definujeme-li $|||(a,\lambda)||| = \|\widetilde{I}(a,\lambda)\|$ pro $(a,\lambda) \in A_{\mathrm{e}}$, pak $(A_{\mathrm{e}}, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra, neboť $\widetilde{I}$ je prostý homomorfismus ($Id \notin I(A)$).

Ukažme, že $(A_{\mathrm{e}}, |||\cdot|||)$ je B*-algebra: Úplnost plyne z ekvivalence $|||\cdot|||$ a $\|\cdot\|_1$ z Tvrzení 14. Nechť $(a,\lambda) \in A_{\mathrm{e}}$. Pak pro každé $x \in A$ je

$$\begin{aligned}\|\widetilde{I}(a,\lambda)x\|^2 &= \|ax + \lambda x\|^2 = \|(ax+\lambda x)^\star(ax+\lambda x)\| = \left\|x^\star\big(a^\star(ax+\lambda x) + \overline{\lambda}(ax+\lambda x)\big)\right\| = \\ &= \left\|x^\star\widetilde{I}(a^\star,\overline{\lambda})\big(\widetilde{I}(a,\lambda)(x)\big)\right\| \le \|x^\star\|\,\|\widetilde{I}(a^\star,\overline{\lambda})\circ\widetilde{I}(a,\lambda)\|\,\|x\| = \left\|\widetilde{I}\big((a^\star,\overline{\lambda})(a,\lambda)\big)\right\|\|x\|^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $|||(a,\lambda)|||^2 = \|\widetilde{I}(a,\lambda)\|^2 \le \left\|\widetilde{I}\big((a^\star,\overline{\lambda})(a,\lambda)\big)\right\| = |||(a,\lambda)^\star(a,\lambda)|||$. Zbytek plyne z Lemmatu 109.

□

DEFINICE 111. Nechť A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá samoadjungovaný, pokud $x^\star = x$.

Dle Tvrzení 105(a) je jednotka v algebře s involucí samoadjungovaná. Následující fakt ukazuje, že samoadjungované prvky mají některé podobné vlastnosti jako reálná čísla vnořená do komplexních čísel a involuce má podobné vlastnosti jako komplexní sdružování.

FAKT 112. *Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Prvky $x + x^\star$, $x^\star x$, $xx^\star$, a v komplexním případě i prvek $i(x - x^\star)$ jsou samoadjungované.

(b) Je-li x samoadjungovaný, je samoadjungovaný i prvek tx pro $t \in \mathbb{R}$.

(c) Je-li A komplexní, pak existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Pro ně pak platí, že $x^\star = u - iv$.

DŮKAZ. (a) Platí, že $(x + x^\star)^\star = x^\star + (x^\star)^\star = x^\star + x = x + x^\star$, dále $(x^\star x)^\star = x^\star(x^\star)^\star = x^\star x$ a $(xx^\star)^\star = (x^\star)^\star x^\star = xx^\star$. V komplexním případě pak $(i(x - x^\star))^\star = -i(x^\star - x) = i(x - x^\star)$.

(b) Je $(tx)^\star = tx^\star = tx$.

(c) Položíme-li $u = \frac{1}{2}(x + x^\star)$ a $v = \frac{1}{2i}(x - x^\star) = -\frac{i}{2}(x - x^\star)$, dostaneme dle (a) a (b) samoadjungované prvky, pro které $u + iv = \frac{1}{2}(x + x^\star) + \frac{1}{2}(x - x^\star) = x$ a $u - iv = \frac{1}{2}(x + x^\star) - \frac{1}{2}(x - x^\star) = x^\star$. Pokud

$a+ib=c+id$, kde $a,b,c,d\in A$ jsou samoadjungované, pak $a-ib=(a+ib)^\star=(c+id)^\star=c-id$. Sečtením těchto rovností dostaneme $a=c$, jejich odečtením $b=d$.

□

DEFINICE 113. Nechť A je algebra s involucí.

- Prvek $x\in A$ se nazývá normální, pokud komutuje s $x^\star$, tj. pokud $x^\star x=xx^\star$.
- Pokud A má jednotku, pak prvek $x\in A$ se nazývá unitární, splňuje-li rovnosti $x^\star x=xx^\star=e$, neboli $x^{-1}=x^\star$.

Všimněme si, že samoadjungované i unitární prvky jsou normální. Je-li algebra komutativní, pak všechny její prvky jsou normální. Pro x normální, resp. unitární zjevně platí, že $x^\star$ je normální, resp. unitární.

FAKT 114. *Nechť A je algebra s involucí a $x,y\in A$.*

(a) Má-li A jednotku a jsou-li x,y unitární, pak xy je unitární.
(b) Jsou-li x,y samoadjungované a komutují spolu, pak xy je samoadjungovaný.
(c) Je-li x samoadjungovaný, pak $yxy^\star$ je samoadjungovaný.
(d) Je-li x normální, pak x^n je normální pro každé $n\in\mathbb{N}$.
(e) Má-li A jednotku a je-li x normální a y unitární, pak $yxy^\star$ je normální.

DŮKAZ. (a) plyne z rovností $(xy)^\star(xy)=y^\star x^\star xy=y^\star ey=y^\star y=e$ a $(xy)(xy)^\star=xyy^\star x^\star=xx^\star=e$.

(b) plyne z rovností $(xy)^\star=y^\star x^\star=yx=xy$.

(c) plyne z rovností $(yxy^\star)^\star=yx^\star y^\star=yxy^\star$.

(d) Opakovaným použitím normálnosti x postupně dostaneme, že

$$(x^n)^\star x^n=(x^\star)^n x^n=(x^\star)^{n-1}xx^\star x^{n-1}=\cdots=x(x^\star)^n x^{n-1}=\cdots=x^n(x^\star)^n=x^n(x^n)^\star.$$

(e) plyne z rovností $(yxy^\star)^\star(yxy^\star)=yx^\star y^\star yxy^\star=yx^\star xy^\star=yxx^\star y^\star=yxy^\star yx^\star y^\star=(yxy^\star)(yxy^\star)^\star$.

□

VĚTA 115. *Nechť A je $B^\star$-algebra a $x\in A$.*

(a) Je-li x normální, pak $\|x^n\|=\|x\|^n$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a pro A komplexní je $r(x)=\|x\|$.
(b) Je-li A komplexní, pak $r(x^\star x)=r(xx^\star)=\|x\|^2$.
(c) Má-li A jednotku a x je unitární, pak $\|x\|=1$ a $\sigma(x)\subset\{\lambda\in\mathbb{K};\ |\lambda|=1\}$.
(d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sigma(x)\subset\mathbb{R}$.

DŮKAZ. (a) Platí, že

$$\|x\|^4=\|x^\star x\|^2=\|(x^\star x)^\star(x^\star x)\|=\|x^\star xx^\star x\|=\|x^\star x^\star xx\|=\|(xx)^\star(xx)\|=\|x^2\|^2,$$

takže $\|x^2\|=\|x\|^2$. Odtud indukcí obdržíme, že $\|x^{2^k}\|=\|x\|^{2^k}$ pro každé $k\in\mathbb{N}$. Je-li tedy $n\in\mathbb{N}$ a $k\in\mathbb{N}$ takové, že $n\le 2^k$, pak $\|x\|^{2^k}=\|x^{2^k}\|=\|x^n x^{2^k-n}\|\le\|x^n\|\|x\|^{2^k-n}\le\|x\|^n\|x\|^{2^k-n}=\|x\|^{2^k}$. Odtud plyne, že $\|x^n\|\|x\|^{2^k-n}=\|x\|^n\|x\|^{2^k-n}$, takže $\|x^n\|=\|x\|^n$.

Je-li A je komplexní, pak podle Věty 51(c) je $r(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}=\|x\|$.

(b) Dle Faktu 112(a) je $x^\star x$ samoadjungovaný, a tedy normální. Díky (a) je tak $r(x^\star x)=\|x^\star x\|=\|x\|^2$. Analogicky pro prvek $xx^\star$.

(c) Jelikož $1=\|e\|=\|x^\star x\|=\|x\|^2$, dostáváme, že $\|x\|=1$. Z Lemmatu 109 pak obdržíme, že $\|x^{-1}\|=\|x^\star\|=\|x\|=1$. Je-li nyní $\lambda\in\sigma(x)$, pak dle Tvrzení 32(d) a Věty 40 je $|\lambda|\le\|x\|=1$ a $\left|\frac{1}{\lambda}\right|\le\|x^{-1}\|=1$. Tedy $|\lambda|=1$.

(d) V reálném případě není co dokazovat, nechť tedy A je komplexní. Díky Tvrzení 110 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Nechť $\alpha+i\beta\in\sigma(x)$, kde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Pak dle Tvrzení 32(b) pro každé $t\in\mathbb{R}$ platí, že $\alpha+i\beta+it\in\sigma(x+ite)$, a tedy dle Věty 40 je

$$\begin{aligned}\alpha^2+(\beta+t)^2&=|\alpha+i(\beta+t)|^2\le\|x+ite\|^2=\|(x+ite)^\star(x+ite)\|=\|(x-ite)(x+ite)\|=\\&=\|x^2+t^2e\|\le\|x^2\|+t^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|x^2\|$, což je možné pouze v případě, že $\beta = 0$.

□

DŮSLEDEK 116. *Nechť A je komplexní algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma, se kterou A je $B^\star$-algebra.*

DŮKAZ. Nechť $A_1 = (A, \|\cdot\|_1)$ a $A_2 = (A, \|\cdot\|_2)$ jsou B*-algebry. Pak dle Věty 115(b) pro každé $x \in A$ platí, že $\|x\|_1^2 = r_{A_1}(x^\star x) = r_{A_2}(x^\star x) = \|x\|_2^2$.

□

Podle předchozího důsledku je tedy norma $|||\cdot|||$ z důkazu Tvrzení 110 jedinou možností, aby $(A_e, |||\cdot|||)$ byla B*-algebra.

DEFINICE 117. Nechť A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ nazýváme *-homomorfismus, pokud zachovává operaci *, tj. $\Phi(x^\star) = \Phi(x)^\star$ pro každé $x \in A$.

DŮSLEDEK 118. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra. Pak každý multiplikativní lineární funkcionál na A je *-homomorfismus.*

DŮKAZ. Nechť φ je multiplikativní lineární funkcionál na A. Pro $\varphi = 0$ tvrzení zjevně platí, předpokládejme tedy, že $\varphi \neq 0$. Je-li $y \in A$ samoadjungovaný, pak dle Tvrzení 68 a Věty 115(d) je $\varphi(y) \in \sigma(y) \subset \mathbb{R}$. Je-li nyní $x \in A$, pak dle Faktu 112(c) existují samoadjungované $u, v \in A$ tak, že $x = u + iv$ a $x^\star = u - iv$. Protože $\varphi(u) \in \mathbb{R}$ a $\varphi(v) \in \mathbb{R}$, dostáváme, že $\varphi(x^\star) = \varphi(u - iv) = \varphi(u) - i\varphi(v) = \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} = \overline{\varphi(u + iv)} = \overline{\varphi(x)}$.

□

Následující důsledek je vzhledem předchozímu tvrzení zobecněním Důsledku 69.

DŮSLEDEK 119. *Nechť A, B jsou komplexní $B^\star$-algebry a $\Phi\colon A \to B$ je *-homomorfismus. Pak Φ je automaticky spojitý a navíc $\|\Phi\| \leq 1$.*

DŮKAZ. Díky Větě 115(b) a Tvrzení 38 pro každé $x \in A$ platí, že $\|\Phi(x)\|^2 = r\big(\Phi(x)^\star\Phi(x)\big) = r(\Phi(x^\star x)) \leq r(x^\star x) = \|x\|^2$.

□

DŮSLEDEK 120. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a B je její $B^\star$-podalgebra. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $B^\times = A^\times \cap B$. Dále nechť $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

DŮKAZ. Nechť $x \in A^\times \cap B$. Pak $x^\star x \in A^\times$ (Tvrzení 105(b)), a tedy $0 \notin \sigma_A(x^\star x)$. Jelikož $\sigma_B(x^\star x) \subset \mathbb{R}$ (Fakt 112(a), Věta 115(d)), množina $\sigma_B(x^\star x)$ má prázdný vnitřek v $\mathbb{C}$, a tedy dle Věty 42(d) platí, že $\sigma_B(x^\star x) = \sigma_A(x^\star x)$. Odtud plyne, že $0 \notin \sigma_B(x^\star x)$, neboli $x^\star x \in B^\times$. Díky tomu je $x^{-1} = x^{-1}(x^\star)^{-1}x^\star = (x^\star x)^{-1}x^\star \in B$, takže $x \in B^\times$. Opačná inkluze je obsažena ve Faktu 18.

Dále nechť $x \in B$. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ dle předchozího. Nemají-li A a B společnou jednotku, pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku (označme ji e), neboť jinak je $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ a B je podalgebra A_e, která s ní nemá společnou jednotku. Položme $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_A(x) = \sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ dle předchozího případu a Tvrzení 36(c). Důkaz nyní dokončíme použitím Tvrzení 36(b).

□

VĚTA 121 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943)). *Nechť A je komplexní komutativní $B^\star$-algebra. Pak Gelfandova transformace je izometrický *-izomorfismus A na $C_0(\Delta(A))$.*

DŮKAZ. Nechť $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$ je Gelfandova transformace. Pak Γ je homomorfismus dle Tvrzení 92(a). Díky Důsledku 118 je $\Gamma(x^\star)(\varphi) = \varphi(x^\star) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\Gamma(x)}(\varphi)$ pro každé $x \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$, tedy Γ je *-homomorfismus. Dále dle Důsledku 89 a Věty 115(b) pro každé $x \in A$ platí, že $\|\Gamma(x)\|^2 = \big\||\Gamma(x)|\big\|^2 = \big\||\Gamma(x)|^2\big\| = \|\overline{\Gamma(x)}\Gamma(x)\| = \|\Gamma(x^\star x)\| = r(x^\star x) = \|x\|^2$. Tedy Γ je izometrie do a speciálně $\Gamma(A)$ je uzavřená podalgebra $C_0(\Delta(A))$.

Konečně, podle předchozího je $\Gamma(A)$ uzavřená na komplexní sdružování a dále odděluje body $\Delta(A)$ (Tvrzení 92(b)) a pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ existuje $x \in A$ tak, že $\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x) \neq 0$. Podle Stoneovy-Weierstraßovy věty[9] pro lokálně kompaktní prostory (Věta 15.60) tedy $\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)} = C_0(\Delta(A))$.

□

DŮSLEDEK 122. *Komplexní komutativní $B^\star$-algebra A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.*

PŘÍKLAD 123. Definujeme-li na algebře A z Příkladu 77 involuci předpisem $(a,b)^\star = (\overline{a}, \overline{b})$, pak snadno nahlédneme, že A je algebra s involucí. Dále $\|(a,b)^\star\| = \|(\overline{a}, \overline{b})\| = |\overline{a}| + |\overline{b}| = |a| + |b| = \|(a,b)\|$ pro každé $(a,b) \in A$. Konečně, Gelfandova transformace A je *-homomorfismus. Vskutku, pro $\varphi \in \Delta(A)$ je

$$\Gamma(x^\star)(\varphi) = \varphi(x^\star) = \varphi(\overline{\alpha}e_1 + \overline{\beta}e_2) = \overline{\alpha}\varphi(e_1) + \overline{\beta}\varphi(e_2) = \overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\varphi(x)} = \Gamma(x)^\star(\varphi).$$

Nicméně $\Delta(A)$ je kompaktní, přestože A nemá jednotku.

◇

DŮSLEDEK 124. *Nechť A a B jsou komplexní komutativní $B^\star$-algebry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) A a B jsou izometricky *-izomorfní.
(ii) A a B jsou algebraicky izomorfní.
(iii) Prostory $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.

DŮKAZ. Tvrzení plyne ihned z Vět 121 a 82 uvědomíme-li si, že zobrazení Φ z Tvrzení 81 je *-homomorfismus.

□

7. Spojitý kalkulus pro normální prvky B*-algeber

■■■V oddílu 3 jsme zkonstruovali holomorfní kalkulus pro prvky Banachovy algebry. V tomto oddílu ukážeme, jak struktura B*-algebry umožňuje pro normální prvek x a spojitou funkci f na spektru x zkonstruovat tzv. spojitý kalkulus, tj. prvek $f(x)$ naší B*-algebry. Tento spojitý kalkulus je přitom rozšíření kalkulu holomorfního.

TVRZENÍ 125. *Nechť A je normovaná algebra nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f, g\colon \Omega \to A$ a $t \in \Omega$. Pokud existují $f'(t)$ a $g'(t)$, pak $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.*

DŮKAZ. Dle Faktu 46 je g spojité v t. Díky spojitosti násobení v A je tedy

$$(fg)'(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(s)g(s) - f(t)g(t)}{s-t} = \lim_{s\to t} \frac{\big(f(s) - f(t)\big)g(s)}{s-t} + \lim_{s\to t} \frac{f(t)\big(g(s) - g(t)\big)}{s-t} =$$
$$= f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

□

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li A komplexní, pak pro každé $x \in A$ máme definovánu hodnotu $\exp x$ (vizte Definici 56). Protože řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ konverguje lokálně stejnoměrně pro $\alpha \in \mathbb{C}$, platí díky Větě 60(a) a (b), že

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tímto vzorcem můžeme ovšem definovat hodnotu $\exp x$ i v reálné Banachově algebře, neboť snadno nahlédneme, že řada je absolutně konvergentní.

VĚTA 126. *Nechť A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou e a $x \in A$.*
(a) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak $\exp x \exp y = \exp(x+y)$.

[9] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1885) a Marshall Harvey Stone (1937)

(b) $\exp x \in A^\times$ *a* $(\exp x)^{-1} = \exp(-x)$.
(c) Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ *položme* $f(\lambda) = \exp(\lambda x)$. *Pak* $f'(\lambda) = \exp(\lambda x)x$ *pro každé* $\lambda \in \mathbb{K}$.
(d) Je-li A algebra se spojitou involucí, pak $(\exp x)^\star = \exp x^\star$.
(e) Je-li A komplexní algebra se spojitou involucí a x je samoadjungovaný, pak $\exp(ix)$ *je unitární.*

DŮKAZ. (a) Důkaz je zcela shodný s důkazem pro případ $A = \mathbb{R}$ (vizte např. [J, Věta 183]), pouze je potřeba využít komutativitu pro platnost vzorce $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

(b) Dle (a) je $\exp x \exp(-x) = \exp(-x) \exp x = \exp(x - x) = \exp 0 = e$.

(c) Nejprve ukažme, že $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(hx)-e}{h} = x$. Vskutku,

$$\left\| \frac{\exp(hx)-e}{h} - x \right\| = \left\| \sum_{n=2}^\infty \frac{h^{n-1}x^n}{n!} \right\| \le \sum_{n=2}^\infty \frac{|h|^{n-1}\|x\|^n}{n!} \le |h| \sum_{n=2}^\infty \frac{\|x\|^n}{n!}$$

pro $|h| \le 1$. Díky (a) a spojitosti násobení je tedy

$$f'(\lambda) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(\lambda x + hx) - \exp(\lambda x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(\lambda x)\exp(hx) - \exp(\lambda x)}{h} =$$
$$= \exp(\lambda x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(hx)-e}{h} = \exp(\lambda x)x.$$

(d) Plyne snadno ze spojitosti involuce.

(e) Díky (d) a (a) je $(\exp(ix))^\star \exp(ix) = \exp(-ix)\exp(ix) = \exp(ix - ix) = \exp 0 = e$ a také $\exp(ix)(\exp(ix))^\star = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp 0 = e$.

□

VĚTA 127 (Bent Fuglede (1950), Calvin R. Putnam (1951)[10]). *Nechť A je komplexní* $B^\star$*-algebra,* $x \in A$*, a nechť* $a, b \in A$ *jsou normální a platí, že* $ax = xb$. *Pak* $a^\star x = xb^\star$.

DŮKAZ. Díky Tvrzení 110 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Indukcí snadno dokážeme, že $a^n x = xb^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$: $a^{n+1}x = a(a^n x) = a(xb^n) = (ax)b^n = (xb)b^n = xb^{n+1}$. Díky spojitosti násobení tedy pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ dostáváme, že $\exp(\lambda a)x = \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n a^n x}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{x(\lambda^n b^n)}{n!} = x\exp(\lambda b)$. Podle Věty 126(b) je tedy

$$x = \exp(-\lambda a)x\exp(\lambda b) \tag{2}$$

pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Položme

$$f(\lambda) = \exp(\lambda a^\star)x\exp(-\lambda b^\star) \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pak f je holomorfní na $\mathbb{C}$ podle Věty 126(c) a Tvrzení 125. Dále díky (2) a Větě 126(a) (zde využíváme normálnost a a b) pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí, že

$$f(\lambda) = \exp(\lambda a^\star)\big(\exp(-\overline{\lambda}a)x\exp(\overline{\lambda}b)\big)\exp(-\lambda b^\star) = \exp(\lambda a^\star - \overline{\lambda}a)x\exp(\overline{\lambda}b - \lambda b^\star).$$

Protože $\lambda a^\star - \overline{\lambda}a = i\big(i(\overline{\lambda}a - \lambda a^\star)\big)$ a prvek $i(\overline{\lambda}a - \lambda a^\star)$ je samoadjungovaný dle Faktu 112(a), je $\exp(\lambda a^\star - \overline{\lambda}a)$ unitární (Věta 126(e)), takže má normu 1 (Věta 115(c)). Analogicky obdržíme, že $\|\exp(\overline{\lambda}b - \lambda b^\star)\| = 1$, a tedy f je omezené na $\mathbb{C}$. Podle Liouvilleovy věty (Věta 50) je tudíž f konstantní. Odtud plyne, že pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ je $f(\lambda) = f(0) = x$ a dle Věty 126(b) je tak

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n (a^\star)^n x}{n!} = \exp(\lambda a^\star)x = x\exp(\lambda b^\star) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n x(b^\star)^n}{n!}.$$

Je-li nyní $\phi \in A^*$ libovolný, pak $\sum_{n=0}^\infty \frac{\phi((a^\star)^n x)}{n!}\lambda^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{\phi(x(b^\star)^n)}{n!}\lambda^n$ pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Z jednoznačnosti rozvoje holomorfní funkce v mocninnou řadu speciálně plyne, že $\phi(a^\star x) = \phi(xb^\star)$. Protože A^* odděluje body A, je nutně $a^\star x = xb^\star$.

□

[10] B. Fuglede dokázal větu pro případ $a = b$, C. R. Putnam ji zobecnil pro $a \neq b$; později se ukázalo, že obecný případ již plyne ze speciálního. S krátkým důkazem využívajícím Liouvilleovu větu přišel Marvin Rosenblum (1958).

DEFINICE 128. Nechť A je algebra a $M \subset A$. Algebrovým obalem M nazveme množinu $\operatorname{alg} M = \bigcap\{B \supset M;\ B \text{ je podalgebra } A\}$.

Algebrový obal M je tedy nejmenší podalgebra A obsahující M.

TVRZENÍ 129. *Nechť A je algebra a $M \subset A$. Pak* $\operatorname{alg} M = \operatorname{span}\{x_1x_2\cdots x_n;\ x_1,\dots,x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$.

DŮKAZ. Označme $B = \operatorname{span}\{x_1x_2\cdots x_n;\ x_1,\dots,x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$. Inkluze $B \subset \operatorname{alg} M$ je zjevná, neboť podalgebra $\operatorname{alg} M$ obsahuje všechny konečné součiny svých prvků a též jejich lineární kombinace. Na druhou stranu, $M \subset B$. Stačí tedy ukázat, že B je podalgebra, protože pak $\operatorname{alg} M \subset B$ dle definice $\operatorname{alg} M$. Dle definice je B zjevně vektorový podprostor. Nechť dále $x, y \in B$. Pak $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_1^i \cdots x_{k_i}^i$ pro nějaká $x_k^i \in M$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ a $y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_1^j \cdots y_{l_j}^j$ pro nějaká $y_l^j \in M$, $\beta_j \in \mathbb{K}$. Tedy

$$xy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j x_1^i \cdots x_{k_i}^i y_1^j \cdots y_{l_j}^j \in B.$$

□

DEFINICE 130. Nechť A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak definujeme uzavřený algebrový obal M jako $\overline{\operatorname{alg}} M = \bigcap\{B \supset M;\ B \text{ je uzavřená podalgebra } A\}$.

Je zřejmé, že uzavřený algebrový obal M je uzavřená podalgebra a je to nejmenší uzavřená podalgebra A obsahující M.

TVRZENÍ 131. *Nechť A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak* $\overline{\operatorname{alg}} M = \overline{\operatorname{alg} M}$.

DŮKAZ. Inkluze $\overline{\operatorname{alg}} M \subset \overline{\operatorname{alg} M}$ plyne z definice a Důsledku 7. Pro opačnou inkluzi si uvědomme, že $\overline{\operatorname{alg}} M$ je podalgebra obsahující M, a tedy $\operatorname{alg} M \subset \overline{\operatorname{alg}} M$. Protože $\overline{\operatorname{alg}} M$ je uzavřená množina, dostáváme, že $\overline{\operatorname{alg} M} \subset \overline{\operatorname{alg}} M$.

□

FAKT 132. *Nechť A, B jsou algebry a $M \subset A$. Pak každý algebrový homomorfismus $\Phi\colon \operatorname{alg} M \to B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M. Jsou-li A, B normované algebry, pak každý spojitý algebrový homomorfismus $\Phi\colon \overline{\operatorname{alg}} M \to B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M.*

DŮKAZ. Jsou-li $\Phi, \Psi\colon \operatorname{alg} M \to B$ algebrové homomorfismy, které mají stejné hodnoty na M, pak mají stejné hodnoty i na konečných součinech prvků z M. Dle Tvrzení 129 je tedy $\Phi = \Psi$.

Jsou-li A, B normované algebry a $\Phi, \Psi\colon \overline{\operatorname{alg}} M \to B$ jsou spojité algebrové homomorfismy, které mají stejné hodnoty na M, pak díky předchozímu případu je $\Phi = \Psi$ dle Tvrzení 131.

□

TVRZENÍ 133. *Nechť A je $B^\star$-algebra a nechť $M \subset A$ komutuje a je uzavřená na involuci. Pak $\overline{\operatorname{alg}} M$ je komutativní $B^\star$-podalgebra A.*

DŮKAZ. Díky spojitosti násobení a involuce (a Tvrzení 131) stačí dokázat, že $\operatorname{alg} M$ je komutativní a uzavřený na involuci. To je ale snadno vidět díky popisu $\operatorname{alg} M$ z Tvrzení 129.

□

Nechť K je kompaktní prostor a $f \in C(K)$. Je-li g spojitá funkce, pak se jeví zcela přirozeným definovat $g(f)$ jako funkci $g \circ f \in C(K)$. Snadno nahlédneme, že tato definice splňuje přirozené požadavky na funkční kalkulus – je-li $p(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j$ polynom na $\mathbb{K}$, pak $p \circ f = \sum_{j=0}^n c_j f^j$; konvergují-li spojité funkce g_n lokálně stejnoměrně ke g, pak díky kompaktnosti $g_n \circ f \to g \circ f$ stejnoměrně na K. Dále si uvědomme, že stačí, aby g byla definována na $\operatorname{Rng} f$, což je ovšem dle Příkladu 26(a) totéž, jako $\sigma(f)$. Pro obecnou algebru se nabízí využít Gelfandovu reprezentaci na vhodné komutativní podalgebře, k tomu je ovšem potřeba, aby Gelfandova transformace byla izomorfismem (s tím nám pomůže např. Gelfandova-Najmarkova věta).

Nechť A je komplexní $\mathrm{B}^\star$-algebra s jednotkou a $x \in A$ je normální. Položme $B = \overline{\operatorname{alg}}\{e, x, x^\star\}$. Pak B je komplexní komutativní $\mathrm{B}^\star$-podalgebra A s jednotkou e (Tvrzení 133). Množina $\Delta(B)$ je kompaktní

(Věta 76), a tedy Gelfandova transformace $\Gamma_B(x)$ je prvek $C(\Delta(B))$. Dále je $\operatorname{Rng}\Gamma_B(x) = \sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ dle Věty 88 a Důsledku 120. Je-li nyní $f \in C(\sigma_A(x))$, pak $f \circ \Gamma_B(x) \in C(\Delta(B))$. Podle Gelfandovy-Najmarkovy věty (Věta 121) je Γ_B bijekce, můžeme tedy definovat

$$f(x) = \Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x)). \tag{3}$$

Uvědomme si, že $f(x) \in B \subset A$.

Poznamenejme ještě, že dle Faktu 132 a Důsledku 118 je libovolný $\varphi \in \Delta(B)$ jednoznačně určen svojí hodnotou na x, a tedy funkce $\Gamma_B(x)\colon \Delta(B) \to \sigma_B(x)$ je dokonce homeomorfismus.

VĚTA 134 (spojitý kalkulus). *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem* (3)*, má následující vlastnosti:*

(a) Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\mathrm{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.
(b) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.
(c) $f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.
(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).
(e) Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.
(f) Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.
(g) Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
(h) Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g\restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 60.
(i) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.
(j) Je-li $u \in A$ unitární, pak $f(uxu^\star) = uf(x)u^\star$.
(k) Je-li $0 \in \sigma(x)$ a $f(0) = 0$, pak $f(x) \in \overline{\mathrm{alg}}\{x, x^\star\}$.

Nemá-li A jednotku, provedeme celou konstrukci v A_{e}. Pokud pro $f \in C(\sigma(x))$ platí, že $f(0) = 0$, pak $f(x) \in A$.

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že $\sigma(x) = \sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

(a) Protože $\Gamma_B(x)$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ a $\sigma_B(x)$, je dle Tvrzení 81 zobrazení $g \mapsto g \circ \Gamma_B(x)$ izometrickým *-izomorfismem $C(\sigma_B(x))$ na $C(\Delta(B))$. Dále dle Gelfandovy-Najmarkovy věty (Věta 121) je Γ_B^{-1} izometrický *-izomorfismus $C(\Delta(B))$ na B, odkud plyne, že Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma_B(x))$ na B.

Konečně, pro $g(t) = 1$ je $g(x) = \Gamma_B^{-1}(1) = e$, neboť Γ_B je algebrový izomorfismus, a pro $g(t) = t$ je $g(x) = \Gamma_B^{-1}(\Gamma_B(x)) = x$.

(b) Podle Důsledku 120 je $f(x) \in A^\times$, právě když $f(x) \in B^\times$, což dle (a) a Faktu 29 nastane, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. Vzorec pro f^{-1} ihned plyne z Faktu 29.

(c) plyne okamžitě z (a).

(d) Protože $f(x) \in B$, je $\sigma(f(x)) = \sigma_B(f(x))$. Díky (a), Důsledku 30 a Příkladu 26(a) je pak $\sigma_B(f(x)) = \sigma_B(\Phi(f)) = \sigma_{C(\sigma(x))}(f) = \operatorname{Rng} f = f(\sigma(x))$.

(e) Dle Důsledku 119 je Ψ spojitý. Položme $C = \mathrm{alg}\{1, Id, \overline{Id}\} \subset C(\sigma(x))$. Pak C obsahuje konstanty a odděluje body $\sigma(x)$ (neboť Id odděluje body $\sigma(x)$), a tedy dle Stoneovy-Weierstraßovy věty je $\overline{\mathrm{alg}}\{1, Id, \overline{Id}\} = \overline{C} = C(\sigma(x))$. Z (a) a Faktu 132 tedy plyne, že $\Phi = \Psi$.

(f) Dle Důsledku 120 je $\sigma_C(x) = \sigma_A(x) = \sigma_B(x)$. Dle Věty 88 je $\Gamma_C(x)$ spojitá funkce zobrazující $\Delta(C)$ na $\sigma_C(x) = \sigma_B(x)$, a tedy dle Tvrzení 81 je zobrazení $g \mapsto g \circ \Gamma_C(x)$ izometrickým *-izomorfismem $C(\sigma_B(x))$ do $C(\Delta(C))$. Dále dle Gelfandovy-Najmarkovy věty (Věta 121) je Γ_C^{-1} izometrický *-izomorfismus $C(\Delta(C))$ na C, odkud plyne, že $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ definované předpisem $\Psi(g) = \Gamma_C^{-1}(g \circ \Gamma_C(x))$ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ do C. Stejně jako v (a) dostaneme, že $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, dle (e) je tedy $\Psi = \Phi$.

(g) Nejprve si uvědomme, že B je komutativní, a tedy $f(x) \in B$ je normální. Dle (c) je $g \in C\big(\sigma(f(x))\big)$, takže $g(f(x))$ je dobře definován. Dle (f) pak je

$$g(f(x)) = \Gamma_B^{-1}\big(g \circ \Gamma_B(f(x))\big) = \Gamma_B^{-1}\Big(g \circ \Gamma_B\big(\Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x))\big)\Big) = \Gamma_B^{-1}(g \circ f \circ \Gamma_B(x)) = g \circ f(x).$$

(h) Dle Rungeovy věty ([R, Věta 13.9]) existuje posloupnost racionálních funkcí $\{R_n\}$ s póly mimo množinu Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně ke g na Ω. Speciálně tedy $R_n \to g$ stejnoměrně na $\sigma(x)$. Z pravidel kalkulu (a) a (b), resp. (a) a (c) z Věty 60, snadno obdržíme, že $\Phi(R_n \restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(R_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Použitím spojitosti Φ, resp. Věty 60(b), pak dostaneme, že $\Phi(g \restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$.

(i) Komutant $\{y\}^c$ je uzavřená podalgebra A (Tvrzení 96), která obsahuje e, x a dle Věty 127 i $x^\star$. Tedy $f(x) \in B \subset \{y\}^c$.

(j) Dle Faktu 114(e) je $uxu^\star$ normální a dle Tvrzení 32(f) je $\sigma(uxu^\star) = \sigma(x)$. Definujme zobrazení $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ předpisem $\Psi(g) = ug(x)u^\star$. Snadno nahlédneme, že Ψ je algebrový homomorfismus (multiplikativita: $\Psi(gh) = u(gh)(x)u^\star = ug(x)h(x)u^\star = ug(x)u^\star uh(x)u^\star = \Psi(g)\Psi(h)$). Dále Ψ je *-homomorfismus: $\Psi(\overline{g}) = u\overline{g}(x)u^\star = ug(x)^\star u^\star = (ug(x)u^\star)^\star = \Psi(g)^\star$. Konečně, $\Psi(1) = ueu^\star = e$ a $\Psi(Id) = uxu^\star$. Dle (e) je tedy $f(uxu^\star) = \Psi(f) = uf(x)u^\star$.

(k) Položme $L = \sigma(x) \setminus \{0\}$. Pak L je lokálně kompaktní prostor a $\sigma(x)$ je jeho Alexandrovovou kompaktifikací. Dále položme $C = \operatorname{alg}\{Id, \overline{Id}\} \subset C_0(L)$. Pak dle Stoneovy-Weierstraßovy věty pro lokálně kompaktní prostory (Věta 15.60) platí, že $f \in C_0(L) = \overline{C}$. Tedy $f(x) = \Phi(f) \in \overline{\Phi(C)} \subset \overline{\operatorname{alg}}\{x, x^\star\}$.

Předpokládejme nyní, že A nemá jednotku. Pak $0 \in \sigma(x)$ (Tvrzení 36(a)), a tedy poslední tvrzení věty plyne z (k).

□

Uvědomme si, že z (a) plyne, že jsou-li $f, g \in C(\sigma(x))$, pak $f(x)$ a $g(x)$ spolu komutují.

Nechť K je kompaktní prostor a $f \in C(K, \mathbb{C})$. Jak jsme již předeslali před Větou 134, snadno nahlédneme, že zobrazení $\Psi\colon C(\operatorname{Rng} f) \to C(K, \mathbb{C})$, $\Psi(g) = g \circ f$ je *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = 1$ a $\Psi(Id) = f$. Podle Věty 134(e) je tedy $g(f) = g \circ f$ pro libovolnou $g \in C(\operatorname{Rng} f)$. (S přihlédnutím k Příkladu 90(a) to speciálně znamená, že restrikce Gelfandovy transformace na B v definici spojitého kalkulu tedy nemá v tomto případě na výsledek vliv.)

Všimněme si, že pokud má mít spojitý kalkulus vlastnost (h) z předchozí věty, pak s přihlédnutím k Příkladu 63 nelze vybudovat spojitý kalkulus pro libovolný prvek x Banachovy algebry. Pokud navíc chceme, aby spojitý kalkulus byl *-homomorfismus, pak normálnost x je přímo nutnou podmínkou, neboť v tom případě $x = Id(x)$ komutuje s $x^\star = \overline{Id}(x)$.

VĚTA 135. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a $x \in A$.*

(a) Prvek x je samoadjungovaný, právě když je normální a $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

(b) Má-li A jednotku, pak x je unitární, právě když je normální a $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ plyne z Věty 115(d).

$\Leftarrow$ Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Položme $f(\lambda) = \lambda$ pro $\lambda \in \sigma(x)$. Podle předpokladu je $\overline{f} = f$. Podle Věty 134(a) je tedy $x = f(x) = \overline{f}(x) = f(x)^\star = x^\star$.

(b) $\Rightarrow$ plyne z Věty 115(c).

$\Leftarrow$ Položme $f(\lambda) = \lambda$ pro $\lambda \in \sigma(x)$. Podle předpokladu je $\overline{f}f = 1$. Podle Věty 134(a) je tedy $e = \overline{f}f(x) = \overline{f}(x)f(x) = x^\star x = xx^\star$.

□

8. Nezáporné prvky B*-algeber

■■■Struktura B*-algebry přirozeným způsobem připouští též uspořádání, a to pomocí kuželu nezáporných prvků. Přistupme proto k definici nezáporného prvky B*-algebry.

DEFINICE 136. Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný. Řekneme, že x je nezáporný, pokud $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Všimněme si, že dle Příkladu 26(a) je prvek $f \in C(T)$ nezáporný, právě když $f(t) \geq 0$ pro každé $t \in T$.

Z Věty 135 ihned plyne následující fakt:

FAKT 137. *Prvek x komplexní $B^\star$-algebry je nezáporný, právě když je normální a $\sigma(x) \subset [0,+\infty)$.*

TVRZENÍ 138. *Nechť A je algebra s involucí a $x, y \in A$ jsou nezáporné.*

(a) Je-li $t \geq 0$, pak tx je nezáporný.
(b) Je-li A komplexní $B^\star$-algebra, pak $x + y$ je nezáporný.
(c) Je-li A komplexní Banachova algebra a x a y spolu komutují, pak xy je nezáporný.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku.

(a) Prvek tx je samoadjungovaný (Fakt 112(b)). Dále je $\sigma(tx) = t\sigma(x)$ (Tvrzení 32(b)), a tedy $\sigma(tx) \subset [0,+\infty)$.

(b) Zjevně $x + y$ je samoadjungovaný. Položme $\alpha = \|x\|$, $\beta = \|y\|$ a $\gamma = \alpha + \beta$. Jelikož $\sigma(x) \subset [0,\alpha]$, dle Tvrzení 32(b) je $\sigma(\alpha e - x) = \alpha - \sigma(x) \subset [0,\alpha]$. Dále je $\alpha e - x$ samoadjungovaný, a tedy dle Věty 115(a) platí, že $\|\alpha e - x\| \leq \alpha$. Analogicky dostaneme, že $\|\beta e - y\| \leq \beta$. Proto je $\|\gamma e - (x + y)\| = \|(\alpha e - x) + (\beta e - y)\| \leq \gamma$. Jelikož prvek $x + y - \gamma e$ je samoadjungovaný, dostáváme odtud a z Věty 115(d), že $\sigma(x + y - \gamma e) \subset [-\gamma,\gamma]$, a tedy $\sigma(x + y) = \sigma(\gamma e + x + y - \gamma e) = \gamma + \sigma(x + y - \gamma e) \subset [0, 2\gamma]$.

(c) Plyne z Faktu 114(b) a Věty 98(a).

□

Je-li A komplexní Banachova algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný, pak x^2 je nezáporný, což plyne např. z věty o obrazu spektra (Věta 60(d)). Dále je-li A komplexní B*-algebra, pak pro normální $x \in A$ je prvek $|x| \in A$ (tj. prvek $h(x)$, kde $h(t) = |t|$ pro $t \in \mathbb{C}$) nezáporný. To plyne z Věty 134(c) a (d). Podobně, pro $x \in A$ nezáporný je $\sqrt{x}$ dobře definovaný (použijeme funkci $\sqrt{t}$ spojitou na $[0,+\infty) \supset \sigma(x)$) a nezáporný.

FAKT 139. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a $x \in A$.*

(a) Je-li x nezáporný, pak $|x| = x$.
(b) Je-li x samoadjungovaný, pak $|x|^2 = x^2$.
(c) Je-li x nezáporný, pak $(\sqrt{x}\,)^2 = x$. Navíc $\sqrt{x}$ je jediné nezáporné $y \in A$ takové, že $y^2 = x$.
(d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sqrt{x^2} = |x|$.

DŮKAZ. Položme $h(t) = |t|$, $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$, $t \in [0,+\infty)$ a $g(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0,+\infty)$.

(a) plyne z toho, že $h\restriction_{[0,+\infty)} = Id$.

(b) Z Věty 134(a) dostaneme, že $|x|^2 = h(x)h(x) = h^2(x) = Id^2(x) = x^2$.

(c) Z Věty 134(a) obdržíme, že $(\sqrt{x}\,)^2 = g(x)g(x) = g^2(x) = Id(x) = x$. Je-li nyní $y \in A$ nezáporný prvek, pro který $y^2 = x$, pak $x = f(y)$, a tedy dle Věty 134(g) platí, že $y = Id(y) = (g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(x) = \sqrt{x}$.

(d) Podle (b) nezáporný prvek $y = |x|$ splňuje $y^2 = x^2$. Dle (c) je ovšem $y = \sqrt{x^2}$.

□

TVRZENÍ 140. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra. Pak pro každý samoadjungovaný prvek $x \in A$ existuje právě jedna dvojice nezáporných prvků $x^+, x^- \in A$ taková, že $x = x^+ - x^-$ a $x^-x^+ = x^+x^- = 0$. Navíc $x^+ + x^- = |x|$.*

DŮKAZ. Položme $f(t) = \max\{t,0\}$ a $g(t) = -\min\{t,0\}$ pro $t \in \mathbb{R}$. Pak $f - g = Id$ a $fg = 0$. Protože x je samoadjungovaný, jsou f i g definovány na $\sigma(x)$ (Věta 115(d)), můžeme tedy položit $x^+ = f(x)$ a $x^- = g(x)$. Pak $x^+ - x^- = f(x) - g(x) = (f - g)(x) = x$ a $x^+x^- = (fg)(x) = 0 = (gf)(x) = x^-x^+$. Dále $x^+ + x^- = f(x) + g(x) = (f + g)(x) = |x|$.

Nechť nyní $u, v \in A$ jsou nezáporné takové, že $x = u - v$ a $uv = vu = 0$. Pak $u + v$ je nezáporný (Tvrzení 138) a $(u+v)^2 = u^2 + v^2 = (u-v)^2 = x^2$. Dle Faktu 139(d) a (a) je tedy $u + v = |x| = x^+ + x^-$. Sečtením této rovnosti s rovností $u - v = x^+ - x^-$ obdržíme, že $u = x^+$, odečtením pak $v = x^-$.

□

VĚTA 141 (I. Kaplansky (1953)). *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a $x \in A$. Pak $x^\star x$ i $xx^\star$ jsou nezáporné.*

DŮKAZ. Prvek $x^\star x$ je samoadjungovaný, takže $x^\star x = y^+ - y^-$, kde $y^+, y^- \in A$ jsou nezáporné a $y^- y^+ = 0$ (Tvrzení 140). Stačí tedy ukázat, že $y^- = 0$. Položme $z = xy^-$. Pak

$$-z^\star z = -y^- x^\star x y^- = -y^-(y^+ - y^-)y^- = (y^-)^3, \tag{4}$$

takže $-z^\star z$ je nezáporný (např. dle Věty 60(d)). Dále existují samoadjungované $u, v \in A$ takové, že $z = u + iv$ (Fakt 112(c)). Pak

$$z^\star z + zz^\star = (u - iv)(u + iv) + (u + iv)(u - iv) = u^2 + iuv - ivu + v^2 + u^2 - iuv + ivu + v^2 = 2u^2 + 2v^2,$$

tedy $z^\star z = 2u^2 + 2v^2 - zz^\star$. Podle Tvrzení 32(e) je ovšem $\sigma(-zz^\star) \subset \sigma(-z^\star z) \cup \{0\}$, takže i $-zz^\star$ je nezáporný, což dle Tvrzení 138 znamená, že $z^\star z$ je nezáporný. Dohromady tak dostáváme, že $\sigma(z^\star z) = -\sigma(-z^\star z) \subset (-\infty, 0]$ a zároveň $\sigma(z^\star z) \subset [0, +\infty)$, neboli $\sigma(z^\star z) = \{0\}$. Z rovnosti (4) pak plyne, že $\sigma((y^-)^3) = \{0\}$, takže dle Tvrzení 32(c) je $\sigma(y^-) = \{0\}$. Konečně, dle Věty 115(a) je $\|y^-\| = r(y^-) = 0$, čili $y^- = 0$.

Pro nezápornost $xx^\star$ stačí použít předchozí část na prvek $x^\star$.

□

Všimněme si, že je-li A je algebra s involucí a s jednotkou a $x \in A$ je nezáporný, pak prvek $e + x$ je invertovatelný. Vskutku, dle Tvrzení 32(b) je $\sigma(e + x) = 1 + \sigma(x) \subset [1, +\infty)$, a tedy $0 \in \rho(e + x)$. Poznamenejme, že toto pozorování spolu s předchozí větou úzce souvisejí s reprezentační Větou 151, vizte též poznámku pod čarou na straně 188.

Pro libovolné komplexní číslo z platí, že $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = \alpha|z|$, kde $|\alpha| = 1$. První vyjádření má analogii ve Faktu 112(c), druhé vyjádření má jistou analogii v následujícím rozkladu (vizte též Větu 115(c), případně Větu 126(e)): Je-li x prvek B*-algebry s jednotkou A a $x = ua$, kde $a \in A$ je nezáporný a $u \in A$ je unitární, pak toto vyjádření nazýváme polárním rozkladem x. Je-li A komplexní, pak je přirozené očekávat, že $a = |x|$. K tomu je ovšem potřeba, aby x byl normální. Uvědomíme-li si však, že pro komplexní z je $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$, pak místo $|x|$ lze použít výraz $\sqrt{x^\star x}$, který je díky Větě 141 definován pro libovolné $x \in A$. Tato volba je ve skutečnosti jedinou možností: Je-li $x = ua$ polární rozklad, pak $a = \sqrt{x^\star x}$. Vskutku, díky samoadjungovanosti a je $x^\star x = a^\star u^\star ua = a^\star ea = a^2$, tedy $a = \sqrt{x^\star x}$ dle Faktu 139(c).

Pro x invertovatelný dostaneme polární rozklad snadno:

VĚTA 142 (polární rozklad). *Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou a $x \in A$ je invertovatelný. Pak existují unitární $u \in A$ a nezáporný $a \in A$ tak, že $x = ua$. Tento rozklad je určený jednoznačně.*

DŮKAZ. Prvek $x^\star x$ je nezáporný (Věta 141) a invertovatelný (Tvrzení 105(b)). Prvek $a = \sqrt{x^\star x}$ je tedy také nezáporný a navíc je invertovatelný (využijeme toho, že $0 \notin \sigma(x^\star x)$ a Větu 134(b)). Nyní stačí položit $u = xa^{-1}$. Pak s pomocí samoadjungovanosti a a Faktu 139(c) dostáváme, že $u^\star u = (a^{-1})^\star x^\star x a^{-1} = a^{-1}a^2a^{-1} = e$. Protože u je invertovatelný (je to součin invertovatelných prvků), plyne odtud, že je unitární.

Jednoznačnost a jsme již vysvětlili. Jednoznačnost u pak plyne z toho, že a je invertovatelný.

□

Pro obecné x polární rozklad nemusí existovat:

PŘÍKLAD 143. Nechť T je posun doprava na ℓ_2, tj. $Tx = (0, x_1, x_2, \dots)$ pro $x = (x_k) \in \ell_2$. Pak T nemá polární rozklad. Vskutku, je-li $T = UA$ polární rozklad, pak $A = \sqrt{T^\star T}$. Snadno spočteme, že $T^\star$ je posun doleva, tj. $T^\star x = (x_2, x_3, x_4, \dots)$. Tedy $T^\star T = I$, takže $A = \sqrt{I} = I$ dle Faktu 139(c). Odtud dostáváme, že $T = U$, což je spor, neboť T není unitární: operátor $TT^\star$ nuluje první souřadnici, takže $TT^\star \neq I$.

◇

9. Reprezentace B*-algeber

Věta 151 je centrálním výsledkem teorie B*-algeber, neboť ukazuje, že lze každou B*-algebru realizovat jako podalgebru prostoru $\mathcal{L}(H)$ pro vhodný Hilbertův prostor H. Klíčovým obratem je takzvaná GNS-konstrukce, která umožňuje vytvořit reprezentaci pro každý pozitivní funkcionál na naší B*-algebře.

DEFINICE 144. Je-li A komplexní B*-alegbra, píšeme pro prvky $x, y \in A$ vztah $x \leq y$, pokud $y - x$ je pozitivní. Pokud je $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ lineární zobrazení, pak φ se nazývá pozitivní funkcionál, pokud $\varphi(x^*x) \geq 0$ pro každý prvek $x \in A$. Pokud A má jednotku e, pak φ je stav, pokud je pozitivní a $\varphi(e) = 1$.

Poznamenejme, že dle výsledků oddílu 8 je lineární forma na B*-algebře A pozitivní, pokud má nezáporné hodnoty na všech pozitivních prvcích A.

LEMMA 145. *Nechť A je komplexní B*-alegbra s jednotkou e a $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ je pozitivní funkcionál. Pak $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ pro každé $x \in A$.*

DŮKAZ. Je-li $x \in A$ samoadjungovaný, lze dle Věty 140 psát $x = x^+ - x^-$, kde x^+, x^- jsou nezáporné prvky. Pak $\varphi(x) = \varphi(x^+) - \varphi(x^-) \in \mathbb{R}$. Obecný prvek $x \in A$ lze psát jako $x = u + iv$, kde u, v jsou samoadjungované. Pak $x^* = u - iv$, a tedy

$$\varphi(x^*) = \varphi(u) - i\varphi(v) = \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} = \overline{\varphi(x)}.$$

Tím je tvrzení ověřeno.

□

LEMMA 146. *Nechť A je komplexní B*-alegbra s jednotkou e a $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ je lineární forma. Pak φ je pozitivní právě tehdy, když $\varphi \in A^*$ a $\varphi(e) = \|\varphi\|$.*

DŮKAZ. Nechť φ je pozitivní. Pro $x \in A$ nalezneme $t \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ splňující $t\varphi(x) \geq 0$. Pišme $tx = u + iv$, kde $u, v \in A$ jsou samoadjungované (vizte Fakt 112(c)). Pak $\|u\| = \|\frac{1}{2}(tx + (tx)^*)\| \leq \|x\|$ a platí

$$u \leq \|u\|e \leq \|x\|e.$$

(Vskutku, prvek $\|u\|e - u$ je samoadjungovaný a jeho spektrum splňuje $\sigma(\|u\|e - u) = \|u\| - \sigma(u) \subset \|u\| - [-\|u\|, \|u\|] \subset [0, +\infty)$.) Díky pozitivitě φ tak máme

$$\|x\|\varphi(e) - \varphi(u) = \varphi(\|x\|e - u) \geq 0.$$

Proto

$$|\varphi(x)| = \varphi tx = \overline{\varphi(tx)} = \varphi(\bar{t}x^*) = \varphi\left(\frac{1}{2}(tx + \bar{t}x^*)\right) = \varphi(u) \leq \varphi(e)\|x\|.$$

Tedy $\varphi \in A^*$ a $\|\varphi\| \leq \varphi(e)$. Zjevně platí $\|\varphi\| \leq \varphi(e)$, a první část je tedy dokázána.

Na druhou stranu předpokládejme, že $\varphi \in A^*$ splňuje $\|\varphi\| = \varphi(e)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\|\varphi\| = \varphi(e) = 1$. Je-li $x \in A$ pozitivní prvek, pišme $\varphi(x) = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, přičemž chceme dokázat, že $a \geq 0$ a $b = 0$. Jelikož $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$, lze zvolit $s > 0$ dostatečně malé takové, aby platilo

$$\sigma(e - sx) = \{1 - s\lambda;\ \lambda \in \sigma(x)\} \subset [0, 1].$$

Pak $\|e - sx\| = \rho(e - sx) \leq 1$, a tedy

$$1 - sa \leq |1 - s(a + ib)| = |\varphi(e - sx)| \leq 1.$$

Proto $a \geq 0$.

Nyní uvažujeme prvky $y_n = x - ae + inbe$, $n \in \mathbb{N}$ a počítáme

$$\|y_n\|^2 = \|y_n^* y_n\| = \|(x - ae)^2 + n^2b^2e\| \leq \|x - ae\|^2 + n^2b^2.$$

Odtud

$$(n^2 + 2n + 1)b^2 = |\varphi(y_n)|^2 \leq \|x - ae\|^2 + n^2b^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proto platí $b = 0$.

□

LEMMA 147. *Nechť φ je positivní funkcionál na $B^\star$-algebře s jednotkou. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $x, y \in A$ platí $|\varphi(y^*x)|^2 \leq \varphi(x^*x)\varphi(y^*y)$.
(b) Pro každé $x, y \in A$ platí $\varphi(y^*x^*xy) \leq \|x\|^2\varphi(y^*y)$.

DŮKAZ. (a) Pro každé $x, y \in A$ a $t \in \mathbb{C}$ platí

$$0 \leq \varphi\left((tx+y)^*(tx+y)\right) = |t|^2\varphi(x^*x) + \bar{t}\varphi(x^*y) + t\varphi(y^*x) + \varphi(y^*y). \tag{5}$$

Jelikož $\overline{\varphi(ty^*x)} = \varphi((ty^*x)^*) = \bar{t}\varphi(x^*y)$, máme

$$-2\,\mathrm{Re}\,(t\varphi(y^*x)) \leq |t|^2\varphi(x^*x) + \varphi(y^*y), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Pokud $\varphi(x^*x) = 0$, předcházející nerovnost dává $\varphi(y^*x) = 0$. Tedy nerovnost v (a) platí. Pokud $\varphi(x^*x) \neq 0$, zvolíme $s \in \mathbb{T}$ splňující $s\varphi(y^*x) = |\varphi(y^*x)|$ a položíme $t = -s\varphi(x^*x)^{-\frac{1}{2}}\varphi(y^*y)^{\frac{1}{2}}$. Pak nerovnost (5) dává

$$\begin{aligned} 2|\varphi(y^*x)|\varphi(x^*x)^{-\frac{1}{2}}\varphi(y^*y)^{\frac{1}{2}} &= -2\,\mathrm{Re}\left(-s\varphi(x^*x)^{-\frac{1}{2}}\varphi(y^*y)^{\frac{1}{2}}\varphi(y^*x)\right) \\ &\leq \varphi(x^*x)^{-1}\varphi(y^*y)\varphi(x^*x) + \varphi(y^*y). \end{aligned}$$

Úpravou obdržíme nerovnost

$$|\varphi(y^*x)| \leq \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}\varphi(y^*y)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Uvažujme funkcionál $\psi(z) = \varphi(y^*zy)$, $z \in A$. Pak pro $z \in A$ platí $\psi(z^*z) = \varphi(y^*z^*zy) = \varphi((zy)^*(zy)) \geq 0$, a tedy ψ je pozitivní. Tedy $\|\psi\| = \psi(e) = \phi(y^*y)$. Dostáváme tak

$$\varphi(y^*x^*xy) = \psi(x^*x) \leq \|\psi\|\|x^*x\| = \varphi(y^*y)\|x\|^2.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

Následující věta obsahuje slibovanou Gelfandovu-Naimarkovu-Segalovu konstrukci. Zobrazení π ve Větě 148 je reprezentace A v $\mathcal{L}(H)$.

VĚTA 148 (GNS-konstrukce). *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou a $\varphi \in A^*$ je stav.*

(a) Množina $N = \{x \in A;\ \varphi(x^*x) = 0\}$ je uzavřený levý ideál v A.
(b) Zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon A/N \times A/N \to \mathbb{C}$ dané jako

$$\langle [x], [y] \rangle = \varphi(y^*x), \quad [x], [y] \in A/N,$$

je dobře definované a určuje na A/N skalární součin. Je-li H zúplnění prostoru $(A/N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, jde o Hilbertův prostor.
(c) Pro každé $x \in A$ je zobrazení $\pi(x) \colon A/N \to A/N$ dané vzorcem $\pi(x)([y]) = [xy]$, $[y] \in A/N$ dobře definovaný lineární operátor na A/N splňující $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Lze ho tak jednoznačně rozšířit na $\pi(x) \in \mathcal{L}(H)$.
(d) Zobrazení $\pi \colon A \to \mathcal{L}(H)$ dané bodem (c) je *-homomorfismus splňující $\pi(e) = Id_H$.
(e) Vektor $\xi = [e]$ je cyklický vektor o normě 1 (tj. množina $\{\pi(x)\xi;\ x \in A\}$ je hustá v H).

DŮKAZ. (a) Uzavřenost množiny N ihned plyne ze spojitosti φ. Zjevně je N uzavřené na násobení skalárem. Pokud $x, y \in N$, pak

$$\begin{aligned} |\varphi\left((x+y)^*(x+y)\right)| &= |\varphi(x^*x) + \varphi(y^*y) + \varphi(x^*y) + \varphi(y^*x)| \leq |\varphi(x^*y)| + |\varphi(y^*x)| \\ &\leq 2\sqrt{\varphi(x^*x)\varphi(y^*y)} = 0. \end{aligned}$$

Tedy N je podprostor A.

Pokud $x \in A$ a $y \in N$, pak dle Lemmatu 147(b) platí

$$\varphi((xy)^*(xy)) = \varphi(y^*x^*xy) \leq \|x\|^2\varphi(y^*y) = 0,$$

tj. $xy \in N$. Tedy N je levý ideál.

(b) Máme-li $[x], [y] \in A/N$ a $x_0 \in [x]$, $y_0 \in [y]$, je $x_0 - x, y_0 - y \in N$, a tedy

$$\begin{aligned} |\varphi(y_0^* x_0 - y^* x)| &= |\varphi\left(y_0^*(x_0 - x) + (y_0 - y)^* x\right)| \leq |\varphi(y_0^*(x_0 - x))| + |\varphi((y_0 - y)^* x)| \\ &\leq \sqrt{\varphi((x_0 - x)^*(x_0 - x))\varphi(y_0^* y_0)} + \sqrt{\varphi((y_0 - y)^*(y_0 - y))\varphi(x^* x)} = 0. \end{aligned}$$

Proto je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dobře definované zobrazení na $A/N \times A/N$.

Ukážeme, že splňuje podmínky Definice 1.80. Je-li $[y] \in A/N$, pak pro $[x_1], [x_2] \in A/N$ a $t_1, t_2 \in C$ platí

$$\begin{aligned} \langle t_1[x_1] + t_2[x_2], [y] \rangle &= \langle [t_1 x_1 + t_2 x_2], [y] \rangle = \varphi(y^*(t_1 x_1 + t_2 x_2)) \\ &= t_1 \varphi(y^* x_1) + t_2 \varphi(y^* x_2) = t_1 \langle [x_1], [y] \rangle + t_2 \langle [x_2], [y] \rangle. \end{aligned}$$

Tedy je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lineární v první souřadnici.

Dále platí

$$\langle [x], [y] \rangle = \varphi(y^* x) = \overline{\varphi((y^* x)^*)} = \overline{\varphi(x^* y)} = \overline{\langle [y], [x] \rangle}.$$

Pro $[x] \in A/N$ platí $\langle [x], [x] \rangle = \varphi(x^* x) \geq 0$ a pokud $0 = \langle [x], [x] \rangle = \varphi(x^* x)$, pak $x \in N$, a tedy $[x] = [0] = 0 \in A/N$.

Zúplnění prostoru $(A/N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je tak Hilbertův prostor dle Věty 2.28.

(c) Pro $x \in A$ a $[y] \in A/N$ je zobrazení $\pi(x)$ dobře definováno. Vskutku, je-li $y_0 \in [y]$, je $y - y_0 \in N$, a tedy dle (a) platí $xy_0 - xy = x(y_0 - y) \in N$. Linearita zobrazení $\pi(x)$ na A/N je zřejmá. Abychom ověřili jeho spojitost, máme z Lemmatu 147(b) odhad

$$\begin{aligned} \|\pi(x)[y]\|^2 &= \|[xy]\|^2 = \langle xy, xy \rangle = \varphi(y^* x^* x y) \leq \|x\|^2 \varphi(y^* y) = \|x\|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 \|[y]\|^2, \quad [y] \in A/N. \end{aligned}$$

Tedy $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ a tvrzení (c) je ověřeno.

(d) Zobrazení π je zjevně lineární a díky (c) má normu nejvýše 1. Dále pro $x_1, x_2 \in A$ a $[y] \in A/N$ platí

$$\pi(x_1 x_2)([y]) = [x_1 x_2 y] = [x_1(x_2 y)] = \pi(x_1)([x_2 y)] = \pi(x_1)\left(\pi(x_2)([y])\right).$$

Tedy π je multiplikativní.

Nakonec ověřme, že zachovává involuci. K tomuto účelu vezměme $x \in A$ a $[y], [z] \in A/N$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \pi(x^*)[y], [z] \rangle &= \langle [x^* y], [z] \rangle = \varphi(z^*(x^* y)) = \varphi(((xz)^* y)) = \langle y, [xz] \rangle \\ &= \langle [y], \pi(x)[z] \rangle = \langle (\pi(x))^*[y], [z] \rangle. \end{aligned}$$

Tedy $\pi(x^*) = (\pi(x))^*$.

Konečně máme $\pi(e)([y]) = [ey] = [y]$, $[y] \in A/N$. Tedy $\pi(e) = Id$.

(e) Vektor $\xi = [e]$ splňuje $\|\xi\|^2 = \langle [e], [e] \rangle = \varphi(e^* e) = 1$. Tedy $\xi \in S_H$. Navíc pro $[y] \in A/N$ platí $\pi(b)(\xi) = \pi(b)([e]) = [be] = [b]$. Tedy množina $\{\pi(x)\xi;\ x \in A\}$ obsahuje A/N, a tedy je hustá v H.

□

LEMMA 149. *Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou, $x \in A$ a $\lambda \in \sigma(x)$. Pak existuje stav $\varphi \in A^*$ splňující $\varphi(x) = t$.*

DŮKAZ. Pro každá dvě komplexní čísla $s, t \in \mathbb{C}$ platí $s\lambda + t \in \sigma(sx + te)$. Tedy $|s\lambda + t| \leq \|sx + te\|$. Formule $\psi(sx + te) = s\lambda + t,. s, t \in \mathbb{C}$ tak dobře definuje lineární formu na span$\{x, e\}$. Z předchozí úvahy dokonce máme $|\psi(sx + te)| = |s\lambda + t| \leq \|sx + te\|$, tedy ψ má normu 1. Navíc $\psi(e) = 1$ a $\psi(x) = \lambda$. Dle Věty 2.4 existuje $\varphi \in A^*$ splňující $\|vp\| = \|\psi\| = 1$ a $\varphi = \psi$ na span$\{x, e\}$. Pak ale $\varphi(e) = 1$, a tedy φ je stav dle Lemmatu 146. Jelikož $\phi(x) = \psi(x) = \lambda$, je důkaz dokončen.

□

TVRZENÍ 150. *Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou a $x \in A$ je nenulový. Pak existuje Hilbertův prostor H a *-homomorfismus $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ takové, že $\pi(e) = Id$, $\|\pi\| \leq 1$ a $\|\pi(x)\| = \|x\|$.*

DŮKAZ. Použijeme Lemma 149 k nalezení stavu $\varphi \in A^*$ splňujícího $\varphi(x^* x) = \|x\|^2$. (Prvek $x^* x$ totiž dle Věty 115 splňuje $r(x^* x) = \|x\|^2$ a $\sigma(x^* x) \subset [0, +\infty)$. Číslo $\|x\|^2$ je tak ve spektru $x^* x$ a Lemma 149 zaručí existenci stavu $\varphi \in A^*$ splňujícího $\varphi(x^* x) = \|x\|^2$.)

Nechť H a $\pi\colon A \to \mathcal{L}(H)$ jsou dány GNS-konstrukcí z Věty 148. Pak nerovnost

$$\|x\|^2 = \varphi(x^*x) = \langle [x], [x] \rangle = \langle \pi(x)([e]), [x] \rangle \le \|\pi(x)\| \|[e]\| \|[x]\| = \|\pi(x)\| (\varphi(x^*x))^{\frac{1}{2}} = \|\pi(x)\| \|x\|$$

dává požadovanou identitu $\|\pi(x)\| = \|x\|$.

□

VĚTA 151 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943), I. Kaplansky (1953)[11]). *Každou komplexní $B^\star$-algebru lze izometrickým *-izomorfismem vnořit do $\mathcal{L}(H)$ pro vhodný komplexní Hilbertův prostor H. Je-li A separabilní, lze H zvolit separabilní..*

DŮKAZ. Bez újme na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku (vizte Větu110). Označme $I = A \setminus \{0\}$. Uvažujme pro každý vektor $i \in A \setminus \{0\}$ Hilbertův prostor H_i a GNS-reprezentaci $\pi_i\colon A \to \mathcal{L}(H_i)$ splňující $\|\pi_i(i)\| = \|i\|$ (vizte Větu 150). Požadovaný Hilbertův prostor H obdržíme jako direktní sumu všech prostorů $\{H_i;\ i \in I\}$. Přesněji

$$H = \left\{ (u_i) \in \prod_{i \in I} H_i;\ \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 < +\infty \right\}$$

se skalárním součinem

$$\langle (u_i), (v_i) \rangle_H = \sum_{i \in I} \langle u_i, v_i \rangle_{H_i}, \quad (u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \in H.$$

Analogicky jako pro prostor $\ell_2(\Gamma)$ se rutinně ověří, že $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ je vskutku Hilbertův prostor. (Například to, že je skalární součin na H dobře definovaný plyne z odhadů

$$\sum_{i \in I} |\langle u_i, v_i \rangle_{H_i}| \le \sum_{i \in I} \|u_i\|_{H_i} \|v_i\|_{H_i} \le \sqrt{\sum_{i \in I} \|u_i\|^2} \sqrt{\sum_{i \in I} \|v_i\|^2}.)$$

Uvažujme zobrazení $\pi\colon A \to \mathcal{L}(H)$ definované jako

$$\pi(x)((u_i)_{i \in I}) = (\pi_i(x)(u_i))_{i \in I}, \quad x \in A, (u_i)_{i \in I} \in H.$$

Pak π je *-homomorfizmus. Vskutku, linearita je zřejmá. Máme-li prvky $x, y \in A$, pak pro $(u_i) \in H$ platí

$$\pi(x)(\pi(y)(u_i)) = \pi(x)(\pi_i(y)(u_i)) = (\pi_i(x)\pi_i(y)(u_i)) = (\pi_i(xy)(u_i)) = \pi(xy)(u_i).$$

Podobně pro involuci máme pro $x \in A$ a $(u_i), (v_i) \in H$ rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \pi(x^*)(u_i), (v_i) \rangle &= \langle (\pi_i(x^*)(u_i)), (v_i) \rangle = \sum_{i \in I} \langle \pi_i(x^*) u_i, v_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle (\pi_i(x))^*(u_i), v_i \rangle \\ &= \sum_{i \in I} \langle u_i, \pi_i(x)(v_i) \rangle = \langle (u_i), \pi(x)(v_i) \rangle = \langle (\pi(x))^*(u_i), (v_i) \rangle \end{aligned}$$

vztah $\pi(x^*) = (\pi(x))^*$.

Jelikož

$$|\langle \pi(x)(u_i), (v_i) \rangle| \le \sum_{i \in I} |\langle \pi_i(x)(u_i), v_i \rangle| \le \sum_{i \in I} \|u_i\| \|v_i\| \le \|u_i\| \|v_i\|, \quad (u_i), (v_i) \in H,$$

platí $\|\pi(x)\| \le 1$.

Konečně pro $x \in A \setminus \{0\}$ uvažujme reprezentaci π_i, kde $\|\pi_i(x)\| = \|x\|$. Pak pro $\varepsilon \in (0, \|x\|)$ existuje vektor $h_i \in B_{H_i}$ splňující $\|\pi_i(x)(h_i)\| \ge \|x\| - \varepsilon$. Vektor

$$h = (h_j)_{j \in I} = \begin{cases} h_i, & i = j, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

splňuje

$$\|\pi(x)(h)\|^2 = \|(\pi_j(x)(h_j))\|^2 = \|\pi_i(x)(h_i)\|^2 > (\|x\| - \varepsilon)^2.$$

Tedy $\|\pi(x)\| \ge \|x\|$ a π je izometrie.

[11]Viz též poznámku pod čarou na str. 188.

Pokud A je separabilní, uvažujme spočetnou hustou množinu $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v A. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ opět vyrobíme GNS-konstrukcí reprezentaci $\pi_n \colon A \to \mathcal{L}(H_n)$ s cyklickým vektorem ξ_n splňující $\|\pi_n(a_n)\| = \|a_n\|$. Prostory H_n jsou pak separabilní, neboť dle Věty 148(d) je množina $\{\pi_n(a_m)\xi_n;\ m \in \mathbb{N}\}$ hustá v H_n. Uvažujme separabilní Hilbertův prostor H jako direktní součet prostorů H_n, $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť π je zobrazení definované po složkách jako výše. Pak π je izometrie, neboť pro $x \in A$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x - a_n\| < \varepsilon$. Pak

$$\|\pi(x)\| \geq \|\pi_n(x)\| \geq \|\pi_n(a_n)\| - \|\pi_n(x - a_n)\| \geq \|a_n\| - \varepsilon \geq \|x\| - 2\varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

Kapitola 10

Spojité lineární operátory na Hilbertových prostorech

■■■Základní motivací pro zavedení B*-algeber byl prostor spojitých operátorů na Hilbertově prostoru. Podíváme se na některé specifické vlastnosti tohoto prostoru, zejména na jemnější pohled na strukturu spektra spojitého operátoru. Jedním z hlavních výsledků prvního oddílu je pak detailní analýza kompaktních samoadjungovaných operátorů.

1. Základní vlastnosti

V této kapitole bude symbol $^\perp$ vždy značit ortogonální doplněk (a nikoli anihilátor).

VĚTA 1. *Jsou-li H_1, H_2 Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, pak platí, že*

(a) $\operatorname{Ker} T^\star = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^\star)^\perp$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^\star)^\perp$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^\star} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

DŮKAZ. Tvrzení (b) dostaneme z ekvivalencí

$$x \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; Tx = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall y \in H_2\colon \langle Tx, y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall y \in H_2\colon \langle x, T^\star y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (\operatorname{Rng} T^\star)^\perp.$$

Tvrzení (a) plyne z (b) a z Věty 9.102(a). Tvrzení (c), resp. (d) dostaneme z (a), resp. (b) pomocí Důsledku 1.101.

□

DEFINICE 2. Nechť X, Y a Z jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $B\colon X \times Y \to Z$ se nazývá bilineární, pokud je lineární v první i ve druhé souřadnici, tj. zobrazení $x \mapsto B(x, y)$ je lineární pro každé $y \in Y$ a $y \mapsto B(x, y)$ je lineární pro každé $x \in X$. Zobrazení B se nazývá seskvilineární[1], pokud je lineární v první souřadnici a sdruženě lineární ve druhé souřadnici. V případě, že $Z = \mathbb{K}$, se B nazývá bilineární, resp. seskvilineární forma.

Uvědomme si, že v reálném případě jsou seskvilineární zobrazení bilineární. Kanonickým příkladem seskvilineární formy je skalární součin. Pro seskvilineární zobrazení platí analogie polarizačního vzorce pro skalární součin (Tvrzení 1.87):

TVRZENÍ 3 (polarizační vzorec). *Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$ a $S\colon X \times X \to Y$ je seskvilineární zobrazení. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že*

$$S(x, y) + S(y, x) = \frac{1}{2}\big(S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y)\big).$$

Je-li $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$S(x, y) = \frac{1}{4}\big(S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y) + iS(x + iy, x + iy) - iS(x - iy, x - iy)\big).$$

[1]Tento poněkud diskutabilní termín pochází z latinského *sesqui-*, což znamená „jedna a půl-“.

DŮKAZ. Pro libovolná $x, y \in X$ je

$$S(x+y, x+y) = S(x, x+y) + S(y, x+y) = S(x,x) + S(x,y) + S(y,x) + S(y,y).$$

Dosadíme-li místo y postupně $-y$, iy a $-iy$, dostaneme

$$\begin{aligned} S(x-y, x-y) &= S(x,x) - S(x,y) - S(y,x) + S(y,y), \\ S(x+iy, x+iy) &= S(x,x) + S(x,iy) + S(iy,x) + S(iy,iy) = \\ &= S(x,x) - iS(x,y) + iS(y,x) + S(y,y), \\ S(x-iy, x-iy) &= S(x,x) + S(x,-iy) + S(-iy,x) + S(-iy,-iy) = \\ &= S(x,x) + iS(x,y) - iS(y,x) + S(y,y). \end{aligned}$$

Odtud již oba vzorce snadno plynou.

□

Poznamenejme, že v reálném případě nelze obecně vyjádřit hodnotu $S(x, y)$ pouze pomocí hodnot na diagonále. Proto také následující Věta 4 níže platí obecně pouze v komplexním případě. Uvědomme si též, že v reálném případě je skalární součin navíc symetrický, proto platí polarizační vzorec z Tvrzení 1.87.

Je-li X prostor se skalárním součinem a $T: X \to X$ je lineární operátor, pak funkce $S(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ je zjevně seskvilineární forma na X. Je-li X navíc Hilbertův a T je spojitý a samoadjungovaný, pak $S(y,x) = \overline{\langle x, Ty\rangle} = \overline{\langle T^\star x, y\rangle} = \overline{S(x,y)}$ pro všechna $x, y \in X$. Následující věta je tedy okamžitým důsledkem polarizačních vzorců z Tvrzení 3 a Lemmatu 1.93.

VĚTA 4. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $T: X \to X$ je lineární operátor. Nechť dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

- *X je komplexní.*
- *X je Hilbertův a T je spojitý a samoadjungovaný.*

Jestliže $\langle Tx, x\rangle = 0$ pro každé $x \in X$, pak $T = 0$.

Předchozí věta obecně v reálném případě neplatí. Stačí vzít $X = \mathbb{R}^2$ a $T \in \mathcal{L}(X)$ reprezentovaný maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

DŮSLEDEK 5. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $S, T: X \to X$ jsou lineární operátory. Nechť dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

- *X je komplexní.*
- *X je Hilbertův a S, T jsou spojité a samoadjungované.*

Pokud $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ pro každé $x \in X$, pak $S = T$.

DŮKAZ. Aplikujeme předchozí větu na operátor $S - T$.

□

DEFINICE 6. Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $B: X \times Y \to Z$ je bilineární, resp. seskvilineární zobrazení. Řekneme, že B je omezené, pokud $\sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|B(x,y)\| < +\infty$. V tom případě klademe $\|B\| = \sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|B(x,y)\|$.

Snadno nahlédneme, že je-li $B: X \times Y \to Z$ omezené bilineární, resp. seskvilineární zobrazení, pak $\|B(x,y)\| \le \|B\|\|x\|\|y\|$ pro každé $x \in X$, $y \in Y$.

Následující tvrzení ukazuje, že skalární součin na Hilbertově prostoru je v jistém smyslu univerzální seskvilineární forma. (Připomeňme si též tvrzení z lineární algebry, podle kterého každá bilineární forma na $\mathbb{R}^n$ je tvaru $B(x,y) = x^{\mathrm{T}} A y$, kde A je čtvercová matice.)

TVRZENÍ 7. *Nechť H je Hilbertův prostor. Je-li S omezená seskvilineární forma na H, pak existuje jednoznačně určený $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $S(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ pro všechna $x, y \in H$. Navíc platí, že*

$\|T\| = \|S\|$.

$$\begin{tikzcd}
H \times H \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "{(T,Id)}"'] & & \mathbb{K} \\
& H \times H \arrow[ur, "{\langle\cdot,\cdot\rangle}"'] &
\end{tikzcd}$$

DŮKAZ. Pro pevné $y \in H$ je zobrazení $x \mapsto S(x, y)$ prvek H^*. Podle Věty 1.120 existuje právě jedno $U(y) \in H$ takové, že $S(x, y) = \langle x, U(y)\rangle$ pro každé $x \in H$. Pak U je lineární operátor, neboť pro $y, z \in H$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\langle x, U(\alpha y)\rangle = S(x, \alpha y) = \overline{\alpha} S(x, y) = \overline{\alpha}\langle x, U(y)\rangle = \langle x, \alpha U(y)\rangle$ a

$$\langle x, U(y + z)\rangle = S(x, y + z) = S(x, y) + S(x, z) = \langle x, U(y)\rangle + \langle x, U(z)\rangle = \langle x, U(y) + U(z)\rangle$$

pro každé $x \in H$, takže $U(\alpha y) = \alpha U(y)$ a $U(y + z) = U(y) + U(z)$ dle Lemmatu 1.93.

Dále $\|Uy\|^2 = \langle Uy, Uy\rangle = S(Uy, y) \le \|S\|\|Uy\|\|y\|$ pro každé $y \in H$, odkud plyne, že U je spojitý a $\|U\| \le \|S\|$. Na druhou stranu, $|S(x, y)| = |\langle x, Uy\rangle| \le \|x\|\|U\|\|y\| \le \|U\|$ pro každé $x, y \in B_H$, a tedy $\|S\| = \|U\|$.

Konečně, položíme-li $T = U^\star$, pak pro všechna $x, y \in H$ je $S(x, y) = \langle x, Uy\rangle = \langle U^\star x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ a $\|T\| = \|U\| = \|S\|$. Jednoznačnost plyne ihned z Lemmatu 1.93.

□

FAKT 8. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak* $\operatorname{Ker} T^\star \circ T = \operatorname{Ker} T$.

DŮKAZ. Inkluze $\supset$ je zřejmá. Opačně, je-li $x \in \operatorname{Ker} T^\star \circ T$, pak $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^\star \circ Tx, x\rangle = 0$.

□

VĚTA 9. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je normální.
(ii) $\langle T^\star x, T^\star y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$.
(iii) $\|T^\star x\| = \|Tx\|$ pro každé $x \in H$.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Pro $x, y \in H$ je $\langle T^\star x, T^\star y\rangle = \langle TT^\star x, y\rangle = \langle T^\star Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$.

(ii)⇒(iii) je triviální.

(iii)⇒(i) Pro každé $x \in H$ je $\langle TT^\star x, x\rangle = \langle T^\star x, T^\star x\rangle = \|T^\star x\|^2 = \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^\star Tx, x\rangle$. Protože operátory $TT^\star$ i $T^\star T$ jsou samoadjungované, můžeme použít Důsledek 5.

□

DEFINICE 10. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme přibližným vlastním číslem operátoru T, pokud existuje posloupnost $\{x_n\} \subset S_X$ taková, že $(\lambda I - T)x_n \to 0$. Množina všech přibližných vlastních čísel operátoru T se nazývá přibližné bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

Z Tvrzení 1.60(a) okamžitě plyne následující fakt:

FAKT 11. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\lambda \in \mathbb{K}$ je přibližným vlastním číslem T, právě když $\lambda I - T$ není izomorfismus do.*

Odtud ihned dostáváme inkluze $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \subset \sigma(T)$.

Následující pozorování je doplňkem Tvrzení 9.32(f):

TVRZENÍ 12. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Je-li $S \in \mathcal{L}(X)$ invertovatelný, pak $\sigma_{\mathrm{p}}(STS^{-1}) = \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a $\sigma_{\mathrm{ap}}(STS^{-1}) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.*

DŮKAZ. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ je $S(\lambda I - T)S^{-1} = \lambda I - STS^{-1}$, tedy $\lambda I - T$ je prostý, resp. izomorfismus do, právě když $\lambda I - STS^{-1}$ je prostý, resp. izomorfismus do (Tvrzení 1.60(a)).

□

DEFINICE 13. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $T \in \mathcal{L}(X)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x\rangle;\ x \in S_X\}$ se nazývá numerický range operátoru T.

FAKT 14. *Nechť X je normovaný lineární prostor takový, že* $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$ *(tj. X je buď komplexní, nebo reálný dimenze alespoň 2). Pak S_X je křivkově souvislá.*

DŮKAZ. Nechť $x, y \in S_X$ jsou dva různé body jednotkové sféry. Předpokládejme nejprve, že $y \neq -x$. Pak $ty + (1-t)x \neq 0$ pro každé $t \in [0,1]$ (v opačném případě je $ty = (t-1)x$, a tedy $t = \|ty\| = \|(t-1)x\| = 1-t$, tj. $t = \frac{1}{2}$ a $y = -x$). Tedy můžeme definovat spojitou křivku $\varphi\colon [0,1] \to S_X$ předpisem

$$\varphi(t) = \frac{ty + (1-t)x}{\|ty + (1-t)x\|}.$$

Pro tuto křivku je $\varphi(0) = x$ a $\varphi(1) = y$.

Pokud $y = -x$, pak z předpokladu o X plyne existence bodu $z \in S_X \setminus \{x, -x\}$. Dle předchozího existují spojité křivky $\varphi_1, \varphi_2\colon [0,1] \to S_X$ takové, že $\varphi_1(0) = x$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0) = z$ a $\varphi_2(1) = -x$. Pak $\varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ je spojitá křivka s obrazem v S_X a koncovými body x a $-x$.

□

TVRZENÍ 15. *Nechť X je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathscr{L}(X)$.*

(a) $N_{\alpha I + \beta T} = \alpha + \beta N_T$ *pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

(b) Je-li $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$*, pak množina N_T je křivkově souvislá.*

(c) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$.

(d) $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \subset \overline{N_T}$*. Je-li X Hilbertův, pak $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \subset N_T$, a tedy $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.*

DŮKAZ. (a) plyne z rovnosti $\langle(\alpha I + \beta T)x, x\rangle = \alpha\|x\|^2 + \beta\langle Tx, x\rangle$ platné pro každé $x \in X$.

(b) Funkce $x \mapsto \langle Tx, x\rangle$ je spojitá (Tvrzení 1.84(b)), a tedy N_T je spojitý obraz křivkově souvislé množiny S_X (Fakt 14).

(c) Pro $x \in S_X$ je $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|$. Dále je-li $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, pak existuje $x \in S_X$ takový, že $Tx = \lambda x$. Potom $\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \lambda$, a tedy $\lambda \in N_T$.

(d) Nechť $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ a nechť $\{x_n\} \subset S_X$ je taková, že $\lambda x_n - Tx_n \to 0$. Pak $|\lambda - \langle Tx_n, x_n\rangle| = |\langle \lambda x_n - Tx_n, x_n\rangle| \leq \|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$, a tedy $\lambda \in \overline{N_T}$.

Je-li nyní X Hilbertův a $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$, pak $\lambda I - T$ je izomorfismus do (Fakt 11), který není na. Existuje tedy $x \in S_X$ takový, že $x \perp \operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ (Věta 1.100). Speciálně je $0 = \langle \lambda x - Tx, x\rangle = \lambda - \langle Tx, x\rangle$, neboli $\langle Tx, x\rangle = \lambda$.

□

FAKT 16. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou a involucí, $x \in A$ je normální a $\lambda \in \mathbb{K}$. Pak $\lambda e - x$ je normální.*

DŮKAZ. Platí, že $(\lambda e - x)^\star = \overline{\lambda} e - x^\star$. Protože prvky $\{e, x, x^\star\}$ spolu vzájemně komutují, komutují spolu i $(\lambda e - x)^\star$ a $\lambda e - x$.

□

VĚTA 17. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathscr{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^\star$.

(b) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.*

(c) T je invertovatelný právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.

(d) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

(e) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem $T^\star$ příslušným vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.

(f) Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak $\operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

DŮKAZ. (a) plyne z Věty 9.

(b) plyne z (a) a Věty 1(c).

(c) $\Rightarrow$ plyne z Tvrzení 1.60(a).

$\Leftarrow$ Dle Tvrzení 1.60(a), (c) je T izomorfismus do a $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený. Dle (b) je tedy T na, takže je invertovatelný.

(d) Nechť $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. Dle Faktu 16 je $\lambda I - T$ normální, tedy dle (b) je $\mathrm{Rng}(\lambda I - T)$ hustý v H. Zároveň ale $\lambda I - T$ není na, tedy $\mathrm{Rng}(\lambda I - T)$ není uzavřený, takže $\lambda I - T$ není izomorfismus do. Dle Faktu 11 je tedy $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

(e) Je-li $\lambda \in \mathbb{K}$, pak $\lambda I - T$ je normální (Fakt 16) a $(\lambda I - T)^\star = \overline{\lambda} I - T^\star$, tvrzení tedy plyne z (a).

(f) Nechť $x_1 \in \mathrm{Ker}(\lambda_1 I - T)$ a $x_2 \in \mathrm{Ker}(\lambda_2 I - T)$. Pak díky (e) dostáváme, že

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle T x_1, x_2\rangle = \langle x_1, T^\star x_2\rangle = \langle x_1, \overline{\lambda_2} x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Tedy $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

□

VĚTA 18. *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathscr{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:*

(a) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(b) $N_T \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, pak $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$ a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, a tedy číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

(c) $r(T) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in N_T\} = \|T\|$.

Všimněme si, že na rozdíl od Věty 9.115(a) dostáváme, že $r(T) = \|T\|$ i v reálném případě.

DŮKAZ. Pro $x, y \in H$ je $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle$, ekvivalence z tvrzení věty tedy plyne z Lemmatu 1.93.

(a) Pro každé $x \in H$ je dle předchozího $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$.

(b) Ukážeme nejprve, že $\|T\| = M = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in N_T\}$. Víme, že $|\lambda| \le \|T\|$ pro každé $\lambda \in N_T$ (Tvrzení 15(c)). Na druhou stranu, pro $x, y \in H$ položme $S(x,y) = \langle Tx, y\rangle$. Pak S je seskvilineární forma, pro kterou navíc $S(y,x) = \overline{S(x,y)}$ (zde využijeme úvodní charakterizaci), takže dle Tvrzení 3 pro každé $x, y \in H$ platí, že

$$\mathrm{Re}\, S(x,y) = \frac{1}{4}\big(S(x+y, x+y) - S(x-y, x-y)\big).$$

Nechť nyní $x \in S_H$. Je-li $Tx = 0$, pak $\|Tx\| \le M$. Jinak položme $y = \frac{Tx}{\|Tx\|} \in S_H$. Pak díky polarizačnímu vzorci výše a rovnoběžníkovému pravidlu (Tvrzení 1.86) dostáváme, že

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \langle Tx, y\rangle = S(x,y) = |\mathrm{Re}\, S(x,y)| \le \frac{1}{4}\big(|S(x+y, x+y)| + |S(x-y, x-y)|\big) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 \left|S\big(\tfrac{x+y}{\|x+y\|}, \tfrac{x+y}{\|x+y\|}\big)\right| + \|x-y\|^2 \left|S\big(\tfrac{x-y}{\|x-y\|}, \tfrac{x-y}{\|x-y\|}\big)\right|\right) \le \\ &\le \frac{1}{4} M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2} M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = M,\end{aligned}$$

přičemž nerovnost mezi prvním a třetím řádkem platí i v případě, že $x + y = 0$ nebo $x - y = 0$.

Inkluze $N_T \subset \mathbb{R}$ plyne z (a), rovnost $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\} = \max\{-m_T, M_T\}$ plyne z předchozího a inkluze $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$ plyne z Tvrzení 15(d).

Položme $R = T - m_T I$. Pak R je samoadjungovaný a $N_R = N_T - m_T$ (Tvrzení 15(a)). Odtud plyne, že $M_R = M_T - m_T \ge 0$ a $m_R = m_T - m_T = 0$. Podle již dokázaného (aplikovaného na R) je tedy $\|R\| = M_R$. Nechť $\{x_n\} \subset S_H$ je posloupnost taková, že $\langle Rx_n, x_n\rangle \to M_R = \|R\|$. Operátor $\|R\| I - R$ je samoadjungovaný a

$$\big\|\|R\|x_n - Rx_n\big\|^2 = \|R\|^2\|x_n\|^2 + \|Rx_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle Rx_n, \|R\|x_n\rangle \le 2\|R\|^2 - 2\|R\|\langle Rx_n, x_n\rangle \to 0$$

(využili jsme (a) pro R), neboli $(\|R\| I - R)x_n \to 0$. Tedy $M_R = \|R\| \in \sigma_{ap}(R)$. Dle Tvrzení 9.32(b) je pak $M_T = m_T + M_R \in m_T + \sigma(R) = \sigma(T)$.

Konečně, $N_{-T} = -N_T$ (Tvrzení 15(a)), takže podle již dokázaného a Tvrzení 9.32(b) je $m_T = -M_{-T} \in -\sigma(-T) = \sigma(T)$.

(c) plyne ihned z (b).

□

TVRZENÍ 19. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathscr{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $N_T \subset \mathbb{R}$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je ve Větě 18.

$\Leftarrow$ Pro každé $x \in H \setminus \{0\}$ je $\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2 \langle T\big(\frac{x}{\|x\|}\big), \frac{x}{\|x\|}\rangle \in \mathbb{R}$, a tedy $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle T^\star x, x\rangle$. Dle Důsledku 5 je tak $T = T^\star$.

□

DŮSLEDEK 20. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Je-li T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$, právě když $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$. Je-li H komplexní, pak T je nezáporný (prvek algebry $\mathcal{L}(H)$), právě když $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$.*

DŮKAZ. První část plyne z Věty 18(b). Druhá část plyne z první části v kombinaci s Tvrzením 19.

□

Je-li $P \in \mathcal{L}(H)$ projekce, pak $P^\star$ je také projekce: $P^\star P^\star = (PP)^\star = P^\star$.

VĚTA 21. *Nechť H je Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) P je samoadjungovaná.
(ii) P je normální.
(iii) P je ortogonální.
(iv) P je nezáporná.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) je triviální.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Dle Vět 17(a) a 1(a) je $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^\star = (\operatorname{Rng} P)^\perp$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Podle Věty 1.78(a) je $\operatorname{Rng} P^\star$ uzavřený. Podle Vět 1(a), (d) a 1.99 tedy platí, že $\operatorname{Ker} P^\star = (\operatorname{Rng} P)^\perp = \operatorname{Ker} P$ a $\operatorname{Rng} P^\star = (\operatorname{Ker} P)^\perp = \operatorname{Rng} P$. Nechť $x \in H$. Pak $x - Px \in \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^\star$ a $Px \in \operatorname{Rng} P = \operatorname{Rng} P^\star$. Tedy $0 = P^\star(x - Px) = P^\star x - P^\star Px = P^\star x - Px$, neboli $P^\star x = Px$.

(i)$\Leftrightarrow$(iv) plyne z Příkladu 4.18.

□

TVRZENÍ 22. *Nechť H je Hilbertův prostor, $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak* $\operatorname{Rng} S \perp \operatorname{Rng} T$ *právě tehdy, když $ST = 0$.*

DŮKAZ. Tvrzení ihned plyne z toho, že pro libovolná $x, y \in H$ platí, že $\langle Sx, Ty\rangle = \langle x, S^\star Ty\rangle = \langle x, STy\rangle$.

□

Po operátory mezi Hilbertovými prostory drobně rozšíříme definici unitárního prvku algebry $\mathcal{L}(H)$.

DEFINICE 23. Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se nazývá unitární, pokud $T^\star \circ T = I_{H_1}$ a $T \circ T^\star = I_{H_2}$, neboli $T^{-1} = T^\star$.

VĚTA 24. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je unitární.
(ii) T je na a $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in H_1$.
(iii) T je izometrie na.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) $T \circ T^\star = I_{H_2}$, a tedy T je na. Dále $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^\star \circ Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle$ pro všechna $x, y \in H_1$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť $x \in H_1$. Pro libovolné $y \in H_1$ je $\langle T^\star \circ Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, a tedy $T^\star \circ Tx = x$, neboli $T^\star \circ T = I_{H_1}$. Dále nechť $u \in H_2$. Pak existuje $x \in H_1$ takové, že $u = Tx$. Podle předchozího je $T^\star u = T^\star \circ Tx = x$, a tedy $T \circ T^\star u = Tx = u$. To znamená, že $T \circ T^\star = I_{H_2}$.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) plyne z Důsledku 1.88.

□

LEMMA 25. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Nechť Y je uzavřený podprostor H_2 takový, že* $\operatorname{Rng} T \subset Y$ *a $S \in \mathcal{L}(H_1, Y)$ je definovaný jako $Sx = Tx$ pro $x \in H_1$. Pak $S^\star = T^\star\restriction_Y$.*

DŮKAZ. Pro každé $x \in H_1$ a $y \in Y$ je $\langle S^\star y, x\rangle = \langle y, Sx\rangle = \langle y, Tx\rangle = \langle T^\star y, x\rangle$, tvrzení tedy plyne z Lemmatu 1.93.

□

Ve zbytku tohoto oddílu se podíváme blíže na strukturu kompaktních operátorů na Hilbertově prostoru.

VĚTA 26. *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{F}(H)}$.*

DŮKAZ. $\supset$ plyne z Věty 4.12(b) a (c).

$\subset$ Dle Důsledku 1.114 má prostor H ortonormální bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Pro každou konečnou $F \subset \Gamma$ položme $P_F x = \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ pro $x \in H$. Dle Důsledku 1.115 a Věty 1.99 je $\|P_F\| \le 1$. Nechť $K \in \mathcal{K}(H)$ a $\varepsilon > 0$. Díky totální omezenosti $K(B_H)$ existuje konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť $\{y_1, \dots, y_n\}$ množiny $K(B_H)$. Dle Věty 1.113 pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ existuje konečná množina $F_j \subset \Gamma$ taková, že $\|y_j - P_H y_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $H \subset \Gamma$ je konečná a $H \supset F_j$. Položme $F = \bigcup_{j=1}^n F_j$. Pak $P_F \circ K \in \mathcal{F}(H)$ a tvrdíme, že $\|K - P_F \circ K\| \le \varepsilon$. Vskutku, nechť $x \in B_H$ a nechť $j \in \{1, \dots, n\}$ je takové, že $\|Kx - y_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$\|Kx - P_F(Kx)\| \le \|Kx - y_j\| + \|y_j - P_F y_j\| + \|P_F y_j - P_F(Kx)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|P_F\|\|y_j - Kx\| < \varepsilon.$$

□

Uvědomme si, že jsou-li $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ a x v normovaném lineárním prostoru, pak pro zobecněnou řadu platí, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$, právě když $\lim_{F\in\mathcal{F}}\sum_{\gamma\in F} x_\gamma = x$, kde $\mathcal{F}$ je množina konečných podmnožin Γ usměrněná pomocí inkluze. Tedy např. zobecněné řady komutují se spojitými lineárními i sdruženě lineárními zobrazeními.

Následující příklad srovnejte též s Příklady 1.59 a 4.29.

PŘÍKLAD 27. Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory nad $\mathbb{K}$, $\{u_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální systém v H_1 a $\{v_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální systém v H_2. Nechť $(\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{K}^\Gamma$. Chceme-li, aby byla vzorcem

$$T(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\lambda_\gamma\langle x, u_\gamma\rangle v_\gamma \tag{1}$$

hodnota $T(x)$ definována pro každé $x \in H_1$, pak je nezbytné, aby $(\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$. Vskutku, není-li tomu tak, pak existuje prostá posloupnost $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ taková, že $|\lambda_{\gamma_n}| \ge 2^n$. Pak $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}u_{\gamma_n} \in H_1$ (řada konverguje dokonce absolutně), ale řada v (1) nekonverguje, neboť $\|\lambda_{\gamma_n}\langle x, u_{\gamma_n}\rangle v_{\gamma_n}\| = |\lambda_{\gamma_n}|\frac{1}{2^n} \ge 1$, a tedy není splněna nutná podmínka konvergence z Věty 1.33(d). Na druhou stranu, je-li $(\lambda_\gamma) \in \ell_\infty(\Gamma)$, pak vzorec (1) definuje spojitý lineární operátor z H_1 do H_2, pro který $\|T\| = \|(\lambda_\gamma)\|_\infty$: Pro $x \in H_1$ je $\|Tx\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\lambda_\gamma|^2|\langle x, u_\gamma\rangle|^2 \le \|(\lambda_\gamma)\|_\infty^2\|x\|^2$ (Věta 1.113 a Besselova nerovnost (Věta 1.112)). Opačně, $\|T\| \ge \sup_\gamma\|Tu_\gamma\| = \sup_\gamma\|\lambda_\gamma v_\gamma\| = \sup_\gamma|\lambda_\gamma| = \|(\lambda_\gamma)\|_\infty$. Navíc položíme-li $R((\lambda_\gamma)) = T$ ze vzorce (1), pak R je lineární izometrie z $\ell_\infty(\Gamma)$ do $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (Tvrzení 1.35).

Je-li $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ a $\{u_j\}$, $\{v_j\}$ jsou báze H_1, resp. H_2, pak operátor T je vzhledem těmto bázím reprezentovaný diagonální maticí s čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ na diagonále. V obecném případě lze tento operátor chápat jako operátor reprezentovaný diagonální „nekonečnou maticí“. Proto se tomuto operátoru někdy říká diagonální operátor.

Operátor T má následující vlastnosti:

(a) Pro každé $y \in H_2$ je

$$T^\star y = \sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{\lambda_\gamma}\langle y, v_\gamma\rangle u_\gamma.$$

Dále je $T^\star(Tx) = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\lambda_\gamma|^2\langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma$ pro $x \in H_1$ a $T(T^\star y) = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\lambda_\gamma|^2\langle y, v_\gamma\rangle v_\gamma$ pro $y \in H_2$.

(b) T je kompaktní právě tehdy, když $(\lambda_\gamma) \in c_0(\Gamma)$.

Nechť dále $H_1 = H_2$ a $v_\gamma = u_\gamma$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.

(c) T je normální; T je samoadjungovaný, právě když $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.

(d) R je izometrický $\star$-homomorfismus B*-algebry $\ell_\infty(\Gamma)$ do $\mathcal{L}(H_1)$.

Nechť dále $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální báze H_1.

(e) $\sigma_p(T) = \{\lambda_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ a $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}}$. Dále pro $\lambda \in \sigma_p(T)$ je $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \overline{\operatorname{span}}\{u_\gamma;\ \gamma \in A\}$, kde $A = \{\gamma \in \Gamma;\ \lambda_\gamma = \lambda\}$, a speciálně $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ je rovna počtu prvků množiny A (je to 0, přirozené číslo, nebo ∞).

(f) Je-li H_1 komplexní a $f \in C(\sigma(T))$, pak pro každé $x \in H_1$ je

$$f(T)x = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\lambda_\gamma)\langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma.$$

Podívejme se nyní blíže na avizované vlastnosti.

(a) Položme $S(y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{\lambda_\gamma}\langle y, v_\gamma\rangle u_\gamma$ pro $y \in H_2$. Podle toho, co bylo řečeno výše, je $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$. Podle poznámky před tímto příkladem je pak

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \big\langle \lambda_\gamma\langle x, u_\gamma\rangle v_\gamma, y\big\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma\langle x, u_\gamma\rangle\langle v_\gamma, y\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma}\big\langle x, \overline{\lambda_\gamma\langle v_\gamma, y\rangle} u_\gamma\big\rangle = \\ &= \Big\langle x, \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{\lambda_\gamma}\langle y, v_\gamma\rangle u_\gamma\Big\rangle = \langle x, Sy\rangle\end{aligned}$$

pro každé $x \in H_1$ a $y \in H_2$. Tedy $T^\star = S$.

Dále je $T^\star v_\alpha = \overline{\lambda_\alpha} u_\alpha$ pro každé $\alpha \in \Gamma$, a tedy pro každé $x \in H_1$ je $T^\star(Tx) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma\langle x, u_\gamma\rangle T^\star v_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\lambda_\gamma|^2\langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma$. Vzorec pro $T(T^\star y)$ obdržíme analogicky.

(b) Označme $c_{00}(\Gamma)$ podprostor $\ell_\infty(\Gamma)$ sestávající z vektorů s pouze konečně mnoha nenulovými souřadnicemi. Zjevně je $R(c_{00}(\Gamma)) \subset \mathcal{F}(H_1, H_2)$, odkud dle Věty 4.12(b), (c) plyne, že $R(c_0(\Gamma)) \subset \overline{\mathcal{F}(H_1, H_2)} \subset \mathcal{K}(H_1, H_2)$.

Na druhou stranu, je-li $(\lambda_\gamma) \in \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $A = \{\gamma \in \Gamma;\ |\lambda_\gamma| \geq \varepsilon\}$ je nekonečná. Pak pro $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ platí, že $\|Tu_\alpha - Tu_\beta\|^2 = \|\lambda_\alpha v_\alpha - \lambda_\beta v_\beta\| = |\lambda_\alpha|^2 + |\lambda_\beta|^2 \geq 2\varepsilon^2$ (Fakt 1.109). Tedy množina $\{Tu_\gamma;\ \gamma \in A\}$ není totálně omezená, což znamená, že T není kompaktní.

(c) Normálnost T plyne ze vzorců v (a). Je-li $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, pak $T^\star = T$ opět dle vzorce z (a). Na druhou stranu, je-li T samoadjungovaný, pak pro každé $\gamma \in \Gamma$ je $\lambda_\gamma u_\gamma = Tu_\gamma = T^\star u_\gamma = \overline{\lambda_\gamma} u_\gamma$, a tedy $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}$.

(d) Zachování involuce plyne ze vzorce v (a). Nechť $p = (\lambda_\gamma)$, $q = (\mu_\gamma) \in \ell_\infty(\Gamma)$. Pak $\langle R(q)x, u_\alpha\rangle = \mu_\alpha\langle x, u_\alpha\rangle$ pro každé $x \in H_1$ a $\alpha \in \Gamma$. Tedy

$$\big(R(p)R(q)\big)x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma\langle R(q)x, u_\gamma\rangle u_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma\mu_\gamma\langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma = R(pq)x$$

pro každé $x \in H_1$. To znamená, že R je multiplikativní.

(e) Nechť $\lambda \in \mathbb{K}$. Protože $\{u_\gamma\}$ je ortonormální báze H_1, platí, že $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$, právě když $\lambda\langle x, u_\gamma\rangle = \langle Tx, u_\gamma\rangle = \lambda_\gamma\langle x, u_\gamma\rangle$ pro všechna $\gamma \in \Gamma$, tj. právě když $\langle x, u_\gamma\rangle = 0$ pro všechna $\gamma \in \Gamma \setminus A$, kde $A = \{\gamma \in \Gamma;\ \lambda_\gamma = \lambda\}$. Odtud plyne, že $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \overline{\operatorname{span}}\{u_\gamma;\ \gamma \in A\}$. To znamená, že $\lambda \in \sigma_p(T)$, právě když $\lambda = \lambda_\gamma$ pro nějaké $\gamma \in \Gamma$.

Konečně, $\overline{\{\lambda_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}} \subset \sigma(T)$, jelikož $\sigma(T)$ je uzavřená množina (Věta 9.40). Na druhou stranu, je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{\{\lambda_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}}$ pak $p = (\lambda - \lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$ je invertovatelný, a tedy $R(p) = \lambda I - T$ je invertovatelný v $\mathcal{L}(H_1)$, neboť $R(1) = I$. To znamená, že $\lambda \notin \sigma(T)$.

(f) Definujme $\Psi\colon C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H_1)$ předpisem $\Psi(f)x = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\lambda_\gamma)\langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma$. Dle (e) a začátku tohoto příkladu je toto zobrazení dobře definováno a $\Psi(f) = R\big((f(\lambda_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}\big)$. Díky (e) též snadno nahlédneme, že zobrazení $S\colon C(\sigma(T)) \to \ell_\infty(\Gamma)$, $S(f) = (f(\lambda_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ je izometrický *-homomorfismus, což spolu s (d) implikuje, že $\Psi = R \circ S$ je izometrický *-homomorfismus. Zjevně $\Psi(Id) = T$ a díky Větě 1.113 je $\Psi(1) = I$. Dle Věty 9.134(e) je tak Ψ spojitý kalkulus pro operátor T.

◇

Chceme-li si udělat představu o chování konkrétního operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$, je užitečné si uvědomit, že je-li Y vlastní prostor operátoru T příslušný vlastnímu číslu λ, pak restrikce T na Y je dilatace ($T\restriction_Y = \lambda Id_Y$). Jak uvidíme níže, v případě kompaktních operátorů na Hilbertově prostoru můžeme tímto způsobem analyzovat celý operátor T.

DEFINICE 28. Nechť A je množina a $f\colon A \to A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f, pokud $f(B) \subset B$, tj. $f\restriction_B\colon B \to B$.

Je-li X topologický prostor, $f\colon X \to X$ spojité a $A \subset X$ invariantní vůči f, pak $\overline{A}$ je též invariantní vůči f, neboť $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{A}$. Dále ihned vidíme, že je-li X normovaný lineární prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $Y \subset X$ je nějaký vlastní prostor operátoru T, pak Y je invariantní vůči T. [2]

FAKT 29. *Nechť H je Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ a $M \subset H$ je množina vlastních vektorů T (ne nutně všech).*

(a) Je-li $Y \subset H$ invariantní vůči T, pak $Y^\perp$ je invariantní vůči $T^\star$.
(b) $\overline{\operatorname{span}}\, M$ je invariantní vůči T.
(c) Je-li T normální, pak $\overline{\operatorname{span}}\, M$ i $(\overline{\operatorname{span}}\, M)^\perp$ jsou invariantní vůči T i $T^\star$.
(d) Nechť $Y \subset H$ je uzavřený podprostor invariantní vůči T i $T^\star$. Pak $(T\restriction_Y)^\star = T^\star\restriction_Y$. Je-li tedy T samoadjungovaný, resp. normální, pak $T\restriction_Y \in \mathcal{L}(Y)$ je samoadjungovaný, resp. normální.

DŮKAZ. (a) Nechť $z \in Y^\perp$. Pro každé $x \in Y$ je $\langle T^\star z, x\rangle = \langle z, Tx\rangle = 0$, neboť $Tx \in Y$. Tedy $T^\star z \in Y^\perp$.

(b) Dle poznámky za definicí stačí ukázat, že $\operatorname{span} M$ je invariantní vůči T. Nechť $x_1, \dots, x_n \in M$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Je-li λ_j vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru x_j, $j = 1, \dots, n$, pak $T\big(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\big) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j x_j \in \operatorname{span} M$.

(c) Dle Věty 17(e) je M také množina vlastních vektorů operátoru $T^\star$. Dle (b) je tedy $\overline{\operatorname{span}}\, M$ invariantní vůči T i $T^\star$ a dle (a) je pak $(\overline{\operatorname{span}}\, M)^\perp$ invariantní vůči $T^\star$ i $T^{\star\star} = T$.

(d) Pro všechna $x, y \in Y$ je $\langle T\restriction_Y x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle = \langle x, T^\star\restriction_Y y\rangle$. Díky jednoznačnosti je tedy $(T\restriction_Y)^\star = T^\star\restriction_Y$.

□

VĚTA 30 (spektrální rozklad normálního kompaktního operátoru; D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907)). *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$. Dále předpokládejme, že*

- *T je samoadjungovaný, nebo*
- *H je komplexní a T je normální.*

Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T. Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\operatorname{Rng} T}$ a pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n.

Je-li $\{\lambda_n\}_{n=1}^M$, $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ prostá posloupnost všech vlastních čísel T a P_n je ortogonální projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda_n I - T)$*, pak*

$$I = \sum_{n=1}^{M} P_n,$$

kde řada konverguje bodově bezpodmínečně (tj. $x = \sum_{n=1}^M P_n x$ bezpodmínečně pro každé $x \in H$) a

$$T = \sum_{n=1}^{M} \lambda_n P_n,$$

kde řada konverguje bezpodmínečně v prostoru $\mathcal{L}(H)$.

[2] Otázka, jestli každý operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ pro komplexní nekonečněrozměrný separabilní Hilbertův prostor H má nějaký netriviální invariantní podprostor, je jedním z největších stále (2019) otevřených problémů funkcionální analýzy. Zdá se, že poprvé se o tomto problému začalo hovořit kolem roku 1950.

DŮKAZ. Každý vlastní prostor operátoru T má nějakou ortonormální bázi (Důsledek 1.114). Nechť B je sjednocením těchto bází. Označme $Y = \overline{\operatorname{span}} B$ a $S = T\restriction_{Y^\perp}$. Dle Faktu 29(c), (d) je $S \in \mathcal{K}(Y^\perp)$ samoadjungovaný, resp. normální. Dále S nemá žádný vlastní vektor, neboť vlastní vektory S jsou též vlastními vektory T, podprostor Y obsahuje všechny vlastní vektory T a $Y \cap Y^\perp = \{0\}$. Podle Důsledku 4.25 to znamená, že $r(S) = 0$, takže $S = 0$ dle Věty 18(c), resp. 9.115(a). Tedy $Y^\perp = \{0\}$, neboť každý nenulový vektor v $Y^\perp$ je vlastním vektorem S. Podle Věty 17(f) je B ortonormální systém a podle Věty 1.113 je tak B ortonormální bází H.

Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho díky Větám 4.27 a 4.23. Je-li nyní $x \in H$, pak z Věty 1.36(c) a Tvrzení 1.35 plyne, že $x = z + \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n$, kde $z \in \operatorname{Ker} T$. Tedy $Tx = Tz + \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle Te_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$. Konečně, $T\big(\frac{e_n}{\lambda_n}\big) = e_n$, a tedy $\overline{\operatorname{span}}\{e_n\} \subset \overline{\operatorname{Rng} T}$. Opačná inkluze plyne z předchozího vzorce a Věta 1.113 tudíž implikuje, že $\{e_n\}$ je ortonormální bází $\overline{\operatorname{Rng} T}$.

Dokažme nyní druhou část věty. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda_1 = 0$ a P_1 je projekce na $\operatorname{Ker} T$. Dále nechť $\{e_k\}_{k=1}^N$ je prostá posloupnost vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům taková, že existuje rostoucí posloupnost $\{k_n\}_{n=2}^M \subset \mathbb{N}$ tak, že $\{e_j\}_{j=k_n}^{k_{n+1}-1}$ je báze $\operatorname{Ker}(\lambda_n I - T)$. Nechť $x \in H$. Dle předchozího odstavce je $x = P_1 x + \sum_{k=1}^N \langle x, e_k\rangle e_k$. Podle Důsledku 1.115 je $P_n x = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} \langle x, e_j\rangle e_j$ pro $n > 1$. Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=2}^M P_n x$ je tedy podposloupností posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{k=1}^N \langle x, e_k\rangle e_k$. Odtud plyne, že $x = \sum_{n=1}^M P_n x$.

Dále ukažme, že v případě, kdy $M = \infty$, řada $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n P_n$ konverguje. Pro $p, q \in \mathbb{N}$, $1 < p \le q$ a $x \in H$ je díky Faktu 1.109 a Besselově nerovnosti (Věta 1.112)

$$\left\| \sum_{n=p}^q \lambda_n P_n x \right\|^2 = \left\| \sum_{n=p}^q \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} \lambda_n \langle x, e_j\rangle e_j \right\|^2 = \sum_{n=p}^q \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_j\rangle|^2 \le \max_{p\le n\le q} |\lambda_n|^2 \|x\|^2,$$

takže $\big\|\sum_{n=p}^q \lambda_n P_n\big\| \le \max_{p\le n\le q} |\lambda_n|$. Jelikož $\lambda_n \to 0$ (Věta 4.27), plyne odtud snadno, že řada $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n P_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku v $\mathcal{L}(H)$, a tedy je konvergentní.

Konečně, nechť $x \in H$. Pro každý index n je $T(P_n x) = \lambda_n P_n x$, a tedy $Tx = T\big(\sum_{n=1}^M P_n x\big) = \sum_{n=1}^M T(P_n x) = \sum_{n=1}^M \lambda_n P_n x = \big(\sum_{n=1}^M \lambda_n P_n\big)x$.

Bezpodmínečná konvergence řad plyne z toho, že tvrzení zjevně nezávisí na permutaci posloupnosti $\{\lambda_n\}$. □

VĚTA 31 (reprezentace kompaktního operátoru; E. Schmidt (1907)[3]). *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Pak existují $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální systémy $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_1$ a $\{v_n\}_{n=1}^N \subset H_2$ takové, že pro každé $x \in H_1$ je*

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, u_n\rangle v_n.$$

Dále $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^N$ je posloupnost všech nenulových vlastních čísel operátoru $T^\star \circ T$, přičemž pro každé $\lambda > 0$ je počet prvků množiny $\{n \in \mathbb{N};\ \lambda_n^2 = \lambda\}$ roven $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T^\star \circ T)$. *Tedy posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ je určena jednoznačně až na permutaci a je-li $N = \infty$, pak $\lambda_n \to 0$.*

DŮKAZ. Ukažme nejprve jednoznačnost. Nechť $Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, u_n\rangle v_n$ pro nějakou kladnou posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$. Pak podle Příkladu 27(a) je $T^\star(Tx) = \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \langle x, u_n\rangle u_n$ pro každé $x \in H_1$, takže podle Příkladu 27(e) aplikovaného na $T^\star \circ T$ platí dokazované tvrzení o posloupnosti $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^N$. Je-li $N = \infty$, pak $\lambda_n^2 \to 0$ podle Vět 4.23 a 4.27.

Přejděme nyní k existenci. Operátor $T^\star \circ T$ je samoadjungovaný a $\langle T^\star \circ Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \ge 0$ pro každé $x \in H_1$, takže $\sigma(T^\star \circ T) \subset [0, +\infty)$ (Důsledek 20). Podle Věty 30 tedy existují $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální systém $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_1$ tak, že $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^N$ je posloupnost

[3] E. Schmidt dokázal tuto reprezentaci pro jistou třídu integrálních operátorů, nicméně zobecnění pro abstraktní operátory je přímočaré.

nenulových vlastních čísel operátoru $T^\star \circ T$ a $T^\star \circ Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \langle x, u_n\rangle u_n$ pro každé $x \in H_1$. Položme $v_n = \frac{1}{\lambda_n} Tu_n$. Pak $\langle v_m, v_n\rangle = \frac{1}{\lambda_m\lambda_n}\langle Tu_m, Tu_n\rangle = \frac{1}{\lambda_m\lambda_n}\langle T^\star \circ Tu_m, u_n\rangle = \frac{1}{\lambda_m\lambda_n}\langle \lambda_m^2 u_m, u_n\rangle = \delta_{m,n}$ (Kroneckerovo delta), takže $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ je ortonormální systém. Nechť nyní $x \in H_1$. Protože $T^\star \circ Tu_n = \lambda_n^2 u_n$, je $T^\star \circ T\big(x - \sum_{n=1}^{N}\langle x, u_n\rangle u_n\big) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \langle x, u_n\rangle u_n - \sum_{n=1}^{N}\langle x, u_n\rangle T^\star \circ Tu_n = 0$. S využitím Faktu 8 odtud plyne, že

$$Tx = T\left(x - \sum_{n=1}^{N}\langle x, u_n\rangle u_n\right) + T\left(\sum_{n=1}^{N}\langle x, u_n\rangle u_n\right) = 0 + \sum_{n=1}^{N}\langle x, u_n\rangle Tu_n = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n\langle x, u_n\rangle v_n.$$

□

2. Omezený borelovský kalkulus

■■■Zde se seznámíme s dalším zobecněním funkčního kalkulu, tentokráte pro borelovské funkce na spektru normálního operátoru.

DEFINICE 32. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Na prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$ definujeme následující lokálně konvexní topologie:

- silná operátorová topologie τ_{SOT} je generovaná systémem pseudonorem $\{p_x(T) = \|Tx\|;\ x \in X\}$,
- slabá operátorová topologie τ_{WOT} je generovaná systémem pseudonorem $\{p_{x,f}(T) = |f(Tx)|;\ x \in X, f \in Y^*\}$.

Uvědomme si, že obě topologie jsou Hausdorffovy, neboť X odděluje body $\mathcal{L}(X, Y)$ a Y^* odděluje body Y. Dále je snadno vidět, že τ_{SOT} je ve skutečnosti topologie bodové konvergence a τ_{WOT} je topologie slabé bodové konvergence, tj. $T_\gamma \to T$ v τ_{WOT}, právě když $T_\gamma x \to Tx$ slabě pro každé $x \in X$. Je-li Y Hilbertův prostor, pak díky Větě 1.120 platí, že $T_\gamma \to T$ v τ_{WOT}, právě když $\langle T_\gamma x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$.

PŘÍKLAD 33. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme operátory $R_n, S_n \in \mathcal{L}(\ell_2)$ následujícími vzorci:

$$R_n x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-krát}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \quad \text{a} \quad S_n x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-krát}}, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

pro $x = (x_k) \in \ell_2$. Pak S_n je zjevně izometrie a dále $\|R_n x\| \le \|x\|$ a $\|R_n e_{n+1}\| = 1$, takže $\|R_n\| = 1$. Tedy $R_n \not\to 0$ v normě, ale $R_n \to 0$ v τ_{SOT}, neboť pro pevné $x \in \ell_2$ je $\|R_n x\| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \to 0$. Dále $S_n \not\to 0$ v τ_{SOT}, neboť např. $S_n e_1 = e_{n+1} \not\to 0$, ale $S_n \to 0$ v τ_{WOT}, neboť pro každé $x, y \in \ell_2$ je $|\langle S_n x, y\rangle| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_{k-n} y_k\right| = |\langle x, R_n y\rangle| \le \|x\|\|R_n y\| \to 0$.

◇

Symbolem $\mathrm{Bf_b}(X)$ budeme značit množinu všech omezených borelovských funkcí na topologickém prostoru X. Uvědomme si, že $\mathrm{Bf_b}(X)$ jakožto uzavřená podalgebra $\ell_\infty(X)$ je B*-algebra (bodová limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná funkce).

DEFINICE 34. Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $K \subset \mathbb{K}$ je kompaktní. Řekneme, že zobrazení $\Psi\colon \mathrm{Bf_b}(K) \to \mathcal{L}(X)$ je borelovský funkční kalkulus pro T na K, pokud Ψ je algebrový homomorfismus, $\Psi(1) = I$, $\Psi(Id) = T$ a je-li $\{f_n\} \subset \mathrm{Bf_b}(K)$ omezená posloupnost konvergující bodově k $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$, pak $\Psi(f_n) \to \Psi(f)$ v topologii τ_{WOT}.

■■■[nove]

PŘÍKLAD 35. Nechť X je Banachův prostor a $P \in \mathcal{L}(X)$ je projekce. Pro libovolnou funkci f na $\{0, 1\}$ položme $\Psi(f) = f(0)(I - P) + f(1)P$. Pak Ψ je borelovský funkční kalkulus pro P na $\{0, 1\}$. Stačí si rozmyslet multiplikativitu Ψ, ostatní vlastnosti jsou zjevné. Nechť tedy f, g jsou funkce na $\{0, 1\}$. Pak $\Psi(f)\Psi(g) = f(0)g(0)(I - P)^2 + f(1)g(0)P(I - P) + f(0)g(1)(I - P)P + f(1)g(1)P^2 = f(0)g(0)(I - P) + f(1)g(1)P = \Psi(fg)$.

Všimněme si, že je-li X komplexní Hilbertův prostor a P není ortogonální, pak $\Psi(\overline{Id}) = P \neq P^\star$ (Věta 21), a tedy Ψ není *-homomorfismus. ■■■[jde takový příklad i pro normální operátor?]

$\diamond$

Následující fakt je jistou variantou věty o obrazu spektra (Věty 9.60(d), 9.134(d)).

FAKT 36. *Nechť X je Banachův prostor a Ψ je borelovský funkční kalkulus pro $T \in \mathcal{L}(X)$ na K. Pak pro každou $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$ je $\sigma(\Psi(f)) \subset \overline{f(K)}$. Speciálně, $\sigma(T) \subset K$.*

DŮKAZ. Nechť $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$. Podobně jako v Příkladu 9.26(c) snadno zjistíme, že $\sigma_{\mathrm{Bf_b}(\sigma(T))}(f) = \overline{\operatorname{Rng} f}$. Díky Tvrzení 9.38 je tedy $\sigma(\Psi(f)) \subset \sigma_{\mathrm{Bf_b}(\sigma(T))}(f) = \overline{f(K)}$. Vezmeme-li $f = Id_K$, pak dostaneme, že $\sigma(T) \subset \overline{K} = K$.

$\square$

Borelovský kalkulus je v jistém smyslu určen jednoznačně:

VĚTA 37. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak existuje kompaktní $M \subset \mathbb{K}$ taková, že je-li Ψ borelovský funkční kalkulus pro T na K, pak $M \subset K$ a $\Psi(f) = \Psi(\chi_M f)$ pro každou $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$. Tedy $\widetilde{\Psi}\colon \mathrm{Bf_b}(M) \to \mathcal{L}(X)$, $\widetilde{\Psi}(f) = \Psi(g)$, kde $g = f$ na M a $g = 0$ na $K \setminus M$, je borelovský funkční kalkulus pro T na M. Je-li dále Φ borelovský funkční kalkulus pro T na L takový, že $\Phi(\overline{Id_L}) = \Psi(\overline{Id_K})$, pak $\Phi(f) = \Psi(g)$, kdykoli $f \in \mathrm{Bf_b}(L)$, $g \in \mathrm{Bf_b}(K)$ a $f = g$ na M. Je-li X komplexní, pak $M = \sigma(T)$.*

Všimněme si, že podmínka $\Phi(\overline{Id_L}) = \Psi(\overline{Id_K})$ je vždy splněna pokud X je reálný nebo pokud X je Hilbertův a Φ, Ψ jsou *-homomorfismy.

DŮKAZ. Je-li X triviální, pak $M = \emptyset$. Předpokládejme tedy, že X je netriviální. Ukažme nejprve, že jsou-li Φ a Ψ borelovské funkční kalkuly pro T na K takové, že $\Phi(\overline{Id_K}) = \Psi(\overline{Id_K})$, pak $\Phi = \Psi$. Položme $\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf_b}(K);\ \Phi(f) = \Psi(f)\}$. Nechť nejprve f je funkce tvaru $f(z) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} z^i (\overline{z})^j$, $z \in K$. Jelikož $\Phi(Id_K) = T = \Psi(Id_K)$, dostáváme, že

$$\Phi(f) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}\Phi(Id_K)^i \Phi(\overline{Id_K})^j = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}\Psi(Id_K)^i \Psi(\overline{Id_K})^j = \Psi(f),$$

a tedy $f \in \mathcal{F}$. Dále si uvědomme, že systém $\mathcal{F}$ je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností: Je-li $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ je omezená posloupnost konvergující bodově k $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$, pak $\Phi(f) = \tau_{\mathrm{WOT}}\text{-}\lim_{n\to\infty}\Phi(f_n) = \tau_{\mathrm{WOT}}\text{-}\lim_{n\to\infty}\Psi(f_n) = \Psi(f)$, a tedy $f \in \mathcal{F}$. Je-li nyní $f \in C(K)$, pak podle Stoneovy-Weierstraßovy věty existuje posloupnost funkcí $\{f_n\}$ výše uvedeného tvaru taková, že $f_n \to f$ v normě $\|\cdot\|_\infty$. Speciálně $\{f_n\}$ je omezená a konverguje bodově k f, takže $f \in \mathcal{F}$. Podle Věty 15.16 to znamená, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf_b}(K)$.

■■■

Nechť Ψ je borelovský funkční kalkulus pro T na K. Položme

$$\mathcal{K} = \bigl\{L \subset \mathbb{K};\ \text{existuje borelovský funkční kalkulus } \Phi \text{ pro } T \text{ na } L \text{ takový, že } \Phi(\overline{Id_L}) = \Psi(\overline{Id_K})\bigr\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{K}$ je uzavřený na konečné průniky. Nechť Φ_1, Φ_2 jsou borelovské funkční kalkuly pro T na L_1, L_2 takové, že $\Phi_1(\overline{Id_{L_1}}) = \Phi_2(\overline{Id_{L_2}}) = \Psi(\overline{Id_K})$ Položme $L = L_1 \cup L_2$.

■■■

$\square$

Uvědomme si, že je-li Ψ borelovský funkční kalkulus na K, pak $\Psi(f)$ komutuje s $\Psi(g)$ pro libovolné $f, g \in \mathrm{Bf_b}(K)$. Pokud tedy chceme, aby ■■■

LEMMA 38. *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$. Jestliže $x_n \to x \in H$ slabě a $\|x_n\| \to \|x\|$, pak $x_n \to x$ (v normě).*

DŮKAZ. Díky Větě 1.120 platí, že $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$. Dle Faktu 1.85 je tedy $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_n, x\rangle \to 2\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, x\rangle = 0$.

$\square$

■■■[vektorový prostor komplexních měr, integrál je lineární vzhledem k míře]

Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální operátor. Pro pevná $x, y \in H$ vezměme funkci $\varphi_{x,y} \colon C(\sigma(T)) \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$\varphi_{x,y}(f) = \langle f(T)x, y\rangle.$$

Dle Věty 9.134(a) je $\varphi_{x,y}$ lineární forma a pro každé $f \in C(\sigma(T))$ je $|\varphi_{x,y}(f)| \le \|f(T)\|\|x\|\|y\| = \|f\|\|x\|\|y\|$, takže $\varphi_{x,y} \in C(\sigma(T))^*$. Dle Rieszovy věty o reprezentaci (Věta 2.20) tedy existuje regulární borelovská komplexní míra $\mu_{x,y}$ na $\sigma(T)$ taková, že pro každé $f \in C(\sigma(T))$ je

$$\varphi_{x,y}(f) = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}$$

a $\|\mu_{x,y}\| = \|\varphi_{x,y}\| \le \|x\|\|y\|$. Toto vyjádření nám umožňuje rozšířit definiční obor funkcionálu $\varphi_{x,y}$ i na omezené borelovské funkce na $\sigma(T)$.

Snadno je vidět, že zobrazení $(x, y) \mapsto \varphi_{x,y}$ je seskvilineární zobrazení z $H \times H$ do $C(\sigma(T))^*$. Reprezentace $I \colon C(\sigma(T))^* \to M(\sigma(T))$ je lineární, takže zobrazení $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}$ je též seskvilineární. Je-li nyní $f \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, pak funkce $S(x, y) = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}$ je seskvilineární forma, pro kterou $|S(x, y)| \le \|f\|_\infty\|\mu_{x,y}\| \le \|f\|_\infty\|x\|\|y\|$, neboli S je omezená. Dle Tvrzení 7 tedy existuje jednoznačně určený operátor $f(T) \in \mathcal{L}(H)$ takový, že pro každé $x, y \in H$ je $S(x, y) = \langle f(T)x, y\rangle$, neboli

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}. \tag{2}$$

Navíc $\|f(T)\| \le \|f\|_\infty$.

Všimněme si, že pro každé $x \in H$ je míra $\mu_{x,x}$ nezáporná a $\|\mu_{x,x}\| = \|x\|^2$: Je-li $f \in C(\sigma(T))$ nezáporná, pak $f(T)$ je nezáporný (Věta 9.134(c), (d)), takže $\varphi_{x,x}$ je nezáporný funkcionál (Důsledek 20). Díky Větě 2.19 a jednoznačnosti ve Větě 2.20 je tedy $\mu_{x,x}$ nezáporná. Dále $\|\mu_{x,x}\| = \varphi_{x,x}(1) = \langle Id(x), x\rangle = \|x\|^2$.

VĚTA 39. *Nechť H je netriviální komplexní Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální operátor a $f \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$. Zobrazení $\Phi \colon \mathrm{Bf_b}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$, kde $\Phi(g) = g(T)$ je definováno výše, je borelovský funkční kalkulus pro T na $\sigma(T)$, který má následující vlastnosti:*

(a) Φ je *-homomorfismus, $\|\Phi\| = 1$ a označíme-li Ψ spojitý kalkulus pro T z Věty 9.134, pak $\Phi\restriction_{C(\sigma(T))} = \Psi$.

(b) Je-li $\{f_n\} \subset \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$ omezená posloupnost konvergující bodově k f, pak $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ v topologii τ_{SOT}.

(c) $f(T)$ je normální. Je-li f reálná, pak $f(T)$ je samoadjungovaný.

(d) Pokud kompaktní $K \subset \mathbb{C}$ obsahuje $\sigma(T)$ a Ψ je borelovský funkční kalkulus pro T na K, který je navíc *-homomorfismus, pak $\Psi(g) = \Phi(g\restriction_{\sigma(T)})$ pro každou $g \in \mathrm{Bf_b}(K)$.

(e) $\sigma(f(T)) \subset \overline{f(\sigma(T))}$.

(f) Pokud $g \in \mathrm{Bf_b}\big(\overline{\mathrm{Rng}\, f}\big)$, pak $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

(g) Pokud $S \in \mathcal{L}(H)$ komutuje s T, pak S komutuje i s $f(T)$.

(h) Je-li $U \in \mathcal{L}(H)$ unitární, pak $f(UTU^\star) = Uf(T)U^\star$.

DŮKAZ. Dokažme nejprve, že pro Φ platí verze vlastnosti (b) s topologií τ_{WOT} (označme tuto vlastnost (b')). Pro každé $x, y \in H$ díky (2) a Lebesgueově větě pro komplexní míry (Věta 15.97) platí, že

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Phi(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{\sigma(T)} f_n \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle\Phi(f)x, y\rangle.$$

(a) Rovnost na spojitých funkcích je zřejmá z definice. Odhad $\|\Phi(f)\| \le \|f\|_\infty$ je uvedený výše, na druhou stranu $\|\Phi(1)\| = \|I\| = 1$. Linearita Φ plyne snadno z definice: Pro $g, h \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$ díky rovnosti (2) pro libovolná $x, y \in H$ dostáváme, že $\langle\Phi(g + h)x, y\rangle = \langle\Phi(g)x, y\rangle + \langle\Phi(h)x, y\rangle = \langle\Phi(g)x + \Phi(h)x, y\rangle = \big\langle(\Phi(g) + \Phi(h))x, y\big\rangle$, tedy díky jednoznačnosti je $\Phi(g + h) = \Phi(g) + \Phi(h)$. Podobně pro násobek skalárem.

Ukažme nyní multiplikativitu Φ. Položme nejprve

$$\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T));\ \forall h \in C(\sigma(T))\colon \Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)\}.$$

Dle Věty 9.134(a) je $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$. Ukážeme, že $\mathcal{F}$ je uzavřená na bodové limity omezených posloupností. Nechť $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ je omezená posloupnost konvergující bodově ke $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$. Je-li $h \in C(\sigma(T))$, pak $\{g_n h\}$ je omezená posloupnost konvergující bodově ke gh, takže díky (b') je pro každé $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\langle \Phi(gh)x, y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(g_n h)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \big\langle (\Phi(g_n)\Phi(h))x, y\big\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(g_n)(\Phi(h)x), y\rangle = \\ &= \langle \Phi(g)(\Phi(h)x), y\rangle = \big\langle (\Phi(g)\Phi(h))x, y\big\rangle.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$, a tedy $g \in \mathcal{F}$. Podle Věty 15.16 to znamená, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$.

Dále položme

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T));\ \forall g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))\colon \Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)\}.$$

Podle předcházející úvahy je $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{H}$. Nechť $\{h_n\} \subset \mathcal{H}$ je omezená posloupnost konvergující bodově k $h \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$. Je-li $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, pak $\{gh_n\}$ je omezená posloupnost konvergující bodově ke gh, takže díky (b') je pro každé $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\langle \Phi(gh)x, y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(gh_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(g)\Phi(h_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(h_n)x, \Phi(g)^\star y\rangle = \\ &= \langle \Phi(h)x, \Phi(g)^\star y\rangle = \langle \Phi(g)\Phi(h)x, y\rangle.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$, a tedy $h \in \mathcal{H}$. Podle Věty 15.16 to znamená, že $\mathcal{H} = \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, což dokazuje, že Φ je multiplikativní.

Konečně, abychom ukázali, že Φ zachovává involuci, položme $\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T));\ \Phi(\overline{g}) = \Phi(g)^\star\}$. Dle Věty 9.134(a) je $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$. Je-li $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ je omezená posloupnost konvergující bodově ke $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, pak díky (b') pro každé $x, y \in H$ platí, že

$$\langle \Phi(\overline{g})x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(\overline{g_n})x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(g_n)^\star x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Phi(g_n)y\rangle = \langle x, \Phi(g)y\rangle = \langle \Phi(g)^\star x, y\rangle.$$

Odtud plyne, že $\Phi(\overline{g}) = \Phi(g)^\star$, a tedy $g \in \mathcal{F}$. Podle Věty 15.16 to znamená, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$.

(b) Nechť $x \in H$. Díky Lemmatu 38 stačí ukázat, že $\|\Phi(f_n)x\| \to \|\Phi(f)x\|$. Posloupnost $\{\overline{f_n} f_n\}$ je omezená a konverguje bodově k funkci $\overline{f}f$. Dle (a) a (b') je tedy

$$\begin{aligned}\|\Phi(f_n)x\|^2 &= \langle \Phi(f_n)x, \Phi(f_n)x\rangle = \langle \Phi(f_n)^\star \Phi(f_n)x, x\rangle = \langle \Phi(\overline{f_n})\Phi(f_n)x, x\rangle = \\ &= \langle \Phi(\overline{f_n} f_n)x, x\rangle \to \langle \Phi(\overline{f}f)x, x\rangle = \langle \Phi(f)^\star \Phi(f)x, x\rangle = \langle \Phi(f)x, \Phi(f)x\rangle = \|\Phi(f)x\|^2.\end{aligned}$$

(c) Uvědomme si, že z (a) plyne, že je-li $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, pak $f(T)$ a $g(T)$ spolu komutují. Díky (a) je $f(T)^\star = \overline{f}(T)$, takže $f(T)$ komutuje s $f(T)^\star$ a pro reálnou f je $f(T)^\star = f(T)$.

(d) Položme $\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{Bf_b}(K);\ \Psi(g) = \Phi(g\restriction_{\sigma(T)})\}$. Nechť nejprve g je funkce tvaru $g(z) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} z^i (\overline{z})^j$, $z \in K$. Pak

$$\Psi(g) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} \Psi(Id_K)^i (\Psi(Id_K)^\star)^j = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} T^i (T^\star)^j = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} \Phi(Id_{\sigma(T)})^i (\Phi(Id_{\sigma(T)})^\star)^j = \Phi(g\restriction_{\sigma(T)}).$$

Je-li nyní $g \in C(K)$, pak podle Stoneovy-Weierstraßovy věty existuje posloupnost funkcí $\{g_n\}$ výše uvedeného tvaru taková, že $g_n \to g$ v normě $\|\cdot\|_\infty$. Protože Ψ je spojitý (Důsledek 9.119), platí, že $\Psi(g) = \lim_{n\to\infty} \Psi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(g_n\restriction_{\sigma(T)}) = \Phi(g\restriction_{\sigma(T)})$, neboli $g \in \mathcal{F}$. Ukázali jsme tak, že $C(K) \subset \mathcal{F}$.

Konečně, je-li $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ je omezená posloupnost konvergující bodově ke $g \in \mathrm{Bf_b}(K)$, pak díky (b') pro každé $x, y \in H$ platí, že $\langle \Psi(g)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \Psi(g_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \Phi(g_n\restriction_{\sigma(T)})x, y\rangle = \langle \Phi(g\restriction_{\sigma(T)})x, y\rangle$. Odtud plyne, že $\Psi(g) = \Phi(g\restriction_{\sigma(T)})$, a tedy $g \in \mathcal{F}$. Podle Věty 15.16 to znamená, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf_b}(K)$.

(e) Podobně jako v Příkladu 9.26(c) snadno zjistíme, že $\sigma_{\mathrm{Bf_b}(\sigma(T))}(f) = \overline{\mathrm{Rng}\, f}$. Díky (a) a Tvrzení 9.38 je tedy $\sigma(\Phi(f)) \subset \sigma_{\mathrm{Bf_b}(\sigma(T))}(f) = \overline{\mathrm{Rng}\, f}$.

(f) Položme $K = \overline{\operatorname{Rng} f}$ a uvědomme si, že $\operatorname{Rng} f$ je omezená množina, takže K je kompaktní. Dle (e) je $\sigma(f(T)) \subset K$. Snadno si lze rozmyslet, že zobrazení $\Lambda\colon \mathrm{Bf_b}(K) \to \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, $\Lambda(g) = g \circ f$ je *-homomorfismus a zachovává bodovou konvergenci omezených posloupností. Definujme nyní $\Psi\colon \mathrm{Bf_b}(K) \to \mathcal{L}(H)$ předpisem $\Psi(g) = (g \circ f)(T)$. Označme $\Phi_T(h) = h(T)$ a $\Phi_{f(T)}(g) = g(f(T))$ (to je dobře definováno díky (c)). Pak $\Psi = \Phi_T \circ \Lambda$, takže Ψ je dle (a) a (b) *-homomorfismus s vlastností (b). Zjevně $\Psi(1) = \Phi_T(1) = I$ a $\Psi(Id) = f(T)$, tudíž podle (d) je $(g \circ f)(T) = \Psi(g) = \Phi_{f(T)}(g\restriction_{\sigma(f(T))}) = g(f(T))$.

(g) Položme $\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T));\ Sg(T) = g(T)S\}$. Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ dle Věty 9.134(i). Je-li $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ je omezená posloupnost konvergující bodově ke $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, pak díky (b) pro každé $x \in H$ platí, že

$$S(g(T)x) = \lim_{n\to\infty} S(g_n(T)x) = \lim_{n\to\infty} g_n(T)(Sx) = g(T)(Sx).$$

Odtud plyne, že $Sg(T) = g(T)S$, a tedy $g \in \mathcal{F}$. Podle Věty 15.16 to znamená, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$.

(h) Dle Faktu 9.114(e) je $UTU^\star$ normální a dle Tvrzení 9.32(f) je $\sigma(UTU^\star) = \sigma(T)$. Můžeme tedy využít již dokázaných vlastností kalkulu též pro operátor $UTU^\star$. Položme $\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T));\ g(UTU^\star) = Ug(T)U^\star\}$. Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ dle Věty 9.134(j). Je-li $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$ je omezená posloupnost konvergující bodově ke $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$, pak díky (b) pro každé $x \in H$ platí, že

$$g(UTU^\star)x = \lim_{n\to\infty} g_n(UTU^\star)x = \lim_{n\to\infty} U\big(g_n(T)(U^\star x)\big) = U\big(g(T)(U^\star x)\big).$$

Odtud plyne, že $g(UTU^\star) = Ug(T)U^\star$, a tedy $g \in \mathcal{F}$. Podle Věty 15.16 to znamená, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$.

□

3. Polární rozklad

Následující věta je variantou Věty 9.142. Připomeňme též, že pro obecný operátor na (nekonečněrozměrném) Hilbertově prostoru polární rozklad nemusí existovat – vizte Příklad 9.143.

VĚTA 40 (polární rozklad). *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je normální, právě když existují unitární $U \in \mathcal{L}(H)$ a nezáporný $A \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $T = UA = AU$. Tento rozklad je určen jednoznačně, právě když T je prostý.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Díky samoadjungovanosti A je $T^\star = A^\star U^\star = AU^\star = U^\star A$. Tedy $T^\star T = AU^\star UA = AIA = AUU^\star A = TT^\star$.

$\Rightarrow$ Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že H je netriviální. Položme $f(\lambda) = |\lambda|$ a dále zvolme $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ a položme $g(\lambda) = \operatorname{sgn}\lambda$ pro $\lambda \neq 0$ a $g(0) = \alpha$. Pak $gf = Id$, f je spojitá na $\mathbb{C}$ a snadno vidíme, že g je borelovská (první třídy) na $\mathbb{C}$. Dále $A = |T|$ je nezáporný a $U = g(T)$ je unitární, neboť $U^\star U = \overline{g}(T)g(T) = (\overline{g}g)(T) = 1(T) = I = (g\overline{g})(T) = UU^\star$. Konečně, $UA = g(T)f(T) = (gf)(T) = T = (fg)(T) = AU$.

Věnujme se nyní jednoznačnosti. Již víme, že operátor A je určen jednoznačně (poznámka před Větou 9.142). Dále je $UT^\star = UU^\star A = A$, takže hodnoty U na $\operatorname{Rng} T^\star$ jsou určeny jednoznačně. Je-li T prostý, pak $\operatorname{Rng} T^\star$ je hustý v H (Věta 1(d)), díky spojitosti je tedy U určen jednoznačně.

Nyní předpokládejme, že T není prostý. Pak existuje $x \in H$, $x \neq 0$ takový, že $Tx = 0$. Nechť $\mu_{x,x}$ je míra na $\sigma(T)$ z konstrukce borelovského kalkulu pro T. Protože $A = U^\star T$, je i $Ax = 0$. Tedy $0 = \langle Ax, x\rangle = \int_{\sigma(T)} |\lambda|\,\mathrm{d}\mu_{x,x}(\lambda)$, takže $\mu_{x,x}(\sigma(T)\setminus\{0\}) = 0$. Protože $\mu_{x,x} \neq 0$, plyne odtud, že $\mu_{x,x}(\{0\}) \neq 0$. To znamená, že $\langle \chi_{\{0\}}(T)x, x\rangle = \int_{\sigma(T)} \chi_{\{0\}}\,\mathrm{d}\mu_{x,x} = \mu_{x,x}(\{0\}) \neq 0$. Položme $y = \chi_{\{0\}}(T)x$. Pak $y \neq 0$ a

$$Uy = g(T)y = g(T)(\chi_{\{0\}}(T)x) = \big(g(T)\chi_{\{0\}}(T)\big)x = (g\cdot\chi_{\{0\}})(T)x = (\alpha\chi_{\{0\}})(T)x = \alpha y.$$

Pro různá α tedy obdržíme různé operátory U.

□

Všimněme si, že je-li $0 \notin \sigma(T)$, pak funkce sgn je spojitá na $\sigma(T)$ a pro definici U v důkazu výše stačí použít spojitý kalkulus místo borelovského. V tom případě je ovšem T invertovatelný a výsledek je tak již obsažen v obecnější Větě 9.142, která nevyžaduje normálnost.

Na rozdíl od Věty 9.142 polární rozklad ve Větě 40 nemusí být určen jednoznačně – unitární část můžeme ovlivnit volbou konstanty α. Uveďme konkrétní příklad:

PŘÍKLAD 41. Nechť $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ je reprezentovaný maticí $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Pak $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0, 1\}$, tedy T je nezáporný a $A = |T| = T$. Nechť g je funkce z důkazu Věty 40 a položme $h(\lambda) = (1-\alpha)\lambda + \alpha$. Pak $g\restriction_{\sigma(T)} = h\restriction_{\sigma(T)}$, takže $U_\alpha = g(T) = h(T) = (1-\alpha)T + \alpha I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Snadno vidíme, že U_α je unitární, takže $T = U_\alpha A$ je polární rozklad T.

$\diamond$

DŮSLEDEK 42. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je normální, právě když existuje unitární $U \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $T^\star = UT = TU$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ plyne z rovnosti $T^\star T = TUT = TT^\star$.

$\Rightarrow$ Dle Věty 40 existují unitární $V \in \mathcal{L}(H)$ a nezáporný $A \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $T = VA = AV$. Tedy $A = V^\star T = TV^\star$. Položme $U = (V^\star)^2$. Pak U je unitární (Fakt 9.114(a)). Protože A je samoadjungovaný, dostáváme, že $T^\star = V^\star A^\star = V^\star A = V^\star V^\star T = UT$ a $T^\star = AV^\star = T(V^\star)^2 = TU$.

$\square$

Následující věta je doplňkem Vět 40 a 9.142.

VĚTA 43. *Nechť H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedna dvojice operátorů $A \in \mathcal{L}(H_1)$ a $U \in \mathcal{L}(\overline{\operatorname{Rng} A}, \overline{\operatorname{Rng} T})$ taková, že $T = U \circ A$, A je nezáporný a U je unitární.*

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & \overline{\operatorname{Rng} T} \\ & \overline{\operatorname{Rng} A} \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

Je-li T izomorfismus, pak A je automorfismus H_1.

DŮKAZ. Dle Důsledku 20 je $T^\star \circ T \in \mathcal{L}(H_1)$ nezáporný, neboť $\langle T^\star \circ Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H_1$. (Uvědomme si, že pro $H_2 = H_1$ je tento argument výrazně jednodušší, než obecná Věta 9.141.) Můžeme tedy definovat $A = \sqrt{T^\star \circ T}$ (vizte oddíl 9.8). Pro každé $x \in H_1$ pak platí, že

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^\star Ax, x\rangle = \langle A^2x, x\rangle = \langle T^\star \circ Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Tedy $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} T$, takže dle Faktu 6.81 existuje lineární zobrazení $U\colon \operatorname{Rng} A \to \operatorname{Rng} T$ takové, že $T = U \circ A$. Je-li $y \in \operatorname{Rng} A$, pak pro libovolné $x \in H_1$ takové, že $y = Ax$, je $\|Uy\| = \|U(Ax)\| = \|Tx\| = \|Ax\| = \|y\|$. Odtud plyne, že U je izometrie, kterou můžeme dle Věty 1.62 rozšířit na izometrii z $\overline{\operatorname{Rng} A}$ do $\overline{\operatorname{Rng} T}$. Zjevně je $U(\operatorname{Rng} A) = \operatorname{Rng} T$, takže $\operatorname{Rng} U$ je hustý v $\overline{\operatorname{Rng} T}$. Dle Věty 1.60(c) je ovšem $\operatorname{Rng} U$ uzavřený, a tedy U je izometrie na $\overline{\operatorname{Rng} T}$, což znamená, že U je unitární (Věta 24).

Nyní dokažme jednoznačnost. Nechť $T = V \circ B$, kde $B \in \mathcal{L}(H_1)$ je nezáporný a $V \in \mathcal{L}(\overline{\operatorname{Rng} B}, \overline{\operatorname{Rng} T})$ je unitární. Označme $S\colon H_1 \to \overline{\operatorname{Rng} T}$, $S = T$. Pak $S = V \circ B$ a dle Lemmatu 25 je $T^\star \circ T = S^\star \circ S = (V \circ B)^\star \circ V \circ B = B^\star \circ V^\star \circ V \circ B = B^\star \circ B = B^2$. Tedy $B = A$ dle Faktu 9.139(c). Dále $V(Ax) = Tx = U(Ax)$ pro každé $x \in H_1$, a tedy díky hustotě $V = U$.

Je-li T izomorfismus, pak $T^\star$ je též izomorfismus (Věta 9.102(e)). Operátor $T^\star \circ T$ je tedy invertovatelný, takže je invertovatelný i $A = \sqrt{T^\star \circ T}$ (vizte důkaz Věty 9.142).

$\square$

Pro operátory na konečněrozměrném Hilbertově prostoru ovšem polární rozklad existuje vždy:

TVRZENÍ 44. *Nechť $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Pak existují unitární $U \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ a nezáporný $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tak, že $T = UA$.*

DŮKAZ. Dle Věty 43 existují nezáporný $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ a unitární $V_1 \in \mathcal{L}(\overline{\operatorname{Rng} A}, \overline{\operatorname{Rng} T})$ tak, že $T = V_1 \circ A$. Podprostory $\operatorname{Rng} A$ a $\operatorname{Rng} T$ jsou konečněrozměrné, jsou tedy uzavřené a $V_1 \in \mathcal{L}(\operatorname{Rng} A, \operatorname{Rng} T)$. Protože V_1 je izomorfismus podprostorů $\operatorname{Rng} A$ a $\operatorname{Rng} T$, je $\dim \operatorname{Rng} A = \dim \operatorname{Rng} T$, a tedy $\dim(\operatorname{Rng} A)^\perp = n - \dim \operatorname{Rng} A = n - \dim \operatorname{Rng} T = \dim(\operatorname{Rng} T)^\perp$. Podprostory $(\operatorname{Rng} A)^\perp$ a $(\operatorname{Rng} T)^\perp$ jsou uzavřené, jsou tedy Hilbertovy a podle Věty 1.118 existuje lineární izometrie V_2 zobrazující $(\operatorname{Rng} A)^\perp$ na $(\operatorname{Rng} T)^\perp$. Nechť $P_1 \colon \mathbb{C}^n \to \operatorname{Rng} A$ a $P_2 \colon \mathbb{C}^n \to (\operatorname{Rng} A)^\perp$ jsou ortogonální projekce. Položme $U = V_1 \circ P_1 + V_2 \circ P_2$. Jelikož $\operatorname{Rng} A = \operatorname{Rng} P_1 = \operatorname{Ker} P_2$, dostáváme, že $UAx = V_1(P_1 Ax) + V_2(P_2 Ax) = V_1(Ax) = Tx$ pro každé $x \in \mathbb{C}^n$. Dále protože $\operatorname{Rng} V_1 \perp \operatorname{Rng} V_2$ a V_1 a V_2 jsou izometrie, dle Pythagorovy věty pro každé $x \in \mathbb{C}^n$ platí, že

$$\|Ux\|^2 = \|V_1(P_1x) + V_2(P_2x)\|^2 = \|V_1(P_1x)\|^2 + \|V_2(P_2x)\|^2 = \|P_1x\|^2 + \|P_2x\|^2 = \|x\|^2.$$

Konečně, nechť $y \in \mathbb{C}^n$. Pak $y = y_1 + y_2$ pro nějaká $y_1 \in \operatorname{Rng} T$ a $y_2 \in (\operatorname{Rng} T)^\perp$. Tedy existují $x_1 \in \operatorname{Rng} A$ a $x_2 \in (\operatorname{Rng} A)^\perp$ taková, že $y_1 = V_1 x_1$ a $y_2 = V_2 x_2$. Položme $x = x_1 + x_2$. Protože $P_1 x = x_1$ a $P_2 x = x_2$, dostáváme, že $Ux = V_1 x_1 + V_2 x_2 = y_1 + y_2 = y$. Tedy U je unitární operátor dle Věty 24. □

4. Spektrální rozklad normálního operátoru

V tomto oddílu se seznámíme s klíčovým výsledkem celé teorie B⋆-algeber a prostoru $\mathcal{L}(H)$, totiž se spektrálním rozkladem normálního operátoru (vizte Důsledek 63). Ten slouží jako základní nástroj pro práci s normálními operátory.

DEFINICE 45. Nechť $\mathcal{S}$ je σ-algebra a X je topologický vektorový prostor. Zobrazení $\mu \colon \mathcal{S} \to X$ se nazývá vektorová míra, pokud $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$.

Všimněme si, že je-li X Hausdorffův, pak nutně $\mu(\emptyset) = 0$ (vizte Poznámku 6.17). Dále si uvědomme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ v definici nezávisí na pořadí sčítanců, neboť množina $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ je stejná pro libovolnou permutaci posloupnosti $\{A_n\}$.

FAKT 46. *Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory, $\mu \colon \mathcal{S} \to X$ je vektorová míra a $T \colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Pak $T \circ \mu$ je též vektorová míra.*

DŮKAZ. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní. Označme τ_X, resp. τ_Y topologie na X, resp. Y. Pak

$$T \circ \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = T\left(\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) = T\left(\tau_X\text{-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \mu(A_n)\right) = \tau_Y\text{-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N T \circ \mu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty T \circ \mu(A_n).$$

□

TVRZENÍ 47. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$, $\mathcal{S}$ je σ-algebra a $\mu \colon \mathcal{S} \to (\mathcal{L}(X,Y), \tau_{\mathrm{WOT}})$ je vektorová míra. Pak pro každé $x \in X$ a $f \in Y^*$ je funkce $\mu_{x,f} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ daná předpisem*

$$\mu_{x,f}(A) = f(\mu(A)x)$$

komplexní míra na $\mathcal{S}$. Zobrazení $B \colon (x, f) \mapsto \mu_{x,f}$ je bilineární zobrazení z $X \times Y^*$ do normovaného lineárního prostoru komplexních měr na $\mathcal{S}$. Je-li navíc X Banachův, pak $\sup_{A\in\mathcal{S}} \|\mu(A)\| < +\infty$ a B je omezené.

DŮKAZ. Zvolme $x \in X$ a $f \in Y^*$. Snadno nahlédneme, že funkce $e \colon (\mathcal{L}(X,Y), \tau_{\mathrm{WOT}}) \to \mathbb{K}$, $e(T) = f(Tx)$ je lineární a spojitá. Podle Faktu 46 je tedy $\mu_{x,f} = e \circ \mu$ komplexní míra.

Dále se podívejme na bilinearitu zobrazení $(x, f) \mapsto \mu_{x,f}$. Jsou-li $x, y \in X$, $f \in Y^*$ a $A \in \mathcal{S}$, pak $\mu_{x+y,f}(A) = f\big(\mu(A)(x + y)\big) = f\big(\mu(A)x + \mu(A)y\big) = f(\mu(A)x) + f(\mu(A)y) = \mu_{x,f}(A) + \mu_{y,f}(A) = (\mu_{x,f} + \mu_{y,f})(A)$, tedy $\mu_{x+y,f} = \mu_{x,f} + \mu_{y,f}$. Ostatní vlastnosti bilineárního zobrazení se ověří analogicky.

Nechť nyní X je Banachův. Pro pevné $x \in X$ a $f \in Y^*$ je totální variace míry $\mu_{x,f}$ konečná ([R, Věta 6.4]) – označme ji $\|\mu_{x,f}\|$. Je-li $x \in X$ pevné, pak pro každé $f \in Y^*$ platí, že $\sup_{A\in\mathcal{S}}|f(\mu(A)x)| = \sup_{A\in\mathcal{S}}|\mu_{x,f}(A)| \leq \|\mu_{x,f}\|$, neboli množina $M_x = \{\mu(A)x;\ A \in \mathcal{S}\} \subset Y$ je slabě omezená. Podle Věty 6.94 je tedy M_x omezená. Jinými slovy, pro každé $x \in X$ je $\sup_{A\in\mathcal{S}}\|\mu(A)x\| < +\infty$. Podle principu stejnoměrné omezenosti (Věta 3.1) je tudíž $\sup_{A\in\mathcal{S}}\|\mu(A)\| < +\infty$.

Konečně, nechť $x \in B_X$ a $f \in B_{Y^*}$. Pak dle Lemmatu 15.91 je $\|\mu_{x,f}\| \leq 4\sup_{A\in\mathcal{S}}|\mu_{x,f}(A)| = 4\sup_{A\in\mathcal{S}}|f(\mu(A)x)| \leq 4\sup_{A\in\mathcal{S}}\|f\|\|\mu(A)\|\|x\| \leq 4\sup_{A\in\mathcal{S}}\|\mu(A)\| < +\infty$.

□

V případě, že v předchozím tvrzení je Y je Hilbertův, budeme vzhledem k Větě 1.120 používat místo $\mu_{x,f}$ značení $\mu_{x,y}$, kde $y \in Y$; tj. $\mu_{x,y}(A) = \langle\mu(A)x, y\rangle$. Pak je ovšem zobrazení $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}$ seskvilineární.

VĚTA 48 (B. J. Pettis (1938)). *Nechť X je normovaný lineární prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na množině Ω a $\mu\colon \mathcal{S} \to (X, w)$ je vektorová míra. Pak μ je i vektorová míra jakožto zobrazení do $(X, \|\cdot\|)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že existuje posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ taková, že $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr) \neq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ v normě. Pak existují $\varepsilon > 0$ a $E_n \in \mathcal{S}$ takové, že $E_{n+1} \subset E_n$, $\bigcap_{n=1}^\infty E_n = \emptyset$ a $\|\mu(E_n)\| \geq \varepsilon$ (stačí vzít podposloupnost množin $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$). Nyní je třeba dokázat, že vezmeme-li σ-algebru $\mathcal{A}$ generovanou systémem $\{E_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, pak $Y = \operatorname{span}\{\mu(A);\ A \in \mathcal{A}\}$ je separabilní podprostor X.

K tomuto účelu předpokládejme, že $\Omega = E_1$ a uvažujme množiny $A_n = E_n \setminus E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\mathcal{A}$ je σ-alegebra generovaná disjunktním systémem $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že platí

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{n\in N} A_n;\ N \subset \mathbb{N}\right\}.$$

Vskutku, označme množinu na pravé straně jako $\mathcal{B}$. Pak zjevně $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Na druhou stranu platí, že $\mathcal{B}$ je σ-algebra obsahující systém $\{A_n;\ n \in N\}$. To plyne z toho, že

- $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\emptyset = \bigcup_{n\in\emptyset} A_n$;
- díky disjunktonosti systému $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ platí $\Omega \setminus \bigcup_{n\in N} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus N} A_n$, kde $N \subset \mathbb{N}$;
- $\bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{j\in N_n} A_j = \bigcup_{j\in\bigcup_{n=1}^\infty N_n} A_j$, kde $N_j \subset \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$.

Tedy $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Separabilita Y nyní plyne z inkluze

$$Y \subset Z = \overline{\operatorname{span}}\{\mu(A_n);\ n \in \mathbb{N}\},$$

kde na pravé straně figuruje separabilní prostor. K ověření inkluze uvažujme libovolný prvek $A \in \mathcal{A} = \mathcal{B}$, tj. množinu $A = \bigcup_{n\in N} A_n$ pro nějakou $N \subset \mathbb{N}$. Zjevně stačí uvažovat nekonečnou množinu N. Očíslujeme prvky N jako $N = \{n_j;\ j \in \mathbb{N}\}$, kde $\{n_j\}$ je rostouc posloupnost v $\mathbb{N}$. Pak

$$\mu(A) = w\text{-}\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m \mu(A_{n_j}).$$

Jelikož $\sum_{j=1}^m \mu(A_{n_j}) \in Z$ a Z je slabě uzavřený díky Větě 6.93, $\mu(A) \in Z$. Tím je důkaz separability Y dokončen.

Dále označme $\nu = \mu\restriction_{\mathcal{A}}$. Pak $\nu\colon \mathcal{A} \to (Y, w)$ je vektorová míra (Tvrzení 6.92). Z Hahnovy-Banachovy věty plyne existence funkcionálů $f_n \in B_{Y^*}$ takových, že $f_n(\nu(E_n)) \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Důsledku 6.116 a Tvrzení 6.117 je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt, tedy je sekvenciálně kompaktní, takže existuje w^*-konvergentní podposloupnost $\{f_{n_k}\}$. Označme $\nu_k = f_{n_k} \circ \nu$, $k \in \mathbb{N}$. Jelikož f_{n_k} je slabě spojitý, ν_k je komplexní míra na $\mathcal{A}$ (Fakt 46). Položme $B_k = E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}}$. Pak $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$. Protože pro každé $A \in \mathcal{A}$ existuje $\lim_{k\to\infty} \nu_k(A) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\nu(A))$, je podle Nikodymovy věty (Věta 15.102) řada $\sum_{j=1}^\infty \nu_k(B_j)$ konvergentní stejnoměrně pro $k \in \mathbb{N}$. Tedy existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\left|\sum_{j=m}^\infty \nu_k(B_j)\right| < \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože $E_{n_m} = \bigcup_{j=m}^\infty B_j$, je $\varepsilon \leq f_{n_m}(\nu(E_{n_m})) = |\nu_m(E_{n_m})| = \left|\sum_{j=m}^\infty \nu_m(B_j)\right| < \varepsilon$, což je spor.

□

DŮSLEDEK 49. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\mathcal{S}$ je σ-algebra a $\mu\colon \mathcal{S} \to (\mathcal{L}(X,Y), \tau_{\mathrm{WOT}})$ je vektorová míra. Pak μ je i vektorová míra jakožto zobrazení do $(\mathcal{L}(X,Y), \tau_{\mathrm{SOT}})$.*

DŮKAZ. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní. Zvolme $x \in X$. Snadno nahlédneme, že zobrazení $e\colon (\mathcal{L}(X,Y), \tau_{\mathrm{WOT}}) \to (Y, w)$, $e(T) = Tx$ je lineární a spojité. Tedy $e \circ \mu\colon \mathcal{S} \to (Y, w)$ je vektorová míra (Fakt 46). Podle Pettisovy věty (Věta 48) je $e \circ \mu$ vektorová míra také jakožto zobrazení do $(Y, \|\cdot\|)$. To znamená, že $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)x = e \circ \mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} e \circ \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)x$, kde řady konvergují v normě.

□

Symbolem $\mathrm{Bs}(X)$ budeme značit σ-algebru borelovských podmnožin topologického prostoru X.

DEFINICE 50. Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$. Rozkladem identity na X rozumíme vektorovou míru $E\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{K}) \to (\mathcal{L}(X), \tau_{\mathrm{SOT}})$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $E(A)$ je projekce pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$.
(ii) $E(\mathbb{K}) = I$.
(iii) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pro libovolné borelovské $A, B \subset \mathbb{K}$.

Je-li X Hilbertův a všechny projekce $E(A)$ jsou ortogonální, pak se E nazývá ortogonální rozklad identity na X.

PŘÍKLAD 51. Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $P \in \mathcal{L}(X)$ je projekce. Pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$ položme

$$E(A) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } 0 \notin A,\ 1 \notin A, \\ P, & \text{je-li } 1 \in A,\ 0 \notin A, \\ I - P, & \text{je-li } 0 \in A,\ 1 \notin A, \\ I, & \text{je-li } \{0,1\} \subset A. \end{cases}$$

Pak E je rozklad identity na X.

Nejprve si rozmysleme, že $E\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(X)$ je vektorová míra. Protože $E(A) = E(A \cap \{0,1\})$ pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$, zjevně stačí ukázat, že restrikce E na podmnožiny $\{0,1\}$ je vektorová míra. Nechť $A_n \subset \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou po dvou disjunktní a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Je-li $A_n \neq \emptyset$ nejvýše pro jeden index, pak zřejmě $E(A) = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)$. V opačném případě je $A_j = \{0\}$ a $A_k = \{1\}$ pro nějaká $j, k \in \mathbb{N}$, ostatní A_n jsou prázdné. Tedy $E(A) = E(\{0,1\}) = I = I - P + P = E(A_j) + E(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)$.

Podmínky (i) a (ii) z definice rozkladu identity na X jsou zřejmě splněny. Podmínku (iii) opět zjevně stačí dokázat pouze pro restrikci E na podmnožiny $\{0,1\}$. Nechť tedy $A, B \subset \{0,1\}$.

- Je-li $A = \emptyset$, pak $E(A \cap B) = 0 = 0 \circ E(B) = E(A)E(B)$.
- Je-li $A = \{0,1\}$, pak $E(A \cap B) = E(B) = IE(B) = E(A)E(B)$.
- Je-li $A = B$, pak $E(A \cap B) = E(A) = E(A)E(A) = E(A)E(B)$, neboť $E(A)$ je projekce.
- Je-li $A = \{0\}$ a $B = \{1\}$, pak $E(A \cap B) = 0 = P - P = (I - P)P = E(A)E(B)$.

Ostatní případy plynou z toho, že $E(A)$ a $E(B)$ spolu komutují, neboť $(I - P)P = P - P = P(I - P)$.

◇

PŘÍKLAD 52. Vezměme situaci z Věty 30 a pro každou $A \subset \mathbb{K}$ borelovskou definujme $E(A) = \sum_{n\colon \lambda_n \in A} P_n$. (Řada konverguje v topologii τ_{SOT} díky bezpodmínečné konvergenci.) Pak E je ortogonální rozklad identity na H.

To, že E je vektorová míra, plyne ze zobecněného asociativního zákona pro bezpodmínečně konvergentní řady, který lze dokázat podobně jako v reálném případě. Fakt, že $E(\mathbb{K}) = I$ je obsažen ve Větě 30. Vlastnost (iii) plyne z toho, že $P_n P_k = 0$ pro $k \neq n$ (Věta 21, Věta 17(f) a Tvrzení 22).

◇

Shrňme některé jednoduché vlastnosti rozkladů identity.

FAKT 53. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a E je rozklad identity na X.*

(a) Projekce $E(A)$ a $E(B)$ pro $A, B \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ spolu komutují.

(b) Pro $A, B \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$*,* $B \subset A$ *je* $\operatorname{Rng} E(B) \subset \operatorname{Rng} E(A)$ *a* $\operatorname{Ker} E(B) \supset \operatorname{Ker} E(A)$*.*

(c) Pro $\{A_n\} \subset \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ *je* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} E(A_n) \subset \operatorname{Ker} E\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)$*.*

(d) Pro každé $x \in X$ *a* $f \in X^*$ *je* $E_{x,f}$ *regulární borelovská komplexní míra na* $\mathbb{K}$*.*

Nechť dále X *je Hilbertův a* E *je ortogonální.*

(e) Jsou-li $A, B \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ *disjunktní, pak* $\operatorname{Rng} E(A) \perp \operatorname{Rng} E(B)$*.*

(f) Pro každé $x \in X$ *je* $E_{x,x}$ *konečná regulární borelovská nezáporná míra na* $\mathbb{K}$ *a* $\|E_{x,x}\| = \|x\|^2$*.*

DůKAZ. (a) plyne ihned z vlastnosti (iii) v definici.

(b) Díky vlastnosti (iii) je $\operatorname{Rng} E(B) = \operatorname{Rng} E(A \cap B) = \operatorname{Rng} E(A)E(B) \subset \operatorname{Rng} E(A)$ a $\operatorname{Ker} E(B) = \operatorname{Ker} E(B \cap A) = \operatorname{Ker} E(B)E(A) \supset \operatorname{Ker} E(A)$.

(c) Položme $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Pak $B_n \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ jsou po dvou disjunktní a $\operatorname{Ker} E(A_n) \subset \operatorname{Ker} E(B_n)$ dle (b). Pro každé $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} E(A_n)$ je tedy $E\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)x = E\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(B_n)x = 0$.

(d) plyne z Tvrzení 47, regularita pak z Věty 15.84.

(e) plyne z Věty 21 a Tvrzení 22 spolu s vlastností (iii).

(f) Pro každé $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ je $E_{x,x}(A) = \langle E(A)x, x\rangle = \|E(A)x\|^2 \geq 0$ (Věta 1.99). Speciálně, $\|E_{x,x}\| = E_{x,x}(\mathbb{K}) = \|x\|^2$.

□

LEMMA 54. *Nechť* X *je Banachův prostor nad* $\mathbb{K}$ *a* $E\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(X)$ *má následující vlastnosti:*

(i) $E(A)$ *je projekce pro každou borelovskou* $A \subset \mathbb{K}$*.*

(ii) $E(\mathbb{K}) = I$*.*

(iii) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ *pro libovolné borelovské* $A, B \subset \mathbb{K}$*.*

(iv) Pro všechna $x \in X$ *a* $f \in X^*$ *je* $E_{x,f}\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$*,* $E_{x,f}(A) = f(E(A)x)$ *borelovská komplexní míra na* $\mathbb{K}$*.*

Pak E *je rozklad identity na* X*.*

Je-li X *komplexní Hilbertův prostor, pak stačí místo (iv) předpokládat, že pro každé* $x \in X$ *je* $E_{x,x}\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{K}) \to \mathbb{C}$*,* $E_{x,x}(A) = \langle E(A)x, x\rangle$ *konečná borelovská míra na* $\mathbb{C}$*.*

DůKAZ. Díky Důsledku 49 stačí dokázat σ-aditivitu E v topologii τ_{WOT}. Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost po dvou disjunktních borelovských podmnožin $\mathbb{K}$ a nechť $x \in X$ a $f \in X^*$. Pak $f\big(E\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)x\big) = E_{x,f}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,f}(A_n) = \lim_{N\to\infty} f\big(\big(\sum_{n=1}^{N} E(A_n)\big)x\big)$.

V případě, že X je komplexní Hilbertův, si stačí uvědomit, že $(x, y) \mapsto E_{x,y}$ je seskvilineární zobrazení, takže podle Tvrzení 3 je $E_{x,y} = \frac{1}{4}(E_{x+y,x+y} - E_{x-y,x-y} + iE_{x+iy,x+iy} - iE_{x-iy,x-iy})$ borelovská komplexní míra.

□

TVRZENÍ 55. *Nechť* X*,* Y *jsou Banachovy prostory nad* $\mathbb{K}$*,* E *je rozklad identity na* X *a* $S\colon X \to Y$ *je lineární izomorfismus. Pak* $F\colon A \mapsto S \circ E(A) \circ S^{-1}$*,* $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ *je rozklad identity na* Y*. Jsou-li navíc* X*,* Y *Hilbertovy,* S *izometrie (a tedy unitární) a* E *ortogonální, pak i* F *je ortogonální.*

DůKAZ. Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost po dvou disjunktních borelovských podmnožin $\mathbb{K}$ a nechť $y \in Y$. Pak

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)y = S\left(E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)(S^{-1}y)\right) = S\left(\sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)(S^{-1}y)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} S\big(E(A_n)(S^{-1}y)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n)y,$$

což znamená, že $F\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{K}) \to (\mathcal{L}(Y), \tau_{\mathrm{SOT}})$ je vektorová míra. Dále pro libovolnou $A \subset \mathbb{K}$ borelovskou platí, že $F(A)\circ F(A) = S\circ E(A)\circ S^{-1}\circ S\circ E(A)\circ S^{-1} = S\circ E(A)\circ E(A)\circ S^{-1} = S\circ E(A)\circ S^{-1} = F(A)$, neboli $F(A)$ je projekce. Konečně, $F(\mathbb{K}) = S \circ E(\mathbb{K}) \circ S^{-1} = S \circ I_X \circ S^{-1} = I_Y$ a jsou-li $A, B \subset \mathbb{K}$ borelovské, pak $F(A\cap B) = S\circ E(A\cap B)\circ S^{-1} = S\circ E(A)\circ E(B)\circ S^{-1} = S\circ E(A)\circ S^{-1}\circ S\circ E(B)\circ S^{-1} = F(A)F(B)$.

V ortogonálním případě využijeme Větu 21: Pro $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ je $F(A)^\star = (S^{-1})^\star \circ E(A)^\star \circ S^\star = S \circ E(A) \circ S^{-1} = F(A)$ (Věta 9.102(c)), takže $F(A)$ je ortogonální.

□

Smyslem následující definice je umožnit studium operátoru pomocí studia jeho restrikcí na invariantní podprostory, na kterých má jednodušší chování.

DEFINICE 56. Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Řekneme, že E je rozklad identity vzhledem k operátoru T, pokud E je rozklad identity na X takový, že pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$ platí:

(i) projekce $E(A)$ komutuje s T,
(ii) definujeme-li $T_A = T\restriction_{\mathrm{Rng}\, E(A)}$, pak $\sigma(T_A) \subset \overline{A}$.

Uvědomme si, že podmínka (i) zaručuje, že podprostor $\mathrm{Rng}\, E(A)$ je invariantní vůči T: Pro $x \in \mathrm{Rng}\, E(A)$ je $Tx = TE(A)x = E(A)Tx \in \mathrm{Rng}\, E(A)$. To znamená, že $T_A \in \mathcal{L}(\mathrm{Rng}\, E(A))$ a podmínka (ii) dává smysl.

Lze dokázat, že rozklad identity vzhledem k operátoru T je (alespoň v komplexním případě) určen jednoznačně. Důkaz tohoto tvrzení přesahuje rámec těchto skript.

PŘÍKLAD 57. Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $P \in \mathcal{L}(X)$ je projekce. Pak E rozklad identity na X z Příkladu 51 je rozkladem identity vzhledem k P. Vskutku, podmínka (i) platí, neboť $E(A)$ vždy komutuje s $E(B)$, a tedy speciálně i s $E(\{1\}) = P$. Je-li P netriviální, pak $\sigma(P) = \{0, 1\}$ (Příklad 4.18). Podmínku (ii) si pak rozmyslíme z následující tabulky:

$A \cap \{0,1\}$	$\mathrm{Rng}\, E(A)$	P_A	$\sigma(P_A)$
$\emptyset$	$\{0\}$	0	$\emptyset$
$\{1\}$	$\mathrm{Rng}\, P \neq \{0\}$	I	$\{1\}$
$\{0\}$	$\mathrm{Ker}\, P \neq \{0\}$	0	$\{0\}$
$\{0,1\}$	X	P	$\{0,1\}$

Pro P triviální jsou tabulky obdobné.

Všimněme si, že platí vztah $P = 0 \cdot E(\{0\}) + 1 \cdot E(\{1\}) = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} \lambda E(\{\lambda\})$ (vizte též integrální vzorec ve Větě 61).

◇

Zajímavějším příkladem rozkladu identity vzhledem k operátoru je rozklad E z Příkladu 52, který je ortogonálním rozkladem identity vzhledem k operátoru T z Věty 30. To není příliš obtížné nahlédnout s pomocí vyjádření $T = \sum \lambda_n P_n$.

TVRZENÍ 58. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ a E je rozklad identity vzhledem k T.*

(a) $\sigma(T_A) \subset \sigma(T)$ pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$.
(b) V komplexním případě je $E(\sigma(T)) = I$.
(c) Je-li $E(\sigma(T)) = I$ (speciálně je-li X komplexní), pak pro každou (relativně) otevřenou neprázdnou $G \subset \sigma(T)$ je $E(G) \neq 0$.
(d) Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \subset \mathrm{Rng}\, E(\{\lambda\})$. *Speciálně, je-li λ vlastní číslo T, pak $E(\{\lambda\}) \neq 0$.*

DŮKAZ. (a) Označme $Y = \mathrm{Rng}\, E(A)$. Nechť $\lambda \in \rho(T)$. Pak $\lambda I - T$ je prostý, takže i $\lambda I_A - T_A = (\lambda I - T)\restriction_Y$ je prostý. Dále je $X = (\lambda I - T)(X)$, takže $Y = E(A)(X) = E(A)(\lambda I - T)(X) = (\lambda I - T)E(A)(X) = (\lambda I - T)(Y) = (\lambda I_A - T_A)(Y)$, neboli $\lambda I_A - T_A$ je na. To znamená, že $\lambda \in \rho(T_A)$.

(b) Nechť $A \subset \rho(T)$ je uzavřená. Pak $E(A) = 0$. Vskutku, pokud by to tak nebylo, pak $\emptyset \neq \sigma(T_A) \subset A \subset \rho(T) \subset \rho(T_A)$ dle (a), což je spor. Množina $\rho(T)$ je otevřená, existují tedy uzavřené $A_n \subset \rho(T)$ tak, že $\rho(T) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Podle Faktu 53(c) je $E(\rho(T)) = 0$, a tedy $E(\sigma(T)) = E(\sigma(T)) + E(\rho(T)) = E(\mathbb{C}) = I$.

(c) Předpokládejme, že $E(G) = 0$. Pak $I = E(\sigma(T)) = E(\sigma(T) \setminus G) + E(G) = E(\sigma(T) \setminus G)$. To znamená, že $\mathrm{Rng}\, E(\sigma(T) \setminus G) = X$, takže $T_{\sigma(T)\setminus G} = T$. Odtud dostáváme, že $\sigma(T) = \sigma(T_{\sigma(T)\setminus G}) \subset \overline{\sigma(T) \setminus G} = \sigma(T) \setminus G$, což je spor.

(d) Nechť $x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$. Je-li $A \subset \mathbb{K}$ uzavřená a $\lambda \notin A$, pak $\lambda I_A - T_A$ je invertovatelný, neboť $\sigma(T_A) \subset A$. To znamená, že $E(A)x = (\lambda I_A - T_A)^{-1}(\lambda I_A - T_A)E(A)x = (\lambda I_A - T_A)^{-1}(\lambda I - T)E(A)x =$

$(\lambda I_A - T_A)^{-1} E(A)(\lambda I - T)x = 0$. Nechť nyní $A_n \subset \mathbb{K}$ jsou uzavřené takové, že $\mathbb{K} \setminus \{\lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Podle Faktu 53(c) je $x \in \operatorname{Ker} E(\mathbb{K} \setminus \{\lambda\})$. Tedy $x = E(\mathbb{K})x = E(\mathbb{K} \setminus \{\lambda\})x + E(\{\lambda\})x = E(\{\lambda\})x$, neboli $x \in \operatorname{Rng}(E(\{\lambda\}))$.

□

Poznamenejme, že v (d) výše nemusí obecně platit rovnost (ani v případě ortogonálního rozkladu): Nechť $H = \mathbb{C}^2$ a operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je reprezentovaný maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Pak $\sigma(T) = \{0\}$. Snadno ověříme, že $E\colon \operatorname{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$, $E(A) = \chi_A(0) I$ je ortogonální rozklad identity vzhledem k T. Nicméně $\operatorname{Ker}(0I - T) = \{(x, y) \in H;\ y = 0\} \neq H = \operatorname{Rng} E(\{0\})$. Operátor T ovšem není normální (viz Důsledek 63).

LEMMA 59. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $T \in \mathcal{L}(X)$, $Z \subset X$ je podprostor invariantní vůči T a nechť $S\colon X \to Y$ je lineární izomorfismus. Pak $S(Z)$ je invariantní vůči $U = S \circ T \circ S^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$ a $\sigma(U \restriction_{S(Z)}) = \sigma(T \restriction_Z)$.*

DŮKAZ. Nechť $y \in S(Z)$ a nechť $x \in Z$ je takové, že $y = Sx$. Pak $Uy = S(T(S^{-1}y)) = S(Tx) \in S(Z)$. Dále si uvědomme, že $S \restriction_Z$ je izomorfismus Z na $S(Z)$ a $(S \restriction_Z)^{-1} = S^{-1} \restriction_{S(Z)}$. Tedy $U \restriction_{S(Z)} = S \restriction_Z \circ T \restriction_Z \circ (S \restriction_Z)^{-1}$ a rovnost spekter plyne z Tvrzení 9.34.

□

TVRZENÍ 60. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $S\colon X \to Y$ je lineární izomorfismus. Je-li E rozklad identity vzhledem k T, pak $F\colon A \mapsto S \circ E(A) \circ S^{-1}$, $A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{K})$ je rozklad identity vzhledem k operátoru $U = S \circ T \circ S^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$.*

DŮKAZ. Zobrazení F je rozklad identity na Y dle Tvrzení 55. Dále nechť $A \subset \mathbb{K}$ je borelovská. Pak $F(A)U = S \circ E(A) \circ T \circ S^{-1} = S \circ T \circ E(A) \circ S^{-1} = UF(A)$. Konečně, $\operatorname{Rng} F(A) = S\big(E(A)\big(S^{-1}(Y)\big)\big) = S\big(E(A)(X)\big) = S(\operatorname{Rng} E(A))$, takže $\sigma(U_A) = \sigma(T_A) \subset \overline{A}$ dle Lemmatu 59.

□

Následuje hlavní věta tohoto oddílu.

VĚTA 61. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li Ψ borelovský funkční kalkulus pro $T \in \mathcal{L}(X)$ na K, pak existuje rozklad identity E vzhledem k T takový, že pro každé $x \in X$ a $\phi \in X^*$ je*

$$\phi(Tx) = \int_K \lambda \,\mathrm{d}E_{x,\phi}(\lambda).$$

Tento rozklad má následující vlastnosti:

(a) $E(A) = \Psi(\chi_{A \cap K})$ pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$.

(b) Pro každou $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$ a pro každé $x \in X$ a $\phi \in X^*$ je

$$\phi(\Psi(f)x) = \int_K f \,\mathrm{d}E_{x,\phi}.$$

(c) Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $E(\{\lambda\})$ projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$.

(d) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

(e) Je-li X komplexní a λ izolovaný bod $\sigma(T)$, pak $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

(f) Je-li X Hilbertův a Ψ je *-homomorfismus, pak E je ortogonální.

Na druhou stranu, je-li E je rozklad identity na X takový, že $E(K) = I$ pro nějakou kompaktní $K \subset \mathbb{K}$, pak existuje jednoznačně určené zobrazení $\Psi\colon \mathrm{Bf_b}(K) \to \mathcal{L}(X)$ takové, že platí (b). Toto Ψ je borelovský funkční kalkulus pro $T = \Psi(Id)$ na K, E je rozklad identity vzhledem k T a platí (a)–(e). Je-li navíc X komplexní Hilbertův prostor a E je ortogonální, pak Ψ je *-homomorfismus a T je normální.

DŮKAZ. Položme $E(A) = \Psi(\chi_{A \cap K})$ pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$. Pak $E\colon \operatorname{Bs}(\mathbb{K}) \to (\mathcal{L}(X), \tau_{\mathrm{SOT}})$ je vektorová míra. Vskutku, nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{Bs}(\mathbb{K})$ jsou po dvou disjunktní. Položme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak $\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n \cap K} = \chi_{\bigcup_{n=1}^{N} A_n \cap K} \to \chi_{A \cap K}$ bodově, takže

$$E(A) = \Psi(\chi_{A \cap K}) = \tau_{\mathrm{WOT}}\text{-}\lim_{N \to \infty} \Psi\left(\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n \cap K}\right) = \tau_{\mathrm{WOT}}\text{-}\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \Psi(\chi_{A_n \cap K}) = \tau_{\mathrm{WOT}}\text{-}\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} E(A_n).$$

To znamená, že $E\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{K}) \to (\mathcal{L}(X), \tau_{\mathrm{WOT}})$ je vektorová míra. Nyní stačí použít Důsledek 49.

Dále $E(\mathbb{K}) = \Psi(\chi_K) = I$. Pro libovolné $A, B \subset \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ platí, že $E(A)E(A) = \Psi(\chi_{A\cap K})\Psi(\chi_{A\cap K}) = \Psi(\chi_{A\cap K}\chi_{A\cap K}) = \Psi(\chi_{A\cap K}) = E(A)$, neboli $E(A)$ je projekce, a $E(A\cap B) = \Psi(\chi_{A\cap B\cap K}) = \Psi(\chi_{A\cap K}\chi_{B\cap K}) = \Psi(\chi_{A\cap K})\Psi(\chi_{B\cap K}) = E(A)E(B)$. Tedy E je rozklad identity na X.

Nechť $A \subset \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$. Pak $T = \Psi(Id)$ komutuje s $E(A) = \Psi(\chi_{A\cap K})$. Nechť dále $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{A}$. Položme $f = (\lambda - Id)\chi_{A\cap K}$ a $g(t) = \frac{1}{\lambda - t}$ pro $t \in A\cap K$ a $g(t) = 0$ pro $t \in K\setminus A$. Pak $f, g \in \mathrm{Bf_b}(K)$ a $fg = \chi_{A\cap K}$, takže $E(A) = \Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g) = (\lambda I - T)E(A)\Psi(g)$. Označme $Y = \operatorname{Rng} E(A)$. Protože $\Psi(g)$ komutuje s $\Psi(\chi_{A\cap K}) = E(A)$, je Y invariantní vůči $\Psi(g)$ a $\Psi(g)\restriction_Y \in \mathcal{L}(Y)$. Je tedy $I_A = E(A)\restriction_Y = \big((\lambda I - T)E(A)\Psi(g)\big)\restriction_Y = (\lambda I - T)\circ E(A)\circ \Psi(g)\restriction_Y = (\lambda I_A - T_A)\circ \Psi(g)\restriction_Y$, neboli $\Psi(g)\restriction_Y$ je pravý invers k $\lambda I_A - T_A$ v $\mathcal{L}(Y)$. Analogicky obdržíme, že $I_A = \big(\Psi(g)(\lambda I - T)E(A)\big)\restriction_Y = \Psi(g)\restriction_Y \circ (\lambda I_A - T_A)$. Odtud plyne, že $\lambda \in \rho(T_A)$. Tím jsme dokázali, že E je rozklad identity vzhledem k T.

Vlastnost (a) je přímo definice E.

(b) Zvolme $x \in X$ a $\phi \in X^*$. Nechť nejprve $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$ je jednoduchá, tj. $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$, kde $\alpha_j \in \mathbb{K}$ a $A_j \subset K$ jsou borelovské. Pak $\phi(\Psi(f)x) = \phi\big(\sum_{j=1}^n \alpha_j E(A_j)x\big) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(E(A_j)x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j E_{x,\phi}(A_j) = \int_K f \,\mathrm{d}E_{x,\phi}$. Je-li nyní $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$ obecná, pak existuje omezená posloupnost jednoduchých funkcí $\{f_n\} \subset \mathrm{Bf_b}(K)$ taková, že $f_n \to f$ bodově. Potom $\phi(\Psi(f_n)x) \to \phi(\Psi(f)x)$, zároveň ale díky Lebesgueově větě pro komplexní míry (Věta 15.97) $\phi(\Psi(f_n)x) = \int_K f_n \,\mathrm{d}E_{x,\phi} \to \int_K f \,\mathrm{d}E_{x,\phi}$. Tedy $\phi(\Psi(f)x) = \int_K f \,\mathrm{d}E_{x,\phi}$. Speciálně z (b) plyne vzorec pro $\phi(Tx)$.

(c) Položme $f(t) = \lambda - t$, $t \in K$. Pak $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$ a $f\chi_{\{\lambda\}} = 0$. Tedy $0 = \Psi(f\chi_{\{\lambda\}}) = \Psi(f)\Psi(\chi_{\{\lambda\}}) = (\lambda I - T)E(\{\lambda\})$. Odtud plyne, že $\operatorname{Rng} E(\{\lambda\}) \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Opačná inkluze je obsažena v Tvrzení 58(d).

(d) plyne ihned z (c).

(e) plyne z (d) a Tvrzení 58(c), uvědomíme-li si, že množina $\{\lambda\}$ je otevřená v $\sigma(T)$.

(f) Pro libovolnou $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$ je $E(A)^\star = \Psi(\overline{\chi_{A\cap K}}) = \Psi(\chi_{A\cap K}) = E(A)$, neboli $E(A)$ je samoadjungovaná. Podle Věty 21 je tedy $E(A)$ ortogonální.

Věnujme se nyní druhé části věty. Existenci Ψ dokážeme pouze pro případ, že X je Hilbertův prostor. (Pro obecný Banachův prostor bychom potřebovali mimo jiné verzi Tvrzení 7 pro bilineární formu na $X \times Y^*$, která je w^*-spojitá ve druhé souřadnici.) Dle Tvrzení 47 je $(x, y) \mapsto E_{x,y}$ omezené seskvilineární zobrazení, řekněme konstantou M. Nechť $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$. Pak $S(x, y) = \int_K f \,\mathrm{d}E_{x,y}$ je seskvilineární forma na X a $|S(x, y)| \le \|f\|_\infty \|E_{x,y}\| \le \|f\|_\infty M\|x\|\|y\|$, tedy S je omezená. Podle Tvrzení 7 tak existuje jednoznačně určený operátor $\Psi(f) \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $S(x, y) = \langle \Psi(f)x, y\rangle$.

Podívejme se na vlastnosti Ψ. Nechť $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$. Protože $E(\mathbb{K} \setminus K) = 0$, pomocí (b) pro každé $x \in X$ a $\phi \in X^*$ dostaneme, že $\phi(E(A)x) = E_{x,\phi}(A) = E_{x,\phi}(A \cap K) = \int_K \chi_{A\cap K} \,\mathrm{d}E_{x,\phi} = \phi(\Psi(\chi_{A\cap K})x)$, tedy $E(A) = \Psi(\chi_{A\cap K})$, neboli platí (a). Speciálně, $\Psi(1) = I$.

Dále pro $f, g \in \mathrm{Bf_b}(K)$ a každé $x \in X$, $\phi \in X^*$ opět z (b) plyne, že $\phi(\Psi(f + g)x) = \phi(\Psi(f)x) + \phi(\Psi(g)x) = \phi\big((\Psi(f) + \Psi(g))x\big)$, tedy $\Psi(f + g) = \Psi(f) + \Psi(g)$. Analogicky obdržíme homogenitu Ψ, tudíž Ψ je lineární. Podle Tvrzení 47 je $B\colon (x, \phi) \mapsto E_{x,\phi}$ omezené bilineární zobrazení. S pomocí (b) dostaneme, že pro libovolné $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$ je $\|\Psi(f)\| = \sup_{x\in B_X} \|\Psi(f)x\| = \sup_{x\in B_X} \sup_{\phi\in B_{X^*}} |\phi(\Psi(f)x)| \le \sup_{x\in B_X} \sup_{\phi\in B_{X^*}} \|f\|_\infty \|E_{x,\phi}\| \le \|B\|\|f\|_\infty$, takže Ψ je spojité (v normě). Z (b) a Lebesgueovy věty pro komplexní míry (Věta 15.97) pak ihned plyne, že je-li $\{f_n\} \subset \mathrm{Bf_b}(K)$ omezená posloupnost konvergující bodově k $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$, pak $\Psi(f_n) \to \Psi(f)$ v topologii τ_{WOT}.

Dokažme nyní multiplikativitu Ψ. Nechť nejprve $f, g \in \mathrm{Bf_b}(K)$ jsou jednoduché, tj. $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ a $g = \sum_{k=1}^m \beta_k \chi_{B_k}$, kde $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{K}$ a $A_j, B_k \subset K$ jsou borelovské. Pak $fg = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \beta_k \chi_{A_j\cap B_k}$. Díky linearitě Ψ tedy platí, že

$$\Psi(fg) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \beta_k \Psi(\chi_{A_j\cap B_k}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \beta_k E(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \beta_k E(A_j)E(B_k) =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j E(A_j)\right)\left(\sum_{k=1}^m \beta_k E(B_k)\right) = \Psi(f)\Psi(g).$$

Jsou-li nyní $f, g \in \mathrm{Bf_b}(K)$ obecné, pak existují omezené posloupnosti jednoduchých funkcí $\{f_n\}, \{g_n\} \subset \mathrm{Bf_b}(K)$ takové, že $f_n \to f$ a $g_n \to g$ v normě $\|\cdot\|_\infty$. Pak $f_n g_n \to fg$ v normě $\|\cdot\|_\infty$. Díky spojitosti Ψ a násobení v Banachově algebře $\mathcal{L}(X)$ je tedy $\Psi(fg) = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n g_n) = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)\Psi(g_n) = \Psi(f)\Psi(g)$. Tím jsme dokázali, že Ψ je borelovský funkční kalkulus pro T na K.

Protože platí (a), je E rozklad příslušný Ψ z první části věty. Tedy E je rozklad identity vzhledem k T a platí (a)–(e).

Nechť nyní X je komplexní Hilbertův prostor a E je ortogonální. Pro každé $x \in X$ je $\langle \Psi(\overline{f})x, x\rangle = \int_K \overline{f}\,\mathrm{d}E_{x,x} = \overline{\int_K f\,\mathrm{d}E_{x,x}} = \overline{\langle \Psi(f)x, x\rangle} = \langle x, \Psi(f)x\rangle = \langle \Psi(f)^\star x, x\rangle$, přičemž druhá rovnost platí díky tomu, že míra $E_{x,x}$ je nezáporná (Fakt 53(f)). Dle Důsledku 5 je tedy $\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^\star$. Konečně, $T^\star T = \Psi(\overline{Id})\Psi(Id) = \Psi(\overline{Id}\,Id) = \Psi(Id\,\overline{Id}) = TT^\star$.

□

DŮSLEDEK 62. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a Ψ je borelovský funkční kalkulus pro $T \in \mathcal{L}(X)$ na K. Pak Ψ je automaticky spojité zobrazení (v normě).*

DŮKAZ. Nechť E je rozklad identity vzhledem k T z Věty 61. Podle Tvrzení 47 je $B\colon (x,\phi) \mapsto E_{x,\phi}$ omezené bilineární zobrazení. Nechť $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$. S pomocí vzorce (b) z Věty 61 dostaneme, že $\|\Psi(f)\| = \sup_{x\in B_X} \|\Psi(f)x\| = \sup_{x\in B_X} \sup_{\phi\in B_{X^*}} |\phi(\Psi(f)x)| \le \sup_{x\in B_X} \sup_{\phi\in B_{X^*}} \|f\|_\infty \|E_{x,\phi}\| \le \|B\|\|f\|_\infty$.

□

DŮSLEDEK 63. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální operátor. Pak existuje právě jeden ortogonální rozklad identity E na H takový, že existuje kompaktní $K \subset \mathbb{C}$ obsahující $\sigma(T)$, $E(K) = I$ a pro každé $x \in H$ je*

$$\langle Tx, x\rangle = \int_K \lambda\,\mathrm{d}E_{x,x}(\lambda).$$

Tento rozklad je dán vzorcem $E(A) = \chi_A(T)$. Je to ortogonální rozklad identity vzhledem k T. Pro každou $f \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$ a pro každé $x, y \in H$ je

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f\,\mathrm{d}E_{x,y}.$$

Dále platí (c), (d), (e) z Věty 61.

DŮKAZ. Nechť Φ je borelovský funkční kalkulus pro T na $\sigma(T)$ z Věty 39. Existence E a jeho vlastnosti plynou z Věty 61 aplikované na Φ. Dokažme jednoznačnost. Nechť E je rozklad identity na H takový, že existuje kompaktní $K \subset \mathbb{C}$ obsahující $\sigma(T)$, $E(K) = I$ a pro každé $x \in H$ je $\langle Tx, x\rangle = \int_K \lambda\,\mathrm{d}E_{x,x}(\lambda)$. Nechť Ψ je borelovský funkční kalkulus příslušný E z druhé části Věty 61. Pak $\langle \Psi(Id)x, x\rangle = \int_K \lambda\,\mathrm{d}E_{x,x}(\lambda) = \langle Tx, x\rangle$ pro každé $x \in H$, takže podle Důsledku 5 je $\Psi(Id) = T$, neboli Ψ je borelovský funkční kalkulus pro T na K. Podle Věty 39(d) je pak $E(A) = \Psi(\chi_{A\cap K}) = \chi_A(T)$ pro každou $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$.

□

Uvědomme si, že míry $E_{x,y}$ v předchozí větě jsou ve skutečnosti míry $\mu_{x,y}$ z konstrukce borelovského funkčního kalkulu před Větou 39.

PŘÍKLAD 64. Nechť H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{K}$ a $\{u_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální báze H. Nechť $(\lambda_\gamma) \in \ell_\infty(\Gamma)$ a operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je definovaný předpisem

$$Tx = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma \langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma.$$

(Viz Příklad 27.) Snadno nahlédneme, že vzorec $\Psi(f)x = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\lambda_\gamma)\langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma$ pro $f \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$ a $x \in H$ definuje borelovský funkční kalkulus pro T na $\sigma(T)$, který je *-homomorfismus. (Na bodovou konvergenci omezených posloupností lze použít Lebesgueovu větu pro aritmetickou míru na Γ, viz též Příklad 65.) Podle Věty 61 je tedy ortogonální rozklad identity vzhledem k T dán vzorcem $E(A)x = \sum_{\gamma:\,\lambda_\gamma\in A} \langle x, u_\gamma\rangle u_\gamma$ pro $x \in H$ a $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$.

◇

Nechť μ je míra a $f \in L_\infty(\mu)$. Pak definujeme esenciální obor hodnot f jako $\operatorname{ess\,Rng} f = \{y \in \mathbb{K};\ \mu\big(f^{-1}(U(y,\varepsilon))\big) \neq 0 \text{ pro každé } \varepsilon > 0\}$. Není obtížné si rozmyslet, že $\operatorname{ess\,Rng} f$ je kompaktní podmnožina $\overline{\operatorname{Rng} f}$ a $\|f\|_\infty = \max\{|y|;\ y \in \operatorname{ess\,Rng} f\}$.

PŘÍKLAD 65. Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou s následující vlastností: Pro každou $A \subset \Omega$ takovou, že $\mu(A) > 0$, existuje $B \subset A$ taková, že $0 < \mu(B) < +\infty$. (Například μ je σ-konečná nebo diskrétní.) Nechť $H = L_2(\mu)$ a $g \in L_\infty(\mu)$. Definujme $T\colon H \to H$ předpisem

$$T(f) = gf.$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) $T \in \mathcal{L}(H)$ a $\|T\| = \|g\|_\infty$.
(b) $T^\star f = \overline{g} f$ pro $f \in H$. Dále T je normální; T je samoadjungovaný právě tehdy, když g je s. v. reálná. T je nezáporný, právě když $g \geq 0$ s. v.
(c) Pro $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{ess\,Rng} g$ je $(\lambda I - T)^{-1} f = \frac{1}{\lambda - g} f$ pro každé $f \in H$.
(d) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \mu(g^{-1}(\lambda)) > 0\}$ a $\sigma(T) = \operatorname{ess\,Rng} g$.
(e) Vzorec $\Psi(h) f = (h \circ g) f$ pro $f \in H$ definuje borelovský funkční kalkulus pro T na $\operatorname{ess\,Rng} g$, který je *-homomorfismus.
(f) Ortogonální rozklad identity vzhledem k T je dán vzorcem $E(A) f = \chi_{g^{-1}(A)} f$ pro $f \in H$ a $A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{K})$.

(a) Linearita T je zřejmá. Dále $\|Tf\|^2 = \int |gf|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \|g\|_\infty^2 \int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty^2 \|f\|^2$ pro každé $f \in H$, a tedy $T \in \mathcal{L}(H)$ a $\|T\| \leq \|g\|_\infty$. Na druhou stranu, zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a položme $A = \{t \in \Omega;\ |g(t)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Protože $\mu(A) > 0$, existuje $B \subset A$ konečné kladné míry. Pak $\chi_B \in H$ a $\|\chi_B\|^2 = \int \chi_B \,\mathrm{d}\mu = \mu(B)$. Položme $f = \frac{\chi_B}{\|\chi_B\|}$. Pak $f \in S_H$ a

$$\|Tf\|^2 = \frac{1}{\|\chi_B\|^2} \int_B |g|^2 \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\|\chi_B\|^2} \int_B (\|g\|_\infty - \varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\mu = (\|g\|_\infty - \varepsilon)^2 \frac{\mu(B)}{\|\chi_B\|^2} = (\|g\|_\infty - \varepsilon)^2.$$

Tedy $\|T\| = \|g\|_\infty$.

(b) Položme $S(f) = \overline{g} f$ pro $f \in H$. Podle (a) je $S \in \mathcal{L}(H)$. Dále $\langle Tf, u\rangle = \int g f \overline{u} \,\mathrm{d}\mu = \int f \overline{\overline{g} u} \,\mathrm{d}\mu = \langle f, Su\rangle$ pro každé $f, u \in H$, a tedy $T^\star = S$. Normálnost T plyne z výpočtu $T^\star T f = \overline{g} g f = g \overline{g} f = T T^\star f$. Dále T je samoadjungovaný, právě když $gf = \overline{g} f$ pro každé $f \in H$, neboli právě když $g = \overline{g}$ s. v. Vskutku, pokud $A = \{t \in \Omega;\ g(t) \neq \overline{g}(t)\}$ má kladnou míru, pak existuje $B \subset A$ konečné kladné míry, takže $\chi_B \in H$. Pak ovšem $g\chi_B = \overline{g}\chi_B$, neboli $g = \overline{g}$ s. v. na B, což je spor.

V reálném případě je tedy T samoadjungovaný. Podle Důsledku 20 je tudíž T nezáporný, právě když $0 \leq \langle Tf, f\rangle = \int g f \overline{f} \,\mathrm{d}\mu = \int g |f|^2 \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in H$, neboli právě když $g \geq 0$ s. v. Vskutku, pokud $A = \{t \in \Omega;\ g(t) < 0\}$ má kladnou míru, pak existuje $B \subset A$ konečné kladné míry, takže $\chi_B \in H$. Pak ovšem $0 \leq \int g \chi_B^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_B g \,\mathrm{d}\mu < 0$, což je spor.

(c) Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{ess\,Rng} g$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mu(\{t \in \Omega;\ |g(t) - \lambda| < \varepsilon\}) = 0$, takže $\frac{1}{\lambda - g} \in L_\infty(\mu)$. Definujeme-li $S(f) = \frac{1}{\lambda - g} f$, pak podle (a) je $S \in \mathcal{L}(H)$. Protože $(\lambda - g)\frac{1}{\lambda - g} = 1$, plyne odtud, že $S = (\lambda I - T)^{-1}$.

(d) Pokud $\lambda \in \mathbb{K}$ je takové, že $\mu(g^{-1}(\lambda)) > 0$, vezmeme $A \subset g^{-1}(\lambda)$ konečné kladné míry. Pak $\chi_A \in H \setminus \{0\}$ a $T\chi_A = g\chi_A = \lambda\chi_A$, takže $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Na druhou stranu, nechť $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a $f \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ je nenulová. Pak $(\lambda - g) f = 0$ s. v. Odtud plyne, že $\mu(g^{-1}(\lambda)) > 0$, protože jinak by bylo $f = 0$ s. v.

Dále, podle (c) je $\sigma(T) \subset \operatorname{ess\,Rng} g$. Na druhou stranu nechť $\lambda \in \operatorname{ess\,Rng} g$. Chceme ukázat, že $\lambda \in \sigma(T)$. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. $\lambda I - T$ je invertovatelný. Díky předchozímu odstavci je $\mu(g^{-1}(\lambda)) = 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ vezměme množiny $A_n = g^{-1}(U(\lambda, \frac{1}{n}))$. Protože $\mu(A_n) > 0$, existují množiny $B_n \subset A_n$ konečné kladné míry. Pak $\chi_{B_n} \in H \setminus \{0\}$ a pro $f_n = (\lambda I - T)^{-1}\chi_{B_n}$ platí, že $\chi_{B_n} = (\lambda I - T) f_n = (\lambda - g) f_n$. Tedy $f_n = \frac{\chi_{B_n}}{\lambda - g}$ s. v. Pak ale

$$\|f_n\|^2 = \int \left|\frac{\chi_{B_n}}{\lambda - g}\right|^2 \mathrm{d}\mu = \int_{B_n} \frac{1}{|\lambda - g|^2} \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{B_n} n^2 \,\mathrm{d}\mu = n^2 \mu(B_n) = n^2 \|\chi_{B_n}\|^2.$$

To znamená, že $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což je spor.

(e) Potřebné algebraické vlastnosti Ψ jsou téměř zjevné. Je-li $\{h_n\} \subset \mathrm{Bf_b}(\operatorname{ess\,Rng} g)$ omezená posloupnost (řekněme konstantou C) konvergující bodově k $h \in \mathrm{Bf_b}(\operatorname{ess\,Rng} g)$, pak $(h_n \circ g) f \overline{u} \to (h \circ g) f \overline{u}$ bodově s. v. a $|(h_n \circ g) f \overline{u}| \le C|f||u| \in L_1(\mu)$ pro každé $f, u \in H$. Díky Lebesgueově větě tedy $\langle \Psi(h_n) f, u\rangle = \int (h_n \circ g) f \overline{u}\,\mathrm{d}\mu \to \int (h \circ g) f \overline{u}\,\mathrm{d}\mu = \langle \Psi(h) f, u\rangle$.

(f) plyne z (e) a Věty 61.

◇

Pojem obrazu vektorové míry je triviálním zobecněním klasického pojmu obrazu míry pro skalární míry:

DEFINICE 66. Nechť $(S, \mathcal{S})$, $(T, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory, X je topologický vektorový prostor, $\mu\colon \mathcal{S} \to X$ je vektorová míra a $f : S \to T$ je měřitelné zobrazení. Zobrazení $f(\mu)\colon \mathcal{T} \to X$ definované vzorcem $f(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ pro $A \in \mathcal{T}$ se nazývá obrazem vektorové míry μ.

Obraz vektorové míry je zjevně vektorová míra. Okamžitě je též vidět, že obraz rozkladu identity na Banachově prostoru X při borelovském zobrazení z $\mathbb{K}$ do $\mathbb{K}$ (jakožto obraz vektorové míry) je opět rozklad identity na X, resp. obraz ortogonálního rozkladu identity je opět ortogonální rozklad identity. Dále je-li E rozklad identity na X a $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ je borelovské, pak pro každé $x \in X$ a $\phi \in X^*$ platí, že $f(E_{x,\phi})(A) = E_{x,\phi}(f^{-1}(A)) = \phi\big(E(f^{-1}(A))x\big) = \phi(f(E)(A)x) = f(E)_{x,\phi}(A)$ pro $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{K})$, neboli $f(E_{x,\phi}) = f(E)_{x,\phi}$.

TVRZENÍ 67. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, E je rozklad identity vzhledem k $T \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $E(K) = I$ pro nějakou kompaktní $K \subset \mathbb{K}$, a $f \in \mathrm{Bf_b}(K)$. Pak $f(E)$ je rozklad identity vzhledem k $f(T) = \Psi(f)$, kde Ψ je borelovský funkční kalkulus pro T z Věty 61.*

DŮKAZ. Pro libovolná $x \in X$ a $\phi \in X^*$ podle Věty 61 platí, že

$$\phi(f(T)x) = \int_K f\,\mathrm{d}E_{x,\phi} = \int_{\overline{f(K)}} \lambda\,\mathrm{d}f(E_{x,\phi})(\lambda) = \int_{\overline{f(K)}} \lambda\,\mathrm{d}f(E)_{x,\phi}(\lambda),$$

přičemž jsme využili tvrzení o integraci vzhledem k obrazu (skalární) míry při borelovské funkci $f : K \to L = \overline{f(K)}$. Zjevně $f(E)(L) = I$. Podle Věty 61 je tedy $f(E)$ rozklad identity vzhledem k operátoru $S \in \mathcal{L}(X)$, který splňuje $\phi(Sx) = \int_L \lambda\,\mathrm{d}f(E)_{x,\phi}(\lambda)$ pro každé $x \in X$ a $\phi \in X^*$. To znamená, že $S = f(T)$.

□

PŘÍKLAD 68 (invariantní podprostory; viz poznámku pod čarou na str. 213). Nechť X je netriviální Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Je-li $T = \lambda I$, pak libovolný netriviální podprostor X je netriviální invariantní podprostor operátoru T. Je-li λ vlastní číslo T a $T \neq \lambda I$, pak $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ je netriviální invariantní podprostor operátoru T.

Nemá-li T žádné vlastní číslo, pak k nalezení netriviálního invariantního podprostoru můžeme použít rozklad identity: Je-li E rozklad identity vzhledem k T a $A \subset \mathbb{K}$ je taková, že $0 \neq E(A) \neq I$, pak $\operatorname{Rng} E(A)$ je netriviální invariantní podprostor operátoru T. Je-li tedy X komplexní, pak $\sigma(T)$ obsahuje alespoň dva prvky, řekněme α, β (Věta 61(e)). Nechť $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ jsou disjunktní otevřené množiny takové, že $\alpha \in G_1$ a $\beta \in G_2$. Pak dle Tvrzení 58(c) je $E(G_1) \neq 0$ a $E(G_2) \neq 0$. Dle Faktu 53(b) je $E(\sigma(T) \setminus G_1) \neq 0$, takže $E(G_1) \neq I$. Podprostor $\operatorname{Rng} E(G_1)$ je tedy netriviální invariantní podprostor operátoru T.

Speciálně, je-li X komplexní Hilbertův prostor a T normální, pak díky Důsledku 63 má T netriviální invariantní podprostor.

◇

Nechť Ψ je borelovský funkční kalkulus pro $T \in \mathcal{L}(X)$ na K. Podívejme se blíže na větu o obrazu spektra (viz Větu 39(e)).

$|\mu|$ je konečně aditivní míra; $|E|$ je míra se stejnými nulovými množinami jako E

Kapitola 11

Lokálně konvexní topologie a slabá kompaktnost

■■■V této kapitole prozkoumáme některé hlubší aspekty teorie lokálně konvexních prostorů. První oddíl má za cíl předestřít Krejnovu-Milmanovu větu 17.

1. Konvexní množiny

DEFINICE 1. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že $x \in C$ je extremálním bodem množiny C, jestliže x není vnitřním bodem žádné úsečky ležící v C, tj. pokud $u, v \in C$ a $x = \lambda u + (1-\lambda)v$ pro nějaké $\lambda \in (0,1)$, pak $u = v$. Množinu všech extremálních bodů C značíme $\operatorname{ext} C$.

Snadno si lze rozmyslet, že $x \in \operatorname{ext} C$, právě když x není středem žádné nedegenerované úsečky ležící v C, a právě když $C \setminus \{x\}$ je konvexní.

Uvědomme si, že pokud A je podmnožina vektorového prostoru, pak $\operatorname{ext}\operatorname{conv} A \subset A$. Vskutku, je-li $x \in \operatorname{conv} A \setminus A$, pak $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, kde $n > 1$, $x_1, \dots, x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \notin \operatorname{conv}\{x_2, \dots, x_n\}$. Položíme-li $\mu = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i$, pak $y = \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i \in \operatorname{conv} A$, $x = \lambda_1 x_1 + \mu y$ a $x_1 \neq y$, takže $x \notin \operatorname{ext}\operatorname{conv} A$.

Dále je-li C konvexní podmnožina topologického vektorového prostoru X, pak $\operatorname{ext} C \subset \partial C$. Vskutku, je-li $x \in \operatorname{Int} C$, pak existuje U vyvážené okolí 0 takové, že $x + U \subset C$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je netriviální, takže existuje $y \in U$, $y \neq 0$ (U je pohlcující). Pak úsečka s krajními body $x + y$ a $x - y$ leží v C a x je její vnitřní bod, takže $x \notin \operatorname{ext} C$.

Ne každá uzavřená konvexní množina má nějaký extremální bod: stačí vzít např. libovolnou přímku v $\mathbb{R}^2$. Extremální body tedy hrají roli především při studiu uzavřených omezených konvexních množin.

PŘÍKLAD 2. Extremálními body uzavřeného čtverce v rovině jsou právě jeho vrcholy. Extremálními body uzavřeného kruhu v rovině jsou právě body jeho hraniční kružnice.

◇

Připomeňme, že afinní podprostor vektorového prostoru X je množina tvaru $x + Y$, kde $x \in X$ a Y je vektorový podprostor X. Afinní zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y je zobrazení tvaru $x \mapsto a + L(x)$, kde $L\colon X \to Y$ je lineární a $a \in Y$. Posunutí zachovává konvexitu, takže obrazem i vzorem konvexní množiny při afinním zobrazení je opět konvexní množina.

DEFINICE 3. Nechť C je konvexní podmnožina reálného vektorového prostoru X. Afinní nadrovina $W \subset X$ se nazývá opěrnou nadrovinou množiny C (v bodě $x \in C$), pokud $W \cap C \neq \emptyset$ (resp. $x \in W \cap C$) a C leží celá v jednom z poloprostorů určených W (tj. existují nenulová lineární forma f na X a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $W = f^{-1}(\alpha)$ a $\sup_C f \leq \alpha$).

FAKT 4. *Nechť C je konvexní množina ve vektorovém prostoru X.*

(a) Je-li $B \subset C$ konvexní, pak $B \cap \operatorname{ext} C \subset \operatorname{ext} B$.
(b) Je-li Y vektorový prostor a $T\colon X \to Y$ afinní zobrazení, pak T zachovává konvexní kombinace. Je-li T prosté, pak $\operatorname{ext} T(C) = T(\operatorname{ext} C)$.
(c) Je-li X reálný a $W \subset X$ opěrná nadrovina množiny C, pak $\operatorname{ext}(C \cap W) = W \cap \operatorname{ext} C$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in B \cap \operatorname{ext} C$. Pak x není vnitřním bodem žádné úsečky ležící v C, a tedy ani v B, takže $x \in \operatorname{ext} B$.

(b) Nechť $T = a + L$, kde $a \in Y$ a $L\colon X \to Y$ je lineární. Pak $T\bigl(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\bigr) = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i L(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a + L(x_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)$ kdykoli $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a $x_i \in X$. Je-li T prosté, pak pro každou nedegenerovanou úsečku $[x, y] \subset C$ je T bijekce mezi $[x, y]$ a nedegenerovanou úsečkou $[T(x), T(y)]$ v $T(C)$. Odtud již rovnost $\operatorname{ext} T(C) = T(\operatorname{ext} C)$ snadno plyne.

(c) $\supset$ plyne z (a) pro $B = C \cap W$.

$\subset$ Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a f je lineární forma na X taková, že $W = f^{-1}(\alpha)$ a $\sup_C f \leq \alpha$. Nechť $z \in \operatorname{ext}(C \cap W)$. Jsou-li $x, y \in C$ takové, že $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, pak $x, y \in W$. V opačném případě by totiž platilo, že $\alpha = f(z) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) < \alpha$, což je spor. To ale znamená, že $x = y = z$, neboli $z \in \operatorname{ext} C$.

□

VĚTA 5. [1] *Je-li C kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, pak každý bod $x \in C$ je konvexní kombinací nejvýše $n+1$ extremálních bodů množiny C. Tedy $C = \operatorname{conv} \operatorname{ext} C$.*

V důkazu využijeme následující lemma:

LEMMA 6. *Nechť $C \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní. Pak buďto $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$, nebo C leží v nějaké afinní nadrovině v $\mathbb{R}^n$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že C leží v afinní nadrovině W. Je-li x vnitřní bod C, pak $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(C - x) \subset W - x$, neboť okolí 0 je pohlcující a $W - x$ je nadrovina. To je spor.

Na druhou stranu, nechť C neleží v žádné afinní nadrovině. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 \in C$, a tedy $\operatorname{span} C = \mathbb{R}^n$. Pak existují lineárně nezávislé vektory $x_1, \dots, x_n \in C$. Lineární zobrazení $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(e_i) = x_i$, kde $e_1, \dots, e_n$ jsou kanonické bázové vektory v $\mathbb{R}^n$, je izomorfismus (Věta 1.66). Označme $A = \operatorname{conv}\{0, e_1, \dots, e_n\} = \{t \in [0,1]^n;\ \sum_{i=1}^n t_i \leq 1\}$. Snadno spočteme, že $B_\infty\bigl((\frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}), \frac{1}{2n}\bigr) \subset A$ (koule v normě $\|\cdot\|_\infty$), takže A má neprázdný vnitřek. Protože $T(A) \subset C$, má i C neprázdný vnitřek.

□

DŮKAZ VĚTY 5. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $C \neq \emptyset$. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ je C uzavřený interval a tvrzení je tak zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení platí pro dimenzi $n-1$ a nechť $C \subset \mathbb{R}^n$. Předpokládejme nejprve, že $\operatorname{Int} C = \emptyset$. Podle Lemmatu 6 leží C v nějaké afinní nadrovině W. Pak existuje afinní bijekce $T\colon \mathbb{R}^{n-1} \to W$, která je homeomorfismus (Věta 1.66). Množina $T^{-1}(C) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je kompaktní a konvexní, takže můžeme využít indukčního předpokladu v $\mathbb{R}^{n-1}$. Tvrzení věty pro C pak plyne z Faktu 4(b).

Nechť nyní $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$ a $x \in C$. Je-li $x \in \partial C$, pak podle oddělovací věty (Věta 6.70(a)) použité na množiny $\operatorname{Int} C$ a $\{x\}$ a podle Tvrzení 6.12(e) existuje $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ takový, že $f(y) \leq \alpha = f(x)$ pro každé $y \in C$, neboli $W = f^{-1}(\alpha)$ je opěrná nadrovina množiny C v bodě x. Podle indukčního předpokladu (vizte argument výše) je x konvexní kombinací nejvýše n extremálních bodů kompaktní konvexní množiny $C \cap W$, což jsou podle Faktu 4(c) též extremální body C.

Zbývá případ, kdy $x \in \operatorname{Int} C$. Protože $\partial C \neq \emptyset$ (v opačném případě by C i $\mathbb{R}^n \setminus C$ byly uzavřené, a tedy C by byla obojetná, což není možné), dle předchozího existuje $z_1 \in \operatorname{ext} C$. Přímka procházející body z_1 a x protíná kompaktní konvexní množinu C v úsečce $[z_1, y]$, kde $y \in \partial C$. Podle předchozího je y konvexní kombinací nejvýše n extremálních bodů $z_2, \dots, z_k$ množiny C. Tedy $y = \sum_{j=2}^k \alpha_j z_j$, kde $\alpha_j \geq 0$ a $\sum_{j=2}^k \alpha_j = 1$. Dále $x = \alpha y + (1-\alpha) z_1$ pro nějaké $\alpha \in (0,1)$, takže $x = \sum_{j=2}^k \alpha\alpha_j z_j + (1-\alpha) z_1$, což je konvexní kombinace $k \leq n+1$ extremálních bodů $z_1, \dots, z_k$.

□

DŮSLEDEK 7. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \operatorname{conv} A$, pak existuje nejvýše $(n+1)$-prvková podmnožina $B \subset A$ taková, že $x \in \operatorname{conv} B$.*

DŮKAZ. Nechť $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ je konvexní kombinace prvků z A. Množina $C = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ je kompaktní (je spojitým obrazem kompaktní množiny $\bigl\{\lambda \in [0,1]^m;\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\bigr\}$ při zobrazení $\lambda \mapsto$

[1] H. Minkowski v $\mathbb{R}^3$ (nejpozději 1909), v $\mathbb{R}^n$ pak C. Carathéodory (1911) a Ernst Steinitz (1913).

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$), takže podle Věty 5 je $x \in \operatorname{conv} B$, kde $B \subset \operatorname{ext} C$ má nejvýše $n+1$ prvků. Ale $\operatorname{ext} C \subset \{x_1, \dots, x_m\} \subset A$.

□

DŮSLEDEK 8. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní. Pak* $\operatorname{conv} K$ *je též kompaktní.*

DŮKAZ. Položme $\Delta = \left\{\lambda \in [0,1]^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\}$. Pak Δ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$. Definujme zobrazení $\Phi\colon \Delta \times K^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\Phi(\lambda, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Pak Φ je spojité, a tedy $\operatorname{Rng} \Phi$ je kompaktní. Podle Důsledku 7 je $\operatorname{conv} K \subset \operatorname{Rng} \Phi \subset \operatorname{conv} K$, takže $\operatorname{conv} K = \operatorname{Rng} \Phi$ je kompaktní.

□

V nekonečněrozměrných prostorech máme následující verzi:

TVRZENÍ 9. *Nechť X je Fréchetův prostor a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ a $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ jsou kompaktní.*

DŮKAZ. Množina K je totálně omezená (Tvrzení 6.28), takže i $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ je totálně omezený (Tvrzení 6.106, 6.67(b) a 6.27(e)). Nechť ρ je translačně invariantní úplná metrika generující topologii X. Dle Faktu 6.30 je $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ totálně omezený v metrice ρ. Navíc je $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ uzavřený, a tedy úplný v metrice ρ. To znamená, že je kompaktní.

Dále položme $L = \bigcup_{|\alpha| \le 1} \alpha K$. Pak L je vyvážená a kompaktní (je spojitým obrazem kompaktu $B_{\mathbb{K}}(0,1) \times K$ při spojitém zobrazení $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$), takže podle předchozího je $\overline{\operatorname{conv}}\, L$ kompaktní. Protože $\overline{\operatorname{aconv}}\, K \subset \overline{\operatorname{conv}}\, L$ (Tvrzení 6.106, Fakt 6.45(a)), je i $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ kompaktní.

□

Příklad 6.68 ukazuje, že bez lokální konvexity předchozí tvrzení neplatí.

V nekonečněrozměrných prostorech je situace kolem extremálních bodů poněkud komplikovanější.

PŘÍKLAD 10. Jednotková koule v c_0 nemá žádný extremální bod. Je-li totiž $z \in B_{c_0}$ libovolný bod, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|z_n| \le \frac{1}{2}$. Položíme-li $x = z + \frac{1}{2} e_n$ a $y = z - \frac{1}{2} e_n$, kde e_n je příslušný kanonický bázový vektor, pak $x, y \in B_{c_0}$, $x \ne y$ a $z = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y$, takže z není extremálním bodem B_{c_0}.

◇

DEFINICE 11. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že neprázdná $E \subset C$ je extremální podmnožinou C, pokud žádný bod E není netriviální konvexní kombinací bodů z C, z nichž některý leží mimo E, tj. je-li $\lambda x + (1-\lambda) y \in E$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0,1)$, pak $x, y \in E$.

Všimněme si, že x je extremálním bodem C, právě když $\{x\}$ je extremální podmnožinou C. Dále je snadno vidět, že sjednocení, resp. neprázdný průnik libovolného systému extremálních podmnožin C je opět extremální podmnožina C.

PŘÍKLADY 12.

- Je-li C konvexní podmnožina vektorového prostoru, pak C a $\operatorname{ext} C$ jsou extremální podmnožiny C (jsou-li neprázdné).
- Libovolná hrana uzavřeného čtverce v rovině, resp. sjednocení libovolných hran je jeho extremální podmnožinou.
- Je-li C konvexní podmnožina reálného vektorového prostoru X a W je opěrná nadrovina C, pak $C \cap W$ je extremální podmnožina C. Vskutku, nechť f je nenulová lineární forma na X taková, že $W = f^{-1}(\alpha)$ a $\sup_C f \le \alpha$. Předpokládejme, že $u = \lambda x + (1-\lambda) y \in C \cap W$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0,1)$. Je-li $f(x) < \alpha$ nebo $f(y) < \alpha$, pak $\alpha = f(u) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) < \alpha$, což je spor. Tedy $x, y \in W$.

  Dále pokud je navíc X topologický vektorový prostor, pak $C \cap W \subset \partial C$: Nechť $x \in C \cap W$. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{Int} C$. Nechť $e \in X$ je takový, že $f(e) = 1$. Protože $C - x$ je okolím 0, množina $C - x$ je pohlcující, a tedy existuje $t > 0$ takové, že $te \in C - x$. Ale $f(x + te) = f(x) + t f(e) = \alpha + t > \alpha$, což je spor.

- Je-li C konvexní podmnožina topologického vektorového prostoru, která má neprázdný vnitřek, pak ∂C je extremální podmnožinou C. Vskutku, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že prostor je reálný. Pro každý bod $x \in \partial C$ existuje podle oddělovací věty (Věta 6.70(a)) a Tvrzení 6.12(e) opěrná nadrovina C v bodě x (vizte též důkaz Věty 5). Tedy $\partial C = \bigcup\{C \cap W;\ W \text{ je opěrná nadrovina } C\}$ a můžeme použít předchozí bod.

DEFINICE 13. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že funkce $f : C \to \mathbb{R}$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in C$ a $\lambda \in [0,1]$ platí, že $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

LEMMA 14. *Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru, $f : C \to \mathbb{R}$ je konvexní a E je extremální podmnožina C. Pak množina bodů, ve kterých f nabývá maxima na E, je buďto prázdná, nebo je to extremální podmnožina C.*

DŮKAZ. Označme $F = \{x \in E;\ f(x) = \max_E f\}$ a předpokládejme, že je neprázdná. Dále označme $M = \max_E f$. Nechť $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0,1)$. Pak dle předpokladu $x, y \in E$, čili $f(x) \le M$ a $f(y) \le M$. Pokud x nebo y neleží v F, pak $f(x) < M$ nebo $f(y) < M$, takže $M = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) < M$, což je spor. Tedy F je extremální podmnožina C. □

Připomeňme, že systém množin se nazývá centrovaný, pokud každý jeho konečný podsystém má neprázdný průnik, a že centrovaný systém uzavřených podmnožin kompaktního prostoru má neprázdný průnik.

LEMMA 15. *Nechť X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor) a nechť $C \subset X$ je konvexní. Pak každá kompaktní extremální podmnožina C obsahuje extremální bod C.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že X je Hausdorffův, neboť podle předpokladu je (X, w) Hausdorffův. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je reálný. Nechť $E \subset C$ je kompaktní extremální podmnožina C. Položme

$$\mathcal{K} = \{K \subset E;\ K \text{ je kompaktní extremální podmnožina } C\}.$$

Pak $(\mathcal{K}, \supset)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná (obsahuje E). Je-li $\mathcal{R}$ řetězec v $\mathcal{K}$, pak $\bigcap_{K \in \mathcal{R}} K$ je kompaktní extremální podmnožina C (je neprázdná, neboť $\mathcal{R}$ je centrovaný), která je zjevně horní závorou $\mathcal{R}$. Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $F \in \mathcal{K}$. Tvrdíme, že F je jednobodová množina (a tedy je to extremální bod C). Jsou-li $x, y \in F$, $x \neq y$, pak dle předpokladu existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) < f(y)$. Protože F je kompaktní, nabývá f na F maxima, takže dle Lemmatu 14 je $H = \{z \in F:\ f(z) = \max_F f\}$ extremální podmnožina C. Dále je H zjevně uzavřená podmnožina F, takže je kompaktní. Protože $x \notin H$, je $F \supsetneq H$, což je spor s maximalitou F. □

Připomeňme, že reálná funkce f na topologickém prostoru X se nazývá shora polospojitá, pokud pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in X;\ f(x) \ge \alpha\}$ uzavřená.

VĚTA 16 (Bauerův princip maxima[2]). *Nechť X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor), nechť $K \subset X$ je neprázdná kompaktní konvexní množina a $f : K \to \mathbb{R}$ je shora polospojitá konvexní funkce. Pak f nabývá maxima na K v extremálním bodě K.*

DŮKAZ. Označme $M = \{x \in K;\ f(x) = \max_K f\}$. Podle Tvrzení 15.63 je M neprázdná, takže podle Lemmatu 14 je M extremální podmnožina K. Dále je M zjevně uzavřená podmnožina K, a tedy je kompaktní. Podle Lemmatu 15 obsahuje M extremální bod K. □

[2] Heinz Bauer (1958)

VĚTA 17 (Krejnova-Milmanova[3]). *Nechť X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor) a nechť $K \subset X$ je kompaktní a konvexní. Pak* $K = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je reálný a K je neprázdná. Dle Lemmatu 15 je množina $\operatorname{ext} K$ neprázdná. Zřejmě $\overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K \subset K$ a je to konvexní kompaktní množina. Předpokládejme, že existuje $x \in K \setminus \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$. Podle předpokladu je (X, w) Hausdorffův, takže $\overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$ je kompaktní i ve slabé topologii. Dle oddělovací věty použité v lokálně konvexním prostoru (X, w) (Věta 6.70(b)) a Důsledku 6.89 existuje $f \in (X, w)^* = X^*$ takový, že $f(x) > \sup_{\overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K} f$. To je ovšem spor s Bauerovým principem maxima (Věta 16).

□

PŘÍKLAD 18 (Stefan Straszewicz (1935)). Množina $\operatorname{ext} K$ nemusí být uzavřená ani v $\mathbb{R}^3$: Položme $A = \{(x, y, 0);\ (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$. Pak $\operatorname{ext} \operatorname{conv} A = A \setminus \{(0,0,0)\}$.

◇

TVRZENÍ 19. *Nechť $K_1, \dots, K_n$ jsou kompaktní konvexní množiny v Hausdorffově topologickém vektorovém prostoru X. Pak* $\operatorname{conv}(K_1 \cup \dots \cup K_n)$ *je kompaktní množina.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou všechny množiny $K_1, \dots, K_n$ neprázdné. Vybereme z každé množiny K_i prvek z_i, $i = \{1, \dots, n\}$. Označme $M = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Naším prvním cílem je dokázat, že

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_1 \in K_1, \dots, x_n \in K_n \right\}.$$

Dle Tvrzení 1.17 platí

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{j=1}^m \mu_j y_j;\ y_1, \dots, y_m \in M, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0, \sum_{j=1}^m \mu_j = 1, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nechť tedy $y = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j$, kde $y_1, \dots, y_m \in M, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0, \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$. Pro $i = \{1, \dots, n\}$ definujeme množiny

$$I_i = \{j \in \{1, \dots, m\};\ y_j \in K_i \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_{i-1})\}$$

a uvědomme si, že pak množiny I_i, $i \leq n$ tvoří disjunktní pokrytí $\{1, \dots, m\}$. Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ nechť

$$\lambda_i = \begin{cases} \sum_{j \in I_i} \mu_j, & I_i \neq \emptyset, \\ 0, & I_i = \emptyset \end{cases}$$

a

$$x_i = \begin{cases} \sum_{j \in I_i} \frac{\mu_j}{\lambda_i} y_j, & \lambda_i > 0, \\ z_i, & \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Díky konvexitě K_i je $x_i \in K_i$ a platí

$$y = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in I_i} \mu_j y_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Tedy

$$\operatorname{conv} M \subset \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_1 \in K_1, \dots, x_n \in K_n \right\}.$$

---

[3]Větu dokázal Griffith Baley Price (1937) pro normově kompaktní množiny ve striktně konvexních prostorech, Marko Grigorovič Krejn (Марко Григорович Крейн) a David Pinchusovič Milman (Давид Пинхусович Мильман) (1940) a nezávisle Kósaku Yosida (吉田 耕作) a Masanori Fukamiya (深宮 政範) (1941) pro w^*-kompaktní množiny v duálu Banachova prostoru, a konečně John Leroy Kelley (1951) pro topologické vektorové prostory.

Jelikož obrácená inkluze je zřejmá, dostáváme požadovanou rovnost.

Nyní již důkaz snadno dokončíme. Množina $\Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, +\infty)^n;\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ je kompaktní, takže i součin $K_1 \times \cdots \times K_n \times \Delta$ je kompaktní. Dle předchozího je tak

$$\operatorname{conv}(K_1 \cup \cdots \cup K_n) = \varphi(K_1 \times \cdots \times K_n \times \Delta),$$

kde φ definované jako $\varphi((x_1, \dots, x_n, \lambda)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ je spojité zobrazení. Jelikož je spojitý obraz kompaktu opět kompaktní množina, je důkaz hotov.

□

Následující věta poskytuje jisté obrácení Věty 17.

VĚTA 20 (Milman). *Nechť K je neprázdná kompaktní konvexní množina v lokálněm konvexním Hausdorffově prostoru X a $A \subset K$ splňuje $K = \overline{\operatorname{conv}}\, A$. Pak* $\operatorname{ext} K \subset \overline{A}$.

DŮKAZ. Uvědomme si nejprve, že pokud $B \subset K$ splňuje $K \subset \operatorname{conv} B$, pak $\operatorname{ext} K \subset B$. Vskutku, máme-li $x \in \operatorname{ext} K \setminus B$, pak z konvexity $K \setminus \{x\}$ obdržíme $\operatorname{conv} B \subset \operatorname{conv}(K \setminus \{x\}) = K \setminus \{x\}$, což je spor s předpokladem.

Uvažujme nyní $A \subset K$ splňující $K = \overline{\operatorname{conv}}\, A$. Nechť U je absolutně konvexní otevřené okolí 0 v X. Z kompaktnosti $\overline{A}$ plyne existence konečné množiny $F \subset \overline{A}$ splňující $\overline{A} \subset F + U$. Pak dle Tvrzení 19 máme

$$K = \overline{\operatorname{conv}}\, A = \overline{\operatorname{conv} A} \subset \overline{\operatorname{conv}((F + U) \cap K)} \subset \overline{\operatorname{conv}\left(\bigcup_{x \in F} (x + \overline{U}) \cap K\right)} =$$

$$= \operatorname{conv}\left(\bigcup_{x \in F} (x + \overline{U}) \cap K\right).$$

Tedy dle začáteční úvahy platí $\operatorname{ext} K \subset \bigcup_{x \in F} (x + \overline{U}) \cap K \subset \overline{A} + \overline{U}$. Jelikož U bylo zvoleno libovolně, $\operatorname{ext} K \subset \overline{A}$.

□

TVRZENÍ 21. *Nechť L je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $K = M^1(L) = \{\mu \in M(L);\ \mu \geq 0, \|\mu\| = 1\} \subset (C(L)^*, w^*)$. Pak K je kompaktní konvexní množina a* $\operatorname{ext} K = \{\delta_x;\ x \in L\}$.

DŮKAZ. Jelikož

$$K = \bigcap_{f \in C(L), f \geq 0} \left\{\mu \in M(L);\ \int_L f \,\mathrm{d}\mu \geq 0\right\} \cap \left\{\mu \in M(L);\ \int_L 1 \,\mathrm{d}\mu = 1\right\},$$

je K w^*-uzavřená konvexní podmnožina $B_{M(K)}$, a tedy je kompaktní a konvexní.

Uvažujme prvek $\delta_x \in K$ pro nějaké $x \in L$. Nechť $\delta_x = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ pro $\alpha \in (0, 1)$ a $\mu_1, \mu_2 \in K$. Pak

$$1 = \delta_x(\{x\}) = \alpha\mu_1(\{x\}) + (1-\alpha)\mu_2(\{x\}) \leq \alpha 1 + (1-\alpha)1 = 1,$$

takže $\mu_1(\{x\}) = \mu_2(\{x\}) = 1$. Tedy $\mu_1 = \mu_2 = \delta_x$. Dokázali jsme tak, že $\operatorname{ext} K \supset \{\delta_x;\ x \in L\}$.

Nechť nyní $\mu \in \operatorname{ext} K$ je dáno. Pokud existují dva různé body $x_1, x_2 \in \operatorname{supp} \mu$, existuje otevřená množina $U \subset L$ splňující $x_1 \in U \subset \overline{U} \subset L \setminus \{x_2\}$. Z definice nosiče míry pak dostáváme, že $\mu(U) > 0$ a $\mu(L \setminus U) > 0$. Uvažujme míry

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu(U)} \mu\restriction_U \quad \text{a} \quad \mu_2 = \frac{1}{\mu(L \setminus U)} \mu\restriction_{L \setminus U}.$$

To jsou elementy K, jsou různé a

$$\mu = \mu(U)\mu_1 + \mu(L \setminus U)\mu_2,$$

což je spor s extremalitou μ. Proto $\operatorname{supp} \mu$ je jednobodový, tj. $\operatorname{supp} \mu = \{x\}$ pro nějaké $x \in L$. Jelikož však $1 = \mu(L) = \mu(\{x\})$, je $\mu = \delta_x$.

□

VĚTA 22. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního Hausdorffova prostoru X. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každý prvek $\mu \in M^1(K)$ existuje právě jedno $x \in K$ splňující $f(x) = \int_K f \, d\mu$ pro každou spojitou afinní funkci $f \colon K \to \mathbb{R}$. Prvek x nazýváme těžiště μ a značíme $r(\mu)$.

(b) Zobrazení $\mu \mapsto r(\mu)$ je spojitá afinní surjekce $M^1(K)$ na K.

DŮKAZ. (a) Ukážeme nejprve existenci $r(\mu)$. Je-li $\mu \in \operatorname{conv}\operatorname{ext} M^1(K)$, je dle Příkladu 21 tvaru $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a $x_1, \dots, x_n \in K$. Pak $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ vyhovuje jako těžiště, neboť pro $f \colon K \to \mathbb{R}$ spojitou afinní platí

$$\int_K f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = f(x).$$

Nechť nyní $\mu \in M^1(K)$ je libovolná. Zvolíme net $\{\mu_i\} \subset \operatorname{conv}\operatorname{ext} M^1(K)$ konvergující ve w^*-topologii k μ, nechť $x_i \in K$ jsou těžiště měr μ_i a nechť $x \in K$ je hromadný bod netu $\{x_i\}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mu_i \to \mu$ a $x_i \to x$. Pak pro f spojitou afinní funkci na K platí

$$\int_K f \, d\mu = \lim_i \int_K f \, d\mu_i = \lim_i f(x_i) = f(x).$$

Tedy x je těžiště μ.

Nyní si rozmyslíme jednoznačnost. Ta však ihned plyne z toho, že $X^*_{\mathbb{R}}$ odděluje body. Pokud totiž $x, y \in K$ splňují $f(x) = \int_K f \, d\mu = f(y)$ pro každou spojitou afinní funkci f na K, splňují i $x^*(x) = x^*(y)$ pro každé $x^* \in X^*_{\mathbb{R}}$. Pak ovšem $x = y$.

(b) Zjevně $r(\{\delta_x;\ x \in K\}) = K$, takže r je surjektivní. Dále je r afinní, neboť pro konvexní kombinaci $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, kde $\alpha \in [0,1]$ a $\mu_1, \mu_2 \in M^1(K)$ platí pro každou spojitou afinní $f \colon K \to \mathbb{R}$, že

$$\begin{aligned} f(r(\mu)) = \int_K f \, d\mu = \alpha \int_K f \, d\mu_1 + (1-\alpha) \int_K f \, d\mu_2 = \alpha f(r(\mu_1)) + (1-\alpha) f(r(\mu_2)) = \\ = f(\alpha r(\mu_1) + (1-\alpha) r(\mu_2)). \end{aligned}$$

Jelikož $X^*_{\mathbb{R}}$ odděluje body K, dostáváme $r(\mu) = \alpha r(\mu_1) + (1-\alpha) r(\mu_2)$, tj. r je afinní zobrazení.

Nakonec ukážeme jeho spojitost. Je-li $x^* \in X^*_{\mathbb{R}}$, pak zobrazení $x^* \circ r \colon M^1(K) \to \mathbb{R}$ je spojité (platí totiž $(x^* \circ r)(\mu) = x^*(r(\mu)) = \int_K x^* \, d\mu$). Tedy $r \colon M^1(K) \to (K, w)$ je spojité, uvažujeme-li na K slabou topologii w. Avšak K je Hausdorffův kompakt a w je slabší Hausdorffova topologie, tedy w na K splývá s topologií původní. Proto je r spojité.

□

VĚTA 23 (Integrální reprezentace). *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního Hausdorffova prostoru. Dokažte, že pak pro každé $x \in K$ existuje $\mu \in M^1(K)$ splňující $r(\mu) = x$ a $\mu(\overline{\operatorname{ext} K}) = 1$.*

DŮKAZ. Nejprve ověříme, že množina $M = \{\mu \in M^1(K);\ \mu(\overline{\operatorname{ext} K}) = 1\}$ je uzavřená v $M^1(K)$. Nechť tedy $\mu \in M^1(K)$ splňuje $\mu(K \setminus \overline{\operatorname{ext} K}) > 0$. Pak existuje kompaktní množina $F \subset K \setminus \overline{\operatorname{ext} K}$ splňující $\mu(F) > 0$. Nechť $f \colon K \to [0,1]$ je spojitá funkce taková, že $f = 1$ na F a $f = 0$ na $\overline{\operatorname{ext} K}$. Pak $G = \{\nu \in M^1(K);\ \int_K f \, d\nu > 0\}$ je otevřená množina v $M^1(K)$ obsahující μ taková, že $G \cap M = \emptyset$. Proto je M uzavřená.

Nyní si uvědomme, že M je konvexní. Tedy, dle Věty 22, $r(M)$ je kompaktní konvexní podmnožina K, která však obsahuje $r(\{\delta_x;\ x \in \operatorname{ext} K\}) = \operatorname{ext} K$. Dle Krejnovy-Milmanovy věty tak platí $r(M) = K$.

□

2. Svazy vektorových topologií

Připomeňme, že systém $\mathcal{T}$ všech topologií na nějaké množině uspořádaný inkluzí tvoří úplný svaz: libovolný podsystém $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ má supremum a infimum, tj. nejmenší horní závoru a největší dolní závoru;

platí, že $\inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$ a $\bigcup \mathcal{A}$ tvoří subbázi topologie $\sup \mathcal{A}$. Je-li některá z topologií v $\mathcal{A}$ Hausdorffova, pak $\sup \mathcal{A}$ je zjevně Hausdorffova, na druhou stranu $\inf \mathcal{A}$ nemusí být Hausdorffova ani pokud jsou všechny topologie v $\mathcal{A}$ Hausdorffovy (a ani pro dvouprvkovou $\mathcal{A}$, vizte Příklad 15.38).

Uvědomme si, že chceme-li dokázat, že částečně uspořádaná množina M je úplný svaz, stačí ukázat, že každá podmnožina M má supremum (ekvivalentně každá neprázdná podmnožina M má supremum a M má nejmenší prvek). Pak totiž $\inf A = \sup\{x \in M;\ x \text{ je dolní závora } A\}$.

Pokud bude třeba zdůraznit, že supremum, resp. infimum se bere v částečně uspořádané množině M, budeme používat značení $\sup_M$, resp $\inf_M$.

TVRZENÍ 24. *Nechť X je vektorový prostor. Označme $\mathcal{T}$ systém všech topologií na X a $\mathcal{V}$ systém všech vektorových topologií na X uspořádané inkluzí. Je-li $\mathcal{A}$ nějaký systém vektorových topologií na X, pak $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je vektorová topologie, tj.* $\sup_{\mathcal{V}} \mathcal{A} = \sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. *Systém $\mathcal{V}$ je tedy úplný svaz.*

Dále je-li $\mathcal{A}$ neprázdný a pro každé $\sigma \in \mathcal{A}$ dána nějaká báze $\mathcal{U}_\sigma$ okolí 0 v topologii σ tvořená vyváženými množinami, pak $\mathcal{S} = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{A}} \mathcal{U}_\sigma$ je subbází okolí 0 v topologii $\sup_{\mathcal{V}} \mathcal{A}$. *Bázi okolí 0 pro topologii* $\inf_{\mathcal{V}} \mathcal{A}$ *pak tvoří systém všech množin $U_1 \subset X$ takových, že existuje posloupnost neprázdných vyvážených množin $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených ve všech topologiích $\sigma \in \mathcal{A}$ taková, že $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

DŮKAZ. Je-li $\mathcal{A}$ prázdný, pak $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je indiskrétní topologie, která je zřejmě vektorová. Předpokládejme tedy, že $\mathcal{A}$ je neprázdný. Není příliš obtížné si rozmyslet, že pro každé $x \in X$ je $\{x + U;\ U \in \mathcal{S}\}$ subbází filtru okolí x v topologii $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. Nechť $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 generovaná subbází $\mathcal{S}$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 6.8, odkud plyne, že $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je vektorová topologie. (ii) plyne z toho, že průnik konečně mnoha pohlcujících množin je pohlcující, (iii) plyne z toho, že libovolný průnik vyvážených množin je vyvážený. Pro důkaz (i) zvolme $U \in \mathcal{U}$. Pak $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$, kde $U_j \in \mathcal{U}_{\sigma_j}$. Existují tedy $V_j \in \mathcal{U}_{\sigma_j}$ takové, že $V_j + V_j \subset U_j$. Položíme-li $V = V_1 \cap \dots \cap V_n$, pak $V \in \mathcal{U}$. Jsou-li nyní $x, y \in V$, pak $x + y \in V_j + V_j \subset U_j$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $x + y \in U$. To znamená, že $V + V \subset U$.

Nechť dále $\mathcal{B}$ je systém všech množin $U_1 \subset X$ takových, že existuje posloupnost neprázdných vyvážených množin $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených ve všech topologiích $\sigma \in \mathcal{A}$ taková, že $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každou $U_1 \in \mathcal{B}$ je zjevně příslušná U_2 též prvkem $\mathcal{B}$ a snadno nahlédneme, že $\mathcal{B}$ je báze filtru, takže dle Věty 6.8 je $\mathcal{B}$ báze okolí 0 pro nějakou vektorovou topologii τ na X. Zjevně je $\tau \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$. Na druhou stranu, nechť ρ je vektorová topologie na X taková, že $\rho \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$. Je-li U_1 otevřené vyvážené okolí 0 v ρ, pak existuje posloupnost $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených vyvážených okolí 0 v ρ taková, že $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou ovšem U_n otevřené v každé topologii $\sigma \in \mathcal{A}$, takže $U_1 \in \mathcal{B}$. Odtud plyne, že $\rho \subset \tau$, takže $\tau = \inf_{\mathcal{V}} \mathcal{A}$.

□

TVRZENÍ 25. *Nechť X je vektorový prostor. Označme $\mathcal{T}$ systém všech topologií na X a $\mathcal{C}$ systém všech lokálně konvexních topologií na X uspořádané inkluzí. Je-li $\mathcal{A}$ nějaký systém lokálně konvexních topologií na X, pak* $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ *je lokálně konvexní topologie, tj.* $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{A} = \sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. *Systém $\mathcal{C}$ je tedy úplný svaz.*

Dále je-li každá $\sigma \in \mathcal{A}$ generovaná nějakým systémem pseudonorem $\mathcal{P}_\sigma$, pak topologie $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$ *je generovaná systémem pseudonorem $\bigcup_{\sigma\in\mathcal{A}} \mathcal{P}_\sigma$. Topologie* $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$ *je pak generovaná systémem všech pseudonorem na X, které jsou spojité ve všech topologiích z $\mathcal{A}$.*

DŮKAZ. Je-li $\mathcal{A}$ prázdný, pak $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je indiskrétní topologie, která je zřejmě lokálně konvexní. Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný, pak stačí použít Tvrzení 24 na báze $\mathcal{U}_\sigma$ tvořené absolutně konvexními množinami.

Označme τ je topologii generovanou systémem pseudonorem $\bigcup_{\sigma\in\mathcal{A}} \mathcal{P}_\sigma$. Pak zjevně $\sigma \subset \tau$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$. Na druhou stranu, nechť ρ je lokálně konvexní topologie na X taková, že $\sigma \subset \rho$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$ a nechť $\mathcal{R}$ je systém pseudonorem generující ρ. Je-li $p \in \bigcup_{\sigma\in\mathcal{A}} \mathcal{P}_\sigma$, pak p je spojitá v nějaké $\sigma \in \mathcal{A}$, a tedy i v ρ. Proto je $U_{p,\varepsilon} \in \rho(0)$ pro každé $\varepsilon > 0$. Odtud plyne, že $\tau \subset \rho$. To znamená, že $\tau = \sup_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$.

Označme nyní $\mathcal{P}$ systém všech pseudonorem na X, které jsou spojité ve všech topologiích z $\mathcal{A}$. Pak $\mathcal{P}$ je neprázdný, neboť $0 \in \mathcal{P}$. Dále označme τ lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem $\mathcal{P}$. Pak $\tau \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$, neboť $U_{p,\varepsilon} \in \sigma(0)$ pro každé $p \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$. Na druhou stranu, nechť ρ je lokálně konvexní topologie na X taková, že $\rho \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$ a nechť $\mathcal{R}$ je systém pseudonorem generující ρ. Pak $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ (Věta 6.60(a)), a tedy $\rho \subset \tau$. To znamená, že $\tau = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$.

□

Všimněme si, že $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = \inf_{\mathcal{T}} \mathcal{C}$ je indiskrétní topologie. Snadno je vidět, že v této topologii jsou jediná spojitá pseudonorma na X a jediný spojitý lineární funkcionál na X nulové. Dále topologie $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = \sup_{\mathcal{T}} \mathcal{C}$ je nejsilnější možná lokálně konvexní topologie na X. Tato topologie je zjevně generována systémem všech pseudonorem na X a její bázi okolí 0 tvoří všechny absolutně konvexní podmnožiny X. Každá lineární forma na X je v této topologii spojitá, tj. $X^* = X^\#$.

Dále připomeňme, že je-li X konečněrozměrný vektorový prostor, pak na X existuje jen jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie (a je to topologie generovaná euklidovskou normou) (Důsledek 6.41).

PŘÍKLAD 26. Nechť X je nekonečněrozměrný vektorový prostor. Položme

$$\mathcal{A} = \{\sigma(X, M);\ M \subset X^\# \text{ odděluje body } X\}.$$

Pak všechny topologie v $\mathcal{A}$ jsou Hausdorffovy (Tvrzení 6.85), ale $\inf \mathcal{A}$ (ve svazu lokálně konvexních topologií) je indiskrétní topologie.

Vskutku, předpokládejme, že p je nenulová pseudonorma na X. Pak existuje posloupnost $\{x_n\}$ lineárně nezávislých vektorů v X taková, že $p(x_n) \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: Dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3(b)) existuje nenulová $f \in X^\#$ taková, že $|f| \leq p$. Protože X je nekonečněrozměrný, $\operatorname{Ker} f$ je též nekonečněrozměrný (Lemma 1.121), takže existuje posloupnost $\{y_n\} \subset \operatorname{Ker} f$ lineárně nezávislých vektorů. Nechť $x \in X$ je takový, že $f(x) = 1$. Položme $x_n = y_n + x$. Vektory $x, y_1, y_2, \ldots$ jsou lineárně nezávislé, takže i posloupnost $\{x_n\}$ je lineárně nezávislá. Konečně, $p(x_n) \geq |f(x_n)| = |f(x)| = 1$.

Doplňme $\{x_n\}$ na bázi B prostoru X. Pro každé $v \in B$ definujme lineární formu f_v na X pomocí hodnot na bázi jako $f_v(u) = \delta_{u,v}$ (Kroneckerovo delta) pro $u \in B$. Pak $M = \{f_v;\ v \in B\}$ odděluje body X, neboť je-li $x \in X \setminus \{0\}$, pak $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, kde $v_i \in B$ a $\alpha_i \neq 0$, takže $f_{v_1}(x) = \alpha_1 \neq 0$. Nicméně p není spojitá v $\sigma(X, M)$, neboť $x_n \to 0$ v $\sigma(X, M)$ (pro každé $v \in B$ je $f_v(x_n) \neq 0$ nejvýše pro jeden index n), ale $p(x_n) \not\to 0$.

◇

LEMMA 27. *Nechť X je vektorový prostor a $U_1, U_2 \subset X$ jsou pohlcující absolutně konvexní množiny. Je-li f lineární funkcionál na X, pro který $|f| \leq 1$ na $U_1 \cap U_2$, pak existují $f_1, f_2 \in X^\#$ takové, že $|f_1| \leq 1$ na U_1, $|f_2| \leq 1$ na U_2 a $f = f_1 + f_2$.*

DŮKAZ. Na vektorovém prostoru $X \times X$ definujme funkci $p(x, y) = \max\{\mu_{U_1}(x), \mu_{U_2}(y)\}$. S pomocí Věty 6.50(d) snadno ověříme, že p je pseudonorma. Dále označme $Y = \{(x, x);\ x \in X\}$. Pak Y je podprostor $X \times X$ a předpis $g(x, x) = f(x)$ definuje lineární funkcionál g na Y. Protože $|f| \leq 1$ na $U_1 \cap U_2$, plyne z Věty 6.50(g), že $|f| \leq \mu_{U_1 \cap U_2}$. Tedy $|g(x, x)| = |f(x)| \leq \mu_{U_1 \cap U_2}(x) \leq p(x, x)$ pro každé $x \in X$, přičemž poslední nerovnost plyne z toho, že $q = \max\{\mu_{U_1}, \mu_{U_2}\}$ je nezáporně homogenní, $\{x \in X;\ q(x) < 1\} = \{x \in X;\ \mu_{U_1}(x) < 1, \mu_{U_2}(x) < 1\} \subset U_1 \cap U_2$ a z Věty 6.50(g). Je tedy $|g| \leq p$ na Y a z Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3(b)) plyne existence lineárního funkcionálu G na $X \times X$ rozšiřujícího g, pro který je $|G| \leq p$. Položíme-li $f_1(x) = G(x, 0)$ a $f_2(x) = G(0, x)$, pak zjevně $f_1, f_2 \in X^\#$, $|f_1(x)| \leq p(x, 0) = \mu_{U_1}(x) \leq 1$ pro $x \in U_1$, $|f_2(x)| \leq p(0, x) = \mu_{U_2}(x) \leq 1$ pro $x \in U_2$ a $f_1(x) + f_2(x) = G(x, x) = g(x, x) = f(x)$ pro každé $x \in X$.

□

TVRZENÍ 28. *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{A}$ je libovolný neprázdný podsystém svazu lokálně konvexních topologií na X. Pak $(X, \inf \mathcal{A})^* = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{A}} (X, \sigma)^*$ a $(X, \sup \mathcal{A})^* = \operatorname{span} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} (X, \sigma)^*$.*

DŮKAZ. Inkluze $(X, \inf \mathcal{A})^* \subset \bigcap_{\sigma \in \mathcal{A}} (X, \sigma)^*$ je zjevná. Na druhou stranu, je-li $f \in \bigcap_{\sigma \in \mathcal{A}} (X, \sigma)^*$, pak pseudonorma $|f|$ je spojitá ve všech topologiích z $\mathcal{A}$, takže je spojitá i v $\inf \mathcal{A}$ (Tvrzení 25). Funkcionál f je tedy spojitý v $\inf \mathcal{A}$, neboť je omezený na $U_{|f|,1}$.

Dále inkluze $\operatorname{span} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} (X, \sigma)^* \subset (X, \sup \mathcal{A})^*$ je zjevná. Na druhou stranu, je-li $f \in (X, \sup \mathcal{A})^*$, pak $U_{|f|,1}$ je okolí 0 v topologii $\sup \mathcal{A}$, takže dle Tvrzení 25 je $U_{p_1, \ldots, p_n, \varepsilon} \subset U_{|f|,1}$ pro nějaké pseudonormy $p_1, \ldots, p_n$ a $\varepsilon > 0$, přičemž p_i je spojitá v $\sigma_i \in \mathcal{A}$. Podle Lemmatu 27 existují $f_1, \ldots, f_n \in X^\#$ takové, že $f = f_1 + \cdots + f_n$ a $|f_i| \leq 1$ na $U_{p_i, \varepsilon}$, $i = 1, \ldots, n$. Funkcionál f_i je tedy omezený na okolí 0 v topologii σ_i, neboli je spojitý v σ_i. To znamená, že $f \in \operatorname{span} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} (X, \sigma)^*$.

□

FAKT 29. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$ je neprázdná. Pak $\sigma(X, M)$ je nejslabší topologie ve svazu všech topologií na X taková, že všechny funkce z M jsou v ní spojité.*

DŮKAZ. Označme $\sigma = \sigma(X, M)$. Každá z funkcí v M je σ-spojitá (Věta 6.86). Na druhou stranu, je-li τ taková topologie na X, že všechny funkce z M jsou v ní spojité, pak pro každé $x \in X$, $f \in M$ a $\varepsilon > 0$ je $x + U_{f,\varepsilon} = f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \in \tau(x)$. Odtud plyne, že $\sigma(x) \subset \tau(x)$ pro každé $x \in X$, a tedy $\sigma \subset \tau$.

□

DEFINICE 30. Nechť X je vektorový prostor, M je podprostor $X^{\#}$ a $\mathcal{A}$ je systém všech lokálně konvexních topologií τ na X takových, že $(X, \tau)^* = M$. Topologie $\mu(X, M) = \sup \mathcal{A}$ se nazývá Mackeyova topologie.

Dle Tvrzení 25 je $\mu(X, M)$ lokálně konvexní.

VĚTA 31 (G. W. Mackey (1946)). *Nechť X je vektorový prostor a M je podprostor $X^{\#}$. Pak $(X, \mu(X, M))^* = M$. Tedy pro lokálně konvexní topologii τ na X platí, že $(X, \tau)^* = M$, právě když $\sigma(X, M) \subset \tau \subset \mu(X, M)$.*

DŮKAZ. Věta plyne ihned z Tvrzení 28 a Faktu 29.

□

VĚTA 32 (G. W. Mackey (1946)). *Nechť τ_1, τ_2 jsou lokálně konvexní topologie na vektorovém prostoru X takové, že $(X, \tau_1)^* = (X, \tau_2)^*$. Pak (X, τ_1) a (X, τ_2) mají stejné omezené množiny.*

DŮKAZ. Označme $X^* = (X, \tau_1)^*$. Zjevně stačí ukázat, že (X, τ_1) a $(X, \sigma(X, X^*))$ mají stejné omezené množiny. To ale plyne z Věty 6.94.

□

DŮSLEDEK 33. *Nechť (X, τ) je pseudometrizovatelný lokálně konvexní prostor. Pak $\mu(X, X^*) = \tau$.*

DŮKAZ. Z definice plyne, že $\tau \subset \mu(X, X^*)$. Na druhou stranu, podle Vět 6.33 a 32 je $Id\colon (X, \tau) \to (X, \mu(X, X^*))$ spojitá, neboli $\mu(X, X^*) \subset \tau$.

□

Z předchozího důsledku speciálně plyne, že pokud X je normovaný lineární prostor, pak $\mu(X, X^*)$ je normová topologie na X.

Stejně jako v důkazu Věty 32 z Věty 6.93(b) plyne následující:

VĚTA 34. *Nechť τ_1, τ_2 jsou lokálně konvexní topologie na vektorovém prostoru X takové, že $(X, \tau_1)^* = (X, \tau_2)^*$. Pak (X, τ_1) a (X, τ_2) mají stejné konvexní uzavřené množiny.*

VĚTA 35 (Richard Friederich Arens (1947)). *Nechť X je vektorový prostor a M je podprostor $X^{\#}$. Pak Mackeyova topologie $\mu(X, M)$ je generována systémem pseudonorem*

$$\big\{p_K;\ K \subset M \text{ je } \sigma(M, \varepsilon(X))\text{-kompaktní absolutně konvexní}\big\},$$

kde $p_K(x) = \sup_{f \in K} |f(x)|$ pro $x \in X$.

DŮKAZ. Označme τ topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_K\}$ a $\mu = \mu(X, M)$. Ukážeme nejprve, že $\mu \subset \tau$. Existuje báze $\mu(0)$ tvořená uzavřenými absolutně konvexními množinami (Důsledek 6.59). Nechť tedy $V \in \mu(0)$ je μ-uzavřená absolutně konvexní. Množina $V^\circ \subset M$ je absolutně konvexní (Tvrzení 6.109(a)) a $\sigma(M, \varepsilon(X))$-kompaktní (Věta 6.115). To znamená, že $U_{p_{V^\circ},1} \in \tau(0)$. Podle věty o bipoláře (Věta 6.110) je $V = (V^\circ)_\circ = \{x \in X;\ \sup_{f \in V^\circ} |f(x)| \leq 1\} = \{x \in X;\ p_{V^\circ}(x) \leq 1\} \supset U_{p_{V^\circ},1}$, takže $V \in \tau(0)$.

Pro opačnou inkluzi stačí ukázat, že $(X, \tau)^* = M$ a použít Větu 31. Podle předchozího odstavce již víme, že $\mu \subset \tau$, a tedy $M = (X, \mu)^* \subset (X, \tau)^*$. Na druhou stranu, nechť $f \in (X, \tau)^*$. Pak existují $\delta > 0$ a $\sigma(M, \varepsilon(X))$-kompaktní absolutně konvexní množiny $K_1, \dots, K_n \subset M$ takové, že $|f| \leq 1$ na $U_{p_{K_1},\dots,p_{K_n},\delta}$. Podle Lemmatu 27 existují $f_1, \dots, f_n \in X^{\#}$ takové, že $f = f_1 + \dots + f_n$ a $|f_i| \leq 1$ na $U_{p_{K_i},\delta}$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Dle Faktu 6.48 je $U_{p_{K_i},\delta} = \frac{\delta}{2} U_{p_{K_i},2} \supset \frac{\delta}{2}(K_i)_\circ$, takže díky Tvrzení 6.109(d) a větě o bipoláře (použité např. v prostoru (X, μ); Věta 6.110) je $f_i \in (U_{p_{K_i},\delta})^\circ \subset \big(\frac{\delta}{2}(K_i)_\circ\big)^\circ = \frac{2}{\delta}((K_i)_\circ)^\circ = \frac{2}{\delta} K_i \subset M$. Odtud plyne, že $f \in M$.

□

3. Topologie w_b^*

■■■Zajímavou variací w^*-topologie v duálních Banachových prostorech je následující o něco silnější topologie.

DEFINICE 36. Nechť X je normovaný lineární prostor. Definujme

$$w_b^* = \{G \subset X^*;\ \text{pro každou omezenou } B \subset X^* \text{ je } G \cap B \text{ relativně } w^*\text{-otevřená v } B\}.$$

Vzhledem k tomu, že $w^* \restriction_B$ je topologie na B, je ihned vidět, že w_b^* je topologie na X^*. Též je zřejmé, že $w^* \subset w_b^*$.

FAKT 37. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) $G \subset X^*$ je w_b^*-otevřená, právě když existuje posloupnost $\{r_n\} \subset (0, +\infty)$, $r_n \to +\infty$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $G \cap B(0, r_n)$ relativně w^*-otevřená v $B(0, r_n)$.

(b) $F \subset X^*$ je w_b^*-uzavřená, právě když pro každou omezenou $B \subset X^*$ je $F \cap B$ relativně w^*-uzavřená v B, a právě když existuje posloupnost $\{r_n\} \subset (0, +\infty)$, $r_n \to +\infty$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $F \cap B(0, r_n)$ relativně w^*-uzavřená v $B(0, r_n)$.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ je triviální. $\Leftarrow$ Nechť $B \subset X^*$ je omezená a nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $B \subset B(0, r_n)$. Podle předpokladu existuje $U \in w^*$ taková, že $G \cap B(0, r_n) = U \cap B(0, r_n)$. Tedy $G \cap B = (G \cap B(0, r_n)) \cap B = (U \cap B(0, r_n)) \cap B = U \cap B$, takže $G \cap B$ je relativně w^*-otevřená v B.

(b) F je w_b^*-uzavřená, právě když $X^* \setminus F \in w_b^*$, právě když pro každou omezenou $B \subset X^*$ je $(X^* \setminus F) \cap B$ relativně w^*-otevřená v B, právě když pro každou omezenou $B \subset X^*$ je $B \setminus ((X^* \setminus F) \cap B) = F \cap B$ relativně w^*-uzavřená v B. Druhá část se dokáže stejně jako (a).

□

LEMMA 38 (S. Banach (1929, 1932), J. Dieudonné (1950)). *Nechť X je topologický vektorový prostor, $F \subset X$ je uzavřená, $C \subset X$ je slabě uzavřená absolutně konvexní a $U \subset X$ je otevřené okolí $F \cap C$. Pak pro každou kompaktní $K \subset X$ existuje konečná $M \subset C^\circ$ taková, že $F \cap K \cap M_\circ \subset U$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že pro nějakou kompaktní $K \subset X$ tvrzení neplatí. Pak pro každou konečnou $M \subset C^\circ$ je množina $K_M = F \cap K \cap M_\circ \cap (X \setminus U)$ neprázdná. Množina $M_\circ$ je uzavřená (Tvrzení 6.109(a)), množina K_M je tedy relativně uzavřená podmnožina kompaktu K. Označme $\mathcal{M}$ systém všech konečných podmnožin C°. Podle věty o bipoláře (Věta 6.110) a Tvrzení 6.109(e) je $C = (C^\circ)_\circ = \left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M\right)_\circ = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M_\circ$. Podobně, systém $\{K_M;\ M \in \mathcal{M}\}$ je centrovaný, neboť jsou-li $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}$, pak $\bigcap_{i=1}^n K_{M_i} = K_M$ pro $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$. Odtud plyne, že $\emptyset \neq \bigcap_{M \in \mathcal{M}} K_M = F \cap K \cap (X \setminus U) \cap \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M_\circ = F \cap K \cap (X \setminus U) \cap C$, což je spor.

□

VĚTA 39 (J. Dieudonné (1950)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak w_b^* je lokálně konvexní topologie na X^* generovaná systémem pseudonorem*

$$\left\{p_{\{x_n\}};\ \{x_n\} \subset X \text{ je posloupnost konvergující k } 0\right\},$$

kde $p_{\{x_n\}}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)|$ pro $f \in X^*$.

DŮKAZ. Ukážeme nejprve, že w_b^* je translačně invariantní, tj. pro každou $G \in w_b^*$ a $f \in X^*$ je $f + G \in w_b^*$. Odtud ihned plyne, že $w_b^*(f) = f + w_b^*(0)$ pro každé $f \in X^*$. Nechť tedy $G \in w_b^*$ a $f \in X^*$. Je-li $B \subset X^*$ omezená, pak $B - f$ je též omezená, takže existuje $U \in w^*$ taková, že $G \cap (B - f) = U \cap (B - f)$. To znamená že $(f + G) \cap B = f + (G \cap (B - f)) = f + (U \cap (B - f)) = (f + U) \cap B$ je relativně w^*-otevřená v B.

Označme $\mathcal{A}$ systém všech posloupností v X konvergujících k 0. Nyní stačí ukázat, že systém $\{U_{p_s,\varepsilon};\ s \in \mathcal{A}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi $w_b^*(0)$ (ve skutečnosti dokonce $\{U_{p_s,1};\ s \in \mathcal{A}\}$ tvoří bázi $w_b^*(0)$). Nechť $\{x_n\} \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Je-li $r > 0$, pak množina $F = \{n \in \mathbb{N};\ \|x_n\| \geq \frac{\varepsilon}{2r}\}$ je konečná a $|f(x_n)| \leq r\|x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pro $f \in B_{X^*}(0, r)$ a $n \in \mathbb{N} \setminus F$. Tudíž $U_{p_{\{x_n\}},\varepsilon} \cap B_{X^*}(0, r) = \{f \in B_{X^*}(0, r) \colon |f(x_n)| < \varepsilon \text{ pro } n \in F\}$, což je množina relativně w^*-otevřená v $B_{X^*}(0, r)$. Odtud plyne, že $U_{p_{\{x_n\}},\varepsilon} \in w_b^*(0)$.

Na druhou stranu, nechť $V \in w_b^*(0)$. Indukcí zkonstruujeme posloupnost konečných množin $\{M_n\}$ v X takových, že $M_n \subset B_X(0, \frac{1}{n-1})$ pro $n \geq 2$ a $\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)^\circ \cap B_{X^*}(0,n) \subset V$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme k dispozici množiny $M_1, \dots, M_{n-1}$. Nechť $U \in w^*$ je taková, že $V \cap B_{X^*}(0,n) = U \cap B_{X^*}(0,n)$. Nyní použijeme Lemma 38 na prostor (X^*, w^*), $F = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right)^\circ$, $C = B_{X^*}(0, n-1)$, U a $K = B_{X^*}(0,n)$. Předpoklady jsou splněny: F je uzavřená dle Tvrzení 6.109(a), dále slabá topologie na (X^*, w^*) je opět w^*, takže C je slabě uzavřená díky Důsledku 6.116 a Hausdorffovosti w^*, $F \cap C \subset V \cap B_{X^*}(0,n) \subset U$ dle indukčního předpokladu a K je kompaktní dle Důsledku 6.116. Existuje tedy konečná $M_n \subset C^\circ$ taková, že $F \cap (M_n)_\circ \cap K \subset U$. Ztotožníme-li, jak je zvykem, $\varepsilon(X)$ a X, pak $M_n \subset C_\circ = B_X(0, \frac{1}{n-1})$ (poslední rovnost platí pro $n \geq 2$ dle Tvrzení 6.109(d)) a z $(M_n)_\circ$ se stane $(M_n)^\circ$. S pomocí Tvrzení 6.109(e) tak dostáváme, že $\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)^\circ \cap B_{X^*}(0,n) = F \cap (M_n)^\circ \cap B_{X^*}(0,n) \subset U \cap B_{X^*}(0,n) \subset V$.

Seřaďme nyní prvky spočetné množiny $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ do libovolné prosté posloupnosti $\{x_n\}$, přičemž je-li tato posloupnost konečná, pak ji doplníme nulami na nekonečnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{n \in \mathbb{N};\ \|x_n\| \geq \varepsilon\}$ konečná, takže $x_n \to 0$. Konečně, $U_{p_{\{x_n\}},1} \subset M^\circ \subset V$, neboť je-li $f \in M^\circ$, pak pro $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f\| \leq n$, je $f \in M^\circ \cap B_{X^*}(0,n) \subset \left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)^\circ \cap B_{X^*}(0,n) \subset V$.

□

VĚTA 40. *Nechť X je Banachův prostor. Pak $(X^*, w_b^*)^* = \varepsilon(X)$, kde $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je kanonické vnoření.*

DůKAZ. Označíme-li p_A pseudonormu na X^* danou vzorcem $p_A(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$ pro neprázdnou omezenou $A \subset X$, pak pro každé $f \in X^*$ díky linearitě a spojitosti f snadno obdržíme, že $p_{\overline{\operatorname{aconv}} A}(f) = p_{\operatorname{aconv} A}(f) = p_A(f)$. Je-li nyní $\{x_n\}$ posloupnost v X konvergující k 0, pak množina $\{x_n\} \cup \{0\}$ je kompaktní, tudíž $K = \overline{\operatorname{aconv}}\{x_n\} = \overline{\operatorname{aconv}}(\{x_n\} \cup \{0\})$ je absolutně konvexní a kompaktní (Tvrzení 9), a tedy i $\sigma(X, X^*)$-kompaktní. Protože $p_{\{x_n\}} = p_K$, podle Vět 39 a 35 je $w_b^* \subset \mu(X^*, \varepsilon(X))$. Na druhou stranu, $\sigma(X^*, \varepsilon(X)) = w^* \subset w_b^*$, a tedy podle Mackeyovy věty (Věta 31) je $(X^*, w_b^*)^* = \varepsilon(X)$.

□

DůSLEDEK 41 (M. G. Krejn a V. L. Šmuljan (1940)). *Nechť X je Banachův prostor a $C \subset X^*$ je konvexní. Pak C je w^*-uzavřená, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $C \cap B(0,n)$ w^*-uzavřená.*

DůKAZ. Podle Věty 40 je $(X^*, w_b^*)^* = \varepsilon(X) = (X^*, w^*)^*$, takže můžeme aplikovat Větu 34 a Fakt 37(b).

□

PŘÍKLAD 42. Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_2 a položme $A = \left\{\sqrt{n} e_n;\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \ell_2$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $A \cap B(0,n)$ konečná, a tedy w^*-uzavřená. Nicméně dle Příkladu 6.102 je $0 \in \overline{A}^w$, takže A není slabě uzavřená, a protože ℓ_2 je reflexivní, je $w^* = w$, takže A není w^*-uzavřená. Předpoklad konvexity ve Větě 41 je tedy podstatný.

◇

DůSLEDEK 43. *Nechť X je Banachův prostor a $F \in (X^*)^\#$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *F je w^*-spojitý.*
(ii) *$F \restriction_{B_{X^*}}$ je w^*-spojitá.*
(iii) Ker $F \cap B_{X^*}$ *je w^*-uzavřená.*

DůKAZ. (i)⇒(ii)⇒(iii) jsou triviální.

(iii)⇒(i) Díky tomu, že Ker F je podprostor X^*, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že Ker $F \cap B_{X^*}(0,n) = n(\text{Ker } F \cap B_{X^*})$. Podle Věty 41 je tedy Ker F w^*-uzavřené. Nyní stačí aplikovat Větu 6.36.

□

4. Slabá kompaktnost

V tomto krátkém oddílu se informativně seznámíme s některými hlubšími větami o slabé kompaktnosti.

Je-li X reflexivní Banachův prostor, pak B_X je slabě kompaktní (Věta 6.120). Protože každý $f \in X^*$ je slabě spojitý (z definice slabé topologie), nabývá $|f|$ na B_X maxima, a tedy f nabývá na B_X své normy. Slavná Jamesova věta pak říká, že platí i opačná implikace:

VĚTA 44 (Robert Clarke James (1964)[4]). *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když každý funkcionál z X^* nabývá na B_X své normy.*

Ve skutečnosti platí dokonce obecnější verze:

VĚTA 45 (R. C. James (1964)). *Nechť X je reálný Banachův prostor a $K \subset X$ je slabě uzavřená. Pak K je slabě kompaktní, právě když každý funkcionál z X^* nabývá na K maxima.*

Následující větu srovnejme s Důsledkem 8 a Tvrzením 9.

VĚTA 46. [5] *Nechť X je Banachův prostor a $K \subset X$ je slabě kompaktní. Pak jsou množiny $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ a $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ slabě kompaktní.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je reálný. Je-li $f \in X^*$, pak $\sup_K f = \sup_{\overline{\operatorname{conv}}\, K} f$, takže f nabývá maxima na $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ v bodě slabě kompaktní množiny K. Stačí tedy použít Jamesovu větu (Věta 45).

Pro $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ je argument podobný: Nechť $y \in K$ je bod maxima funkce $|f|$ na K. Je-li $f(y) \geq 0$, pak položíme $z = y$, jinak vezmeme $z = -y$. Snadno nahlédneme, že pro libovolné $x \in \operatorname{aconv} K$ je $f(x) \leq |f(y)| = f(z)$, přičemž $z \in \operatorname{aconv} K$. Funkcionál f tudíž nabývá maxima na $\operatorname{aconv} K$, a tedy i na $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$.

□

Jiný důkaz předchozí věty, který je sice složitější, ale používá jednodušší výsledky, než je Jamesova věta, lze nalézt na straně 336.

Připomeňme, že topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, pokud z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí, a topologický prostor se nazývá sekvenciálně kompaktní, pokud z každé posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Dále připomeňme, že topologický prostor je kompaktní, právě když v něm každý net má konvergentní podnet. Je známo, že topologický prostor je spočetně kompaktní, právě když v něm každá posloupnost má konvergentní podnet. Tedy podmnožina A topologického prostoru je

- kompaktní, právě když každý net v A má konvergentní podnet s limitou v A,
- spočetně kompaktní, právě když každá posloupnost v A má konvergentní podnet s limitou v A,
- sekvenciálně kompaktní, právě když každá posloupnost v A má konvergentní podpodposloupnost s limitou v A.

Platí následující vztahy: Kompaktní prostory jsou spočetně kompaktní (to je zřejmé z definice) a podle předchozího jsou sekvenciálně kompaktní prostory také spočetně kompaktní. Žádné jiné vztahy mezi těmito pojmy obecně nejsou. Nicméně platí následující věta, jejímž velmi speciálním případem je Věta 6.122.

VĚTA 47 (William Frederick Eberlein (1947), V. L. Šmuljan (1940)[6]). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $K \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) K je slabě kompaktní.
(ii) K je slabě spočetně kompaktní.
(iii) K je slabě sekvenciálně kompaktní.

Důkaz této věty lze nalézt v oddílu 14.8.

[4] Separabilní verzi dokázal v roce 1957, obecnou pak v roce 1964.

[5] M. G. Krejn a V. L. Šmuljan (1940) dokázali variantu se sekvenciální kompaktností, odtud lze odvodit verzi s kompaktností pomocí Eberleinovy-Šmuljanovy věty (Věta 47).

[6] Šmuljan dokázal implikaci (ii)⇒(iii), Eberlein pak implikaci (ii)⇒(i).

Kapitola 12

Nespojité lineární operátory

1. Uzavřené operátory

Tato kapitola má poněkud nepřesný název. Pochopitelně chceme-li budovat analytickou teorii pro nějaká zobrazení, musí tato zobrazení mít nějaké netriviální topologické vlastnosti; zcela obecnými lineárními zobrazeními se zabývá lineární algebra. Zde se budeme zabývat lineárními zobrazeními mezi normovanými lineárními prostory X a Y, která nejsou normově spojitá (přesněji $\|\cdot\|$–$\|\cdot\|$ spojitá). Rozumnou teorii se nám podaří vybudovat pro zobrazení, která jsou $\|\cdot\|$–$\sigma(Y, M)$ spojitá pro nějaký dostatečně bohatý podprostor $M \subset Y^*$. Připomeňme, že topologie $\sigma(Y, M)$ je Hausdorffova, právě když M odděluje body Y (Tvrzení 6.85), což nastane právě tehdy, když M je w^*-hustý v Y^*:

TVRZENÍ 1. *Nechť X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X, a Y je podprostor X^*. Pak Y je w^*-hustý v X^*, právě když Y odděluje body X.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $x \in X$, $x \neq 0$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq 0$. Dle předpokladu existuje $g \in Y$ takový, že $|g(x) - f(x)| < |f(x)|$, takže $|g(x)| \geq |f(x)| - |f(x) - g(x)| > 0$.

$\Leftarrow$ Dle předpokladu je $Y_\perp = \{0\}$, takže podle Lemmatu 6.111(d) je $\overline{Y}^{w^*} = (Y_\perp)^\perp = \{0\}^\perp = X^*$.

□

Typicky bude M hustý podprostor Hilbertova prostoru. Z následujícího tvrzení plyne, že pokud $M = Y^*$, pak se již jedná o (normově) spojitý lineární operátor.

TVRZENÍ 2. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.
(ii) T *je* w–w *spojité.*
(iii) T *je* $\|\cdot\|$–w *spojité.*

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) plyne z Věty 6.98, (ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(i) Podle Věty 6.33 je $T(B_X)$ slabě omezená. Podle Věty 6.94 je pak $T(B_X)$ omezená, neboli T je spojitý.

□

Spojitost lineárního zobrazení v topologiích $\|\cdot\|$–$\sigma(Y, M)$ lze též vyjádřit pomocí duálního operátoru:

FAKT 3. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $T : X \to Y$ je lineární a M je podprostor Y^*. Pak T je $\|\cdot\|$–$\sigma(Y, M)$ spojité, právě když $T^\#(M) \subset X^*$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Pro každé $f \in M$ je $T^\#(f) = f \circ T \in X^*$ (Věta 6.86).

$\Leftarrow$ Použijeme Větu 6.33: Je-li $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to 0$, pak $f(T(x_n)) = T^\# f(x_n) \to 0$ pro každé $f \in M$, a tedy $T(x_n) \to 0$ v topologii $\sigma(Y, M)$.

□

Z pochopitelných důvodů nás pro daný lineární operátor $T : X \to Y$ zajímá co nejsilnější topologie $\sigma(Y, M)$, ve které je T $\|\cdot\|$–$\sigma(Y, M)$ spojitý, neboli co největší podprostor M, pro který $T^\#(M) \subset X^*$. Tuto informaci vtělíme do definice (analyticky) duálního operátoru T^*.

DEFINICE 4. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární. Položme $M = (T^\#)^{-1}(X^*) \cap Y^*$. Pak operátor $T^* = T^\# \restriction_M$ se nazývá (analyticky) duální operátor k T.

Definiční obor operátoru T^* označíme jako $\operatorname{Dom} T^*$. Uvědomme si, že $\operatorname{Dom} T^*$ je podprostor Y^*, $T^*\colon \operatorname{Dom} T^* \to X^*$ a pokud $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak $\operatorname{Dom} T^* = Y^*$ a definice splývá s klasickou definicí duálního operátoru.

LEMMA 5. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Pak pro $x \in X$ a $y \in Y$ platí, že $T^* f(x) = f(y)$ pro každé $f \in \operatorname{Dom} T^*$, právě když $(x, y) \in \overline{\operatorname{graf} T}$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Dle předpokladu existuje posloupnost $\{x_n\} \subset X$ taková, že $x_n \to x$ a $Tx_n \to y$. Pak pro $f \in \operatorname{Dom} T^*$ platí, že $T^* f(x) = \lim T^* f(x_n) = \lim f(Tx_n) = f(y)$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že $(x, y) \notin \overline{\operatorname{graf} T}$. Pak podle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.7) existuje $\Phi \in (X \oplus_1 Y)^*$ takový, že $\Phi = 0$ na $\operatorname{graf} T$ a $\Phi(x, y) \neq 0$. Tedy dle Věty 2.16 existují $g \in X^*$ a $f \in Y^*$ takové, že $g(u) + f(Tu) = 0$ pro každé $u \in X$ a $g(x) + f(y) \neq 0$. Protože $f(Tu) = -g(u)$ pro každé $u \in X$, znamená to, že $T^\# f \in X^*$, neboli $f \in \operatorname{Dom} T^*$. Ale $T^* f(x) = f(Tx) = -g(x) \neq f(y)$, což je spor.

□

VĚTA 6. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Pak* $\operatorname{Dom} T^*$ *je w^*-hustý podprostor Y^*, právě když T má uzavřený graf.*

V důkazu využijeme následující jednoduché pozorování:

FAKT 7. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Pak T má uzavřený graf, právě když $(0, y) \in \overline{\operatorname{graf} T}$ pouze pro $y = 0$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že graf T není uzavřený. Pak existuje posloupnost $\{x_n\} \subset X$ taková, že $x_n \to x \in X$, $Tx_n \to y \in Y$ a $y \neq Tx$. Potom ovšem $x_n - x \to 0$ a $T(x_n - x) = Tx_n - Tx \to y - Tx$, takže $(0, y - Tx) \in \overline{\operatorname{graf} T}$, což je spor.

□

DŮKAZ VĚTY 6. Podprostor $\operatorname{Dom} T^*$ není w^*-hustý v Y^*, právě když existuje $y \in Y$, $y \neq 0$ takové, že $f(y) = 0 = T^* f(0)$ pro každé $f \in \operatorname{Dom} T^*$ (Tvrzení 1), právě když $(0, y) \in \overline{\operatorname{graf} T}$ pro nějaké $y \in Y$, $y \neq 0$ (Lemma 5), právě když graf T není uzavřený (Fakt 7).

□

Pro rozumnou analytickou teorii tedy mají význam především operátory s uzavřeným grafem, neboť jen to nám zaručí, že topologie $\sigma(Y, \operatorname{Dom} T^*)$ je Hausdorffova.

Při studiu diferenciálních rovnic je typická následující situace.

PŘÍKLAD 8. Nechť $Y = C([0, 1])$ a X je podprostor Y, $X = C^1([0, 1])$ (v krajních bodech jsou míněny jednostranné derivace). Nechť $T\colon X \to Y$ je operátor daný vzorcem $T(f) = f'$. Pak T je zjevně lineární operátor. Tento operátor není spojitý, neboť pro posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ platí, že $f_n \to 0$ v prostoru X (na X je supremová norma), ale posloupnost $\{T(f_n)\} = \{f_n'\} = \{\cos(nx)\}$ nekonverguje ani bodově, natož v prostoru Y.

Všimněme si, že podprostor X je hustý v Y (například díky Weierstraßově větě). Operátor T sice není spojitý, přesto je graf T uzavřený v Y^2 (a tedy T má uzavřený graf (v $X \times Y$)): Je-li $(f_n, T(f_n)) \to (f, g)$ v Y^2, pak podle klasické věty z analýzy je $g = f' = T(f)$, tj. $(f, g) \in \operatorname{graf} T$. To znamená, že T je $\|\cdot\|$–$\sigma(Y, \operatorname{Dom} T^*)$ spojitý, přičemž topologie $\sigma(Y, \operatorname{Dom} T^*)$ je podle Věty 6 Hausdorffova.

◇

DEFINICE 9. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $S\colon \operatorname{Dom} S \subset X \to Y$, $T\colon \operatorname{Dom} T \subset X \to Y$ lineární operátory s definičními obory $\operatorname{Dom} T$ a $\operatorname{Dom} S$. Pokud $\operatorname{graf}(T) \subset \operatorname{graf}(S)$, značíme tento fakt jako $T \subset S$.

Řekneme, že T je uzavřený, pokud $\operatorname{graf}(T) = \{(x, y) \in \operatorname{Dom} T \times Y;\ y = Tx\}$ je uzavřená množina v $X \times Y$.

O operátoru T řekneme, že ho lze uzavřít, pokud existuje uzavřený operátor $V\colon X \to Y$ s definičním oborem $\operatorname{Dom} V \subset X$ splňující $T \subset V$.

Všimněme si, že záleží na tom, v jakém prostoru chápeme uzavřenost grafu. Je-li T lineární operátor v normovaném lineárním prostoru X a je-li množina graf T uzavřená v X^2, pak T má uzavřený graf i v obvyklém smyslu (tj. graf T je uzavřená podmnožina $\operatorname{Dom} T \times X$). Na druhou stranu, pokud T má uzavřený graf, pak ještě množina graf T nemusí být uzavřená v X^2, a to ani pro spojité operátory: Je-li $T\colon c_{00} \to c_0$, $T = Id$, pak T je spojitý, a tedy má uzavřený graf (v $c_{00} \times c_0$), nicméně množina graf T není uzavřená v $(c_0)^2$.

DEFINICE 10. Nechť X_1, X_2, X_3 jsou normované lineární prostory.

(a) Nechť $T, S\colon X_1 \to X_2$ jsou operátory s definičními obory $\operatorname{Dom} T$ a $\operatorname{Dom} S$. Pak operátor $T + S$ je definován jako

$$(T + S)(x) = Tx + Sx, \quad x \in \operatorname{Dom} T \cap \operatorname{Dom} S.$$

(b) Je-li $T\colon X_1 \to X_2$ operátor a $\lambda \in \mathbb{K}$, položíme $\lambda T = 0$ v případě $\lambda = 0$ a jinak

$$(\lambda T)(x) = \lambda Tx, \quad x \in \operatorname{Dom} T.$$

(c) Jsou-li $T\colon X_1 \to X_2$ a $S\colon X_2 \to X_3$ operátory, operátor $S \circ T$ definujeme jako

$$(S \circ T)x = S(Tx), \quad x \in \operatorname{Dom} T \cap T^{-1}(\operatorname{Dom} S).$$

TVRZENÍ 11. *Pro operátory R, S, T mezi normovanými lineárními prostory platí následující tvrzení.*

(a) $(R + S) + T = R + (S + T)$,

(b) $(RS)T = R(ST)$,

(c) $(R + S)T = RT + ST$ *a* $T(R + S) \supset TR + TS$. *Pokud T je definován všude, platí* $T(R + S) = TR + TS$.

DŮKAZ. (a) Pro důkaz první rovnosti stačí ověřit následující sérii ekvivalencí:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}(R + (S + T)) &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom} R \ \&\ x \in \operatorname{Dom}(S + T) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom} R \cap (\operatorname{Dom} S \cap \operatorname{Dom} T) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (\operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} S) \cap \operatorname{Dom} T \Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom}(R + S) \ \&\ x \in \operatorname{Dom} T \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom}((R + S) + T). \end{aligned}$$

(b) se dokáže podobně:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}((RS)T) &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom} T \ \&\ Tx \in \operatorname{Dom}(RS) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom} T \ \&\ Tx \in \operatorname{Dom} S \ \&\ STx \in \operatorname{Dom} R \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom}(ST) \ \&\ STx \in \operatorname{Dom} R \Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom}(R(ST)). \end{aligned}$$

Rovnost v (c) plyne z ekvivalencí

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}((R + S)T) &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom} T \& \ Tx \in \operatorname{Dom}(R + S) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom} T \ \&\ Tx \in \operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} S \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom}(RT) \cap \operatorname{Dom}(ST) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Dom}(RT + ST). \end{aligned}$$

Inkluze v (c) se ověří též snadno. Platí totiž

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}(TR + TS) &\Rightarrow x \in \operatorname{Dom}(TR) \cap \operatorname{Dom}(TS) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} S \ \&\ Rx, Sx \in \operatorname{Dom} T \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Dom}(R + S) \ \&\ (R + S)x \in \operatorname{Dom} T \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Dom}(T(R + S)). \end{aligned}$$

Pokud T je definován všude, právě uvedené implikace lze obrátit, neboť podmínka na $\operatorname{Dom} T$ je splněna automaticky.

$\square$

FAKT 12. *Nechť X, Y jsou topologické prostory, $A \subset X$ a $f\colon A \to Y$ je prosté. Pak f má uzavřený graf v $X \times Y$, právě když f^{-1} má uzavřený graf v $Y \times X$.*

DŮKAZ. Zobrazení $\Phi\colon X \times Y \to Y \times X$, $\Phi(x, y) = (y, x)$ je zjevně homeomorfismus. Tudíž graf $f^{-1} = \Phi(\operatorname{graf} f)$ je uzavřený v $Y \times X$, právě když graf f je uzavřený v $X \times Y$.

□

TVRZENÍ 13. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon \operatorname{Dom} T \subset X \to Y$ je operátor.*

(a) Jsou-li X a Y Banachovy, $\operatorname{Dom} T = X$ *a T je uzavřený, platí $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Operátor T lze uzavřít.*

(ii) *Pokud $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ v* $\operatorname{Dom} T \times Y$, *pak $y = 0$.*

(iii) *Množina* $\overline{\operatorname{graf} T} \subset X \times Y$ *je grafem zobrazení.*

(c) Pokud T je prostý a uzavřený, je T^{-1} též uzavřený.

DŮKAZ. (a) Tvrzení přímo plyne z Věty 3.13.

(b) Dokážeme (i)⇒(ii). Nechť tedy $S\colon X \to Y$ je uzavřený operátor splňující $T \subset S$ a nechť $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ v $\operatorname{Dom} T \times Y$. Pak $x_n \to 0$ a $Sx_n = Tx_n \to y$. Z uzavřenosti operátoru S plyne $y = S0 = 0$.

(ii)⇒(iii) Ukážeme, že $G = \overline{\operatorname{graf} T} \subset X \times Y$ je graf zobrazení. Zjevně je G podprostor $X \times Y$. Nechť $(x, y_1), (x, y_2) \in G$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ v $\operatorname{Dom} T$, takové, že $(x_n, Tx_n) \to (x, y_1)$ a $(y_n, Ty_n) \to (x, y_2)$. Pak ovšem $(x_n - y_n, T(x_n - y_n)) \to (0, y_1 - y_2)$, takže (ii) implikuje $y_1 = y_2$. Tedy G je grafem zobrazení $S\colon X \to Y$. To je zřejmě lineární, jelikož G je vektorový podprostor $X \times Y$.

(iii)⇒(i) Označme $\overline{T}$ zobrazení, jehož grafem je $\overline{\operatorname{graf} T}$. Pak $\overline{T}$ je uzavřené a $T \subset \overline{T}$.

(c) Tvrzení plyne z Faktu 12.

□

ZNAČENÍ 14. Je-li $T\colon \operatorname{Dom} T \subset X \to Y$ operátor (X a Y jsou normované lineární prostory), který lze uzavřít, značíme (stejně jako v důkazu Tvrzení 13) $\overline{T}$ jeho minimální uzavřené rozšíření, tj. operátor splňující $\operatorname{graf} \overline{T} = \overline{\operatorname{graf} T}$.

PŘÍKLAD 15. Nechť T je operátor na ℓ_2 splňující $\operatorname{Dom} T = c_{00} \subset \ell_2$ definovaný jako $Tx = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, 0, 0, \dots)$. Pak T je hustě definovaný operátor, který nemá uzavřené rozšíření.

◇

DŮKAZ. Zjevně je T hustě definovaný. Uvažujme posloupnost vektorů $x^n = (\underbrace{2^{-n}, \dots, 2^{-n}}_{2^n-\text{krát}}, 0, \dots) \in \operatorname{Dom} T$. Pak $Tx^n = (1, 0, 0, \dots)$ a $\|x^n\|^2 = 2^n 2^{-2n} = 2^{-n} \to 0$. Tedy posloupnost (x^n, Tx^n) ukazuje neplatnost podmínky (ii) v Tvrzení 13(b).

□

TVRZENÍ 16. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je uzavřený lineární operátor.*

(a) Pokud $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak $S + T$ je uzavřený a $\operatorname{Dom}(S + T) = \operatorname{Dom}(T)$.

(b) Pokud $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, pak $\operatorname{Dom}(ST) = \operatorname{Dom}(T)$. *Pokud S je isomorfizmus, je ST uzavřený.*

(c) Pokud $S \in \mathcal{L}(Z, X)$, je TS uzavřený.

DŮKAZ. (a) Máme $\operatorname{Dom}(S + T) = \operatorname{Dom} S \cap \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T$. Pokud $(x_n, (S + T)x_n) \to (x, y)$ v $X \times Y$, máme $Tx_n = (S + T)x_n - Sx_n \to y - Sx$, tedy $(x_n, Tx_n) \to (x, y - Sx)$. Z uzavřenosti T plyne $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx = y - Sx$. Tedy $x \in \operatorname{Dom}(S + T)$ a $(S + T)x = y$.

(b) Máme $\operatorname{Dom}(ST) = \operatorname{Dom} T \cap T^{-1}(\operatorname{Dom} S) = \operatorname{Dom} T \cap T^{-1}(Y) = \operatorname{Dom} T$. Pokud S je isomorfizmus a $(x_n, STx_n) \to (x, z)$ v $X \times Z$, kde $x_n \in \operatorname{Dom}(ST)$, pak $Tx_n = S^{-1}STx_n = S^{-1}z$. Z uzavřenosti T máme $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx = S^{-1}z$. Tedy je $x \in \operatorname{Dom}(ST)$ a $STx = z$, tj. ST uzavřený.

(c) Máme $\operatorname{Dom}(TS) = S^{-1}(\operatorname{Dom} T)$. Nechť $(z_n, TSz_n) \to (z, y)$ v $Z \times Y$, kde $z_n \in \operatorname{Dom}(TS)$. Ze spojitosti S máme $x_n = Sz_n \to Sz$, přičemž $x_n \in \operatorname{Dom} T$. Tedy $(x_n, Tx_n) \to (Sz, y)$, což díky uzavřenosti T znamená $Sz \in \operatorname{Dom} T$ a $TSz = y$. Tedy $z \in \operatorname{Dom}(TS)$ a $TSz = y$. Operátor TS je tak uzavřený.

□

PŘÍKLADY 17. (a) Nechť $X = C([0,1])$ a operátor T na X je definován jako $Tf = f'$ pro $f \in \operatorname{Dom} T = C^1([0,1])$. Nechť $S \in \mathcal{L}(X)$ je definován jako $Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(\frac{1}{n})$, $x \in [0,1]$, $f \in X$. Pak T je hustě definovaný uzavřený operátor, ale ST nemá uzavřené rozšíření.

(b) Nechť $X = \ell_2$ a $Y = \{x \in \ell_2;\ \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2 < \infty\}$. Definujme pro $x \in Y$ operátory S a T jako

$$Sx = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, -x_1, -2x_2, -3x_3, \dots) \quad \text{a} \quad Tx = (0, x_1, 2x_2, 3x_3, \dots).$$

Pak S i T jsou hustě definované uzavřené operátory takové, že $S + T$ nemá uzavřené rozšíření.

DŮKAZ. (a) Vše je jasné, až na fakt, že ST nemá uzavřené rozšíření. K důkazu tohoto tvrzení uvažujme funkce $f_n \in C^1([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$ splňující $f_n'(\frac{1}{k}) = \begin{cases} 1, & k = 1, \dots, n, \\ 0, & k = n+1, \dots, \end{cases}$ přičemž $\|f_n\| \le \frac{1}{n}$. Pak $f_n \to 0$ v X, ale $STf_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \to 1$. Tedy ST nemá uzavřené rozšíření dle Tvrzení 13(b).

(b) Zjevně jsou S i T hustě definovány. Vskutku, z odhadu pro $x \in \operatorname{Dom} S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |nx(n)| \frac{1}{n} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |nx(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

plyne, že S je dobře definovaný.

Ukážeme, že T je uzavřený. Nechť tedy vektory $\{x^k\} \subset \operatorname{Dom} T$ splňují $(x^k, Tx^k) \to (x, y) \in \ell_2 \times \ell_2$. Pak máme

$$(0, x^k(1), 2x^k(2), 3x^k(3), \dots) \to (y(1), y(2), \dots),$$

takže $y(1) = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |y(n+1) - nx^k(n)|^2 \to 0$. Nechť $N \in \mathbb{N}$ je pevné. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{N} |y(n+1) - nx(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\le \left(\sum_{n=1}^{N} |y(n+1) - nx^k(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |nx^k(n) - nx(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|y - Tx^k\| + N\|x^k - x\|.\end{aligned}$$

Tedy

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |y(n+1) - nx(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \limsup_{k \to \infty} \Big(\|y - Tx^k\| + N\|x^k - x\| \Big) = 0,$$

a tedy

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(n+1) - nx(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Proto je $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx = y$, tj. T je uzavřený.

Nechť nyní $(x^k, Sx^k) \to (x, y) \in \ell_2 \times \ell_2$, kde $x^k \in \operatorname{Dom} S$. Pak

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x^k(n), -x^k(1), -2x^k(2), -3x^k(3), \dots) \to (y(1), y(2), \dots),$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x^k(n) \to y(1)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |y(n+1) + nx^k(n)|^2 \to 0$. Jako výše pak odvodíme $\sum_{n=1}^{\infty} |y(n+1) + nx(n)|^2 = 0$. Tedy $x \in \operatorname{Dom} S$.

Dále platí

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |x^k(n) - x(n)| &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |nx^k(n) - nx(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |nx^k(n) + y(n+1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0.\end{aligned}$$

Tedy
$$|y(1) - \sum_{n=1}^{\infty} x(n)| \leq |y(1) - \sum_{n=1}^{\infty} x^k(n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |x^k(n) - x(n)| \to 0.$$
Proto $Sx = y$ a S je též uzavřený.

Součtem S a T však obržíme operátor $R\colon Y \to \ell_2$, který nemá uzavřené rozšíření. To plyne z Příkladu 15.

□

TVRZENÍ 18. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon \operatorname{Dom} T \subset X \to Y$ je prostý uzavřený operátor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\operatorname{Rng} T = Y$ *a* $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

(ii) $\operatorname{Rng} T = Y$.

(iii) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v* Y *a* $T^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Rng} T, X)$.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) zřejmě.

(ii)⇒(iii) Zjevně je $\operatorname{Rng} T = Y$ hustý v Y. Dále je $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T = Y \to X$ uzavřený (Tvrzení 13(c)). Tedy je spojitý dle Tvrzení 13(a).

(iii)⇒(i) Nechť $S\colon Y \to X$ je spojité rozšíření T^{-1}. Nechť $y \in Y$ je dáno. Zvolme $x_n \in \operatorname{Dom} T$ splňující $Tx_n \to y$. Pak $x = Sy$ splňuje $x = Sy = \lim_{n\to\infty} STx_n = \lim_{n\to\infty} T^{-1}Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tedy $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$, což díky uzavřenosti T implikuje $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx = y$. Proto $\operatorname{Rng} T = Y$ a $T^{-1} = S \in \mathcal{L}(Y, X)$.

□

2. Spektrum

Chceme-li adaptovat spektrální teorii i pro nespojité lineární operátory, je potřeba, aby se celá situace odehrávala v jednom prostoru. Důležitá je také úplnost (viz Lemma 9.21).

DEFINICE 19. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že T je lineární operátor v X, jestliže $T\colon W \to X$ je lineární zobrazení, kde W je podprostor X.

Pro lineární operátory v X se pojmy vlastního čísla a vlastního vektoru definují zcela stejně, jako pro operátory z $\mathcal{L}(X)$.

DEFINICE 20. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a T je lineární operátor v X. Rezolventní množinu operátoru T definujeme jako
$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda I - T \text{ má inverzi patřící do } \mathcal{L}(X)\},$$
rezolventu (též rezolventní zobrazení) operátoru T předpisem
$$R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T)$$
a spektrum T jako $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$.

VĚTA 21. *Nechť X je Banachův prostor a T je lineární operátor v X. Množina $\rho(T)$ je otevřená a $\sigma(T)$ je uzavřená. Rezolventní zobrazení R_T má derivaci v každém bodě množiny $\rho(T)$. Je-li tedy X komplexní, pak R_T je holomorfní na $\rho(T)$.*

DŮKAZ. Zvolme pevně $\lambda \in \rho(T)$. Nechť $t \in \mathbb{K}$, $|t| < \frac{1}{\|R_T(\lambda)\|}$ a položme $S = t(\lambda I - T)^{-1}$. Pak $S \in \mathcal{L}(X)$ a $\|S\| < 1$. Podle Lemmatu 9.21(a) je operátor $I + S$ invertovatelný. Protože $(\lambda + t)I - T = (I + S) \circ (\lambda I - T)$, je $((\lambda + t)I - T)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1} \circ (I + S)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, a tedy $\lambda + t \in \rho(T)$. Je-li navíc $0 < |t| \leq \frac{1}{2\|R_T(\lambda)\|}$, pak podle předchozího výpočtu a Lemmatu 9.21(b) použitého na $x = I$ a $h = S$ je

$$\left\| \frac{R_T(\lambda + t) - R_T(\lambda)}{t} + R_T(\lambda)^2 \right\| = \left\| \frac{\frac{1}{t}S(I+S)^{-1} - \frac{1}{t}S}{t} + \frac{S^2}{t^2} \right\| \leq \frac{\|S\|}{|t|^2}\|(I+S)^{-1} - I + S\| \leq$$
$$\leq 2\frac{\|S\|^3}{|t|^2} = 2\|R_T(\lambda)\|^3|t|.$$

Odtud ihned plyne, že $R'_T(\lambda) = -R_T(\lambda)^2$.

□

VĚTA 22. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a T je lineární uzavřený operátor v X. Je-li $\lambda \in \mathbb{K}$, pak $\lambda \in \rho(T)$ právě tehdy, když $\lambda I - T$ je bijekce* $\operatorname{Dom} T$ *na X.*

DŮKAZ. Pokud je $\lambda I - T$ bijekce, jedná se o prostý uzavřený operátor splňující $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = X$. Z Tvrzení 18 plyne $\lambda \in \rho(T)$.

□

FAKT 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor a T je lineární operátor v X. Není-li T uzavřený, pak $\rho(T) = \emptyset$.*

DŮKAZ. Je-li $\lambda \in \rho(T)$, pak $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, takže $(\lambda I - T)^{-1}$ je uzavřený. Tedy i $\lambda I - T$ je uzavřený (Fakt 12), tedy i $T = \lambda I - (\lambda I - T)$ je uzavřený (Tvrzení 16(a)). To je však spor.

□

LEMMA 24. *Nechť X je Banachův prostor a T je lineární operátor v X takový, že $0 \notin \sigma(T)$. Pak pro nenulové $\lambda \in \mathbb{K}$ platí $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

DŮKAZ. Podle předpokladu je $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, takže T^{-1} i T jsou uzavřené (Fakt 12). Díky Větě 22 tedy stačí ukázat, že pokud $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, pak $\lambda I - T$ je bijekce, právě když $\frac{1}{\lambda}I - T^{-1}$ je bijekce. To ovšem plyne ze vzorců $\frac{1}{\lambda}I - T^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(\lambda I - T) \circ T^{-1}$, resp. $\lambda I - T = -\lambda\big(\frac{1}{\lambda}I - T^{-1}\big) \circ T$, neboť T^{-1} je bijekce X na $\operatorname{Dom} T$ a T je bijekce $\operatorname{Dom} T$ na X.

□

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je komplexní Banachův prostor a T je lineární operátor v X takový, že $\sigma(T) = \emptyset$. Pak $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.*

DŮKAZ. Jelikož $0 \in \rho(T)$, je $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Pokud $\lambda \in \sigma(T^{-1}) \setminus \{0\}$, pak dle Lemmatu 24 máme $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$. To je ale spor. Z neprázdnosti spektra T^{-1} tak plyne $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.

□

3. Adjungované operátory v Hilbertových prostorech

Jak jsme viděli v kapitole 10, podstatným rysem teorie spojitých lineárních operátorů na Hilbertových prostorech je existence hilbertovsky adjungovaného operátoru a využívání jeho vlastností. I pro lineární operátory v Hilbertových prostorech můžeme podobně jako ve spojitém případě transformovat pojem duálního operátoru do pojmu adjungovaného operátoru operujícího místo na duálu na inkriminovaném Hilbertově prostoru.

DEFINICE 26. Nechť H je Hilbertův prostor a T je lineární operátor v H. Hilbertovsky adjungovaný operátor k T, označený jako $T^\star$, definujeme na množině

$$\operatorname{Dom} T^\star = \{y \in H;\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ je spojitý funkcionál na } \operatorname{Dom} T\}.$$

Pro každé $y \in \operatorname{Dom} T^\star$ je $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na $\operatorname{Dom} T$, který lze jednoznačně rozšířit na funkcionál z $(\overline{\operatorname{Dom} T})^*$ (Věta 1.62), takže můžeme definovat $T^\star y$ jako jednoznačně určený prvek $\overline{\operatorname{Dom} T}$, který splňuje $\langle x, T^\star y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ (Věta 1.120).

Snadno je vidět, že $\operatorname{Dom} T^\star$ je podprostor H, $T^\star$ je lineární operátor v H, $\operatorname{Dom} T^\star = I^{-1}(\operatorname{Dom} T^*)$ a $T^\star = I^{-1} \circ T^* \circ I$, kde $I: H \to H^*$ je sdruženě lineární izometrie z Věty 1.120. Zjevně také platí, že i $\langle T^\star y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ a $y \in \operatorname{Dom} T^\star$.

Uvědomme si, že pro $y, z \in H$ platí, že $T^\star y = z$, právě když $z \in \overline{\operatorname{Dom} T}$ a $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$, neboť v tom případě je $y \in \operatorname{Dom} T^\star$.

Jak jsme viděli v oddílu 1, definice $T^\star$ má v sobě zakódovány informace o spojitosti operátoru T. Zajímat nás budou zejména samoadjungované operátory, pro které se nám podaří vybudovat rozumnou analogii teorie jako pro spojité lineární operátory; abychom je mohli studovat, podíváme se nejprve na některé obecné vlastnosti adjungovaných operátorů.

Je-li T lineární operátor v Banachově prostoru X a $\operatorname{Dom} T$ je hustý v X, pak říkáme, že T je hustě definovaný.

TVRZENÍ 27. *Nechť S, T jsou lineární operátory v Hilbertově prostoru H.*

(a) Pokud S je hustě definovaný a $S \subset T$, platí $T^\star \subset S^\star$.
(b) Pokud $S + T$ je hustě definovaný, platí $S^\star + T^\star \subset (S + T)^\star$. Pokud je navíc $S \in \mathcal{L}(H)$, platí $S^\star + T^\star = (S + T)^\star$.
(c) Pokud S i ST jsou hustě definovány, platí $T^\star S^\star \subset (ST)^\star$. Pokud je navíc $S \in \mathcal{L}(H)$, platí $T^\star S^\star = (ST)^\star$.

DŮKAZ. (a) Zřejmě máme

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} T^\star &= \{y \in H;\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ je spojitý funkcionál na } \operatorname{Dom} T\} \subset \\ &\subset \{y \in H;\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ je spojitý funkcionál na } \operatorname{Dom} S\} = \\ &= \{y \in H;\ x \mapsto \langle Sx, y\rangle \text{ je spojitý funkcionál na } \operatorname{Dom} S\} = \operatorname{Dom} S^\star.\end{aligned}$$

Navíc pro $y \in \operatorname{Dom} T^\star$ a $x \in \operatorname{Dom} S$ platí

$$\langle x, S^\star y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle,$$

což díky hustotě $\operatorname{Dom} S$ implikuje $S^\star y = T^\star y$.

(b) Máme-li $x \in \operatorname{Dom}(S + T)$ a $y \in \operatorname{Dom}(S^\star + T^\star) = \operatorname{Dom} S^\star \cap \operatorname{Dom} T^\star$, platí

$$\langle (S + T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle x, S^\star y\rangle + \langle x, T^\star y\rangle = \langle x, (S^\star + T^\star)y\rangle.$$

Tedy $y \in \operatorname{Dom}(S + T)^\star$ a $(S + T)^\star y = S^\star y + T^\star y$. Proto $S^\star + T^\star \subset (S + T)^\star$.

Pokud je navíc S spojitý a $y \in \operatorname{Dom}(S + T)^\star$, je pro $x \in \operatorname{Dom}(S + T) = \operatorname{Dom} T$ zobrazení

$$x \in \operatorname{Dom} T \mapsto \langle Tx, y\rangle = \langle (S + T)x, y\rangle - \langle Sx, y\rangle$$

spojité. Tedy $y \in \operatorname{Dom} T^\star = \operatorname{Dom} S^\star \cap \operatorname{Dom} T^\star = \operatorname{Dom}(S^\star + T^\star)$. Proto máme $(S + T)^\star \subset S^\star + T^\star$.

(c) Máme $\operatorname{Dom}(ST) = \operatorname{Dom} T \cap T^{-1}(\operatorname{Dom} S)$ a $\operatorname{Dom} T^\star S^\star = \operatorname{Dom} S^\star \cap (S^\star)^{-1}(\operatorname{Dom} T^\star)$. Nechť $x \in \operatorname{Dom}(ST)$ a $y \in \operatorname{Dom}(T^\star S^\star)$ jsou dány. Pak $x \in \operatorname{Dom} T$ a $S^\star y \in \operatorname{Dom} T^\star$, a tedy $\langle Tx, S^\star y\rangle = \langle x, T^\star(S^\star(y))\rangle$. Jelikož $Tx \in \operatorname{Dom} S$ a $y \in \operatorname{Dom} S^\star$, platí $\langle (ST)x, y\rangle = \langle S(Tx), y\rangle = \langle Tx, S^\star y\rangle$. Z předchozího vztahu tak máme

$$\langle (ST)x, y\rangle = \langle x, T^\star S^\star y\rangle.$$

Tedy $x \in \operatorname{Dom}(ST) \mapsto \langle (ST)x, y\rangle$ je pro $y \in \operatorname{Dom}(T^\star S^\star)$ spojité, a proto $y \in \operatorname{Dom}(ST)^\star$. Z právě odovozené rovnosti pak plyne fakt $T^\star S^\star \subset (ST)^\star$.

Je-li navíc $S \in \mathcal{L}(H)$, máme $\operatorname{Dom}(ST) = \operatorname{Dom} T$ a $\operatorname{Dom} T^\star S^\star = (S^\star)^{-1}(\operatorname{Dom} T^\star)$. Nechť $y \in \operatorname{Dom}(ST)^\star$. Pak potřebujeme ověřit, že $S^\star y \in \operatorname{Dom} T^\star$. Protože zobrazení

$$x \mapsto \langle Tx, S^\star y\rangle = \langle STx, y\rangle, \quad x \in \operatorname{Dom} T$$

je spojité, je $S^\star y \in \operatorname{Dom} T^\star$. Tedy platí inkluze $(ST)^\star \subset T^\star S^\star$.

□

LEMMA 28. *Nechť H je Hilbertův prostor a G je podprostor $H \times H$. Pak G je graf operátoru, právě když $(0, y) \in G$ pouze pro $y = 0$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. Obráceně, pokud (x, y_1) a (x, y_2) jsou prvky G, je $(0, y_1 - y_2) \in G$, a tedy $y_1 = y_2$. Proto je G grafem zobrazení. Jelikož je G podprostor, jedná se o graf lineárního zobrazení.

□

TVRZENÍ 29. *Nechť T je lineární operátor v Hilbertově prostoru H. Pak $T^\star$ je hustě definovaný, právě když T má uzavřený graf v* $\operatorname{Dom} T \times H$.

DŮKAZ. Prostor H je reflexivní (Věta 2.30), takže topologie w^* a w na H^* splývají (Důsledek 6.121). Podle Věty 6 má tedy T uzavřený graf, právě když $\operatorname{Dom} T^*$ je w-hustý, neboli normově hustý v H^* (Věta 6.93). Izometrie $I\colon H \to H^*$ z Věty 1.120 pak přenáší hustotu $\operatorname{Dom} T^*$ na hustotu $\operatorname{Dom} T^\star$ a obráceně.

□

Následující tvrzení lze brát jako zpřesnění předcházející informace.

TVRZENÍ 30. *Nechť T je lineární operátor v Hilbertově prostoru H.*

(a) Pak $T^\star$ je uzavřený.
(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
  (i) T lze uzavřít.
  (ii) $T^\star$ je hustě definovaný.
  (iii) $T \subset T^{\star\star}$.
(c) Pokud hustě definovaný T lze uzavřít, pak $\overline{T} = T^{\star\star}$.
(d) $T = T^{\star\star}$, právě když T je hustě definovaný a uzavřený.

DŮKAZ. (a) Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost v $\operatorname{Dom} T^\star$ taková, že $y_n \to y \in H$ a $T^\star y_n \to z \in H$. Pak $\langle Tx, y\rangle = \lim\langle Tx, y_n\rangle = \lim\langle x, T^\star y_n\rangle = \langle x, z\rangle$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$. Protože $T^\star y_n \in \overline{\operatorname{Dom} T}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je i $z \in \overline{\operatorname{Dom} T}$. Odtud plyne, že $T^\star y = z$, neboli $(y, z) \in \operatorname{graf} T^\star$.

(b) (i)$\Rightarrow$(ii) Dokážeme, že pokud $y \in (\operatorname{Dom} T^\star)^\perp$, pak $(0, y) \in \overline{\operatorname{graf} T}$.

Vskutku, pokud by $(0, y) \notin \overline{\operatorname{graf} T}$, pak existuje $(a, b) \in H^2$ splňující

$$\langle y, b\rangle = \langle (0, y), (a, b)\rangle \neq 0 \quad \text{a} \quad \langle (x, Tx), (a, b)\rangle = 0, \quad x \in \operatorname{Dom} T.$$

Pak

$$x \mapsto \langle Tx, b\rangle = \langle x, -a\rangle, \quad x \in \operatorname{Dom} T,$$

takže $b \in \operatorname{Dom} T^\star$. Avšak $\langle y, b\rangle \neq 0$, což je spor.

Tím pádem dostáváme, že pokud $\overline{\operatorname{graf} T}$ je grafem operátoru, tak $y \in (\operatorname{Dom} T^\star)^\perp$ implikuje $y = 0$ (vizte Lemma 28). Tedy $\operatorname{Dom} T^\star$ je hustý.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Je-li $x \in \operatorname{Dom} T$, pak je zobrazení $y \mapsto \langle T^\star y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$ spojité na $\operatorname{Dom} T^\star$. Tedy $x \in \operatorname{Dom} T^{\star\star}$ a $T^{\star\star}x$ je vektor v $\overline{\operatorname{Dom} T^\star} = H$ splňující $\langle T^\star y, x\rangle = \langle y, T^{\star\star}x\rangle$, $y \in \operatorname{Dom} T^\star$. Pak ale platí

$$\langle y, Tx\rangle = \langle T^\star y, x\rangle = \langle y, T^{\star\star}x\rangle, \quad y \in \operatorname{Dom} T^\star,$$

což díky hustotě $\operatorname{Dom} T^\star$ dává rovnost $Tx = T^{\star\star}x$. Proto $T \subset T^{\star\star}$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Pokud $T \subset T^{\star\star}$, tak $T^{\star\star}$ je uzavřený operátor dle (a). Tedy T lze uzavřít.

(c) Z tvrzení (b) máme inkluzi $T \subset T^{\star\star}$, tedy $\overline{T} \subset T^{\star\star}$. Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $(x, T^{\star\star}x) \in \operatorname{graf}(T^{\star\star}) \setminus \overline{\operatorname{graf} T}$. Pak lze $(x, T^{\star\star}x)$ oddělit od $\overline{\operatorname{graf} T}$ pomocí prvku $(a, b) \in H^2$, tj. existuje $(a, b) \in H^2$ splňující

$$\langle (x, T^{\star\star}x), (a, b)\rangle \neq 0 \quad \text{a} \quad \langle (u, Tu), (a, b)\rangle = 0, \quad u \in \operatorname{Dom} T.$$

Pak

$$u \mapsto \langle Tu, b\rangle = \langle u, -a\rangle, \quad u \in \operatorname{Dom} T,$$

takže $b \in \operatorname{Dom} T^\star$. Navíc díky hustotě $\operatorname{Dom} T$ máme $T^\star b = -a$. Jelikož $b \in \operatorname{Dom} T^\star$ a $x \in \operatorname{Dom} T^{\star\star}$, máme $\langle x, a\rangle = -\langle x, T^\star b\rangle = -\langle T^{\star\star}x, b\rangle$. Tedy

$$0 = \langle x, a\rangle + \langle T^{\star\star}x, b\rangle = \langle (x, T^{\star\star}x), (a, b)\rangle \neq 0.$$

Tento spor zakončuje důkaz.

(d) Je-li $T = T^{\star\star}$, je T uzavřený dle (a) a hustě definovaný dle (b). Obráceně, je-li T uzavřený hustě definovaný, je $T = \overline{T} = T^{\star\star}$ dle (c).

□

Následující věta je analogií Věty 10.1.

VĚTA 31. *Je-li H Hilbertův prostor a T je lineární operátor v H, pak platí, že*
(a) $\operatorname{Ker} T^{\star} = (\operatorname{Rng} T)^{\perp}$,
(b) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^{\star})^{\perp}$.
Je-li navíc T uzavřený, pak
(c) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^{\star})^{\perp} \cap \operatorname{Dom} T$,
(d) je-li T hustě definovaný, pak $\overline{\operatorname{Rng} T^{\star}} \subset (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

DŮKAZ. Protože $0 \in \operatorname{Dom} T$, tvrzení (a) dostaneme z ekvivalencí

$$y \in \operatorname{Ker} T^{\star} \;\Leftrightarrow\; T^{\star} y = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \operatorname{Dom} T : \langle Tx, y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; y \in (\operatorname{Rng} T)^{\perp}.$$

Tvrzení (b) dostaneme z (a) pomocí Důsledku 1.101.

(c) Podle Tvrzení 30(b) je $\operatorname{Dom} T^{\star}$ hustý v H, takže odděluje body H. Platí tedy, že

$$x \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; Tx = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall y \in \operatorname{Dom} T^{\star} : \langle Tx, y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x \in \operatorname{Dom} T \;\&\; \forall y \in \operatorname{Dom} T^{\star} : \langle x, T^{\star} y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (\operatorname{Rng} T^{\star})^{\perp} \cap \operatorname{Dom} T.$$

(d) Podle (c) a Tvrzení 1.92(d) je $\overline{\operatorname{Ker} T} \subset \overline{(\operatorname{Rng} T^{\star})^{\perp}} \cap \overline{\operatorname{Dom} T} = (\operatorname{Rng} T^{\star})^{\perp}$. Podle Tvrzení 1.92(c) a Důsledku 1.101 je tedy $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \left(\overline{\operatorname{Ker} T}\right)^{\perp} \supset \overline{\operatorname{Rng} T^{\star}}$.

□

TVRZENÍ 32. *Je-li T prostý hustě definovaný lineární operátor v Hilbertově prostoru H takový, že* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v H, pak $T^{\star}$ je prostý a $(T^{\star})^{-1} = (T^{-1})^{\star}$.*

DŮKAZ. Nechť $z \in \operatorname{Dom} T^{\star}$. Pro každé $y \in \operatorname{Dom} T^{-1}$ je $T^{-1}y \in \operatorname{Dom} T$, a tedy $\langle T^{-1}y, T^{\star}z\rangle = \langle T(T^{-1}y), z\rangle = \langle y, z\rangle$. Protože $z \in H = \overline{\operatorname{Rng} T} = \overline{\operatorname{Dom} T^{-1}}$, dostáváme, že $(T^{-1})^{\star}(T^{\star}z) = z$. Na druhou stranu, nechť $z \in \operatorname{Dom}(T^{-1})^{\star}$. Pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$ je $Tx \in \operatorname{Dom} T^{-1}$, a tedy $\langle Tx, (T^{-1})^{\star}z\rangle = \langle T^{-1}(Tx), z\rangle = \langle x, z\rangle$. Protože $z \in H = \overline{\operatorname{Dom} T}$, dostáváme, že $T^{\star}((T^{-1})^{\star}z) = z$.

□

4. Symetrické a samoadjungované operátory v Hilbertových prostorech

DEFINICE 33. Nechť T je lineární operátor v Hilbertově prostoru. Řekneme, že T je samoadjungovaný, pokud $T^{\star} = T$.

Uvědomme si, že pro T samoadjungovaný speciálně platí, že $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^{\star}$. Dále je z definice adjungovaného operátoru ihned vidět, že $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro $x, y \in \operatorname{Dom} T$. Nicméně protože adjungovaný operátor s sebou nese informace o spojitosti operátoru T, na to, abychom poznali, zda je T samoadjungovaný, již na rozdíl od spojitého případu (Věta 10.18) samotná tato „algebraická“ podmínka nestačí. Vydělíme tedy tuto podmínku do speciální třídy operátorů:

DEFINICE 34. Nechť T je lineární operátor v Hilbertově prostoru. Řekneme, že T je symetrický, pokud $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in \operatorname{Dom} T$.

Dále řekneme, že T je maximální symetrický, pokud je symetrický a neexistuje vlastní symetrické rozšíření T.

Pro operátory z $\mathcal{L}(H)$ tedy pojmy samoadjungovaný a symetrický splývají. Platí dokonce o něco více, viz Tvrzení 36(b).

TVRZENÍ 35. *Nechť T je samoadjungovaný lineární operátor v Hilbertově prostoru H.*

(a) T je hustě definovaný, symetrický a uzavřený.
(b) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v H právě tehdy, když T je prostý. V tom případě je T^{-1} je samoadjungovaný.*
(c) T je maximální symetrický.

DŮKAZ. (a) plyne z Tvrzení 309b0.

(b) Ekvivalence plyne z Věty 31(a), (b). Samoadjungovanost T^{-1} plyne z Tvrzení 32 (s využitím (a)).

(c) Je-li $T \subset S$ pro nějaký symetrický operátor, pak z hustoty $\operatorname{Dom} S$ máme $S \subset S^\star \subset T^\star = T$ (vizte Tvrzení 27(a)). Tedy T je maximální symetrický.

□

TVRZENÍ 36. *Nechť T je symetrický lineární operátor v Hilbertově prostoru H.*

(a) $\operatorname{Dom} T^\star \supset \operatorname{Dom} T$.
(b) Je-li $\operatorname{Dom} T = H$*, pak $T \in \mathcal{L}(H)$ (a T je tedy samoadjungovaný).*
(c) Je-li T hustě definovaný, lze uzavřít a pak $\overline{T}$ je symetrický.
(d) Pro $x \in \operatorname{Dom} T$ je $T^\star x = P(Tx)$, kde P je ortogonální projekce na $\overline{\operatorname{Dom} T}$. Je-li tedy T hustě definovaný, pak $T = T^\star \restriction_{\operatorname{Dom} T}$.
(e) T je samoadjungovaný, právě když T je hustě definovaný a $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^\star$.
(f) Je-li $\operatorname{Rng} T$ *hustý v H, pak T je prostý.*
(g) Je-li $\operatorname{Rng} T = H$*, pak T je prostý, samoadjungovaný a $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.*

DŮKAZ. (a) Je-li $y \in \operatorname{Dom} T$, pak $x \mapsto \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ je spojitý funkcionál na $\operatorname{Dom} T$.

(b) plyne z (a), Faktu 3 a Tvrzení 2.

(c) Z (a) máme $\operatorname{Dom} T \subset \operatorname{Dom} T^\star$. Jelikož $x \mapsto \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, $x, y \in \operatorname{Dom} T$, platí z hustoty $\operatorname{Dom} T$ rovnost $T^\star y = Ty$ pro $y \in \operatorname{Dom} T$. Tedy $T \subset T^\star$ a T lze uzavřít. Nechť $x, y \in \operatorname{Dom} \overline{T}$. Pak $(x, \overline{T}x), (y, \overline{T}y) \in \operatorname{graf} \overline{T} = \overline{\operatorname{graf} T}$,a tedy lze vybrat posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ v $\operatorname{Dom} T$ splňující $(x_n T x_n) \to (x, \overline{T}x)$ a $(y_n, Ty_n) \to (y, \overline{T}y)$. Pak máme

$$\langle \overline{T}x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ty_n\rangle = \langle x, \overline{T}y\rangle.$$

Tedy $\overline{T}$ je symetrický.

(d) Nechť $x \in \operatorname{Dom} T$. Pak $(Tx - P(Tx)) \perp \operatorname{Dom} T$. Pro každé $y \in \operatorname{Dom} T$ je tedy $\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = \langle y, P(Tx)\rangle + \langle y, Tx - P(Tx)\rangle = \langle y, P(Tx)\rangle$, což znamená, že $T^\star x = P(Tx)$.

(e) plyne z (d) a Tvrzení 35(a).

(f) Podle Věty 31(a) je $T^\star$ prostý, takže podle (d) je prostý i T.

(g) Dle (f) je T prostý. Dále pro každé $x, y \in \operatorname{Dom} T^{-1}$ je $\langle T^{-1}x, y\rangle = \langle T^{-1}x, T(T^{-1}y)\rangle = \langle T(T^{-1}x), T^{-1}y\rangle = \langle x, T^{-1}y\rangle$, takže T^{-1} je symetrický. Podle (b) je tedy $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ a samoadjungovaný a podle Tvrzení 35(b) je pak samoadjungovaný i $T = (T^{-1})^{-1}$.

□

LEMMA 37. *Nechť T je prostý lineární operátor v Banachově prostoru X takový, že T^{-1} je spojitý. Pak* $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, právě když T je uzavřený.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v $\operatorname{Dom} T$ taková, že $x_n \to x \in X$ a $Tx_n \to y \in X$. Dle předpokladu je $y \in \operatorname{Rng} T$, takže $x_n = T^{-1}(Tx_n) \to T^{-1}y$. Odtud plyne, že $T^{-1}y = x$, a tedy $Tx = y$.

$\Leftarrow$ Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost v $\operatorname{Rng} T$ taková, že $y_n \to y \in X$. Položme $x_n = T^{-1}y_n$. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ je $\|x_m - x_n\| \le \|T^{-1}\|\|y_m - y_n\|$, posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská. Díky úplnosti X existuje $x \in X$ takové, že $x_n \to x$. Protože $Tx_n \to y$ a $\operatorname{graf} T$ je uzavřený v X^2, dostáváme, že $y = Tx \in \operatorname{Rng} T$.

□

LEMMA 38. *Nechť T je symetrický lineární operátor v komplexním Hilbertově prostoru H.*

(a) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in$ $\operatorname{Dom} T$.
(b) Je-li $\beta \in \mathbb{R}$, pak pro každé $x \in$ $\operatorname{Dom} T$ *platí, že $\|i\beta x + Tx\|^2 = \beta^2\|x\|^2 + \|Tx\|^2$.*
(c) Je-li $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pak $\lambda I - T$ je prostý a $(\lambda I - T)^{-1}$ je spojitý. Navíc $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ *je uzavřený, právě když T je uzavřený.*

DŮKAZ. (a) Pro $x \in \operatorname{Dom} T$ je $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$.

(b) Díky Faktu 1.85 a (a) je $\|i\beta x + Tx\|^2 = \|i\beta x\|^2 + \|Tx\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle i\beta x, Tx\rangle = \beta^2\|x\|^2 + \|Tx\|^2$.

(c) Nechť $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta \neq 0$. Snadno zjistíme, že $\alpha I - T$ symetrický. (Vskutku, pro $x, y \in \operatorname{Dom} T$ máme $\langle \alpha x - Tx, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle - \langle Tx, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle - \langle x, Ty\rangle = \langle x, \alpha y - Ty\rangle$.) Díky (b) tak pro $x \in \operatorname{Dom} T$ platí, že

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = \|i\beta x + (\alpha I - T)x\|^2 = \beta^2\|x\|^2 + \|(\alpha I - T)x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2.$$

Odtud plyne, že $\lambda I - T$ je prostý a $(\lambda I - T)^{-1}$ je spojitý. Zbytek plyne z Lemmatu 37 a Tvrzení 16(a).

□

VĚTA 39. *Nechť T je samoadjungovaný lineární operátor v netriviálním Hilbertově prostoru H. Pak $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $\sigma(T) = \emptyset$. Protože $0 \in \rho(T)$, je $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ a dle Lemmatu 24 je $\sigma(T^{-1}) \subset \{0\}$, takže $r(T^{-1}) = 0$. Podle Tvrzení 35(b) je T^{-1} samoadjungovaný, takže podle Věty 10.18(c) je $\|T^{-1}\| = 0$, což je spor.

Dále můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že H je komplexní. Nechť $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tvrdíme, že $\lambda \in \rho(T)$. Díky Lemmatu 38(c) a Tvrzení 35(a) stačí ukázat, že $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je hustý v H. To však plyne z výpočtu $\overline{\operatorname{Rng}(\lambda I - T)} = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I - T)^\star\big)^\perp = \big(\operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T)\big)^\perp = \{0\}^\perp = H$, kde jsme postupně použili Větu 31(b), Tvrzení 27(a) spolu s Tvrzením 35(a) a nakonec Lemma 38(c).

□

DŮSLEDEK 40. *Nechť T je lineární operátor v komplexním Hilbertově prostoru H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je samoadjungovaný.
(ii) T je hustě definovaný, symetrický a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
(iii) T je hustě definovaný, symetrický a existuje $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takové, že $\lambda, \overline{\lambda} \in \rho(T)$.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) plyne z Tvrzení 35(a) a Věty 39, (ii)⇒(iii) je triviální.

(iii)⇒(i) Dle Tvrzení 36(d), (a) stačí ukázat, že $\operatorname{Dom} T^\star \subset \operatorname{Dom} T$. Nechť tedy $x \in \operatorname{Dom} T^*$. Podle předpokladu je $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, můžeme tedy položit $y = (\lambda I - T)^{-1}\big((\lambda I - T^\star)x\big)$. Pak $y \in \operatorname{Dom} T$, podle Tvrzení 36(c) tak platí, že $(\lambda I - T^\star)x = (\lambda I - T)y = \lambda y - Ty = \lambda y - T^\star y = (\lambda I - T^\star)y$. Díky Tvrzení 27(a), Větě 31(a) a předpokladu na $\overline{\lambda}$ ovšem $\operatorname{Ker}(\lambda I - T^\star) = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T)^\star = \big(\operatorname{Rng}(\overline{\lambda} I - T)\big)^\perp = H^\perp = \{0\}$, neboli $\lambda I - T^\star$ je prostý. To znamená, že $x = y \in \operatorname{Dom} T$.

□

Poznamenejme, že podmínku ve (iii) v předchozím důsledku lze ještě oslabit: stačí, že existují $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ taková, že $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$ a $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$. Důkaz je však již složitější.

Následující příklad ukazuje citlivost chování operátoru v závislosti na okrajových podmínkách.

PŘÍKLAD 41. Nechť $I = [0, 1]$, $H = L_2(I)$ (uvažovaný jako komplexní) a $\alpha \in \mathbb{T}$. Nechť

$$\operatorname{Dom} T_1 = \{f \in \operatorname{AC}(I);\ f' \in H\}, \quad \operatorname{Dom} T_2 = \{f \in \operatorname{Dom} T_1;\ f(0) = \alpha f(1)\},$$
$$\operatorname{Dom} T_3 = \{f \in \operatorname{Dom} T_1;\ f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{a} \quad \operatorname{Dom} T_4 = \{f \in \operatorname{Dom} T_1;\ f(0) = 0\}.$$

přičemž $T_k f = if'$, $f \in \operatorname{Dom} T_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Platí $T_3 \subset T_2 \subset T_1$, přičemž všechny čtyři operátory jsou uzavřené a hustě definované.
(b) Platí $T_1^\star = T_3$, takže T_3 je uzavřený hustě definovaný symetrický operátor, který není samoadjungovaný.
(c) Platí $T_2^\star = T_2$, takže T_3 má nekonečně mnoho samoadjungovaných rozšíření.
(d) Platí $\sigma(T_1) = \sigma_{\mathrm{p}}(T_1) = \mathbb{C}$.
(e) Pokud $\alpha = 1$, je $\sigma(T_2) = \sigma_{\mathrm{p}}(T_2) = \{2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}\}$.
(f) Platí $\sigma(T_3) = \mathbb{C}$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T_3) = \emptyset$ a $\operatorname{Rng}(\lambda I - T_3)$ má kodimenzi 1 pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$.
(g) Platí $\sigma(T_4) = \emptyset$.

◇

DŮKAZ. (a) Jelikož $\mathcal{D}((0,1)) \subset \operatorname{Dom} T_1$, jsou všechny operátory hustě definované. Zjevně platí inkluze v (a), zbývá tak dokázat uzavřenost. Nechť tedy $\{f_n\} \subset \operatorname{Dom} T_1$, $f_n \to f$ a $T_1 f_n \to g$, kde $f, g \in H$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f_n \to f$ skoro všude. Nechť $t_0 \in I$ splňuje $f_n(t_0) \to f(t_0)$. Položme $G(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{i} g$, $t \in I$, což je prvek $\operatorname{Dom} T_1$. Pak pro skoro všechna $t \in I$ platí odhad

$$|f(t) - f(t_0) - G(t)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(t) - f_n(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{g}{i}| = \lim_{n\to\infty} |\int_{t_0}^t f_n' - \int_{t_0}^t \frac{g}{i}| \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\frac{1}{i}(if_n' - g)| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_1 f_n - g\| = 0.$$

Tedy $f(t) = f(t_0) + G(t)$ skoro všude, takže $f \in AC(I)$ a $f' = \frac{g}{i} \in H$. Tedy $f \in \operatorname{Dom} T_1$ a navíc platí $T_1 f = if' = iG'(t) = i\frac{g}{i} = g$. Tedy T_1 je uzavřený.

Pro důkaz uzavřenosti T_2 si uvědomme, že pro posloupnost $\{f_n\} \subset \operatorname{Dom} T_2$ konvergující k f, která splňuje $T_2 f_n \to g$, můžeme opět předpokládat, že $f_n \to f$ skoro všude a $t_0 \in I$ je bod konvergence. Pak pro všechna $t \in I$ platí odhad

$$|f_n(t) - f_m(t)| = |f_n(t_0) - f_m(t_0) + \int_{t_0}^t (f_n' - f_m')| \leq |f_n(t_0) - f_m(t_0)| + \|T_2 f_n - T_2 f_m\|,$$

a tedy je $\{f_n\}$ stejnoměrně cauchyovská. Z toho plyne, že f má spojitého reprezentanta a $f_n \to f$ stejnoměrně na I. Jako výše odvodíme $f \in \mathrm{AC}(I)$ a $f' \in H$. Jelikož $f_n \to f$ stejnoměrně, platí pro f okrajové podmínky. Tedy $f \in \operatorname{Dom} T_2$ a podobně jako výše odvodíme $T_2 f = g$. Pro operátory T_3 a T_4 je pak zdůvodnění uzavřenosti analogické.

(b) Pro $f \in \operatorname{Dom} T_1$ a $g \in \operatorname{Dom} T_3$ platí

$$\langle T_1 f, g\rangle = \int_0^1 if'\overline{g} = i\left([f\overline{g}]_0^1 - \int_0^1 f\overline{g'}\right) = \int_0^1 f\overline{ig'} = \langle f, T_3 g\rangle,$$

takže $T_3 \subset T_1^\star$. Je-li $g \in \operatorname{Dom} T_1^\star$, označme $h = T_1^\star g \in H$ a $H(t) = \int_0^t h$, $t \in I$. Pak platí

$$\int_0^1 if'\overline{g} = \langle T_1 f, g\rangle = \langle f, T_1^\star g\rangle = \int_0^1 f\overline{h} = [f\overline{H}]_0^1 - \int_0^1 f'\overline{H} =$$
$$= f(1)\overline{H(1)} - \int_0^1 f'\overline{H}, \quad f \in \operatorname{Dom} T_1.$$

Jelikož můžeme za f vzít funkci $f = 1$, máme $H(1) = 0$. Tím pádem rovnost přechází na

$$0 = \int_0^1 f'\overline{(-ig + H)} = \langle f', -ig + H\rangle, \quad f \in \operatorname{Dom} T_1.$$

Jelikož $\operatorname{Rng} T_1 = H$, dostáváme $g = -iH$, což implikuje $g \in \mathrm{AC}(I)$, $g' = -iH' = -ih \in H$ a $g(0) = -iH(0) = 0 = -iH(1) = g(1)$. Tedy $g \in \operatorname{Dom} T_3$ a $T_3 = T_1^\star$.

Jelikož

$$\langle T_3 f, g\rangle = \int_0^1 if'\overline{g} = i\left([f\overline{g}]_0^1 - \int_0^1 f\overline{g'}\right) = \int_0^1 f\overline{ig'} = \langle f, T_3 g\rangle, \quad f, g \in \operatorname{Dom} T_3,$$

je T_3 symetrický. Ale $T_3^\star = T_1^{\star\star} = \overline{T_1} = T_1$ není roven T_3.

(c) Z rovnosti

$$\langle T_2 f, g\rangle = \int_0^1 if'\overline{g} = i\left([f\overline{g}]_0^1 - \int_0^1 f\overline{g'}\right) = i\left(\left(f(1)\overline{g(1)} - \alpha f(1)\overline{\alpha g(1)}\right) - \int_0^1 f\overline{g'}\right) =$$
$$= \langle f, T_2 g\rangle, \quad f, g \in \operatorname{Dom} T_2$$

vidíme $T_2 \subset T_2^\star$. Nechť nyní $g \in \operatorname{Dom} T_2^\star$, označme $h = T_2^\star g \in H$ a $H(t) = \int_0^t h$, $t \in I$. Pak analogickým výpočtem jako v (b) zjistíme

$$\int_0^1 if'\overline{g} = f(1)\overline{H(1)} - \int_0^1 f'\overline{H}, \quad f \in \operatorname{Dom} T_2.$$

Tedy

$$\int_0^1 f'\overline{(-ig + H)} = f(1)\overline{H(1)}, \quad f \in \operatorname{Dom} T_2. \tag{1}$$

Uvažujme nyní distribuci $\Lambda_{\overline{-ig+H}} \in (\mathcal{D}((0,1)))^*$ generovanou funkcí $\overline{-ig + H}$ (to je lokálně integrovatelná funkce na $(0,1)$). Z předešlé rovnosti pak máme , že $(\Lambda_{\overline{-ig+H}})' = 0$ v $(\mathcal{D}((0,1)))^*$, neboť

$$(\Lambda_{\overline{-ig+H}})'(f) = -\Lambda_{\overline{-ig+H}}(f') = -\int_0^1 f'\overline{(-ig + H)} = f(1)\overline{H(1)} = 0, \quad f \in \mathcal{D}((0,1)).$$

Dle Příkladu 7.24 tak existuje $c \in \mathbb{C}$ splňující $\Lambda_{\overline{-ig+H}} = \Lambda_c$. Lemma 7.1(b) pak dává, že $\overline{-ig + H} = c$ skoro všude na $(0,1)$. Tedy $g = \frac{\overline{c}-H}{-i} \in \operatorname{AC}(I)$ a $g' = \frac{H'}{i} \in L_2(I)$.

Nechť $f(t) = (\overline{\alpha} - 1)t + 1$, $t \in I$. Pak $f \in \operatorname{Dom} T_2$ a rovnost (1) dává dosazením $H = \overline{c} + ig$ vztah

$$\int_0^1 i(\overline{\alpha} - 1)\overline{g} = \overline{\alpha}\overline{H(1)} - \int_0^1 (\overline{\alpha} - 1)\overline{H} = \overline{\alpha}(c - i\overline{g(1)}) - \int_0^1 (\overline{\alpha} - 1)(c - i\overline{g}) =$$

$$= \overline{\alpha}(c - i\overline{g(1)}) - (\overline{\alpha} - 1)c + \int_0^1 (\overline{\alpha} - 1)i\overline{g}.$$

Úpravou obdržíme

$$(\overline{\alpha} - 1)c = \overline{\alpha}c - \overline{\alpha}i\overline{g(1)},$$

a tedy

$$-i\overline{g(0)} = -\left(\overline{-ig(0) + H(0)}\right) = -c = -\overline{\alpha}i\overline{g(1)}.$$

Z toho však plyne $g(0) = \alpha g(1)$, tj. $g \in \operatorname{Dom} T_2$ a T_2 je samoadjungovaný.

(d) Pro $\lambda \in \mathbb{C}$ je nenulová funkce $f(t) = \exp(\frac{\lambda}{i}t)$, $t \in I$ řešením rovnice $\lambda f - if' = 0$. Tedy $\sigma(T_1) = \sigma_{\mathrm{p}}(T_1) = \mathbb{C}$.

(e) Pokud $\alpha = 1$, pak při hledání $\sigma_{\mathrm{p}}(T_2)$ řešíme rovnici $\lambda f - if' = 0$, $f \in \operatorname{Dom} T_2$. Dostáváme tak opět funkci $f(t) = \exp(-i\lambda t)$ s podmínkami $1 = f(0) = \exp(-i\lambda)$. Pak $\lambda \in \mathbb{R}$ a musí platit $-i\lambda = i2\pi n$ pro nějaké $n \in \mathbb{Z}$. Tedy funkce $\exp(-2\pi int) \in \operatorname{Dom} T_2$ řeší rovnici $2\pi nf - if' = 0$. Proto $\sigma_{\mathrm{p}}(T_2) = \{2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Pokud $\lambda \notin \{2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ a $g \in H$, pak $\exp(\frac{\lambda}{i}) \neq 1$ a rutinným výpočtem se přesvědčíme, že funkce

$$f(t) = d\exp(\frac{\lambda}{i}t) - \frac{\exp(\frac{\lambda}{i}t)}{i}\int_0^t g(s)\exp(\frac{-\lambda}{i}s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

kde

$$d = \left(1 - \exp(\frac{\lambda}{i})\right)^{-1}\left(-\frac{\exp(\frac{\lambda}{i})}{i}\int_0^1 g(s)\exp(\frac{-\lambda}{i}s)\,\mathrm{d}s\right),$$

splňuje rovnost $\lambda f - if' = g$ a $f \in \operatorname{Dom} T_2$. Tedy $\sigma(T_2) = \sigma_{\mathrm{p}}(T_2) = \{2n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

(f) Snadno vidíme, že pokud funkce f řeší rovnici $\lambda f - if' = 0$ a $f \in \operatorname{Dom} T_3$, pak $f = 0$. Tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T_3) = \emptyset$. Pro dané $g \in H$ je dle předchozího funkce

$$f(t) = d\exp(\frac{\lambda}{i}t) - \frac{\exp(\frac{\lambda}{i}t)}{i}\int_0^t g(s)\exp(\frac{-\lambda}{i}s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

pro nějaké $d \in \mathbb{C}$ řešením rovnice $\lambda f - if' = g$. Vzhledem k požadavku $f \in \operatorname{Dom} T_3$ však musí platit

$$d = 0 = -\frac{\exp(\frac{\lambda}{i}t)}{i}\int_0^1 g(s)\exp(\frac{-\lambda}{i}s)\,\mathrm{d}s,$$

tedy $g \in \operatorname{Rng}(\lambda I - T_3)$, právě když $g \perp \overline{\exp(\frac{-\lambda}{i}s)}$.

(g) Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ je operátor $\lambda I - T_4$ prostý. Pro $g \in H$ dává formule

$$f(t) = -\frac{\exp(\frac{\lambda}{i}t)}{i} \int_0^t g(s) \exp(\frac{-\lambda}{i}s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

řešení rovnice $\lambda f - if' = g$ s podmínkou $f(0) = 0$. Tedy $\sigma(T_4) = \emptyset$.

□

5. Cayleyova transformace

Chceme-li obdržet analogické výsledky jako v oddílu 10.4 i pro nespojité lineární operátory, je třeba si uvědomit, že konstrukce rozkladu identity vzhledem k operátoru byla založena podstatným způsobem na struktuře komutativních Banachových algeber. Žádnou takovou strukturu ovšem v nespojitém případě k dispozici nemáme. Jeden z nápadů, jak využít výsledků pro spojité operátory je následující: Předpokládejme, že máme k dispozici nějakou rudimentární verzi kalkulu pro nespojitý lineární operátor T. Podařilo-li by se nalézt prostou funkci f takovou, že $f(T) \in \mathcal{L}(H)$ a navíc je normální, pak můžeme vzít rozklad identity E vzhledem k $f(T)$, a protože očekáváme, že $T = f^{-1}(f(T))$, mohl by $f^{-1}(E)$ být rozklad identity vzhledem k T, viz Tvrzení 10.67.

Spojité operátory mají omezené spektrum, vzhledem k větě o obrazu spektra tedy potřebujeme, aby $f(\sigma(T))$ byla omezená. Vezmeme-li lineární lomenou funkci $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$, pak f zobrazuje bijektivně reálnou osu na jednotkovou kružnici bez bodu 1 ($f(0) = -1$, $f(1) = -i$, $f(\infty) = 1$). Je-li nyní $T \in \mathcal{L}(H)$ samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ (Věta 9.115(d)), takže $\sigma(f(T)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\} \setminus \{1\}$ (Věta 9.60(d)), což znamená, že $f(T)$ je unitární (Věty 9.134 a 9.135(b)) a speciálně izometrie. Jak uvidíme, stejná myšlenka funguje i pro nespojité samoadjungované operátory.

DEFINICE 42. Nechť T je symetrický operátor v komplexním Hilbertově prostoru H. Cayleyova transformace[1] operátoru T je definována předpisem $\mathcal{C}(T) = (T - iI) \circ (T + iI)^{-1}$.

Uvědomme si, že Cayleyova transformace je dobře definována, neboť $T + iI$ je prostý, $\operatorname{Rng}(T + iI)^{-1} = \operatorname{Dom}(T + iI) = \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}(T - iI)$, $\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T + iI)$ a $\operatorname{Rng} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T - iI)$. Dále pokud bychom pro T měli funkční kalkulus, který ctí algebraické operace, pak $\mathcal{C}(T) = f(T)$, kde $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

VĚTA 43. *Nechť T je symetrický operátor v komplexním Hilbertově prostoru H a $\mathcal{C}(T)$ je jeho Cayleyova transformace.*

(a) $\mathcal{C}(T)$ je lineární izometrie $\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T + iI)$ *na* $\operatorname{Rng} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T - iI)$.

(b) $I - \mathcal{C}(T) = 2i(T + iI)^{-1}$, a tedy $I - \mathcal{C}(T)$ je prostý a $\operatorname{Rng}(I - \mathcal{C}(T)) = \operatorname{Dom} T$.

(c) $T = i(I + \mathcal{C}(T))(I - \mathcal{C}(T))^{-1}$.

(d) Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathcal{C}(T)$ je uzavřený,

(ii) T je uzavřený,

(iii) $\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T)$ *je uzavřený,*

(iv) $\operatorname{Rng} \mathcal{C}(T)$ *je uzavřený.*

DŮKAZ. (a) Pro $y = (T + iI)x$, kde $x \in \operatorname{Dom} T$, máme $\|\mathcal{C}(T)y\|^2 = \|(T - iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 = \|y\|^2$ dle Lemmatu 38(b).

(b) Je-li $y \in \operatorname{Dom} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T + iI)$, nechť $y = (T + iI)x$ pro $x \in \operatorname{Dom} T$. Pak

$$(I - \mathcal{C}(T))(y) = y - \mathcal{C}(T)y = (T + iI)x - (T - iI)x = 2ix = 2i(T + iI)^{-1}y.$$

Zbývající tvrzení pak plynou z této formule.

[1] Arthur Cayley ji zavedl pro matice (1846), pro transformaci nespojitých lineárních operátorů ji použil J. von Neumann (1930).

(c) Z (b) máme $I - \mathcal{C}(T)\colon \operatorname{Rng}(T+iI) \to \operatorname{Dom} T$, a tedy $(I-\mathcal{C}(T))^{-1}\colon \operatorname{Dom} T \to \operatorname{Rng}(T+iI)$. Jelikož $\operatorname{Dom}(I+\mathcal{C}(T)) = \operatorname{Dom}\mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T+iI)$, je $\operatorname{Dom} i(I+\mathcal{C}(T))(I-\mathcal{C}(T))^{-1} = \operatorname{Dom} T$. Pro $y \in \operatorname{Dom} T$ vezměme $x \in \operatorname{Rng}(T+iI)$ splňující $(I-\mathcal{C}(T))(x) = y$. Pak z (b) platí $\frac{y}{2i} = (T+iI)^{-1}(x)$, tj. $x = \frac{1}{2i}(T+iI)y$. Proto

$$\begin{aligned} i(I+\mathcal{C}(T))(I-\mathcal{C}(T))^{-1}y &= i\,(I+\mathcal{C}(T))\,x = i\left(x + (T-iI)(T+iI)^{-1}x\right) = \\ &= i\left(\frac{1}{2i}(T+iI)y + (T-iI)\frac{y}{2i}\right) = \frac{1}{2}(Ty+Ty) = Ty. \end{aligned}$$

(d) Jelikož $\mathcal{C}(T)$ je izometrie $\operatorname{Dom}\mathcal{C}(T)$ na $\operatorname{Rng}\mathcal{C}(T)$, je (iii)$\Leftrightarrow$(iv). Protože $\operatorname{Dom}\mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T+iI)$, je (ii)$\Leftrightarrow$(iii) dle Lemmatu 38(c)

(ii)$\Rightarrow$(i) Je-li T uzavřený, je $\mathcal{C}(T)$ uzavřený, neboť se jedná o spojitý operátor mezi Banachovými prostory $\operatorname{Rng}(T+iI)$ a $\operatorname{Rng}(T-iI)$.

(i)$\Rightarrow$(iii) Naopak, je-li $\mathcal{C}(T)$ uzavřený a $\{x_n\} \subset \operatorname{Dom} T$ konverguje k $x \in H$, je posloupnost $\{\mathcal{C}(T)x_n\}$ cauchyovská ($\mathcal{C}(T)$ je izometrie). Tedu $\mathcal{C}(T)x_n \to y$ pro nějaké $y \in H$, takže z uzavřenosti $\mathcal{C}(T)$ máme $x \in \operatorname{Dom}\mathcal{C}(T)$. Proto je $\operatorname{Dom}\mathcal{C}(T)$ uzavřený.

□

LEMMA 44. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a U je izometrický operátor z* $\operatorname{Dom} U$ *na* $\operatorname{Rng} U$.
(a) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ *pro* $x, y \in \operatorname{Dom} U$. *Tedy U je unitární, právě když* $\operatorname{Dom} U = \operatorname{Rng} U = H$.
(b) $\operatorname{Ker}(I-U) \subset \operatorname{Dom}(U) \cap (\operatorname{Rng}(I-U))^{\perp}$. *Tedy $I-U$ je prostý, pokud* $\operatorname{Rng}(I-U)$ *je hustý.*

DŮKAZ. (a) plyne snadno z polarizační identity.

(b) Pokud $x \in \operatorname{Dom} U \cap \operatorname{Ker}(I-U)$ a $y \in \operatorname{Dom} U$, pak

$$\langle x, (I-U)y\rangle = \langle x, y-Uy\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Uy\rangle = \langle Ux, Uy\rangle - \langle x, Uy\rangle = \langle Ux-x, Uy\rangle = \langle 0, Uy\rangle = 0.$$

Tedy $x \in (\operatorname{Rng}(I-U))^{\perp}$.

□

VĚTA 45. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a U je izometrický operátor z* $\operatorname{Dom} U$ *na* $\operatorname{Rng} U$. *Nechť $I-U$ je prostý. Pak $T = i(I+U)(I-U)^{-1}$ je symetrický a $\mathcal{C}(T) = U$. Dále platí, že T je hustě definovaný právě tehdy, když* $\operatorname{Rng}(I-U)$ *je hustý.*

DŮKAZ. Máme $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Rng}(I-U)$, neboť pro $x \in \operatorname{Rng}(I-U)$ je $(I-U)^{-1}(x) \in \operatorname{Dom}(I-U) = \operatorname{Dom} U = \operatorname{Dom}(I+U)$. Mějme $x, y \in \operatorname{Dom} T$ dány. Nechť $x', y' \in \operatorname{Dom} U$ splňují $(I-U)x' = x$ a $(I-U)y' = y$. Pak díky rovnosti $\langle Ux', Uy'\rangle = \langle x', y'\rangle$ platí

$$\begin{aligned} \langle Tx, y\rangle &= \langle i(I+U)x', (I-U)y'\rangle = i\langle x'+Ux', y'-Uy'\rangle = i\langle Ux', y'\rangle - i\langle x', Uy'\rangle \quad \text{a} \\ \langle x, Ty\rangle &= \langle (I-U)x', i(I+U)y'\rangle = -i\langle x'-Ux', y'+Uy'\rangle = -i\left(\langle x', Uy'\rangle - \langle Ux', y'\rangle\right) \end{aligned}$$

Tedy T je symetrický.

Pro důkaz $\mathcal{C}(T) = U$ zvolme $x \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Rng}(I-U)$ a nechť jednoznačné $x' \in \operatorname{Dom} U$ splňuje $(I-U)x' = x$. Pak máme

$$\begin{aligned} (T-iI)x &= Tx - ix = i(I+U)x' - i(I-U)x' = 2iUx' \quad \text{a} \\ (T+iI)x &= Tx + ix = i(I+U)x' + i(I-U)x' = 2ix'. \end{aligned}$$

Tedy $x' \in \operatorname{Rng}(T+iI) = \operatorname{Dom}\mathcal{C}(T)$, takže $\operatorname{Dom} U \subset \operatorname{Dom}\mathcal{C}(T)$. Obráceně máme $(T+iI)x = 2ix' \in \operatorname{Dom} U$, takže $\operatorname{Dom}\mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T+iI) \subset \operatorname{Dom} U$. Pro $x \in \operatorname{Dom} T$ tedy dostáváme

$$U(T+iI)x = U(Tx+ix) = U(2ix') = 2iUx' = (T-iI)x.$$

Proto $U = (T-iI)(T+iI)^{-1} = \mathcal{C}(T)$. Jelikož $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Rng}(I-U)$, tvrzení o hustotě platí.

□

VĚTA 46. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor*

(a) Nechť T je symetrický operátor v H a $\mathcal{C}(T)$ je jeho Cayleyova transformace. Pak T je samoadjungovaný právě tehdy, když $\mathcal{C}(T)$ je unitární.

(b) Nechť U je unitární operátor na H takový, že $I - U$ je prostý. Pak $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je samoadjungovaný a $\mathcal{C}(T) = U$.

DŮKAZ. (a) Nechť T je samoadjungovaný operátor na H. Dle Důsledku 40(ii) je $i, -i \in \rho(T)$, takže $\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T + iI) = H = \operatorname{Rng}(T - iI) = \operatorname{Rng} \mathcal{C}(T)$. Tedy $\mathcal{C}(T)$ je unitární operátor.

Nechť $\mathcal{C}(T)$ je unitární. Dle Věty 43(b) je $I - \mathcal{C}(T)$ prostý. Dále (dle Věty 43(b) a Věty 10.17(a)) platí

$$(\operatorname{Dom} T)^{\perp} = (\operatorname{Rng}(I - \mathcal{C}(T)))^{\perp} = \operatorname{Ker}(I - \mathcal{C}(T))^* = \operatorname{Ker}(I - \mathcal{C}(T)) = \{0\}.$$

Tedy T je hustě definovaný. Jelikož však $H = \operatorname{Dom} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T + iI)$ a $H = \operatorname{Rng} \mathcal{C}(T) = \operatorname{Rng}(T - iI)$, dle Lemmatu 38(c) tak platí $i, -i \in \rho(T)$. Proto je T samoadjungovaný (vizte Důsledek 40(iii)).

(b) Nechť U je unitární na H takový, že $I - U$ je prostý. Dle Věty 45 je $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$ symetrický a $\mathcal{C}(T) = U$. Jelikož $(\operatorname{Dom} T)^{\perp} = (\operatorname{Rng}(I - U))^{\perp} = \operatorname{Ker}(I - U)^* = \operatorname{Ker}(I - U) = \{0\}$, je T hustě definovaný. Nechť $y \in H$ je dáno. Položme $z = (I - U)y$. Pak

$$(iI + T)z = iz + Tz = i(I - U)y + i(I + U)y = 2iy,$$

takže $y \in \operatorname{Rng}(T + iI)$. Tedy $\operatorname{Rng}(T + iI) = H$. Podobně

$$(-iI + T)z = -i(I - U)y + i(I + U)y = 2iUy,$$

takže též $\operatorname{Rng}(T - iI) = H$. Dle Lemmatu 38(c) je $i, -i \in \rho(T)$, což implikuje dle Důsledku 40(iii) samoadjungovanost T.

□

DEFINICE 47. Nechť T je uzavřený symetrický operátor na Hilbertově prostoru H. Pak čísla

$$n_+(T) = \dim (\operatorname{Rng}(T + iI))^{\perp} \quad \text{a} \quad n_-(T) = \dim (\operatorname{Rng}(T - iI))^{\perp}$$

nazveme indexy defektu operátoru T.

VĚTA 48. *Nechť T je uzavřený symetrický hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Operátor T je samoadjungovaný, právě když $n_+(T) = n_-(T) = 0$.*
(b) *Operátor T je maximální symetrický, právě když $\min\{n_+(T), n_-(T)\} = 0$.*
(c) *Operátor T má samoadjungovanou extenzi, právě když $n_+(T) = n_-(T)$.*

DŮKAZ. Tvrzení (a) plyne z Věty 46.

(b) Nejprve uvažujme dva symetrické operátory T_1, T_2 na H a jejich Cayleyovy transformace U_1, U_2. Z Věty 43 plyne, že $T_1 \subset T_2$, právě když $U_1 \subset U_2$.

Nechť nyní $\mathcal{C}(T)$ je Cayleyova transformace T. Předpokládejme nejprve, že $\min\{n_+(T), n_-(T)\} > 0$. Pak existuje izometrie $V \supset \mathcal{C}(T)$ různá od $\mathcal{C}(T)$. Jelikož

$$\operatorname{Rng}(I - V) \supset \operatorname{Rng}(I - \mathcal{C}(T)) = \operatorname{Dom} T$$

je hustý v H, dle Lemmatu 44 je $I - V$ prostý. Existuje tak dle Věty 45 symetrický operátor S, jehož je V Cayleyova transformace. Pak $T \subset S$, ale $T \neq S$. Operátor T tak není maximální symetrický.

Obráceně, pokud T není maximální symetrický, existuje symetrický $S \supset T$ různý od T. Pak je $\mathcal{C}(S) \neq \mathcal{C}(T)$, takže

$$\min\{n_+(T), n_-(T)\} = \min\{\dim(\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T))^{\perp}, \dim(\operatorname{Rng} \mathcal{C}(T))^{\perp}\} > 0.$$

(c) Nechť má T samoadjungovanou extenzi S. Pak $\mathcal{C}(T) \subset \mathcal{C}(S)$ a $\mathcal{C}(S)$ je unitární operátor, který izometricky zobrazuje $(\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T))^{\perp}$ na $(\operatorname{Rng} \mathcal{C}(T))^{\perp}$. Tedy se jejich dimenze rovnají.

Pokud T más stejné indexy defektu, lze $\mathcal{C}(T)$ rozšířit na unitární zobrazení V, které zobrazuje $(\operatorname{Dom} \mathcal{C}(T))^{\perp}$ na $(\operatorname{Rng} \mathcal{C}(T))^{\perp}$. Ukážeme, že je $I - V$ prostý operátor. Vskutku,

$$\operatorname{Rng}(I - V) \supset \operatorname{Rng}(I - \mathcal{C}(T)) = \operatorname{Dom} T$$

je hustý v H, a tedy je $I - V$ prostý. Operátor S odpovídající V dle Věty 46 je pak samoadjungovaný operátor splňující $T \subset S$.

□

PŘÍKLAD 49. Nechť R je posun doprava na ℓ_2 a L je posun doleva na ℓ_2. Pak $R\colon H \to \operatorname{Rng} R$ je izometrie a $\operatorname{Ker}(I - R) = \{0\}$. (Vskutku, pokud $(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, pak $0 = x_1$, $x_2 = x_1 = 0$ atd.) Tedy existuje symetrický operátor T splňující $\mathcal{C}(T) = R$. Pak T je uzavřený (Věta 43(d)). Navíc je T hustě definovaný, neboť

$$(\operatorname{Rng}(I - R))^\perp = \operatorname{Ker}(I - R^\star) = \operatorname{Ker}(I - L) = \{0\}.$$

(Vskutku, pokud $(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, pak $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2 = x_1$ atd., takže $x_n = x_1 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.) Jelikož $\operatorname{Rng} R$ má kodimenzi 1 a $\operatorname{Dom} R = \ell_2$, má T indexy defektu 0 a 1. Tedy T je uzavřený hustě definovaný maximální symetrický operátor, který není samoadjungovaný.

$\diamond$

6. Integrál vzhledem k ortogonálnímu rozkladu identity

VĚTA 50. *Nechť $E\colon \operatorname{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ je ortogonální rozklad identity na $\mathbb{C}$, kde H je netriviální komplexní Hilbertův prostor.*

(a) Pro $f \in \operatorname{Bf}(\mathbb{C})$ označme

$$\operatorname{ess\,Rng} f = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \forall r > 0\colon E(f^{-1}(U(\lambda, r))) \neq 0\}.$$

Pak $\operatorname{ess\,Rng} f$ je uzavřená množina a $E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Rng} f)) = 0$.

(b) Nechť $L_\infty(E)$ značí systém všech borelovských funkcí na $\mathbb{C}$ splňujících $\|f\|_{L_\infty(E)} = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \operatorname{ess\,Rng} f\} < +\infty$, přičemž ztotožníme funkce, které jsou shodné až na množinu E-míry 0. Pak $L_\infty(E)$ je komutativní $B^\star$-algebra s jednotkou (uvažujeme bodové násobení, involuce je komplexní sdružení a jednotka je jednotková funkce).

(c) Pro každé $f \in L_\infty(E)$ platí $\sigma(f) = \operatorname{ess\,Rng} f$.

DŮKAZ. (a) Pokud $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Rng} f$, existuje $r_\lambda > 0$ takové, že $E(f^{-1}(U(\lambda, r_\lambda))) = 0$. Z Faktu 10.53(b) plyne, že $E(f^{-1}(U(\mu, r))) = 0$ pro každé $U(\mu, r) \subset U(\lambda, r_\lambda)$. Tedy $\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Rng} f$ je otevřená množina. Z Lindelöfovy vlastnosti $\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Rng} f$ plyne existence spočetně mnoha $U_n = U(\lambda_n, r_n)$, které pokrývají $\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Rng} f$ a splňují $E(f^{-1}(U_n)) = 0$. Pak pro $A_n = f^{-1}(U_n)$ platí

$$E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Rng} f)) = E(f^{-1}(\bigcup_{n=1}^\infty U(\lambda_n, r_n))) = E(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = E(\bigcup_{n=1}^\infty B_n),$$

kde $B_1 = A_1$ a $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $n \geq 2$. Pak $\{B_n\}$ jsou po dvou disjunktní a $E(B_n) = 0$ dle Faktu10.53(b). Tedy $E(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = 0$.

(b) Důkaz je podobný důkazu pro $L_\infty(\mu)$, kde μ je nezporná míra. Nejprve si rozmyslíme, že množina

$$L = \{f \in \operatorname{Bf}(\mathbb{C});\ \operatorname{ess\,Rng} f \text{ omezená}\}$$

je jednotková komutativní algebra s involucí splňující $\|f\|_{L_\infty(E)} = \|\overline{f}\|_{L_\infty(E)}$ a zobrazení $f \in L \mapsto \|f\|_{L_\infty(E)}$ je na něm pseudonorma splňující odhad $\|fg\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty(E)}\|g\|_{L_\infty(E)}$. Dále zjistíme, že $\|f\|_{L_\infty(E)} = 0$, právě když $f = 0$ E-skoro všude. Tedy $N = \{f \in L;\ \|f\|_{L_\infty(E)} = 0\}$ je $*$-ideál v L takový, že $f \in N$, kdykoliv $\{f_n\} \subset N$ splňuje $\|f_n - f\|_{L_\infty(E)} \to 0$. Zavedeme-li na L relaci ekvivalence $f \sim g$, pokud $f = g$ E-skoro všude (tj. pokud $f - g \in N$) a uvažujeme-li faktormnožinu $L/_\sim$, vidíme, že $L_\infty(E) = L/_\sim$ s indukovanou normou je normovaná jednotková algebra s involucí, přičemž involuce splňuje identitu **??**. Zbývá dokázat její úplnost. Nechť $q\colon L \to L/_\sim$ značí kvocientové zobrazení a nechť $\sum_{n=1}^\infty q(f_n)$ je absolutně konvergentní řada v $L_\infty(E)$, kde $\{f_n\} \subset L$. Nalezneme borelovské množiny $N_n \subset \mathbb{C}$ splňující $E(N_n) = 0$ a $|f_n| \leq \|q(f_n)\|_{L_\infty(E)}$ na $\mathbb{C} \setminus N_n$. Pak funkce $g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & t \in \mathbb{C} \setminus N_n, \\ 0, & t \in N_n \end{cases}$ jsou borelovské a omezené v supremové normě číslem $\|q(f_n)\|_{L_\infty(E)}$. Pak $\sum_{n=1}^\infty \|g_n\|_\infty < +\infty$, a tedy z úplnosti prostoru omezených borelovských funkcí existuje $g \in \operatorname{Bf}_b(\mathbb{C})$

splňující $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ na $\mathbb{C}$. Pak ovšem $g \in L$ a platí $q(g) = \sum_{n=1}^{\infty} q(f_n)$ v $L_\infty(E)$. Vskutku, jelikož má q normu 1, platí

$$q(g) = q\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q(g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} q(f_n).$$

Tedy $q(g)$ je součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} q(f_n)$ a prostor $L_\infty(E)$ je tak úplný.

(c) Je-li $\lambda \notin \operatorname{ess\,Rng} f$, je funkce $(\lambda - f)^{-1} \in L_\infty(E)$. Vskutku, máme $r > 0$, že $E(f^{-1}(U(\lambda, r))) = 0$, a tedy $|f - \lambda| \geq r$ E-skoro všude. Tedy $(\lambda - f)^{-1}$ splňuje $(\lambda - f)^{-1}(\lambda - f) = 1$ E-skoro všude, a proto $\lambda \notin \sigma(f)$.

Obráceně, pokud $\lambda \notin \sigma(f)$, pak existuje $g \in L_\infty(E)$ splňující $g(\lambda - f) = 1$, tj. $g = (\lambda - f)^{-1}$. Proto existuje $C > 0$ splňující $|\lambda - f|^{-1} \leq C$ E-skoro všude. Pak ovšem $C^{-1} \leq |\lambda - f|$ E-skoro všude, takže $E(f^{-1}(U(\lambda, \frac{1}{2C}))) = 0$. Proto $\lambda \notin \operatorname{ess\,Rng} f$.

□

VĚTA 51. *Nechť $E\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ je ortogonální rozklad identity na $\mathbb{C}$, kde H je netriviální komplexní Hilbertův prostor, a $f \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$ splňuje $\|f\|_{L_\infty(E)} < +\infty$. Pak existuje právě jeden operátor $\Phi_0(f) \in \mathcal{L}(H)$ takový, že*

$$\langle \Phi_0(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda), \quad x, y \in H. \tag{2}$$

Navíc platí následující tvrzení.

(a) Zobrazení $f \in L_\infty(E) \mapsto \Phi_0(f)$ je izometrický *-izomorfismus $L_\infty(E)$ do $\mathcal{L}(H)$.
(b) $\sigma(\Phi_0(f)) = \operatorname{ess\,Rng} f$ pro každou $f \in L_\infty(E)$.
(c) Pro každou $f \in L_\infty(E)$ je $\Phi_0(f)$ normální. Navíc je $\Phi_0(f)$ samoadjungovaný, právě když f reálná E-skoro všude, a $\Phi_0(f)$ je nezáporný, právě když f nezáporná E-skoro všude.
(d) Platí $\|\Phi_0(f)x\| = \sqrt{\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}E_{x,x}(\lambda)}$, $f \in L_\infty(E)$ a $x \in H$.
(e) Je-li $f \in L_\infty(E)$ a $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(\Phi_0(f)))$, platí $\Phi_0(g \circ f) = g(\Phi_0(f))$.

DŮKAZ. (a) *Krok 1.* Nejprve si rozmyslíme, že pro $A \in \mathrm{Bs}(\mathbb{C})$ E-míry 0 jsou všechny hodnoty $E_{x,y}(B)$, $B \subset A$ borelovská, nulové, a tedy i $|E_{x,y}|(A) = 0$, $x, y \in H$. Tedy pokud $f \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$ je nulová E-skoro všude, máme

$$\int_{\mathbb{C}} f\,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\{t \in \mathbb{C};\ f(t) \neq 0\}} f\,\mathrm{d}E_{x,y} + \int_{\{t \in \mathbb{C};\ f(t) = 0\}} f\,\mathrm{d}E_{x,y} = 0, \quad x, y \in H.$$

Proto 0 je jediný operátor splňující pro f formuli (2).

Krok 2. Nechť $f \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$ s omezeným esenciální oborem hodnot je dáno. Změnou f na množině E-míry 0 lze předpokládat, že $f \in \mathrm{Bf_b}(\mathbb{C})$; to podle předešlé úvahy nezmění finální operátor $\Phi_0(f)$. Nyní použijeme metodu důkazu Věty 10.61 a nalezneme operátor $T_f \in \mathcal{L}(H)$ splňující (2). Stejně jako v důkazu Věty 10.61 se ukáže, že zobrazení $f \in \mathrm{Bf_b}(\mathbb{C}) \mapsto T_f \in \mathcal{L}(H)$ je lineární *-homomorfismus do normálních prvků $\mathcal{L}(H)$. Dle prvního kroku tak lze definovat $\Phi_0(f)$ jako $T_{\tilde{f}}$, kde $\tilde{f} \in \mathrm{Bf_b}(\mathbb{C})$ je omezená funkce rovná f E-skoro všude. Protože $\Phi_0(f) = \Phi_0(g)$, pokud $f, g \in L_\infty(E)$ jsou rovny E-skoro všude, snadno se ověří, že zobrazení $f \in L_\infty(E) \to \mathcal{L}(H)$ je *-homomorfismus.

Krok 3. Dokažme, že se jedná o izometrii. Nechť tedy $f \in L_\infty(E)$ nenulové je dáno a $x \in H$. Pak

$$\begin{aligned}\|\Phi_0(f)x\|^2 &= \langle \Phi_0(f)x, \Phi_0(f)x\rangle = \langle \Phi_0(f)^\star \Phi_0(f)x, x\rangle = \langle \Phi_0(\overline{f})\Phi_0(f)x, x\rangle = \langle \Phi_0(\overline{f} f)x, x\rangle = \\ &= \int_{\mathbb{C}} |f|^2\,\mathrm{d}E_{x,x} \leq \|f\|^2_{L_\infty(E)}\langle x, x\rangle = \|f\|^2_{L_\infty(E)}\|x\|^2.\end{aligned}$$

Tedy $\|\Phi_0(f)\| \leq \|f\|$.

Pro obrácený odhad zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $A = \{t \in \mathbb{C};\ |f(t)|^2 > \|f\|^2 - \varepsilon\}$ je borelovská množina splňující $E(A) \neq 0$. Vezměme tak $x \in \operatorname{Rng} E(A) \cap S_H$. Pak

$$\begin{aligned}\|\Phi_0(f)\|^2 &\geq \|\Phi_0(f)\Phi_0(\chi_A)\|^2 \geq \|\Phi_0(f)\Phi_0(\chi_A)x\|^2 = \langle \Phi_0(\overline{f} f \chi_A)x, x\rangle = \\ &= \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \chi_A \,\mathrm{d}E_{x,x} \geq \int_A (\|f\|^2 - \varepsilon)\,\mathrm{d}E_{x,x} = (\|f\|^2 - \varepsilon)\langle E(A)x, x\rangle = \|f\|^2 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $f \in L_\infty(E) \to \Phi_0(f) \in \mathcal{L}(H)$ je izometrie.

Dokažme nyní jednoznačnost. Pokud však pro $f \in L_\infty(E)$ existují dva operátory T, S splňující formuli (2), platí $T = S$ díky Lemmatu 1.93.

(b) Obraz $A = \Phi_0(L_\infty(E))$ je uzavřená *-podalgebra $\mathcal{L}(H)$, a tedy $\sigma_A(a) = \sigma_{\mathcal{L}(H)}(a)$ pro každý prvek $a \in A$ (Věta 9.120). Pro $f \in L_\infty(E)$ tak platí

$$\operatorname{ess\,Rng} f = \sigma(f) = \sigma_A(\Phi_0(f)) = \sigma_{\mathcal{L}(H)}(\Phi_0(f)),$$

kde jsme postupně použili Větu 50, Důsledek 9.30 a Důsledek 9.120.

(c) Vidíme, že $\Phi_0(f)$ je normální pro $f \in L_\infty(E)$. Vskutku, $\Phi_0(f)^\star = \Phi_0(\overline{f})$, a tedy

$$\Phi_0(f)\Phi_0(f)^\star = \Phi_0(f)\Phi_0(\overline{f}) = \Phi_0(f\overline{f}) = \Phi_0(\overline{f} f) = \Phi_0(f)^\star\Phi_0(f).$$

Je-li f reálná, je $\Phi_0(f)^\star = \Phi_0(\overline{f}) = \Phi_0(f)$ samoadjungovaný. Podobně, pokud $\Phi_0(f)^\star = \Phi_0(f)$, máme $\Phi_0(\overline{f} - f) = 0$, takže $f = \overline{f}$ E-skoro všude. Tedy f je reálná.

Dále máme f nezáporná, právě když $\operatorname{ess\,Rng} f \subset [0, \infty)$, a to je dle (b) ekvivalentní s nezáporností $\Phi_0(f)$.

(d) plyne z rovnosti

$$\|\Phi_0(f)x\|^2 = \langle \Phi_0(f)x, \Phi_0(f)x\rangle = \langle \Phi_0(\overline{f} f)x, x\rangle = \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}.$$

(e) Označme $T = \Phi_0(f)$ a uvažujme borelovský funkční kalkulus Φ pro T daný Větou 10.39. Pro $g \in \mathrm{Bf_b}(\sigma(T)) = \mathrm{Bf_b}(\operatorname{ess\,Rng} f)$ položme $\Phi_T(g) = \Phi_0(g \circ f)$. Pak $\Phi_T \colon \mathrm{Bf_b}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ je lineární, multiplikativní *-homomorfizmus, který splňuje $\Phi_T(1) = I$, $\Phi_T(Id) = T$ a pro omezenou posloupnost $\{g_n\}$ v $\mathrm{Bf_b}(\sigma(T))$ konvergující k g platí

$$\langle \Phi_T(g_n)x, y\rangle = \langle \Phi_0(g_n \circ f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} g_n \circ f \,\mathrm{d}E_{x,y} \to \int_{\mathbb{C}} g \circ f \,\mathrm{d}E_{x,y} = \langle \Phi_T(g)x, y\rangle, \quad x, y \in H,$$

tj. jedná se o borelovský funkční kalkulus pro T. Dle Věty 10.39(d) (používáme i Důsledek 10.62) je $\Phi_T = \Phi$. Tedy $g(T) = \Phi_0(g \circ f)$.

□

VĚTA 52. *Nechť $E \colon \mathrm{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ je ortogonální rozklad identity na $\mathbb{C}$, kde H je netriviální komplexní Hilbertův prostor, a $f \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$. Pak je*

$$\operatorname{Dom} \Phi(f) = \{x \in H;\ \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < +\infty\}.$$

hustý podprostor H a existuje právě jeden operátor $\Phi(f)$ definovaný na $\operatorname{Dom}\Phi(f)$ *takový, že*

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda), \quad x, y \in \operatorname{Dom}\Phi(f). \tag{3}$$

Navíc platí

$$\|\Phi(f)x\| = \sqrt{\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}(\lambda)}, \quad x \in \operatorname{Dom}\Phi(f) \tag{4}$$

a pokud $f \in L_\infty(E)$, je $\Phi(f) = \Phi_0(f)$.

DŮKAZ. *Krok 1.* Jsou-li $x, y \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$, pak pro $A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{C})$ platí

$$\|E(A)(x+y)\|^2 \le (\|E(A)x\| + \|E(A)y\|)^2 \le 2\|E(A)x\|^2 + 2\|E(A)y\|^2.$$

Tedy platí $E_{x+y,x+y} \le 2(E_{x,x} + E_{y,y})$, z čehož plyne $x + y \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$. Pro $x \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$ a $c \in \mathbb{C}$, pak $\|E(A)(cx)\|^2 = |c|^2\|E(A)x\|^2$. Z toho již plyne uzavřenost $\operatorname{Dom}\Phi(f)$ na násobení skalárem.

Krok 2. Uvažujme nyní množiny $A_n = f^{-1}(B(0,n))$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $x \in \operatorname{Rng} E(A_n)$ platí

$$E(A)x = E(A)E(A_n)x = E(A \cap A_n)x, \quad A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{C}),$$

a tedy

$$E_{x,x}(A) = E_{x,x}(A \cap A_n), \quad A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{C}).$$

Proto platí

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{A_n} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \le n^2\|x\|^2 < +\infty.$$

Tedy $\operatorname{Rng} E(A_n) \subset \operatorname{Dom}\Phi(f)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Jelikož $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a $\{A_n\}$ je neklesající posloupnost, dostáváme pro každé $y \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \|y - E(A_n)y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|E(\mathbb{C} \setminus A_n)y\|^2 = \lim_{n\to\infty} E_{y,y}(\mathbb{C} \setminus A_n) = 0.$$

Tedy $\operatorname{Dom}\Phi(f)$ je hustý v H.

Krok 3. Uvažujme nyní funkce $f_n = f\chi_{f^{-1}(B(0,n))}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in \operatorname{Bf_b}(\mathbb{C})$ a $\int_{\mathbb{C}} |f - f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \to 0$ pro každé $x \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$ díky Lebesgueově větě. Pak máme odhad

$$\begin{aligned}\|\Phi_0(f_n)x - \Phi_0(f_m)x\|^2 &= \|\Phi_0(f_n - f_m)x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f_n - f_m|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \le \\ &\le 2\left(\int_{\mathbb{C}} |f_n - f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} + \int_{\mathbb{C}} |f - f_m|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}\right),\end{aligned}$$

který implikuje, že posloupnost $\{\Phi_0(f_n)x\}$ je cauchyovská. Označme její limitu jako $\Phi(f)x$, $x \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$.

Jelikož $\Phi_0(f_n)(x+y) = \Phi_0(f_n)x + \Phi_0(f_n)y$ pro každé $x, y \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$, je $\Phi(f)(x+y) = \Phi(f)x + \Phi(f)y$. Podobně se ověří $\Phi(f)(cx) = c\Phi(f)x$ pro $x \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Krok 4. Nechť $x, y \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$. Jelikož dle Tvrzení 10.3 platí

$$E_{x,y} = \frac{1}{4}\left(E_{x+y,x+y} - E_{x-y,x-y} + iE_{x+iy,x+iy} - iE_{x-iy,x-iy}\right),$$

stačí dokázat formuli $\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E_{x,y}$ pouze pro $x = y$. Ta však plyne z výpočtu pro funkce $\{f_n\}$ jako výše

$$\langle \Phi(f)x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi_0(f_n)x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} f_n \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E_{x,x},$$

kde jsme použili fakt $f \in L_1(E_{x,x})$.

Krok 5. Pro $x \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$ pak máme (funkce $\{f_n\}$ jsou jako výše)

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi_0(f_n)x, \Phi_0(f_n)(x)\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} |f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}.$$

Krok 6. Je-li $f \in L_\infty(E)$, je $\operatorname{Dom}\Phi(f) = H$ a vzorec (4) implikuje $\|\Phi(f)\| \le \|f\|_{L_\infty(E)}$. Tedy pak $\Phi_0(f)$ a $\Phi(f)$ jsou omezené operátory na H splňující

$$\langle \Phi_0(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

Dle Důsledku 10.5 je $\Phi_0(f) = \Phi(f)$.

Krok 7. Nechť nyní $T\colon \operatorname{Dom}\Phi(f) \to H$ je operátor splňující $\langle Tx, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E_{x,y}$, $x, y \in \operatorname{Dom}\Phi(f) = \operatorname{Dom} T$. Nechť $\{f_n\}$ jsou jako výše. Z polarizační identity a Lebesgueovy věty pak máme $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} f_n \,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E_{x,y}$, $x, y \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$. Pak ovšem dostáváme

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi_0(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} f_n \,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E_{x,y} = \langle Tx, y\rangle, \quad x, y \in \operatorname{Dom}\Phi(f).$$

Pak ovšem pro $x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)$ máme $\langle \Phi(f)x - Tx, y\rangle = 0$ pro každé $y \in \operatorname{Dom} \Phi(f)$, což vzhledem k hustotě $\operatorname{Dom} \Phi(f)$ dává $\Phi(f)x = Tx$.

□

ZNAČENÍ 53. Nechť $E\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ je ortogonální rozklad identity na $\mathbb{C}$, kde H je komplexní Hilbertův prostor, a $f \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$. Operátor $\Phi(f)\colon \operatorname{Dom} \Phi(f) \to H$ zkonstruovaný ve Větě 52 označíme $\int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E$.

VĚTA 54. *Nechť $E\colon \mathrm{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ je ortogonální rozklad identity na $\mathbb{K}$, kde H je netriviální komplexní Hilbertův prostor,a $f, g \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) $\Phi(f) + \Phi(g) \subset \Phi(f+g)$.
(b) $\Phi(f)\Phi(g) \subset \Phi(fg)$ *a* $\operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g) = (\operatorname{Dom} \Phi(g)) \cap \operatorname{Dom} \Phi(fg)$.
(c) $\Phi(f)^\star = \Phi(\overline{f})$ *a* $\Phi(f)\Phi(f)^\star = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^\star\Phi(f)$. *Tedy* $\Phi(f)$ *je normální.*
(d) $\Phi(f)$ *je uzavřený.*
(e) $\operatorname{Dom} \Phi(f) = H$ *právě tehdy, když* f *je esenciálně omezené, tj.* $\operatorname{ess}\operatorname{Rng} f$ *je omezený.*

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in \operatorname{Dom}(\Phi(f) + \Phi(g)) = \operatorname{Dom} \Phi(f) \cap \operatorname{Dom} \Phi(g)$, je díky odhadu

$$\int_\Omega |f+g|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \le 2\int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} + 2\int_\Omega |g|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}$$

i v $\operatorname{Dom} \Phi(f+g)$. Rovnost $\Phi(f)x + \Phi(g)x = \Phi(f+g)x$ pak plyne z rovnosti

$$\langle \Phi(f)x + \Phi(g)x, y\rangle = \langle \Phi(f)x, y\rangle + \langle \Phi(g)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E_{x,y} + \int_{\mathbb{C}} g \,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\mathbb{C}} (f+g) \,\mathrm{d}E_{x,y} =$$
$$= \langle \Phi(f+g)x, y\rangle, \quad x, y \in \operatorname{Dom} \Phi(f) \cap \operatorname{Dom} \Phi(g).$$

Vskutku, máme totiž $\operatorname{Dom} \Phi(f) \cap \operatorname{Dom} \Phi(g) = \operatorname{Dom}(\Phi(|f| + |g|))$, což je hustý podprostor H.

(b) *Krok 1.* Nechť nejprve f je omezená. Pak $\Phi(f) = \Phi_0(f)$ a

$$\operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g) = \operatorname{Dom} \Phi(g) \subset \operatorname{Dom} \Phi(fg).$$

Uvažujme posloupnost $\{g_n\}$ definovanou jako $g_n = g\chi_{g^{-1}(B(0,n))}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergující ke g v prostorech $L_2(E_{y,y})$, kde $y \in \operatorname{Dom} \Phi(g)$. Pak $\{fg_n\}$ aproximuje fg ve smyslu $\int_{\mathbb{C}} |fg_n - fg|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \to 0$, $x \in \operatorname{Dom} \Phi(g)$ a pro $x \in \operatorname{Dom} \Phi(g) \subset \operatorname{Dom} \Phi(fg)$ platí

$$\Phi(fg)x = \lim_{n\to\infty} \Phi_0(fg_n)x = \lim_{n\to\infty} \Phi_0(f)\Phi_0(g_n)x = \Phi_0(f)\left(\lim_{n\to\infty} \Phi_0(g_n)x\right) = \Phi(f)\Phi(g)x.$$

Krok 2. Dokážeme nyní, že pro každou dvojici funkcí $f, g \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$ platí

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{\Phi(g)x,\Phi(g)x} = \int_{\mathbb{C}} |fg|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}, \quad x \in \operatorname{Dom} \Phi(g). \tag{5}$$

K tomuto účelu uvažujme funkce $f_n = f\chi_{f^{-1}(B(0,n))}$, $n \in \mathbb{N}$. Díky prvnímu kroku pak pro $x \in \operatorname{Dom} \Phi(g) \subset \operatorname{Dom} \Phi(f_n g)$ platí

$$\int_{\mathbb{C}} |f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{\Phi(g)x,\Phi(g)x} = \|\Phi(f_n)\,(\Phi(g)x)\|^2 = \|\Phi(f_n g)x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f_n g|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}.$$

Má-li tedy jedna strana limitu, má ji i druhá strana a obráceně. Limitním přechodem pak za pomoci Leviovy věty obdržíme platnost (5).

Krok 3. Ukážeme nyní platnost rovnosti $\operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g) = \operatorname{Dom} \Phi(g) \cap \operatorname{Dom} \Phi(fg)$. Ohledně inkluze „$\subset$“, nechť $x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g)$ je dáno. Dle definice je pak $x \in \operatorname{Dom} \Phi(g)$ a $\Phi(g)x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)$. Dle (5) je $x \in \operatorname{Dom} \Phi(fg)$.

Obráceně, nechť $x \in \operatorname{Dom} \Phi(g) \cap \operatorname{Dom} \Phi(fg)$ je dáno. Opět díky (5) dostáváme $\Phi(g)x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)$, a tedy $x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g)$.

Krok 4. Ukážeme rovnost $\Phi(fg)x = \Phi(f)\Phi(g)x$ pro $x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g)$, kde f, g jsou libovolné borelovské funkce. Nechť $x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)\Phi(g)$ je dáno. Pak $x \in \operatorname{Dom} \Phi(g) \cap \operatorname{Dom} \Phi(fg)$ (vizte Krok 3) a $\Phi(g)x \in \mathrm{Dom}\,\Phi(f)$. Vezměme aproximující posloupnost $\{f_n\}$ pro f, tj. $f_n = f\chi_{f^{-1}(B(0,n))}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak díky prvnímu kroku máme

$$\Phi(f)\Phi(g)x = \lim_{n\to\infty} \Phi_0(f_n)\Phi(g)x = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n g)x.$$

Jelikož dle (a) a druhému kroku platí

$$\|\Phi(fg)x - \Phi(f_n g)x\|^2 = \|\Phi(fg - f_n g)x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |(f-f_n)g|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{\mathbb{C}} |f-f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{\Phi(g)x,\Phi(g)x} \to 0,$$

dostáváme

$$\Phi(f)\Phi(g)x = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n g)x = \Phi(fg)x.$$

(c) *Krok 1.* Ukážeme, že $\Phi(\overline{f}) \subset \Phi(f)^\star$. Předně je zřejmé, že

$$\mathrm{Dom}\,\Phi(f) = \mathrm{Dom}\,\Phi(\overline{f}).$$

Nechť $\{f_n\}$ je aproximující posloupnost pro f, tj. $f_n = f\chi_{f^{-1}(B(0,n))}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\overline{f_n}$ je aproximující posloupnost pro $\overline{f}$. Pro $x, y \in \mathrm{Dom}\,\Phi(f)$ tak platí

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi_0(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Phi_0(f_n)^\star y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Phi_0(\overline{f_n})y\rangle = \langle x, \Phi(\overline{f})y\rangle.$$

Tedy $\Phi(\overline{f}) \subset \Phi(f)^\star$.

Krok 2. Nyní ukážeme, že $\mathrm{Dom}\,\Phi(f)^\star \subset \mathrm{Dom}\,\Phi(\overline{f})$.

Nechť $y \in \mathrm{Dom}\,\Phi(f)^\star$ je dáno. Položíme $f_n = f\chi_{A_n}$, kde $A_n = f^{-1}(B(0,n))$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $x \in \mathrm{Dom}\,\Phi(f)$ máme $z = E(A_n)x \in \mathrm{Dom}\,\Phi(f)$. Vskutku, platí

$$\langle E(\mathbb{C} \setminus A_n)z, z\rangle = \langle E(\mathbb{C} \setminus A_n)E(A_n)z, z\rangle = \langle E(\emptyset)z, z\rangle = 0,$$

a tedy

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{z,z} = \int_{A_n} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{z,z} < +\infty.$$

Dostáváme proto z tvrzení (b) a Věty 51(a)

$$\begin{aligned}\langle x, E(A_n)\Phi(f)^\star y\rangle &= \langle \Phi(f)E(A_n)x, y\rangle = \langle \Phi(f\chi_{A_n})x, y\rangle = \langle x, \Phi(f\chi_{A_n})^\star y\rangle = \\ &= \langle x, \Phi_0(\overline{f}\chi_{A_n})y\rangle, \quad x \in \mathrm{Dom}\,\Phi(f).\end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu nyní díku hustotě $\mathrm{Dom}\,\Phi(f)$ v H máme rovnost

$$E(A_n)\Phi(f)^\star y = \Phi_0(\overline{f_n})y.$$

Tedy

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{y,y} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} |\overline{f_n}|^2 \,\mathrm{d}E_{y,y} = \lim_{n\to\infty} \|\Phi_0(\overline{f_n})y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|E(A_n)\Phi(f)^\star y\|^2 \le \|\Phi(f)^\star y\|^2.$$

Tedy $y \in \mathrm{Dom}\,\Phi(f) = \mathrm{Dom}\,\Phi(\overline{f})$.

Tedy $\Phi(f)^\star \subset \Phi(\overline{f})$.

Krok 3. Ověříme nyní rovnost $\Phi(f)\Phi(f)^\star = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^\star\Phi(f)$. Již víme, že

$$\mathrm{Dom}\,\Phi(f)^\star = \mathrm{Dom}\,\Phi(\overline{f}) = \mathrm{Dom}\,\Phi(f).$$

Z Hölderovy nerovnosti plyne vztah $\mathrm{Dom}\,\Phi(|f|^2) \subset \mathrm{Dom}\,\Phi(f)$. Vskutku, máme odhad

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \le \left(\int_{\mathbb{C}} |f|^4 \,\mathrm{d}E_{x,x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{C}} 1 \,\mathrm{d}E_{x,x}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathrm{Dom}\,\Phi(|f|^2).$$

Pomocí tvrzení (b) tak dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\Phi(f)\Phi(f)^\star &= \mathrm{Dom}\,\Phi(f)^\star \cap \mathrm{Dom}\,\Phi(f\overline{f}) = \mathrm{Dom}\,\Phi(\overline{f}) \cap \mathrm{Dom}\,\Phi(|f|^2) = \\ &= \mathrm{Dom}\,\Phi(f) \cap \mathrm{Dom}\,\Phi(|f|^2) = \mathrm{Dom}\,\Phi(|f|^2)\end{aligned}$$

a rovnost

$$\Phi(f)\Phi(f)^\star = \Phi(f)\Phi(\overline{f}) = \Phi(|f|^2) = \Phi(\overline{f}f) = \Phi(\overline{f})\Phi(f) = \Phi(f)^\star\Phi(f).$$

Tvrzení (d) nyní plyne z Tvrzení 30(a), neboť máme vztah

$$\Phi(f) = \Phi(\overline{\overline{f}}) = \Phi(\overline{f})^\star.$$

(e) Pokud $f \in L_\infty(E)$, je $\Phi(f) = \Phi_0(f) \in \mathcal{L}(H)$ dle Věty 52. Pokud $\operatorname{Dom}\Phi(f) = H$, je $\Phi(f)$ jakožto uzavřený operátor omezený. Nechť $f_n = f\chi_{A_n}$, kde $A_n = f^{-1}(B(0,n))$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\|f_n\|_{L_\infty(E)} = \|\Phi_0(f_n)\| = \|\Phi(f\chi_{A_n})\| = \|\Phi(f)\Phi(\chi_{A_n})\| \le \|\Phi(f)\|$$

implikuje $\|f_n\|_{L_\infty(E)} \le \|\Phi(f)\|$. Tedy $\|f\|_{L_\infty(E)} \le \|\Phi(f)\|$.

□

POZNÁMKA 55. Nechť $E\colon \operatorname{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ je ortogonální rozklad identity na $\mathbb{C}$, kde H je netriviální komplexní Hilbertův prostor, a $f \in \operatorname{Bf}(\mathbb{C})$. Nechť $\{f_n\} \subset \operatorname{Bf}(\mathbb{C})$ je posloupnost funkcí splňující $|f_n| \le |f|$, $n \in \mathbb{N}$ a $\int_{\mathbb{C}} |f - f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} \to 0$ pro $x \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$. Pak $\operatorname{Dom}\Phi(f) \subset \operatorname{Dom}\Phi(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$ a $\Phi(f_n)x \to \Phi(f)x$ pro každé $x \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$.

Vskutku, $\operatorname{Dom}\Phi(f) \subset \operatorname{Dom}\Phi(f_n)$ platí díky odhadu $|f_n| \le |f|$ a konvergence plyne z rovnosti

$$\|(\Phi(f_n) - \Phi(f))x\|^2 = \|\Phi(f_n - f)x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f - f_n|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}.$$

VĚTA 56. *Nechť* $E\colon \operatorname{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ *je ortogonální rozklad identity na* $\mathbb{C}$, *kde* H *je netriviální komplexní Hilbertův prostor nad* $\mathbb{C}$, *a* $f \in \operatorname{Bf}(\mathbb{C})$. *Pak*

$$\sigma(\Phi(f)) = \operatorname{ess\,Rng} f$$

Navíc pro $\lambda \in \mathbb{C}$ *máme* $\operatorname{Ker}(\lambda I - \Phi(f)) = \operatorname{Rng}(E(f^{-1}(\{\lambda\})))$. *Tedy* $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Phi(f))$ *právě tehdy, když* $E(f^{-1}(\{\lambda\})) \ne 0$.

DŮKAZ. *Krok 1.* Ověříme „$\supset$“. Nechť $\lambda \in \operatorname{ess\,Rng} f$ je dáno. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme

$$A_n = \{t \in \mathbb{C};\ |f(t) - \lambda| < \frac{1}{n}\}.$$

Pak $E(A_n) \ne 0$, a tedy existují jednotkové vektory $x_n \in \operatorname{Rng} E(A_n)$. Pak $x_n \in \operatorname{Dom}\Phi(f)$, neboť máme z formule (5) odhad

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x_n,x_n} &= \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{\Phi(\chi_{A_n})x_n,\Phi(\chi_{A_n})x_n} = \int_{\mathbb{C}} |f\chi_{A_n}|^2 \,\mathrm{d}E_{x_n,x_n} \le \int_{A_n} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x_n,x_n} \le \\ &\le \int_{A_n} (|\lambda| + 1)^2 \,\mathrm{d}E_{x_n,x_n} < +\infty.\end{aligned}$$

Tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}\|\lambda x_n - \Phi(f)x_n\| &= \|\lambda\Phi(\chi_{A_n})x_n - \Phi(f)\Phi(\chi_{A_n})x_n\| = \|\Phi((\lambda - f)\chi_{A_n})x_n\| \le \\ &\le \|x_n\|\|(\lambda - f)\chi_{A_n}\|_{L_\infty(E)} \le \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Tedy $(\lambda I - \Phi(f))$ není invertovatelný.

Ukážeme nyní inkluzi „$\subset$“. Nechť $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{ess\,Rng} f$ je dáno. Definujme borelovskou funkci g jako

$$g(t) = \begin{cases} (\lambda - f(t))^{-1}, & t \in \mathbb{C}, f(t) \ne \lambda \\ 0, & t \in \mathbb{C}, f(t) = \lambda. \end{cases}$$

Jelikož existuje $\delta > 0$ takové, že $B(\lambda, \delta) \cap \operatorname{ess\,Rng} f = \emptyset$, je $g \in L_\infty(E)$. Dále platí

$$g(\lambda - f) = \chi_{\mathbb{C}} = (\lambda - f)g \quad E\text{-skoro všude}.$$

Použitím tohoto faktu a Věty 54(b) tak máme

$$\Phi(g)(\lambda I - \Phi(f)) = \Phi(g)\Phi(\lambda - f) \subset \Phi(g(\lambda - f)) = \Phi(\chi_{\mathbb{C}}) = I$$

a

$$(\lambda I - \Phi(f))\Phi(g) = \Phi(\lambda - f)\Phi(g) = \Phi((\lambda - f)g) = \Phi(\chi_{\mathbb{C}}) = I.$$

Tedy $\Phi(g)$ je spojitá inverze k $\lambda I - \Phi(f)$, což znamená, že $\lambda \notin \sigma(\Phi(f))$.

Krok 2. Je-li $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - \Phi(f)) = \operatorname{Ker}(\Phi(\lambda - f))$ nenulové, položme

$$A = \{t \in \mathbb{C};\ f(t) = \lambda\} \quad \text{a} \quad B = \{t \in \mathbb{C};\ f(t) \neq \lambda\}.$$

Pak $\{A, B\}$ je disjunktní borelovský rozklad $\mathbb{C}$. Máme

$$0 = \|(\Phi(\lambda - f))x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |\lambda - f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_A |\lambda - f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} + \int_B |\lambda - f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_B |\lambda - f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}.$$

Jelikož $|\lambda - f|^2 > 0$ na B, dostáváme $E_{x,x}(B) = 0$. Tedy rovnosti

$$\begin{aligned}\langle E(A)x, E(A)x\rangle + \langle E(B)x, E(B)x\rangle &= \langle E(A)x + E(B)x, E(A)x + E(B)x\rangle = \langle x, x\rangle = \\ &= \langle E(A)x + E(B)x, x\rangle = \langle E(A)x, x\rangle + \langle E(B)x, x\rangle = \langle E(A)x, E(A)x\rangle\end{aligned}$$

implikují $E(B)x = 0$. Proto $x = E(A)x$ a $x \in \operatorname{Rng} E(A)$.

Obráceně, je-li $x \in \operatorname{Rng} E(A)$, máme z (5) odhad

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \,\mathrm{d}E_{\Phi(\chi_A)x,\Phi(\chi_A)x} = \int_{\mathbb{C}} |f\chi_A|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_A |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} = \int_A |\lambda|^2 dE_{x,x} < +\infty,$$

a tedy $x \in \operatorname{Dom} \Phi(f)$. Dále platí

$$\begin{aligned}\langle \Phi(f)x, y\rangle = \langle \Phi(f)\Phi(\chi_A)x, y\rangle = \langle \Phi(f\chi_A)x, y\rangle = \int_A f \,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_A \lambda \,\mathrm{d}E_{x,y} = \\ = \lambda\langle E(A)x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle, \quad y \in \operatorname{Dom} \Phi(f).\end{aligned}$$

Tedy $\Phi(f)x = \lambda x$.

□

7. Spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru

Následující lemma je zobecněním Tvrzení 10.67.

LEMMA 57. *Nechť* $E\colon \operatorname{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ *je ortogonální rozklad identity, kde* H *je netriviální komplexní Hilbertův prostor, a* $\varphi \in \operatorname{Bf}(\mathbb{C})$. *Pak je zobrazení* $\varphi(E)\colon \operatorname{Bs}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ *definované jako*

$$\varphi(E)(A) = E(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{C})$$

ortogonální rozklad identity na $\mathbb{C}$, *který splňuje pro každou měřitelnou* $f' \in \operatorname{Bf}(\mathbb{C})$ *rovnost*

$$\int_{\mathbb{C}} f' \,\mathrm{d}\varphi(E) = \int_{\mathbb{C}} f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E.$$

Navíc pro operátor $T = \int_{\mathbb{C}} \varphi \,\mathrm{d}E$ *platí* $T = \int_{\mathbb{C}} Id \,\mathrm{d}\varphi(E)$.

DŮKAZ. Již víme, že $\varphi(E)$ je ortogonální rozklad identity na H. Dále platí $(\varphi(E))_{x,y} = \varphi(E_{x,y})$, $x, y \in H$. Vskutku, pro $A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{C})$ máme

$$(\varphi(E))_{x,y}(A) = \langle \varphi(E)(A)x, y\rangle = \langle E(\varphi^{-1}(A))x, y\rangle = E_{x,y}(\varphi^{-1}(A)) = \varphi(E_{x,y})(A).$$

Nechť $f' \in \operatorname{Bf}(\mathbb{C})$ je dána. Uvažujme nejprve případ, že je esenciálně omezená vzhledem k E. Pak je $f' \circ \varphi$ též esenciálně omezená vzhledem k $\varphi(E)$ a pro $x, y \in H$ platí

$$\langle \left(\int_{\mathbb{C}} f' \,\mathrm{d}\varphi(E)\right) x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} f' \,\mathrm{d}(\varphi(E))_{x,y} = \int_{\mathbb{C}} f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E_{x,y} = \langle \left(\int_{\mathbb{C}} f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E\right) x, y\rangle,$$

a tedy máme rovnost $\int_{\mathbb{C}} f' \,\mathrm{d}\varphi(E) = \int_{\mathbb{C}} f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E$.

Nechť nyní f' je obecná. Jelikož $\varphi(E_{x,x}) = (\varphi(E))_{x,x}$, platí $\operatorname{Dom}\left(\int f' \,\mathrm{d}\varphi(E)\right) = \operatorname{Dom}\left(\int f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E\right)$. Pak pro $A_n = (f')^{-1}(B(0, n))$, $n \in \mathbb{N}$, platí, že $f'_n = f'\chi_{A_n}$ konvergují k f' v prostorech $L_2((\varphi(E))_{x,x})$,

$x \in \operatorname{Dom}\left(\int f \,\mathrm{d}\varphi(E)\right)$, a tedy $f_n' \circ \varphi \to f' \circ \varphi$ v prostorech $L_2(E_{x,x})$, $x \in \operatorname{Dom}\left(\int f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E\right)$. Díky Poznámce 55 tedy pro $x \in \operatorname{Dom}\left(\int f' \,\mathrm{d}\varphi(E)\right)$ máme

$$\left(\int_{\mathbb{C}} f' \,\mathrm{d}\varphi(E)\right) x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{C}} f_n' \,\mathrm{d}\varphi(E)\right) x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{C}} f_n' \circ \varphi \,\mathrm{d}E\right) x = \left(\int_{\mathbb{C}} f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E\right) x.$$

Poslední identita je pak přímým důsledkem již dokázaného, takže je důkaz dokončen.

□

VĚTA 58. *Nechť T je samoadjungovaný operátor v netriviálním komplexním Hilbertově prostoru H. Pak existuje právě jeden ortogonální rozklad jednotky E na $(\sigma(T), \mathrm{Bs}(\sigma(T)))$ takový, že $T = \int_{\sigma(T)} Id \,\mathrm{d}E$.*

DŮKAZ. *Existence.* Uvažujme Cayleyovu transformaci $U = \mathcal{C}(T)$ operátoru T. Obdržíme tak unitární operátor takový, že $I - U$ je prostý (vizte Větu 46). Jelikož je U unitární, platí $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$. Nechť F je ortogonální rozklad identity na $(\sigma(U), \mathrm{Bs}(\sigma(U)))$ splňující $U = \int_{\sigma(U)} Id \,\mathrm{d}F$. Jelikož $\operatorname{Ker}(I - U) = \{0\}$, je $F(\chi_{\{1\}}) = 0$ (vizte Větu 10.61).

Povšimněme si, že funkce $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T} \setminus \{1\}$ definovaná jako $\psi(t) = \frac{t-i}{t+i}$ má inverzi $\varphi \colon \mathbb{T} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $\varphi(\lambda) = i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Dodefinujeme φ na celé $\mathbb{C}$ pomocí nuly, tj. $\varphi(\lambda) = 0$ pro $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{T} \setminus \{1\})$. Pak vidíme, že φ je borelovská funkce na $\mathbb{C}$.

Položme

$$S = \int_{\sigma(U)} \varphi \,\mathrm{d}F.$$

Jelikož je φ reálná, je S samoadjungovaný operátor (vizte Větu 54(c)). Protože $\varphi(\lambda)(1 - \lambda) = i(1 + \lambda)$ F-skoro všude, platí $S(I - U) = i(I + U)$. (Vskutku, stačí použít Větu 54(b).) Z tohoto vztahu vidíme inkluzi

$$\operatorname{Dom} S \supset \operatorname{Rng}(I - U) = \operatorname{Dom} T,$$

(vizte Větu 43(b)) a $S = T$ na $\operatorname{Dom} T$ (Věta 43(c)). Tedy $S \supset T$. To ale znamená inkluzi

$$T = T^* \supset S^* = S,$$

a tedy $T = S$.

Z Věty 56 máme, že

$$\sigma(T) = \sigma(S) = \operatorname{ess} \operatorname{Rng} \varphi$$

je uzavřené v $\mathbb{R}$.

Uvažujme E obraz rozkladu jednotky F při zobrazení φ, tj. $E = \varphi(F)$, kde

$$E(A) = F(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathrm{Bs}(\sigma(T)).$$

Pak E je hledaná spektrální míra, neboť dle Lemmatu 57 platí

$$\int_{\sigma(T)} Id \,\mathrm{d}E = \int_{\sigma(U)} \varphi \,\mathrm{d}F = S = T.$$

Jednoznačnost. Předpokládejme, že E' je též rozklad jednotky na $(\sigma(T), \mathrm{Bs}(\sigma(T)))$ splňující $T = \int_{\sigma(T)} Id \,\mathrm{d}E'$. Uvažujme borelovskou funkci $\psi \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$ definovanou jako $\psi(t) = \begin{cases} \frac{t-i}{t+i}, & t \in \sigma(T), \\ 0, & t \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \end{cases}$ a operátor

$$U' = \int_{\sigma(T)} \psi \,\mathrm{d}E'.$$

Pak U' plňuje $U'(T + iI) = T - iI$ díky Větě 54(b). (Máme totiž $\psi(t)(t + i) = (t - i)$ E'-skoro všude, a tedy $U'(T + iI) \subset T - iI$. Navíc $\operatorname{Dom} U'(T + iI) = \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}(T - iI)$.) Tedy $U' = \mathcal{C}(T)$ (zde $\mathcal{C}(T)$ je opět Cayleyova transformace T). Nechť F' je rozklad jednotky daný jako obraz E' při zobrazení ψ, tj. F' je rozklad na

$$(\sigma(U'), \mathrm{Bs}(\sigma(U'))) = (\operatorname{ess} \operatorname{Rng} \psi, \mathrm{Bs}(\operatorname{ess} \operatorname{Rng} \psi)) = (\sigma(\mathcal{C}(T)), \mathrm{Bs}(\sigma(\mathcal{C}(T)))).$$

Jelikož

$$\int_{\sigma(\mathcal{C}(T))} Id \, \mathrm{d}F = \mathcal{C}(T) = U' = \int_{\sigma(T)} \psi dE' = \int_{\operatorname{ess\,Rng} \psi} Id \, \mathrm{d}F' = \int_{\sigma(\mathcal{C}(T))} Id \, \mathrm{d}F',$$

z jednoznačnosti rozkladu jednotky pro normální operátory (vizte Důsledek 10.63) plyne vztah $F' = F$. Jelikož $F' = \psi(E')$ a φ je inverzní k ψ, platí $E' = \varphi(F')$. Tedy

$$E' = \varphi(F') = \varphi(F) = E.$$

Tím je dokázána jednoznačnost.

□

DŮSLEDEK 59. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na komplexním Hilberově prostoru. Pak T je spojitý, právě když $\sigma(T)$ je omezené.*

DŮKAZ. Pokud $T \in \mathcal{L}(H)$, je $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$. Pokud je $\sigma(T)$ omezené, pak pro spektrální rozklad E operátoru máme $T = \int_{\sigma(T)} Id \, \mathrm{d}E$, což je omezený operátor dle Věty 52.

□

8. Spektrální rozklad normálního operátoru

DEFINICE 60. Pro daný Hilbertův prostor H definujeme operátor $V \in \mathcal{L}(H \times H)$ předpisem

$$V(x, y) = (-y, x), \quad (x, y) \in H \times H.$$

Následující lemma shrnuje základní vlastnosti operátoru V.

LEMMA 61. *Nechť H je Hilbertův prostor aV je jako v Definici 60. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Operátor V je unitární, tj. jedná se o surjektivní izometrii.
(b) Inverze k V je dána vzorcem $V^{-1}(x, y) = (y, -x)$, $(x, y) \in H \times H$.
(c) Platí $V^{-1} = -V$.
(d) Platí $V^2 = -I$.

DŮKAZ. Důkaz plyne ihned z definice.

□

TVRZENÍ 62. *Nechť T je hustě definovaný operátor v Hilbertově prostoru H. Pak* $\operatorname{graf} T^\star = (V(\operatorname{graf} T))^\perp$.

DŮKAZ. Tvrzení plyne z následující série ekvivalentních tvrzení:

$$\begin{aligned}(y, z) \in \operatorname{graf} T^\star &\Leftrightarrow \forall x \in \operatorname{Dom} T : \langle Tx, y\rangle_H = \langle x, z\rangle_H \Leftrightarrow \forall x \in \operatorname{Dom} T : \langle(-Tx, x), (y, z)\rangle_{H\times H} = 0 \\ &\Leftrightarrow (y, z) \in (V(\operatorname{graf} T))^\perp .\end{aligned}$$

□

DŮSLEDEK 63. *Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v Hilbertově prostoru H.*

(a) Platí $H \times H = V(\operatorname{graf}(T)) \oplus_\perp \operatorname{graf} T^\star$.
(b) Pro dané $(a, b) \in H \times H$ má systém rovnic

$$\begin{aligned}-Tx + y &= a \\ x + T^\star y &= b\end{aligned}$$

právě jedno řešení splňující $x \in \operatorname{Dom} T$ a $y \in \operatorname{Dom} T^\star$.

DŮKAZ. (a) Jelikož je T uzavřený operátor a V je homeomorfizmus, je množina $V(\operatorname{graf}(T))$ uzavřená. Tedy díky Tvrzení 62 dostáváme

$$H \times H = V(\operatorname{graf}(T)) \oplus_\perp (V(\operatorname{graf}(T))^\perp = V(\operatorname{graf}(T)) \oplus_\perp \operatorname{graf} T^\star).$$

(b) Je-li $(a,b) \in H \times H$ dáno, nalezneme díky (a) jednoznačně určené prvky $(c_1,d_1) \in V(\operatorname{graf}(T))$, $(c_2,d_2) \in \operatorname{graf} T^\star$ splňující $(a,b) = (c_1,d_1) + (c_2,d_2)$. Existuje tak $x \in \operatorname{Dom} T$ a $y \in \operatorname{Dom} T^\star$ splňující $(c_1,d_1) = (-Tx, x)$ a $(c_2,d_2) = (y, T^\star y)$. Zjevně pak platí $a = c_1 + c_2 = -Tx + y$ a $b = d_1 + d_2 = x + T^\star y$.

Jednoznačnot tohto řešení plyne z jednoznačnosti rozkladu daného vzorcem z (a).

□

VĚTA 64. *Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v Hilbertově prostoru H. Označme $Q = I + T^\star T$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Existují operátory $B, C \in L(H)$ takové, že platí:*

(a1) *Q je prostý a na,*

(a2) $\max\{\|B\|, \|C\|\} \le 1$,

(a3) *platí $C = TB$,*

(a4) *platí $BQ \subset QB = I$,*

(a5) *B je nazáporný,*

(a6) *operátor $T^\star T$ je samoadjungovaný.*

(b) *Pro operátor $T' = T \restriction_{\operatorname{Dom}(T^\star T)}$ platí, že jeho graf je hustý v grafu T.*

DŮKAZ. (a) Ukážeme nejprve prostoru Q. Je-li $x \in \operatorname{Dom} Q$, pak nutně $x \in \operatorname{Dom} T$ a $Tx \in \operatorname{Dom} T^\star$. Dále máme

$$\|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \langle x, x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, T^\star T x\rangle = \langle x, Qx\rangle \le \|x\|\|Qx\|,$$

a tedy $\|Qx\| \ge \|x\|$. Operátor Q je tak prostý.

Použijeme nyní Důsledek 63 k tomu, abychom pro dané $(0,y) \in H \times H$ nalezli jednoznačně dané vektory $By \in \operatorname{Dom} T$ a $Cy \in \operatorname{Dom} T^\star$ takové, že

$$(0,y) = (-T(By), By) + (Cy, T^\star(Cy)), \tag{6}$$

přičemž $(-T(By), By) \perp (Cy, T^\star(Cy))$ v $H \times H$. Díky jednoznačnosti tohoto řešení jsou zobrazení $y \mapsto By$ a $y \mapsto Cy$ lineární a navíc splňují

$$\begin{aligned} \|y\|_H^2 &= \|(0,y)\|_{H\times H}^2 = \|(-T(By), By) + (Cy, T^\star(Cy))\|_{H\times H}^2 = \\ &= \|(-T(By), By)\|_{H\times H}^2 + \|(Cy, T^\star(Cy))\|_{H\times H}^2 \ge \\ &\ge \|By\|_H^2 + \|Cy\|_H^2. \end{aligned}$$

Proto mají obě normu shora odhadnutou číslem 1.

Z (6) plyne $0 = -TBy + Cy$, tj. $C = TB$. Dále máme z (6) rovnosti

$$y = By + T^\star Cy = By + T^\star TBy = QBy.$$

Tedy $QB = I$, z čehož dostáváme inkluzi $\operatorname{Rng} B \subset \operatorname{Dom} Q$, prostotu B a surjektivitu Q.

Pro libovolné $y \in \operatorname{Dom} Q$ dále platí

$$QBQy = Qy,$$

což vzhledem k prostotě Q znamená rovnost $BQy = y$. Tedy $BQ \subset I$.

Pro libovolné $y \in H$ nyní nalezneme $x \in H$ splňující $Qx = y$ a dostaneme

$$\langle By, y\rangle = \langle BQx, Qx\rangle = \langle x, Qx\rangle = \langle x, x + T^\star Tx\rangle = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \ge 0.$$

Operátor B je tak pozitivní.

Jelikož je B samoadjungovaný a prostý, je $\operatorname{Rng} B$ hustý a $Q = B^{-1}$ je samoadjungovaný (vizte Věta 35(b)). Proto i $T^\star T = Q - I$ je samoadjungovaný (vizte Tvrzení 27(b).

(b) Uvažujme Hilbertův prostor $\operatorname{graf} T$ a jeho podprostor $\operatorname{graf} T' \subset \operatorname{graf} T$. Předpokládejme, že prvek (z, Tz) leží v $\operatorname{graf} T \cap (\operatorname{graf} T')^\perp$. Pak pro každé $x \in \operatorname{Dom}(T^\star T) = \operatorname{Dom} Q$ platí

$$0 = \langle (z, Tz), (z, Tx)\rangle = \langle z, x\rangle + \langle Tz, Tx\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, T^\star Tx\rangle = \langle z, Qx\rangle.$$

Tedy $\langle z, Qx\rangle = 0$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} Q$. Jelikož $\operatorname{Rng} Q = H$, platí $z = 0$. Proto je graf T' je hustý v grafu T.

□

Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v komplexním Hilbertově prostoru. Pak T nazveme normálním, pokud $T^\star T = TT^\star$. Naším cílem je jeho spektrální rozklad analogický ke spektrálnímu rozkladu samoadjunogovaného operátoru. Budeme postupovat analogicky jako v oddíle 7, tedy zvolíme vhodnou funkci $f \in \mathrm{Bf}(\mathbb{C})$, pomocí které transformujeme T na spojitý normální operátor. Pro ten nalezneme spektrální rozklad, jehož obrazem při funkci f^{-1} bude spektrální rozklad T.

Zvolme tedy funkci $f\colon \mathbb{C} \to U(0,1)$ definovanou jako $f(\lambda) = \frac{\lambda}{(1+|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}}$, jejíž inverze $f^{-1}\colon U(0,1) \to \mathbb{C}$ je dána jako $f^{-1}(\lambda) = \frac{\lambda}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Definice 65 (Omezená transformace operátoru). Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v Hilbertově prostoru H. Pak omezená transformace T je operátor $\mathcal{B}(T) = T\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Povšimněme si, že $(I + T^\star T)^{-1}$ je spojitý, prostý, nezáporný samoadjungovaný operátor (Věta 64), a tedy je $\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ dobře definovaný prvek $\mathcal{L}(H)$.

Lemma 66. *Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v Hilbertově prostoru H a $S \in \mathcal{L}(H)$ je samoadjungovaný takový, že $ST \subset TS$. Nechť $f \in C(\sigma(S))$. Pak $f(S)T \subset Tf(S)$.*

Důkaz. *Krok 1.* Nechť $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ je polynom. Pak inkluze

$$p(S)T = \left(\sum_{k=0}^n a_k S^k\right) T = \sum_{k=0}^n a_k S^k T \subset \sum_{k=0}^n a_k T S^k = T\left(\sum_{k=0}^n a_k S^k\right) = Tp(S)$$

ukazuje platnost tvrzení pro polynomy.

Krok 2. Nechť $\{p_n\}$ je posloupnost polynomů v proměnné $t \in \mathbb{R}$ splňující $\|p_n - f\|_{C(\sigma(S))} \to 0$. Dle prvního kroku platí pro $S_n = p_n(S)$ vztah $S_n T \subset TS_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť tedy $x \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} f(S)T$ je dáno. Pak $x \in \operatorname{Dom} S_n T \subset \operatorname{Dom} TS_n$, takže $S_n x \in \operatorname{Dom} T$. Dále $S_n x \to Sx$ a $TS_n x = S_n Tx \to STx$, takže $(S_n x, TS_n x) \to (Sx, STx)$. Jelikož je T uzavřený, platí $Sx \in \operatorname{Dom} T$ a $TSx = STx$. Tím je důkaz uzavřen.

□

Věta 67. *Nechť T je hustě definovaný uzavřený operátor v Hilbertově prostoru H a $\mathcal{B}(T)$ je jeho omezená transformace. Pak platí následující tvrzení.*

(a) $\mathcal{B}(T)$ je omezený operátor a o normě nejvýše 1, který splňuje $(I + T^\star T)^{-1} = I - \mathcal{B}(T)^\star \mathcal{B}(T)$.
(b) Pokud S je hustě definovaný uzavřený operátor v H a $\mathcal{B}(T) = \mathcal{B}(S)$, pak $T = S$.
(c) Pokud T je normální, platí $\mathcal{B}(T)^\star = \mathcal{B}(T^\star)$.
(d) Je-li T samoadjungovaný, je samoadjungovaný i $\mathcal{B}(T)$.

Důkaz. Označme $B = \mathcal{B}(T)$ a $A = (I + T^\star T)^{-1}$. Pak A je spojitý, prostý, nezáporný samoadjungovaný operátor, takže i $A^{\frac{1}{2}}$ je prostý. Vskutku, pokud $A^{\frac{1}{2}}x = 0$, pak $\|Ax\|^2 = \langle A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}x\rangle = 0$, takže $x = 0$.

(a) Jelikož je B složení uzavřeného a spojitého operátoru, je B uzavřený (Tvrzení 16(c)). Dále máme $\operatorname{Rng} A = \operatorname{Dom} T^\star T \subset \operatorname{Dom} T$, takže TA je všude definovaný uzavřený operátor, čili prvek $\mathcal{L}(H)$. Proto $BA^{\frac{1}{2}} = TA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = TA \in \mathcal{L}(H)$. Z toho dostáváme $\operatorname{Rng} A^{\frac{1}{2}} \subset \operatorname{Dom} B$. Ale $A^{\frac{1}{2}}$ je prostý, takže $\operatorname{Rng} A^{\frac{1}{2}}$ je hustý v H (Věta 10.1(c)). Tedy B je hustě definován.

Nechť $x = A^{\frac{1}{2}}y \in \operatorname{Rng} A^{\frac{1}{2}}$ je dáno. Pak

$$\begin{aligned}\|Bx\|^2 &= \|BA^{\frac{1}{2}}y\|^2 = \langle TAy, TAy\rangle = \langle T^\star TAy, Ay\rangle \le \langle (I + T^\star T)Ay, Ay\rangle = \langle y, Ay\rangle = \\ &= \langle A^{\frac{1}{2}}y, A^{\frac{1}{2}}y\rangle = \|x\|^2,\end{aligned}$$

takže B je uzavřený a na hustém podprostoru má normu nejvýše 1. Tedy $B \in \mathcal{L}(H)$ a $\|B\| \leq 1$. Jelikož $B = TA^{\frac{1}{2}}$, platí dle Tvrzení 27(c) $B^\star = (TA^{\frac{1}{2}})^\star \supset A^{\frac{1}{2}}T^\star$. Dostáváme tak

$$B^\star BA^{\frac{1}{2}} \supset A^{\frac{1}{2}}T^\star TA = A^{\frac{1}{2}}(I + T^\star T)A - A^{\frac{1}{2}}A = A^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{1}{2}}A = A^{\frac{1}{2}}(I - A) = (I - A)A^{\frac{1}{2}}.$$

Jelikož je $\operatorname{Rng} A^{\frac{1}{2}}$ hustý v H, je $B^\star B = I - A$

(b) Nechť T, S jsou hustě definované uzavřené operátory, pro které $\mathcal{B}(T) = \mathcal{B}(S)$. Pak dle (a) platí

$$(I + T^\star T)^{-1} = I - \mathcal{B}(T)^\star\mathcal{B}(T) = I - \mathcal{B}(S)^\star\mathcal{B}(S) = (I + S^\star S)^{-1},$$

takže $T^\star T = S^\star S$. Proto

$$T(I + T^\star T)^{-1} = \mathcal{B}(T)\left(I + T^\star T)^{-1})\right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{B}(S)((I + S^\star S)^{-1}))^{\frac{1}{2}} = S\left(I + S^\star S)^{-1})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tedy $T = S$ na $\operatorname{Dom} T^\star T = \operatorname{Dom} S^\star S$, což vzhledem k uzavřenosti S a T znamená dle Věty 64(b) rovnost $T = S$.

(c) Nechť T je normální. Pak dle Tvrzení 30(d) platí

$$\left(I + T^\star T)^{-1})\right)^{\frac{1}{2}} = \left(I + TT^\star)^{-1})\right)^{\frac{1}{2}} = \left(I + T^{\star\star}T^\star)^{-1})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Navíc máme

$$(I + T^\star T)^{-1}T \subset T(I + T^\star T)^{-1}.$$

Vskutku, $\operatorname{Dom} T(I + T^\star T)^{-1} = H$ a pro $x \in \operatorname{Dom}(I + T^\star T)^{-1}T = \operatorname{Dom} T$ označme $b = (I + T^\star T)^{-1}x$. Chceme dokázat

$$(I + T^\star T)^{-1}Tx = T(I + T^\star T)^{-1}x = Tb.$$

neboli

$$Tx = (I + T^\star T)Tb.$$

To však platí, neboť

$$(I + T^\star T)Tb = Tb + T^\star TTb = Tb + TT^\star Tb = T(I + T^\star T)b = Tx.$$

Aplikací Lemmatu 66 obdržíme

$$\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} T \subset T\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

což implikuje díky Tvrzení 27(c) inkluzi

$$\mathcal{B}(T^\star) = T^\star\left((I + T^{\star\star}T^\star)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = T^\star\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = T^\star\left(\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^\star =$$
$$= \left(\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} T\right)^\star \supset \left(T\left((I + T^\star T)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^\star = \mathcal{B}(T)^\star.$$

Jelikož jsou $\mathcal{B}(T^\star)$ i $\mathcal{B}(T)^\star$ omezené, platí rovnost $\mathcal{B}(T^\star) = \mathcal{B}(T)^\star$.

(d) Je-li T samoadjungovaný, je $\mathcal{B}(T)^\star = \mathcal{B}(T^\star) = \mathcal{B}(T)$, tj. $\mathcal{B}(T)$ je samoadjungovaný. Je-li T normální, máme dle (a) a (c) rovnost

$$\mathcal{B}(T)^\star\mathcal{B}(T) = I - (I + T^\star T)^{-1} = I - (I + T^{\star\star}T^\star)^{-1} = \mathcal{B}(T^\star)^\star\mathcal{B}(T^\star) = \mathcal{B}(T)\mathcal{B}(T)^\star.$$

□

VĚTA 68. *Nechť T je normální operátor v Hilbertově prostoru H. Pak existuje právě jeden ortogonální rozklad jednotky E na $(\sigma(T), \mathrm{Bs}(\sigma(T)))$ takový, že $T = \int_{\sigma(T)} Id \, \mathrm{d}E$.*

DŮKAZ. *Existence.* Nechť $B = \mathcal{B}(T)$ je omezená transformace T a F je její ortogonální rozklad, tj. $B = \int_{\mathbb{C}} Id \, \mathrm{d}F$. Jelikož $\|B\| \leq 1$, je $F(B(0,1)) = I$. Platí však dokonce více. Operátor $I - B^\star B = (I + T^\star T)^{-1}$ je prostý, což dává

$$\{0\} = \operatorname{Ker}(I - B^\star B) = \operatorname{Ker}\left(\int_{B(0,1)} (1 - |t|^2)\,\mathrm{d}F\right) = \operatorname{Rng} F(\{t \in B(0,1);\ 1 - |t|^2 = 0\}) = \operatorname{Rng} F(\mathbb{T}).$$

Tedy $F(\mathbb{T}) = 0$. Můžeme tak pro funkci $\varphi\colon U(0,1) \to \mathbb{C}$ definovanou jako $\varphi(t) = \frac{t}{(1-|t|^2)^{\frac{1}{2}}}$ uvažovat ortogonální rozklad $E = \varphi F$ a operátor $S = \int_{\mathbb{C}} \varphi \, \mathrm{d}F = \int_{\mathbb{C}} Id \, \mathrm{d}E$. Pak $E(\sigma(S)) = E(\operatorname{ess\,Rng} \varphi) =$

$F(\varphi^{-1}(\operatorname{ess Rng}\varphi)) = F(U(0,1)) = I$. Dále je S uzavřený hustě definovaný operátor v H, který splňuje pro funkci $f(\lambda) = \frac{\lambda}{(1+|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}}$ rovnost

$$\mathcal{B}(S) = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}E = \int_{\mathbb{C}} f \,\mathrm{d}\varphi(F) = \int_{\mathbb{C}} f \circ \varphi \,\mathrm{d}F = \int_{\mathbb{C}} Id \,\mathrm{d}F = B = \mathcal{B}(T),$$

takže S i T mají stejnou omezenou transformaci. To však dává $S = T$ dle Věty 67(b). Proto je E spektrální rozklad T.

Jednoznačnost. Nechť E' je spektrální rozklad na $\sigma(T)$ splňující $T = \int_{\mathbb{C}} Id \,\mathrm{d}E'$. Pak $\mathcal{B}(T)$ má spektrální rozklad $f(E')$, což znamená, že $f(E') = F$. Tedy $E' = \varphi(f(E')) = \varphi F = E$.

□

PŘÍKLAD 69. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou s následující vlastností: Pro každou $A \subset \Omega$ takovou, že $\mu(A) > 0$, existuje $B \subset A$ taková, že $0 < \mu(B) < +\infty$. (Například μ je σ-konečná nebo diskrétní.) Nechť $H = L_2(\mu)$ a $g\colon \Omega \to \mathbb{K}$ μ-měřitelná. Definujme T předpisem $\operatorname{Dom} T = \{f \in H;\ gf \in H\}$ a

$$T(f) = gf, \quad f \in \operatorname{Dom} T.$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) T je hustě definovaný uzavřený operátor v H.
(b) $T \in \mathcal{L}(H)$ právě tehdy, když $g \in L_\infty(\mu)$.
(c) Platí $\operatorname{Dom} T^\star = \operatorname{Dom} T$ a $T^\star f = \overline{g} f$ pro $f \in \operatorname{Dom} T^\star$. Dále T je normální; T je samoadjungovaný právě tehdy, když g je μ-s. v. reálná.
(d) Pro $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{ess Rng} g$ je $(\lambda I - T)^{-1} f = \frac{1}{\lambda - g} f$ pro každé $f \in H$.
(e) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \mu(g^{-1}(\lambda)) > 0\}$ a $\sigma(T) = \operatorname{ess Rng} g$.
(f) Ortogonální rozklad identity vzhledem k T je dán vzorcem $E(A)f = \chi_{g^{-1}(A)} f$ pro $f \in H$ a $A \in \operatorname{Bs}(\mathbb{K})$.

◇

DŮKAZ. (a) Zjevně je $\operatorname{Dom} T$ podprostor H. Je-li $f \in H$, pak $f_n = \chi_{g^{-1}(B(0,n))} f$ jsou v $\operatorname{Dom} T$ a dle Lebesgueovy věty $f_n \to f$ v H. Nechť $\{f_n\} \subset \operatorname{Dom} T$ a $f, h \in H$ splňují $f_n \to f$ a $Tf_n \to h$. Výběrem podposloupnosti lze zaručit, že $f_{n_k} \to f$ a $Tf_{n_k} \to h$ μ-skoro všude. Pak $Tf_{n_k} = gf_{n_k} \to gf$ μ-skoro všude. Proto $gf = h \in H$, takže $f \in \operatorname{Dom} T$ a $Tf = h$. tedy T je uzavřený.

(b) Pokud $g \in L_\infty(\mu)$, je $T \in \mathcal{L}(H)$ dle Příkladu 10.65. Pokud $T \in \mathcal{L}(H)$ a $A_n = g^{-1}(B(0,n))$, $n \in \mathbb{N}$, pak pro operátory $T_n f = \chi_{A_n} g f$, $f \in H$, platí

$$\|T\| \|f\| \geq \|Tf\| = \|gf\| = \lim_{n\to\infty} \|\chi_{A_n} g f\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n f\|.$$

Tedy $\operatorname{ess Rng} g \chi_{A_n} = \|T_n\| \leq \|T\|$. Z toho však máme omezenost $\operatorname{ess Rng} g$ číslem $\|T\|$.

(c) Pro důkaz (c) si nejprve rozmyslíme následující fakt.

Nechť M je hustý podprostor H s vlastností $\chi_B f \in M$ kdykoliv $f \in M$ a $B \subset \Omega$ splňuje $\mu(B) < +\infty$. Pokud $f \mapsto \int_\Omega f\psi \,\mathrm{d}\mu$ je spojité na M pro nějakou $\psi\colon \Omega \to \mathbb{K}$ μ-měřitelnou, pak $\psi \in H$.

Vskutku, toto zobrazení lze spojitě rozšířit na H, a existuje tak dle Věty 1.120 $\varphi \in H$ splňující $\int_\Omega f(\psi - \varphi) \,\mathrm{d}\mu = 0$, $f \in M$. Označme $\omega = \psi - \varphi$. Označme pro pevné $n \in \mathbb{N}$ množinu $A = \{t \in \Omega;\ \frac{1}{n} \leq |\omega(t)| \leq n\}$. Pokud $\mu(A) > 0$, existuje $B \subset A$ konečné kladné míry. Pak $h = \chi_B \omega \in H$, stejně jako $f = \chi_B \operatorname{sgn} \omega \in H$. Platí však

$$\int_\Omega f h \,\mathrm{d}\mu = \int_B \operatorname{sgn} \omega \omega \,\mathrm{d}\mu = \int_B |\omega| \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n} \mu(B) > 0.$$

Nechť $\{f_k\} \subset M$ je posloupnost konvergující k f. Pak $f_k \chi_B \in M$ a

$$0 \neq \int_\Omega f h \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k h = \int_\Omega (f_k \chi_B) \omega \,\mathrm{d}\mu.$$

Tedy $\int_\Omega f\omega \,\mathrm{d}\mu \neq 0$ pro Nějaký prvek $f \in M$, což je spor. Proto $\mu(A) = 0$. Tedy i $\omega = 0$ μ-skoro všude. Tím je ověření faktu dokončeno.

Nyní můžeme přikročit k výpočtu $T^\star$. Jelikož $\operatorname{Dom} T$ splňuje předpoklad z faktu a pro $h \in H$ je gh konečné μ-skoro všude, platí dle předchozího

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} T^\star &= \{h \in H;\ f \mapsto \langle Tf, h\rangle \text{ je spojité na } \operatorname{Dom} T\} = \\ &= \{h \in H;\ f \mapsto \int_\Omega gf\overline{h}\,\mathrm{d}\mu \text{ je spojité na } \operatorname{Dom} T\} = \\ &= \{h \in H;\ f \mapsto \int_\Omega f\overline{\overline{g}h} \text{ je spojité na } \operatorname{Dom} T\} = \\ &= \{h \in H;\ \overline{g}h \in H\} = \operatorname{Dom} T.\end{aligned}$$

Z výpočtu je též vidět, že pro $h \in \operatorname{Dom} T^\star$ je $T^\star h = \overline{g}h$.

Ukážeme nyní, že $T^\star T = TT^\star = S$, kde $Sf = |g|^2 f$ definovaný na $\operatorname{Dom} S = \{f \in H;\ |g|^2 f \in H\}$. Pokud $f \in \operatorname{Dom} S$, pak

$$\int_\Omega |gf|^2\,\mathrm{d}\mu \le \||g|^2 f\|_H \|f\|_H < +\infty,$$

a tedy

$$\operatorname{Dom} T^\star T = \{f \in H;\ gf \in H\} \cap \{f \in \operatorname{Dom} T;\ \overline{g}gf \in H\} = \{f \in \operatorname{Dom} T;\ \overline{g}gf \in H\} = \operatorname{Dom} S.$$

Podobně ověříme $\operatorname{Dom} TT^\star = \operatorname{Dom} S$ a přímo z definice složení operátorů máme $T^\star T = TT^\star = S$.

Pokud je g μ-skoro všude reálná je $T = T^\star$, tj. T je samoadjungovaný. Pokud T je samoadjungovaný, platí pro všechna $f \in \operatorname{Dom} T$ rovnost $\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu = \int_f \overline{g}\,\mathrm{d}\mu$, což díky faktu znamená $g = \overline{g}$ μ-skoro všude.

(d) Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{ess\,Rng} g$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mu(\{t \in \Omega;\ |g(t) - \lambda| < \varepsilon\}) = 0$, takže $\frac{1}{\lambda - g} \in L_\infty(\mu)$. Definujeme-li $S(f) = \frac{1}{\lambda - g} f$, pak podle (a) je $S \in \mathscr{L}(H)$. Pak $I = (\lambda I - T)S \supset S(\lambda I - T)$, takže $S = (\lambda I - T)^{-1}$.

(e) Pokud $\lambda \in \mathbb{K}$ je takové, že $\mu(g^{-1}(\lambda)) > 0$, vezmeme $A \subset g^{-1}(\lambda)$ konečné kladné míry. Pak $\chi_A \in H\setminus\{0\}$ a $T\chi_A = g\chi_A = \lambda\chi_A$, takže $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Na druhou stranu, nechť $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a $f \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ je nenulová. Pak $(\lambda - g)f = 0$ s. v. Odtud plyne, že $\mu(g^{-1}(\lambda)) > 0$, protože jinak by bylo $f = 0$ s. v.

Dále, podle (d) je $\sigma(T) \subset \operatorname{ess\,Rng} g$. Na druhou stranu nechť $\lambda \in \operatorname{ess\,Rng} g$. Chceme ukázat, že $\lambda \in \sigma(T)$. Uvažujme množiny $A_n = g^{-1}(B(\lambda, \frac{1}{n}))$, $n \in \mathbb{N}$, což jsou množiny ladné míry. Nalezneme množiny $B_n \subset A_N$ konečné kladné míry a položíme $f_n = \frac{1}{\sqrt{\mu(B_n)}}\chi_{B_n}$. Pak $f_n \in S_H$. Navíc platí $|g| \le |\lambda| + 1$ na B_n, takže $f_n \in \operatorname{Dom} T$. Tedy máme

$$\|(\lambda I - T)f_n\|^2 = \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{B_n} |\lambda - g|^2\,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{B_n} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n^2}.$$

Tedy $\lambda I - T$ nemůže být invertovatelný, a tedy $\lambda \in \sigma(T)$.

(f) Pro $B \in \operatorname{Bs}(\sigma(T))$ položme $E(B)f = f\chi_{g^{-1}(B)}$, $f \in H$. Pak $E(B)$ je ortogonální projekce a zobrazení $E\colon \operatorname{Bs}(\sigma(T)) \to (\mathscr{L}(H), \tau_{\mathrm{SOT}})$ je ortogonální rozklad identity. Vskutku, vlastnosti (i), (ii) a (iii) z Definice **??** jsou ihned vidět. Je však třeba ověřit $E(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = \tau_{\mathrm{SOT}} - \sum_{n=1}^\infty E(B_n)$ pro disjunktní systém $\{B_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{Bs}(\sigma(T))$. Je-li však $f \in H$ dáno, máme díky Lebesguově větě

$$\sum_{n=1}^k E(B_n)f = f\sum_{n=1}^k \chi_{g^{-1}(B_n)} = f\chi_{g^{-1}(\sum_{n=1}^k B_n)} \to f\chi_{g^{-1}(\sum_{n=1}^\infty B_n)} = E(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)f.$$

Spočítejme $E_{f,h}$ pro $f, h \in H$. Máme

$$E_{f,h}(B) = \langle E(B)f, h\rangle = \int_\Omega f\chi_{g^{-1}(B)}\overline{h}\,\mathrm{d}\mu = \int_{g^{-1}(B)} f\overline{h}\,\mathrm{d}\mu = g(\mu_{f,h})(B), \quad B \in \operatorname{Bs}(\sigma(T)),$$

kde $\mu_{f,h}$ je konečná míra na Ω definovaná jako $\mu_{f,h}(A) = \int_A f\overline{h}\,\mathrm{d}\mu$, $A \subset \Omega$ μ-měřitelná.

Položme $S = \int_{\sigma(T)} Id \, \mathrm{d}E$. Pak

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} T &= \{f \in H;\ \int_{\Omega} |gf|^2 \,\mathrm{d}\mu < +\infty\} = \\ &= \{f \in H;\ \int_{\sigma(T)} |Id|^2 \,\mathrm{d}g(\mu_{f,f}) < +\infty\} = \\ &= \{f \in H;\ \int_{\sigma(T)} |Id|^2 \,\mathrm{d}E_{f,f} < +\infty\} = \operatorname{Dom} S.\end{aligned}$$

Navíc pro $f, h \in \operatorname{Dom} T$ platí

$$\langle Tf, h\rangle = \int_{\Omega} gf\overline{h}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\sigma(T)} Id \,\mathrm{d}g(\mu_{f,h}) = \int_{\sigma(T)} Id E_{f,h} = \langle Sf, h\rangle.$$

Tedy $\langle Sf - Tf, h\rangle = 0$ pro každé $h \in \operatorname{Dom} T$, což implikuje $Sf = Tf$. Proto $T = \int_{\sigma(T)} Id \,\mathrm{d}E$.

□

9. Friedrichsova věta

LEMMA 70. *Nechť H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $J \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ je prostý, přičemž má hustý obor hodnot. Pak $JJ^\star \in \mathcal{L}(H_2)$ je prostý, má hustý obor hodnot a $S = (JJ^\star)^{-1}$ je samoadjungovaný operátor v H_2.*

DŮKAZ. Jelikož je $\operatorname{Rng} J$ hustý v H_2, je $\operatorname{Ker} J^\star = (\operatorname{Rng} J)^\perp = \{0\}$, takže $J^\star$ je prostý. Tím pádem je i $JJ^\star$ prostý. Jelikož je $JJ^\star$ samoadjungovaný, je $(\operatorname{Rng} JJ^\star)^\perp = \operatorname{Ker} JJ^\star = \{0\}$, a tedy je $\operatorname{Rng} JJ^\star$ hustý v H_2. Operátor $S\colon \operatorname{Rng} JJ^\star \to H_2$ je tak hustě definovaný. Je též, jakožto inverze ke spojitému zobrazení, uzavřený.

Ukážeme, že S je symetrický. Nechť $x, y \in \operatorname{Dom} S = \operatorname{Rng} JJ^\star$ jsou dány. Označme $v = Sx$ a $w = Sy$, tj. $JJ^\star v = x$ a $JJ^\star w = y$. Pak máme

$$\langle Sx, y\rangle = \langle v, JJ^\star w\rangle = \langle JJ^\star v, w\rangle = \langle x, Sy\rangle.$$

Nyní použijeme Lemma 38(c) a Důsledek 40 pro $\lambda = i$, tedy ověřujeme, že $S + iI$, $S - iI$ jsou surjektivní. Mějme tedy dáno $y \in H_2$. Označme $w = JJ^\star y \in \operatorname{Dom} S$. Jelikož $-i \in \rho(JJ^\star)$, existuje $v \in H_2$ řešící rovnici $v + iJJ^\star v = w$. Pak $v = w - iJJ^\star v = JJ^\star y - iJJ^\star v = JJ^\star(y - iv)$, což aplikací S dává $Sv = y - iv$, neboli $(S + iI)v = y$. Podobně bychom ověřili surjektivitu $S - iI$. Operátor S je tak samoadjungovaný.

□

VĚTA 71. *Nechť T je symetrický hustě definovaný operátor v komplexním Hilbertově prostoru H, který splňuje $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Dom} T$. Pak existuje samoadjungované rozšíření T na S, které splňuje $\langle Sx, x\rangle \geq 0$, $x \in \operatorname{Dom} S$.*

DŮKAZ. Operátor $\tilde{T} = T + I$ je též hustě definovaný a symetrický a splňuje

$$\langle \tilde{T}x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle x, x\rangle \geq \|x\|^2, \quad x \in \operatorname{Dom} T.$$

Ukážeme, že $\tilde{T}$ má samoadjungované rozšíření $\tilde{S}$ splňující $\langle \tilde{S}x, x\rangle \geq \|x\|^2$, což stačí pro důkaz věty. (Položíme totiž $S = \tilde{S} - I$, což bude požadované samoadjungované rozšíření T.) K tomuto účelu uvažujme prostor $\operatorname{Dom} T$ se skalární součinem definovaným jako

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle \tilde{T}x, y\rangle_H = \langle Tx, y\rangle + \langle x, y\rangle, \quad x, y \in \operatorname{Dom} T.$$

Nechť H_1 je zúplnění prostoru $(\operatorname{Dom} T, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ a $J\colon \operatorname{Dom} T \to H$ je vnoření. Pak $\|Jx\|_H^2 = \langle x, x\rangle_H \leq \langle x, x\rangle_1 = \|x\|_1^2$, $x \in \operatorname{Dom} T$, takže J lze jednoznačně rozšířit na operátor $J\colon H_1 \to H$ o normě nejvýše 1.

Nyní aplikujeme Lemma 70. K tomuto účelu si rozmyslíme, že $\operatorname{Rng} J \supset \operatorname{Dom} T$ je hustý v H a že J je prostý. To plyne ze vztahu

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle \tilde{T}x, Jy\rangle_H, \quad x \in \operatorname{Dom} T, y \in H_1,$$

který implikuje $\operatorname{Ker} J \subset \{y \in H_1;\ \langle y, x\rangle_1 = 0, x \in \operatorname{Dom} T\} = \{0\}$. Proto existuje samoadjungovaný operátor $\tilde{S}\colon \operatorname{Rng} JJ^\star \to H$. Nyní zbývá ověřit, že rozšiřuje $\tilde{T}$ a je nezáporný.

Nechť $x \in \operatorname{Dom} T$ je dáno. Pak rovnost

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle \tilde{T}x, Jy\rangle_H = \langle J^\star \tilde{T}x, y\rangle_1, \quad y \in H_1,$$

dává $x = J^\star \tilde{T}x$. Protože $Jx = x$, máme

$$x = Jx = JJ^\star \tilde{T}x \in \operatorname{Rng} JJ^\star = \operatorname{Dom} \tilde{S}.$$

Tedy $x \in \operatorname{Dom} \tilde{S}$ a $\tilde{S}x = \tilde{T}x$. Proto $\tilde{T} \subset \tilde{S}$.

Nakonec ověříme $\tilde{S}xx \geq \|x\|^2$. Je-li tedy $x \in \operatorname{Dom} \tilde{S}$, pak pro $y = \tilde{S}x = (JJ^\star)^{-1}x$ máme

$$\langle \tilde{S}x, x\rangle = \langle y, JJ^\star y\rangle = \langle J^\star y, J^\star y\rangle_1 = \|J^\star y\|_1^2 \geq \|JJ^\star y\|_H^2 = \|x\|_H^2.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

Kapitola 13

Základy harmonické analýzy na komutativních grupách

1. Komutativní topologické grupy a Haarova míra

DEFINICE 1. Nechť $(G, +,)$ je komutativní grupa, kde 0 značí neutrální prvek. Je-li τ topologie na G, řekneme, že (G, τ) je topologická grupa, pokud operace sčítání

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (x, y) \in G \times G$$

a operace inverzního prvku

$$x \mapsto -x, \quad x \in G,$$

jsou spojité.

Nebude-li jinak řečeno, v této sekci bude symbol G značit lokálně kompaktní topologická komutativní grupu. Grupovou operaci budeme většinou značit jako $+$. Systém všech okolí 0 značíme jako $\tau(0)$.

TVRZENÍ 2. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Pro každé $a \in G$ je zobrazení $x \mapsto a + x$ homeomorfismus.
(b) Existuje báze okolí 0 tvořená relativně kompaktními symetrickými množinami. (Množina $U \in$ je symetrická, pokud $-U = U$.)
(c) Pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$.
(d) Pro každé $x \in G$ je $\{x + U;\ U \in \tau(0)\}$ systém všech okolí x.

DůKAZ. (a) Ihned plyne ze spojitosti sčítání a inverze.

(b) Pro dané $U \in \tau(0)$ nalezneme relativně kompaktní $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$. Pak $W = V \cap (-V)$ je hledaná množina.

(c) Jelikož $0 + 0 = 0$, pro dané $U \in \tau(0)$ existují $V_1, V_2 \in \tau(0)$ splňující $V_1 + V_2 \subset U$. Pak $V = V_1 \cap V_2 \in \tau(0)$ a $V + V \subset V_1 + V_2 \subset U$.

(d) Tvrzení plyne z (a).

□

TVRZENÍ 3. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li $A \subset G$ libovolná množina a $U \subset G$ otevřená, je $A + U$ též otevřená.
(b) Jsou-li $K, L \subset G$ kompakty, je $K + L$ též kompakt.
(c) Je-li $K \subset G$ kompakt a $F \subset G$ je uzavřená množina disjunktní s K, existuje $U \in \tau(0)$ splňující $(K + U) \cap (F + U) = \emptyset$.

DůKAZ. (a) Tvrzení plyne z Tvrzení 2(a) a identity

$$A + U = \bigcup \{a + U;\ a \in A\}.$$

(b) Jelikož je $K \times L \subset G \times G$ kompakt a zobrazení sčítání $\varphi\colon K \times L \to G$ je spojité, je

$$K + L = \varphi(K \times L)$$

kompakt.

(c) Nechť K a F splňující předpoklady tvrzení jsou dány. Pro každé $x \in K$ nalezneme $U_x \in \tau(0)$ symetrické okolí splňující $(x + U_x + U_x + U_x) \cap F = \emptyset$. Pak $(x + U_x + U_x) \cap (F + U_x) = \emptyset$. (Pokud by totiž platilo $x + u_1 + u_2 = y + u_3$, kde $y \in F$ a $u_1, u_2, u_3 \in U_x$, dostali bychom $y = x + u_1 + u_2 - u_3 \in (x + U_x + U_x + U + x) \cap F$.)

Díky kompaktnosti existuje konečná množina $\{x_1 \dots, x_n\} \subset K$ splňující $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i})$. Pak $V = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ je prvkem $\tau(0)$ a

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i} + U_{x_i}) \subset G \setminus (F + V).$$

□

VĚTA 4. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa, ve které body tvoří uzavřené množiny. Pak G je Hausdorffův prostor.*

DŮKAZ. Nechť $x, y \in G$ jsou různé prvky. Dle předpokladu jsou množiny $\{x\}$, $\{y\}$ disjunktní, uzavřené a kompaktní. Dle Tvrzení 3(c) existuje $U \subset G$ otevřené okolí 0 takové, že $x + U \cap y + U = \emptyset$. Dle Tvrzení 2(d) jsou množiny $x + U$, $y + U$ otevřené, a tedy G je Hausdorffův prostor.

□

PŘÍKLADY 5. (a) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ s grupovou operací definovanou jako sčítání modulo n diskrétní kompaktní grupa.

(b) Pro každé $d \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{R}^d$ se sčítáním a eukleidovskou topologií nekompaktní grupa.

(c) Prostor $\mathbb{T}$ s násobením je kompaktní grupa.

(d) Prostor $\mathbb{Z}$ se sčítáním je diskrétní nekompaktní grupa.

(e) Prostor $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) s násobením je nekompaktní grupa.

(f) Prostor $(0, +\infty)$ s násobením je nekompaktní grupa.

(g) Součinová grupa $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ se součinovou topologií a sčítáním definovaným po souřadnicích je kompaktní.

DEFINICE 6. Nechť G je topologická grupa a (P, ρ) metrický prostor. Zobrazení $f : G \to P$ je stejnoměrně spojité, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje U okolí 0 takové, že $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ kdykoliv $x - y \in U$.

LEMMA 7. *Nechť G je topologická grupa a (P, ρ) metrický prostor. Nechť $p_0 \in X$ a $f : G \to P$ je spojité zobrazení takové, že množina $K = \overline{\{x \in G;\ f(x) \neq p_0\}}$ je kompaktní. Pak f je stejnoměrně spojité.*

Speciálně je každý element $C_c(G)$ stejnoměrně spojitý.

DŮKAZ. Pro dané $\varepsilon > 0$ a každé $x \in K$ nalezneme U_x okolí 0 takové, že $\rho(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro $y \in x + U_x$. Nalezneme V_x symetrické okolí 0 takové, že $V_x + V_x \subset U_x$. Vybereme konečně mnoho prvků $x_1, \dots, x_n$ z K takových, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Položme $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Nechť $x, y \in G$ splňují $x - y \in V$. Předpokládejme nejprve, že $\{x, y\} \cap K \neq \emptyset$. Nechť například x je obsažen v K. Pak existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in x_i + V_{x_i}$. Pak $x \in x_i + U_{x_i}$ a

$$y = x + (y - x) \in x_i + V_{x_i} + V \subset x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subset x_i + U_{x_i},$$

a tedy

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(y)) < \varepsilon.$$

Pokud $\{x, y\} \cap K = \emptyset$, máme $\rho(f(x), f(y)) = \rho(p_0, p_0) = 0 < \varepsilon$.

□

DEFINICE 8. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $f : G \to \mathbb{K}$, pro $y \in G$ značíme

$$f_y(x) = f(x - y), \quad x \in G,$$

posun funkce f.

TVRZENÍ 9. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $f \in C_c(G)$. Pak platí $\|f_y - f\|_\infty \to 0$ pro $y \to 0$.*

DŮKAZ. Je-li $f \in C_c(G)$ a $\varepsilon > 0$ dáno, zvolme symetrické $U \in \tau(0)$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pro každé $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$. Pak pro každé $x \in G$ a $y \in U$ platí $(x - y) - x = -y \in -U = U$, a tedy $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$. Proto $\|f_y - f\|_\infty < \varepsilon$ pro každé $y \in U$.

□

VĚTA 10. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak existuje právě jedna (až na násobek) translačně invariantní nenulová Radonova míra na G. Ta je kladná na neprázdných otevřených podmnožinách G.*

Míře garantované přecházející větou se říká Haarova míra. V dalším textu ji budeme značit symbolem m.

DŮKAZ. *Krok 1.* Označme

$$C_c^+(G) = \{f \in C_c(G);\ f \geq 0, f \neq 0\}.$$

Pro $f, \phi \in C_c^+(G)$ definujme následující číslo $(f : \phi)$ v intervalu $[0, \infty)$ jako

$$(f : \phi) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n c_i;\ n \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_n \geq 0, f \leq \sum_{i=1}^n c_i \phi_{x_i} \text{ pro nějaké } x_1, \dots, x_n \in G \right\}. \tag{1}$$

Ukažme, že (1) je dobře definované číslo splňující. Nechť tedy $f, \phi \in C_c^+(G)$ jsou dány. Pak $U = \{x \in G;\ \phi(x) > \frac{1}{2}\|\phi\|\}$ je neprázdná otevřená množina, a tedy existují $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{supp} f$ takové, že $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U)$. Pak pro $x \in \operatorname{supp} f$ existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in x_i + U$. Jelikož $\phi_{x_i}(x) = \phi(x - x_i) > \frac{1}{2}\|\phi\|$, platí

$$f(x) \leq \|f\| = \frac{2\|f\|}{\|\phi\|} \frac{1}{2} \|\phi\| \leq \frac{2\|f\|}{\|\phi\|} \phi_{x_i}(x) \leq \sum_{j=1}^n \frac{2\|f\|}{\|\phi\|} \phi_{x_j}(x).$$

Tedy $f \leq \sum_{j=1}^n \frac{2\|f\|}{\|\phi\|} \phi_{x_j}$, z čehož plyne $(f : \phi) \leq 2n \frac{\|f\|}{\|\phi\|}$.

Krok 2. Pro každé $f, \phi \in C_c^+(G)$ platí následující identity:

$$(f : \phi) = (f_y : \phi) \text{ pro každé } y \in G, \tag{2}$$

$$(f_1 + f_2 : \phi) \leq (f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \text{ pro každé } f_1, f_2 \in C_c^+(G), \tag{3}$$

$$(cf : \phi) = c(f : \phi) \text{ pro každé } c > 0, \tag{4}$$

$$(f_1 : \phi) \leq (f_2 : \phi) \text{ pro každé } f_1, f_2 \in C_c^+(G) \text{ splňující } f_1 \leq f_2, \tag{5}$$

$$(f : \phi) \geq \frac{\|f\|}{\|\phi\|}, \tag{6}$$

$$(f : \phi) \leq (f : \psi)(\psi : \phi) \text{ pro každé } \psi \in C_c^+(G). \tag{7}$$

Pro důkaz (2) uvažujme $c_1, \dots, c_n$ nezáporné takové, že $f \leq \sum_{i=1}^n c_i \phi_{x_i}$ pro nějaké $x_1, \dots, x_n \in G$. Pak $f_y \leq \sum_{i=1}^n c_i (\phi_{x_i})_y = \sum_{i=1}^n c_i \phi_{x_i + y}$, a tedy $(f : \phi) \leq (f_y : \phi)$. Na druhou stranu, z právě dokázané nerovnosti máme $(f_y : \phi) \leq ((f_y)_{-y} : \phi) = (f : \phi)$.

Pro důkaz (3) uvažujme $f_1 \leq \sum_{i=1}^n c_i \phi_{x_i}$ a $f_2 \leq \sum_{j=1}^m d_j \phi_{y_j}$ dle (1). Pak

$$f_1 + f_2 \leq \sum_{i=1}^n c_i \phi_{x_i} + \sum_{j=1}^m d_j \phi_{y_j},$$

a tedy $(f_1 + f_2 : \phi) \leq \sum_{i=1}^n c_i + \sum_{j=1}^m d_j$ Přechodem k infimu pak obdržíme požadovaný vzorec.

Vzorce (4) a (5) jsou zřejmé. Pro ověření vzorce (6) uvažujme $f \leq \sum_{i=1}^n c_i \phi_{x_i}$. Pak $\|f\| \leq \|\phi\| \sum_{i=1}^n c_i$, odkud přechodem k infimu obdržíme (6).

Nechť nyní $f \leq \sum_{i=1}^n c_i \psi_{x_i}$ a $\psi \leq \sum_{j=1}^m d_j \phi_{y_j}$. Pak pro $x \in G$ platí

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^n c_i \psi_{x_i}(x) \leq \sum_{i=1}^n \left(c_i \sum_{j=1}^n d_j (\phi_{y_j})_{x_i}(x) \right) = \sum_{i,j} c_i d_j \phi_{x_i + y_j}(x).$$

Tedy

$$(f:\phi) \le \sum_{i,j} c_i d_j = \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)\left(\sum_{j=1}^m d_j\right).$$

Přechodem k infimu pak obdržíme (7).

Krok 3. Fixujme $f_0 \in C_c^+(G)$ a položme

$$I_\phi(f) = \frac{(f:\phi)}{(f_0:\phi)}, \quad f,\phi \in C_c^+(G). \tag{8}$$

Díky Kroku 2 víme, že pro pevné $\phi \in C_c^+(G)$ je $I_\phi\colon C_c^+(G) \to (0,\infty)$ translačně invariantní, subaditivní, monotónní zobrazení splňující $I_\phi(cf) = cI_\phi(f)$, $c > 0$. Navíc, díky (7) máme odhad

$$(f_0\colon f)^{-1} \le I_\phi(f) \le (f\colon f_0). \tag{9}$$

Krok 4. Pro každé $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $V \in \tau(0)$ tak, že pro každé $\phi \in C_c^+(G)$ splňující $\operatorname{supp}\phi \subset V$ platí $I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \le I_\phi(f_1+f_2) + \varepsilon$.

Vskutku, máme-li $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ a $\varepsilon > 0$ dáno, vezmeme $g \in C_c^+(G)$ splňující $g = 1$ na $\operatorname{supp}(f_1+f_2)$ a uvažujme $\delta > 0$ splňující

$$2\delta(f_1+f_2\colon f_0) + \delta(1+2\delta)(g\colon f_0) < \varepsilon. \tag{10}$$

Položme $h = f_1 + f_2 + \delta g$ a

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{f_i(x)}{h(x)}, & f_i(x) > 0,\\ 0, & f_i(x) = 0, \end{cases} \quad i = 1,2.$$

Pak $h_1, h_2 \in C_c^+(G)$ a dle Tvrzení 7 existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $|H_i(x) - h_i(y)| < \delta$ kdykoliv $x - y \in V$ a $i = 1,2$.

Nechť nyní $\phi \in C_c^+(G)$ splňuje $\operatorname{supp}\phi \subset V$. Pak pokud $h \le \sum_{j=1}^n c_j\phi_{x_j}$, pak

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \le \sum_{j=1}^n c_j\phi(x-x_j)h_i(x) \le \sum_{j=1}^n c_j\phi(x-x_j)(h_i(x_j)+\delta), \quad x \in G.$$

(Tento odhad platí, neboť $|h_i(x) - h_i(x_j)| < \delta$ kdykoliv $x - x_j \in \operatorname{supp}\phi$.) Jelikož $h_1 + h_2 \le 1$, dostáváme

$$(f_1:\phi) + (f_2:\phi) \le \sum_{j=1}^n c_j(h_1(x_j)+\delta) + \sum_{j=1}^n c_j(h_2(x_j)+\delta) \le \sum_{j=1}^n c_j(1+2\delta).$$

Přechodem k infimu dostáváme

$$(f_1:\phi) + (f_2:\phi) \le (1+2\delta)(h:\phi),$$

což dává

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \le (1+2\delta)I_\phi(h).$$

Jelikož

$$I_\phi(h) \le I_\phi(f_1+f_2) + \delta I_\phi(g),$$

z volby δ máme odhad

$$I_\phi(f_1) + I_\phi(f_2) \le I_\phi(f_1+f_2) + \varepsilon.$$

Krok 5. Pro každé $f \in C_c^+(G)$ uvažujme kompaktní prostor $X_f = \left[(f_0\colon f)^{-1}, (f\colon f_0)\right]$ a nechť

$$X = \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f.$$

Dle (9) platí $I_\phi \in X$ pro každé $\phi \in C_c^+(G)$. Uvažujme uzavřené podmnožiny X definované jako

$$K(V) = \overline{\{I_\phi;\ \operatorname{supp}\phi \subset V\}}^X, \quad V \in \tau(0).$$

Povšimněme si, že systém $\{K(V);\ V \in \tau(0)\}$ má konečnou průnikovou vlastnost, neboť

$$K\left(\bigcap_{j=1}^{n} V_j\right) \subset \bigcap_{j=1}^{n} K(V_j).$$

Existuje tedy $I \in \bigcap\{K(V);\ V \in \tau(0)\}$. Pak pro každé $V \in \tau(0)$ a $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(G)$ existuje $\phi \in C_c^+(G)$ splňující $\operatorname{supp} \phi \subset V$ takové, že $|I(f_j) - I_\phi(f_j)| < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$. Dle vlastností dokázaných o I_ϕ (Krok 2 a 4) tak $I : C_c^+(G) \to (0, \infty)$ komutuje s translacemi, sčítáním a násobením kladným číslem.

Krok 6. Je-li nyní $f \in C_c(G)$, lze f psát jako $f = g - h$, kde $g, h \in C_c^+(G)$. Pokud $f = g' - h'$ pro $g', h' \in C_c^+(G)$, pak $g + h' = h + g'$, a tedy $I(g) + I(h') = I(h) + I(g')$. Vzorec $I(f) = I(g) - I(h)$ tak dobře definuje nenulové lineární nezáporné translačně invariantní zobrazení na $C_c(G)$. Hledaná míra m je nyní dána pomocí Rieszovy věty o reprezentaci 15.105.

Krok 7. Nyní dokážeme, že Haarova míra je kladná na neprázdných otevřených množinách a $\int_G f \,\mathrm{d}m > 0$ pro každé $f \in C_c^+(G)$.

Nechť m je zkonstruovaná míra. Nechť $U \subset G$ je neprázdná otevřená množina. Předpokládejme, že $m(U) = 0$. Pak pro libovolný kompakt $K \subset G$ existuje konečná množina $F \subset K$ taková, že $K \subset F + U$. Z translanční invariance m pak plyne $m(K) = 0$. Díky regularitě míry m dostáváme $m = 0$, což je spor.

Je-li $f \in C_c^+(G)$ dána, pak $U = \{x \in G;\ f(x) > \frac{1}{2}\|f\|\}$ je neprázdná otevřená, takže

$$\int_G f \,\mathrm{d}m > \frac{1}{2}\|f\| m(U) > 0.$$

Krok 8. Jsou-li m, m' Haarovy míry na G, pak existuje $c \in (0, \infty)$ splňující $m' = cm$.

Uvažujme $g \in C_c(G)$ splňující $\int g \,\mathrm{d}m = 1$. Položme $c = \int_G g(-x) \,\mathrm{d}m'(x)$. Pak pro libovolné $f \in C_c(G)$ platí

$$\begin{aligned}
\int_G f \,\mathrm{d}m' &= \int_G g(y) \,\mathrm{d}m(y) \int_G f(x) \,\mathrm{d}m'(x) = \int_G \int_G g(y) f(x + y) \,\mathrm{d}m'(x) \,\mathrm{d}m(y) \\
&= \int_G \int_G g(y) f(x + y) \,\mathrm{d}m(y) \,\mathrm{d}m'(x) = \int_G \int_G g(z - x) f(z) \,\mathrm{d}m(z) \,\mathrm{d}m'(x) \\
&= \int_G \int_G f(z) g(z - x) \,\mathrm{d}m'(x) \,\mathrm{d}m(z) = c \int_G f(z) \,\mathrm{d}m(z).
\end{aligned}$$

(Připomeňme, že integrandy $(x, y) \mapsto g(y) f(x + y)$ a $(z, x) \mapsto g(z - x) f(z)$ jsou prvky $C_c(G \times G)$, a tedy lze použít Fubiniovu větu.) Tedy $m' = cm$.

□

POZNÁMKA 11. Pro každou borelovskou $E \subset G$ platí $m(-E) = m(E)$. Vskutku, položíme-li totiž $m'(B) = m(-B)$, obdržíme Haarovu míru na G, a tedy existuje $c \in (0, \infty)$ splňující $m' = cm$. Uvažujme relativně kompaktní a symetrickou množinu $E \in \tau(0)$. Pak $cm(E) = m'(E) = m(-E) = m(E)$, a tedy $c = 1$.

TVRZENÍ 12. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $1 \le p < \infty$. Pak pro každou funkci $f \in L_p(G)$ je zobrazení $x \mapsto f_x$, kde $f_x(y) = f(y - x)$ pro $y \in G$, stejnoměrně spojité z G do $L_p(G)$.*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_p(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nalezneme $g \in C_c(G)$ takové, že $\|f - g\|_p < \varepsilon$ (Věta 15.107). Označme $K = \operatorname{supp} g$ a nechť U je kompaktní okolí 0. Pak $m(K + U) < \infty$. Zvolme symetrické V okolí 0 takové, že $V \subset U$ a $|g(x) - g(y)| < \varepsilon(m(K + U))^{-1}$ pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in V$. Pak pro $x \in V$ platí $\operatorname{supp} g_x \subset K + U$ a

$$\begin{aligned}
\|g - g_x\|_p &= \left(\int_G |g(z) - g(z - x)|^p \,\mathrm{d}m(z)\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{K+U} \varepsilon^p (m(K + U))^{-p} \,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \varepsilon(m(K + U))^{-1} m(K + U) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pak pro $x \in V$ máme

$$\|f - f_x\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_x\|_p + \|g_x - f_x\|_p \leq 3\varepsilon,$$

jelikož $\|g_x - f_x\|_p = \|(g - f)_x\|_p = \|f - g\|_p$.

Konečně pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in V$ platí

$$\|f_x - f_y\|_p = \|(f - f_{y-x})_x\|_p = \|f - f_{y-x}\|_p \leq 3\varepsilon.$$

□

PŘÍKLADY 13. (a) Grupa $\mathbb{Z}_n$ může být vybavena mírou m, která každému bodu z $\mathbb{Z}_n$ přiřadí $\frac{1}{n}$.

(b) Míra μ_d na $\mathbb{R}^d$ je Haarova míra na grupě $\mathbb{R}^d$.

(c) Grupa $\mathbb{T}$ má Haarovu míru danou pomocí formule $\int_{\mathbb{T}} f \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$, $f \in C(\mathbb{T})$.

(d) Grupa $\mathbb{Z}$ má jako Haarovu míru míru počítací.

(e) Grupa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ má Haarovu míru danou pomocí formule $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f \, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$, $f \in C_c(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

(f) Na grupě $(0, +\infty)$ vezměme restrikci Haarovy míry z bodu (e).

DŮKAZ. Tvrzení (a)–(d) jsou jasná.

(e) Je-li $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in G$ a $f \in C_c(G)$, pak díky větě o substituci máme

$$\int_G f(ax) \, \mathrm{d}m(x) = \int_G \frac{f(ax)}{x} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_G \frac{f(y)}{y} \, \mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_G f(y) \, \mathrm{d}m(y).$$

Tedy m je translačně invariantní míra na G, a tím pádem Haarova.

(f) plyne z (e).

□

2. Konvoluce a Banachova algebra $L_1(G)$

DEFINICE 14. Nechť m je Haarova míra na komutativní lokálně kompaktní grupě G a $f, g\colon G \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(x - y) \, \mathrm{d}m(y)$$

pro taková $x \in G$, pro která integrál konverguje.

VĚTA 15. *Nechť m je Haarova míra na komutativní lokálně kompaktní Hausdroffově grupě G a $f, g, h\colon G \to \mathbb{K}$.*

(a) Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.
(b) Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.
(c) Pokud $f_1, g_1\colon G \to \mathbb{K}$ splňují $f_1 = f$ skoro všude a $g_1 = g$ skoro všude, pak $f * g$ má stejný definiční obor jako $f_1 * g_1$ a rovnají se na něm.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in G$ a $\varphi\colon G \to G$ je definováno jako $\varphi(z) = x - z$. Pak φ je m-invariantní, tj. $m(\varphi(E)) = m(E)$ pro každou $E \subset G$ měřitelnou. Proto $\int_G h \, \mathrm{d}m = \int_G h \circ \varphi \, \mathrm{d}m$ pro každou integrovatelnou h. Dostáváme tak

$$\int_G f(y) g(x - y) \, \mathrm{d}m(y) = \int_G f(\varphi(z)) g(x - \varphi(z)) \, \mathrm{d}m(z) = \int_G g(z) f(x - z) \, \mathrm{d}m(z),$$

pokud jeden z integrálů konverguje. Odtud již tvrzení (a) plyne.

(b) Nechť $x \in G$ je takové, že $f * g(x)$ a $f * h(x)$ jsou definovány. Pak

$$\int_G f(y) \cdot (g+h)(x-y) \, \mathrm{d}m(y) = \int_G f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y) \, \mathrm{d}m(y) = \\ = \int_G f(y)g(x-y) \, \mathrm{d}m(y) + \int_G f(y)h(x-y) \, \mathrm{d}m(y),$$

a tedy $f * (g+h)(x) = f * g(x) + f * h(x) = \big(f * g + f * h\big)(x)$. Druhá rovnost plyne z právě dokázané rovnosti a tvrzení (a).

(c) Nechť $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ je rovna 0 skoro všude. Pak pro každou $g\colon G \to \mathbb{K}$ a $x \in G$ platí, že funkce $y \mapsto \varphi(y)g(x-y)$ je rovna 0 skoro všude. Proto $\varphi * g = 0$ na G. Z (a) pak dostáváme, že $g * \varphi = 0$ na G. Proto pro každé $x \in G$ splňující, že $(f * g)(x)$ je definována, platí

$$(f_1 * g_1)(x) = ((f_1 - f) * g_1)(x) + (f * (g_1 - g))(x) + (f * g)(x) = (f * g)(x).$$

Prohozením rolí f a f_1, respektive g a g_1, dostáváme tvrzení.

□

TVRZENÍ 16. *Nechť G je lokálne kompaktní komutativní Hausdorffova topologická grupa, $p \in [1, \infty)$ a $f : G \to \mathbb{K}$ je v $L_p(G)$. Pak existuje σ-kompaktní množina $K \subset G$ a borelovská $g\colon G \to \mathbb{K}$ takové, že*

- $g = 0$ *na* $G \setminus K$,
- $g = f$ *skoro všude.*

DŮKAZ. Jelikož je $f \in L_p(G)$, máme pro každé $\varepsilon > 0$ odhad

$$m\left(\{x \in G;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \int_{\{x \in G;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}} 1 \, \mathrm{d}m \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_G |f|^p \, \mathrm{d}m \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_G |f|^p \, \mathrm{d}m < \infty.$$

Tedy je množina

$$A = \{x \in G;\ 0 < |f(x)| < +\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in G;\ \frac{1}{n} \leq |f(x)| < +\infty\right\}$$

σ-konečná. Proto z vnitřní regularity existuje neklesající posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ splňující $K_0 = \emptyset$ a $m(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mu_n = m\restriction_{K_n}$ těsná konečná míra, takže je dle Lemmatu 15.80 zevně regulární. Ze σ-konečnosti míry $\mu = m\restriction_{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}$ nyní plyne její zevní regularita.

Vskutku, je-li $A \subset K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ μ-měřitelná a konečné míry, pro $\varepsilon > 0$ existují otevřené $G_n \subset G$ splňující $m(G_n) < m(A \cap (K_n \setminus K_{n-1})) + \varepsilon 2^{-n}$. Pak $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je otevřená a splňuje

$$m(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) < \sum_{n=1}^{\infty} (m(A \cap (K_n \setminus K_{n-1})) + \varepsilon 2^{-n}) = m(A) + \varepsilon.$$

Tedy $G \cap K \supset A$ a $\mu(G \cap K) = m(G \cap K) \leq m(G) \leq m(A) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon$. Proto je μ σ-konečná zevně regulární míra na K

Nyní pomocí Luzinovy věty 15.85 sestrojíme neklesající posloupnost uzavřených množin $H_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$ takovou, že $\mu(K \setminus H_n) < \frac{1}{n}$ a $f\restriction_{H_n}$ je spojitá. Pak $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ je borelovská množina splňující $\mu(K \setminus H) \leq \mu(K \setminus H_n) \to 0$. Navíc je $g = \chi_H f$ borelovská na G, neboť $g_n = f\chi_{H_n}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou borelovské na G a $g_n \to g$ na G. Funkce g je tak naše hledaná funkce.

□

VĚTA 17. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pro $f, g \in L_1(G)$ definujme*

$$(f * g)(x) = \int_G \widetilde{f}(y)\widetilde{g}(x-y) \, \mathrm{d}m(y), \quad x \in G,$$

kde $\widetilde{f}$ je borelovský reprezentant f a $\widetilde{g}$ je borelovský reprezentant g. Dále položme

$$f^*(x) = \overline{\widetilde{f}(-x)}, \quad x \in G, \quad f \in L_1(G),$$

kde $\widetilde{f}$ je reprezentant f.

Pak jsou tyto operace dobře definovány a $(L_1(G), *)$ *je komutativní Banachova algebra s izometrickou involucí.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Nejprve si uvědomme, že pokud $f_1 = f_2$ a $g_1 = g_2$ skoro všude, pak $(f_1 * g_1)(x) = (f_2 * g_2)(x)$ (viz Věta 15(c)). Tedy operace konvoluce nezávisí na výběru reprezentantů. Dále, pokud $f, g \in L_1(G)$ jsou borelovské komplexní takové, že $S_f = \{x \in G;\ |f(x)| \neq 0\}$ a $S_g = \{x \in G;\ |g(x)| \neq 0\}$ jsou σ-kompaktní (vizte Tvrzení 16), pak

$$\int_G \left(\int_G |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}m(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

(Fubiniova věta 15.118(a) lze použít, neboť funkce $\psi(x, y) = |f(y)g(x-y)|$ je nezáporná, reálná, borelovská na $G \times G$ a množina $\{(x, y) \in G \times G;\ \psi(x, y) \neq 0\}$ lze pokrýt σ-kompaktními množinami $(S_g + S_f) \times S_f$. Jelikož dvojnásobný integrál je konečný, je ψ $m \times m$-integrovatelná na $G \times G$.)

Tedy funkce $x \mapsto \int_G f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}m(y)$ konverguje pro skoro všechna $x \in G$ a $f * g \in L_1(G)$ (vizte Větu 15.118(a)). Další aplikací Fubiniovy věty pak odvodíme nerovnost $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Krok 2. Linearita, distributivita a komutativita konvoluce na $L_1(G)$ plyne z Věty 15. Ověřme asociativitu. Nechť tedy $f, g, h \in L_1(G)$ jsou borelovské, komplexní a nulové mimo σ-kompaktní množinu. Nechť φ je borelovská komplexní funkce nulová mimo σ-kompaktní množinu, která je rovna $f * g$ skoro všude. Pak $\varphi(y) = \int_G f(z)g(y-z)\,\mathrm{d}m(z)$ pro skoro všechny $y \in G$. Uvažujme $x \in G$, pro které je $\varphi * h(x)$ definovaná (takových $x \in G$ je množina plné míry). Pak pro tato x platí

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \int_G \varphi(y)h(x-y)\,\mathrm{d}m(y) = \int_G \left(\int_G f(z)g(y-z)\,\mathrm{d}m(z) \right) h(x-y)\,\mathrm{d}m(y) = \\
&= \int_G \left(\int_G f(z)g(y-z)h(x-y)\,\mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(z) = \\
&= \int_G f(z) \left(\int_G g(y-z)h(x-y)\,\mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(z) = \\
&= \int_G f(z) \left(\int_G g(u)h(x-z-u)\,\mathrm{d}m(u) \right) \mathrm{d}m(z) = \\
&= \int_G f(z) g * h(x-z)\,\mathrm{d}m(z) = f * (g * h)(x).
\end{aligned}$$

(Ověření třetí rovnosti výpočtu je analogické jako v důkazu (a). Vskutku, funkce $\psi(y, z) = |f(z)g(y-z)h(x-y)|$ je reálná nezáporná borelovská na $G \times G$ a nulová mimo σ-kompaktní množinu. Tedy ψ splňuje na $G \times G$ předpoklady Věty 15.118(a).)

Tím máme ověřeno, že $(L_1(G), *)$ je komutativní Banachova algebra.

Krok 3. Ověřme vlastnosti involuce. Nejprve si uvědomme, že f^* je měřitelná, pokud $f : G \to \mathbb{K}$ měřitelná. Dále $f^* = g^*$ skoro všude, pokud $f = g$ skoro všude. Tedy f^* nezáleží na výběru reprezentanta. Komplexně sdružená linearita involuce je jasná. Pokud $f, g \in L_1(G)$ jsou dány, pak

$$\begin{aligned}
(g^* * f^*)(x) &= (f^* * g^*)(x) = \int_G f^*(y)g^*(x-y)\,\mathrm{d}m(y) = \int_G \overline{f(-y)g(y-x)}\,\mathrm{d}m(y) \\
&= \overline{\int_G f(-y)g(y-x)\,\mathrm{d}m(y)} = \overline{\int_G f(y)g(-y-x)\,\mathrm{d}m(y)} \\
&= \overline{(f * g)(-x)} = (f * g)^*(x).
\end{aligned}$$

Konečně

$$\|f^*\| = \int_G |\overline{f(-x)}|\,\mathrm{d}m(x) = \int_G |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \|f\|,$$

a tedy je involuce izometrie.

□

VĚTA 18. *Nechť G je lokálně kompaktní komutativní Hausdorffova topologická grupa a $f, g\colon G \to \mathbb{K}$ borelovské.*

(a) *Pokud $f \in L_1(G)$ a $g \in L_\infty(G)$, pak $f * g$ je omezená a stejnoměrně spojitá na G.*

(b) *Pokud $f, g \in C_c(G)$, pak* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ *a $f * g \in C_c(G)$.*

DŮKAZ. (a) Povšimněme si, že pro každé $x \in G$ je funkce $y \mapsto f(y)g(x-y)$ borelovská a v $L_1(G)$, tedy $f * g$ je definovaná na G. Pro každé $x \in G$ platí odhad $|f * g(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$, tj. $f * g$ je dobře definované omezená funkce. Jelikož pro $x, z \in G$ platí

$$|(f * g)(x) - (f * g)(z)| = |(g * f)(x) - (g * f)(z)| \le \int_G |f(x-y) - f(z-y)||g(y)| \, \mathrm{d}m(y) \le$$
$$\le \|f_{-x} - f_{-z}\|_1 \|g\|_\infty,$$

z Věty 12 pak plyne stejnoměrná spojitost $f * g$.

(b) Pokud $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, pak $f(y)g(x-y) \neq 0$ pouze tehdy, když $y \in \operatorname{supp} f$ a $x - y \in \operatorname{supp} g$, tj. $x = (x-y) + y \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Tedy $f * g(x) = 0$. Z (a) pak plyne $f * g \in C_c(G)$.

□

TVRZENÍ 19. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Systém

$$\{g_U = \frac{1}{m(U)} \chi_U;\ U \text{ je relativně kompaktní okolí } 0\}$$

je aproximativní jednotka v $L_1(G)$, tj. pro každé $f \in L_1(G)$ a $\varepsilon > 0$ existuje U relativně kompaktní okolí 0 takové, že $\|f - f * g_V\| < \varepsilon$ pro každé V okolí 0 splňující $V \subset U$.

(b) Grupa G diskrétní právě tehdy, když $L_1(G)$ má jednotku. V takovém případě je pak jednotka $L_1(G)$ rovna $\chi_{\{0\}}$. (Předpokládáme, že m je normalizovaná tak, aby $m(\{0\}) = 1$.)

DŮKAZ. (a) Nechť $f \in L_1(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nalezneme $g \in C_c(G)$ splňující $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ a zvolíme lokálně kompaktní $W \in \tau(0)$. Vezměme $\varepsilon' > 0$ splňující $\varepsilon'(m(K + W)) < \varepsilon$. Nechť $U \subset W$ je takové lokálně kompaktní okolí 0, že $|g(x) - g(y)| < \varepsilon'$ pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$. Pak pro V okolí 0 splňující $V \subset U$ platí

$$|g(x) - (g * g_V)(x)| = |\int_G g(x) g_V(y) \, \mathrm{d}m(y) - \int_G g_V(y) g(x-y) \, \mathrm{d}m(y)|$$
$$\le \int_V |g(x) - g(x-y)| g_V(y) \, \mathrm{d}m(y) \le \varepsilon', \quad x \in G.$$

Jelikož $\operatorname{supp}(g * g_V) \subset K + V \subset K + U$, platí

$$\|g - g * g_V\|_1 = \int_G |g - g * g_V| \, \mathrm{d}m \le \varepsilon'(m(K + W)) < \varepsilon.$$

Pak pro $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$ platí

$$\|f - f * g_V\|_1 \le \|f - g\|_1 + \|g - g * g_V\|_1 + \|(g - f) * g_V\|_1 \le \varepsilon + \varepsilon + \|g - f\|_1 \|g_V\|_1 \le 3\varepsilon.$$

(b) Pokud je G diskrétní, je zjevně $\chi_{\{0\}}$ jednotka $L_1(G)$.

Předpokládejme nyní, že $h \in L_1(G)$ je jednotka. Vezměme libovolný kompakt $K \subset G$ neobsahující 0. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kompaktní $U \in \tau(0)$ takové, že $U \cap K = \emptyset$ a $\|h - h * g_U\| < \varepsilon$. Pak

$$\varepsilon > \|h - h * g_U\| = \|h - g_U\| = \int_G |h - g_U| \, \mathrm{d}m \ge \int_K |h - g_U| \, \mathrm{d}m = \int_K |h| \, \mathrm{d}m.$$

Jelikož ε bylo libovolné, dostáváme $\int_K |h| \, \mathrm{d}m = 0$, a tedy $h = 0$ na K. Proto $h = 0$ na $G \setminus \{0\}$.

Protože $h \neq 0$, nutně platí $m(\{0\}) > 0$. Pak pro libovolný kompakt $K \subset G$ platí

$$+\infty > m(K) = \sum_{x \in K} m(\{x\}) = \sum_{x \in K} m(\{0\}),$$

a tedy K je konečný. Nechť $U \in \tau(0)$ je otevřené relativně kompaktní okolí. Pak U je konečná množina, a tedy i $\{0\} = U \setminus (U \setminus \{0\})$ je otevřená množina. Proto je G diskrétní.

□

3. Vztah $\Delta(L_1(G))$ a duální grupy

DEFINICE 20. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\gamma\colon G \to \mathbb{T}$ je charakter, pokud γ je grupový homomorfismus, tj. $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ pro každé $x, y \in G$. Symbolem $\widehat{G}$ rozumíme množinu všech spojitých charakterů a této množině říkáme duální grupa. Uvažujme na $\widehat{G}$ bodové násobení, tj. $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$, kde $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ a $x \in G$.

LEMMA 21. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\widehat{G}$ je též grupa, přičemž jednotková funkce je jednotka $\widehat{G}$, $\gamma(0) = 1$ pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ a*

$$\gamma(-x) = (\gamma^{-1})(x) = (\gamma(x))^{-1} = \overline{\gamma(x)}, \quad x \in G, \gamma \in \widehat{G}.$$

Dále je každý charakter stejnoměrně spojitý na G.

DŮKAZ. Jednotková funkce je zjevně jednotkou $\widehat{G}$. Dále $(\gamma(0))^2 = \gamma(0+0) = \gamma(0)$, a tedy $\gamma(0) = 1$. Konečně ověříme, že pro $x \in G$ a $\gamma \in \widehat{G}$ platí

$$1 = \gamma(0) = \gamma(x - x) = \gamma(x)\gamma(-x),$$

z čehož plyne požadovaný závěr.

Pro $\gamma \in \widehat{G}$ a $x, y \in G$ dále platí

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| = |\gamma(y)||\gamma(x-y) - 1| = |\gamma(x-y) - 1|.$$

Zvolíme-li tedy pro dané $\varepsilon > 0$ okolí $U \in \tau(0)$ takové, že $|\gamma(z) - 1| < \varepsilon$ pro $z \in U$, pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$ platí $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon$.

□

VĚTA 22. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $A = L_1(G)$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ existuje právě jedno $\gamma \in \widehat{G}$ takové, že $\varphi(f) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)$, $f \in A$.
(b) Je-li $\gamma \in \widehat{G}$, pak zobrazení $f \mapsto \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)$ je v $\Delta(A)$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je dáno. Jelikož je $\varphi \in B_{A^*}$, existuje jednoznačně určený prvek $\phi \in L_\infty(G)$ splňující $\varphi(f) = \int_G f\phi\,\mathrm{d}m$ a $\|\phi\|_\infty = \|\varphi\|$ (vizte Větu 15.106). Nechť $f, g \in A$ jsou libovolné. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že ϕ, f, g jsou borelovské komplexní a f, g jsou nulové mimo σ-kompaktní množinu $K \subset G$. Pak

$$\begin{aligned}\int_G \varphi(f)g(y)\phi(y)\,\mathrm{d}m(y) &= \varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f*g) = \varphi(g*f) = \int_G (g*f)(x)\phi(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_G \left(\int_G g(y)f(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\right)\phi(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_G g(y)\left(\int_G f(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}m(y)\\ &= \int_G g(y)\varphi(f_y)\,\mathrm{d}m(y).\end{aligned}$$

(Fubinova věta 15.118 lze použít, neboť $\psi(x,y) = g(y)f(x-y)\phi(x)$ je borelovská komplexní funkce na $G \times G$, která

- je nulová mimo σ-kompaktní podmnožinu $(K+K) \times K \subset G \times G$,

- platí

$$\int_G \left(\int_G |\psi(x,y)| \, \mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}m(y) \le \|g\| \|f\| < +\infty.)$$

Jelikož tato rovnost platí pro každé $g \in A$, dostáváme pro každé $f \in A$ rovnost

$$\varphi(f)\phi(y) = \varphi(f_y) \quad \text{pro skoro všechna } y. \tag{11}$$

Zvolme $f \in A \setminus \operatorname{Ker}\varphi$. Jelikož je dle Tvrzení 12 zobrazení $y \mapsto f_y$ spojité, dostáváme, že ϕ má spojitého reprezentanta. Lze tedy předpokládat, že ϕ je spojité, a že tedy (11) platí pro všechna $y \in G$.

Z rovnosti (11) obdržíme

$$\varphi(f)\phi(x+y) = \varphi(f_{x+y}) = \varphi((f_x)_y) = \varphi(f_x)\phi(y) = \varphi(f)\phi(x)\phi(y), \quad x, y \in G, f \in A,$$

z čehož plyne vztah $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$, $x, y \in G$. Jelikož $\|\phi\|_\infty \le 1$, podobně jako v Lemmatu 21 odvodíme, že $\phi(0) = 1$ (φ je nenulové), $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$, a že tedy $\operatorname{Rng}\phi \subset \mathbb{T}$. Tedy $\phi \in \widehat{G}$. Položíme-li nyní $\gamma(x) = \overline{\phi(x)}$, $x \in G$, obdržíme požadovaný charakter.

(b) Nechť $\gamma \in \widehat{G}$ je dáno. Nechť $\varphi \in A^*$ je určeno funcí γ, tj. $\varphi(f) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}m(x)$, $f \in A$. Pro libovolné $f, g \in A$ uvažujme jejich borelovské komplexní modifikace nulové mimo σ-kompaktní množinu. Pro ty pak platí

$$\begin{aligned}
\varphi(f * g) &= \int_G (f * g)(x)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}m(x) = \int_{G \times G} f(y)g(x-y)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}(m \times m)(x,y) \\
&= \int_{G \times G} f(y)g(x-y)\overline{\gamma(y + (x-y))} \, \mathrm{d}(m \times m)(x,y) \\
&= \int_G f(y)\overline{\gamma(y)} \left(\int_G g(x-y)\overline{\gamma(x-y)} \, \mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}m(y) \\
&= \int_G f(y)\overline{\gamma(y)} \left(\int_G g(x)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}m(y) \\
&= \left(\int_G f(y)\overline{\gamma(y)} \, \mathrm{d}m(y) \right) \left(\int_G g(x)\overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}m(x) \right) \\
&= \varphi(f)\varphi(g).
\end{aligned}$$

Jelikož γ je různá od 0 na G, je $\varphi \neq 0$. Tedy $\varphi \in \Delta(A)$.

□

4. Fourierova transformace

DEFINICE 23. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak Fourierova transformace funkce $f \in L_1(G)$ je funkce $\widehat{f} \colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ definovaná jako

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(y)\overline{\gamma(y)} \, \mathrm{d}m(y), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

VĚTA 24. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $A = L_1(G)$. Nechť $\Gamma \colon A \to C_0(\Delta(A))$ je Gelfandova transformace a nechť F značí Fourierovu transformaci. Pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ označme γ_φ jednoznačně určený prvek $\widehat{G}$ daný Větou 22. Pak*

$$(\Gamma f)(\varphi) = (Ff)(\gamma_\varphi), \quad \varphi \in \Delta(A), \quad f \in A.$$

Dále platí následující tvrzení:

(a) *Zobrazení F je $*$-homomorfismus A do $\ell_\infty(\widehat{G})$ o normě nejvýše* 1.

(b) *Množina* Rng F *je podalgebra* $\ell_\infty(\widehat{G})$ *uzavřená na komplexní sdružení a oddělující body* $\widehat{G}$. *Dále pro každé* $f \in A$ *a* $\gamma_0 \in \widehat{G}$, $x_0 \in G$, *platí*

$$\widehat{f_{-x_0}}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma) \quad a \quad \widehat{\gamma_0 f}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma\gamma_0^{-1}), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Speciálně jsou funkce

$$\gamma \mapsto \widehat{f}(\gamma\gamma_0^{-1}) \quad a \quad \gamma \mapsto \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma), \qquad \gamma \in \widehat{G},$$

obsaženy v Rng F.

(c) *Pro* $f \in A$ *a* $\gamma \in \widehat{G}$ *platí*

$$(f * \gamma)(x) = \gamma(x)\widehat{f}(\gamma) \quad a \quad \widehat{f}(\gamma) = (f * \gamma)(0), \qquad x \in G, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

DŮKAZ. Rovnost $\Gamma = F$ je dokázána v Větě 22.

(a) Zachovávání algebraických operací a odhad normy F plyne z Věty 9.93. Dále pro $f \in A$ platí

$$\begin{aligned}(Ff^*)(\gamma) &= \int_G f^*(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_G \overline{f(-x)\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \overline{\int_G f(-x)\gamma(x)\,\mathrm{d}m(x)}\\ &= \overline{\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)} = \overline{Ff(\gamma)},\end{aligned}$$

a F tedy zachovává involuci.

(b) Zřejmě je Rng F podalgebra $\ell_\infty(\widehat{G})$ oddělující body (opět vizte Větu 9.93) a díky (a) je uzavřená na komplexní sdružení. Nechť $f \in A$, $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a $x_0 \in G$ jsou dány. Položme $g(x) = \gamma_0(x)f(x)$, $x \in G$, a počítejme

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\gamma) &= \int_G f(x)\gamma_0(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x)\overline{(\gamma\gamma_0^{-1})(x)}\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \widehat{f}(\gamma\gamma_0^{-1}), \quad \gamma \in \widehat{G}.\end{aligned}$$

Dále pro funkci $g = f_{-x_0}$ platí

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\gamma) &= \int_G f_{-x_0}(y)\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}m(y) = \int_G f(y + x_0)\gamma(-y)\,\mathrm{d}m(y) = \int_G f(z)\gamma(x_0 - z)\,\mathrm{d}m(z)\\ &= \gamma(x_0)\int_G f(z)\overline{\gamma(z)}\,\mathrm{d}m(z) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.\end{aligned}$$

(c) Pro $f \in A$ a $\gamma \in \widehat{G}$ máme

$$(f * \gamma)(x) = \int_G f(y)\gamma(x - y)\,\mathrm{d}m(x) = \gamma(x)\int_G f(y)\gamma(-y)\,\mathrm{d}m(y) = \gamma(x)\widehat{f}(\gamma), \quad x \in G.$$

Druhá rovnost pak ihned plyne z první.

□

TVRZENÍ 25. *Nechť* G *je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a* $A = L_1(G)$. *Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li G *diskrétní, je* $\Delta(A)$ *je kompaktní.*

(b) Je-li G *kompaktní, je* $\Delta(A)$ *je diskrétní.*

DŮKAZ. (a) Je-li G diskrétní, má A jednotku, a tedy je $\Delta(A)$ kompaktní (vizte Větu 9.76(b)).

(b) Nechť G je kompaktní. Předpokládejme, že m je normalizována tak, aby $m(G) = 1$.

Krok 1. Pak funkce $e(x) = 1$, $x \in G$ je v A a

$$(e * e)(x) = \int_G e(y)e(x - y)\,\mathrm{d}m(y) = m(G) = 1 = e(x), \quad x \in G.$$

Uvažujme libovolné $\varphi \in \Delta(A)$. Pak $\varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e)^2$. Tedy $\varphi(e) \in \{0, 1\}$. Vezmeme charakter $\gamma \in \widehat{G}$ odpovídající φ, který je dán Větou 22. Předpokládejme, že $\varphi(e) = 1$. Pak pro každé $x_0 \in G$ platí

$$1 = \varphi(e) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G \gamma(-x - x_0 + x_0)\,\mathrm{d}m(x) = \gamma(x_0) \int_G \gamma(-x - x_0)\,\mathrm{d}m(x)$$
$$= \gamma(x_0) \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \gamma(x_0)\varphi(e) = \gamma(x_0).$$

Tedy odpovídající charakter γ je roven e.

Krok 2. Je-li nyní $\varphi_0 \in \Delta(A)$ dáno, nechť γ_0 je jemu odpovídající charakter. Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je libovolné a nechť γ je jemu odpovídající charakter. Položme $\delta(x) = \gamma_0(x)\gamma(-x)$, $x \in G$. Pak $\delta \in \widehat{G}$ a pro funkci $\gamma_0 \in A$ platí

$$\widehat{\gamma_0}(\varphi) = \varphi(\gamma_0) = \int_G \gamma_0(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G \delta(x)\,\mathrm{d}m(x).$$

Pokud $\varphi = \varphi_0$, tj. $\delta = e$, dostáváme $\widehat{\gamma_0}(\varphi_0) = 1$. Pokud $\varphi \neq \varphi_0$, charakter δ není roven e, a tedy $\widehat{\gamma_0}(\varphi) = 0$ dle prvního kroku. Protože je funkce $\widehat{\gamma_0}$ spojitá na $\Delta(A)$ a $\{\varphi_0\} = \{\varphi \in \Delta(A);\ |\widehat{\gamma_0}(\varphi)| > 0\}$, je množina $\{\varphi_0\}$ otevřená. Tedy je $\Delta(A)$ diskrétní.

□

5. Duální topologická grupa

DEFINICE 26. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Uvažujme na $\widehat{G}$ topologii τ_K lokálně stejnoměrné konvergence. Přesněji, uvažujme množiny

$$U_{K,\varepsilon} = \{\gamma \in \widehat{G};\ |\gamma(x) - 1| < \varepsilon, x \in K\}, \quad K \subset G \text{ kompaktní}, \varepsilon > 0. \tag{12}$$

Množina $V \subset \widehat{G}$ je pak τ_K-otevřená, pokud pro každé $\gamma \in V$ existuje množina $U_{K,\varepsilon}$ výše uvedeného typu splňující $\gamma U_{K,\varepsilon} \subset V$.

TVRZENÍ 27. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak $(\widehat{G}, \tau_K)$ je topologická grupa.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Ukažme nejprve, že τ_K je topologie. K tomu stačí ověřit, že pro dvě množiny U_{K_1,ε_1} a U_{K_2,ε_2} typu (12) existuje množina $U_{K,\varepsilon}$ splňující $U_{K,\varepsilon} \subset U_{K_1,\varepsilon_1} \cap U_{K_2,\varepsilon_2}$. Zjevně však stačí položit $K = K_1 \cup K_2$ a $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Krok 2. Ověříme, že grupové operace jsou na $\widehat{G}$ spojité. Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je pevné a $U = \gamma_0^{-1} U_{K,\varepsilon}$ je dané okolí γ_0^{-1}. Uvažujme okolí γ_0 tvaru $\gamma_0 U_{-K,\varepsilon}$. Pak pro γ z tohoto okolí tvaru $\gamma = \gamma_0\delta$, kde $\delta \in U_{K,\varepsilon}$, platí $\gamma^{-1} = \gamma_0^{-1}\delta^{-1} \in U$. To plyne z toho, že

$$|\delta^{-1}(x) - 1| = |\delta(-x) - 1| < \varepsilon, \quad x \in K.$$

K ověření spojitosti násobení uvažujme charaktery $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ a okolí bodu $\gamma_1\gamma_2$ tvaru $\gamma_1\gamma_2 U_{K,\varepsilon}$. Ověříme, že

$$\mu_1\mu_2 \in \gamma_1\gamma_2 U_{K,\varepsilon}, \quad \mu_1 \in \gamma_1 U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}, \mu_2 \in \gamma_2 U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Nechť tedy $\mu_i = \gamma_i\delta_i$ pro nějaké $\delta_i \in U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}$, $i = 1, 2$. Pak pro $x \in K$ platí

$$|\delta_1(x)\delta_2(x) - 1| = |(\delta_1(x) - 1)\delta_2(x) + (\delta_2(x) - 1)| \le |\delta_1(x) - 1||\delta_2(x)| + |\delta_2(x) - 1| < \varepsilon.$$

Tedy operace násobení $\cdot\colon \widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G}$ je spojitá.

□

LEMMA 28. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa, $A = L_1(G)$ a $f \in A$. Nechť $\phi\colon \Delta(A) \to \widehat{G}$ je zobrazení dané Větou 22. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Zobrazení*
$$(x,\varphi)\mapsto \widehat{f_x}(\phi(\varphi)),\quad (x,\varphi)\in G\times\Delta(A),$$
spojité na $G\times\Delta(A)$.

(b) *Zobrazení*
$$(x,\varphi)\mapsto (\phi(\varphi))(x),\quad (x,\varphi)\in G\times\Delta(A),$$
je spojité na $G\times\Delta(A)$.

DŮKAZ. Nechť $\Gamma\colon A\to C_0(\Delta(A))$ značí Gelfandovu transformaci. Připomeňme, že
$$\widehat{f_x}(\phi(\varphi))=\int_G f_x(y)(\phi(\varphi))(-y)\,\mathrm{d}m(y)=\varphi(f_x)=(\Gamma f_x)(\varphi),\quad \varphi\in\Delta(A).$$

(a) Nechť $x_0\in G$ a $\varphi_0\in\Delta(A)$ jsou dány. Nechť $\varepsilon>0$ je libovolné. Díky Tvrzení 12 a spojitosti funkce Γf_{x_0} na $\Delta(A)$ existuje okolí U bodu x_0 a okolí V funkcionálu φ_0 takové, že
$$\|f_x-f_{x_0}\|_1\varepsilon,\ x\in U,\quad \text{a}\quad |(\Gamma f_{x_0})(\varphi)-(\Gamma f_{x_0})(\varphi_0)|<\varepsilon, vp\in V.$$
Pak
$$\begin{aligned}|\widehat{f_x}(\phi(\varphi))-\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))|&\le|\widehat{f_x}(\phi(\varphi))-\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi))|+|\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi))-\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))|\\&=|\widehat{f_x-f_{x_0}}(\phi(\varphi))|+|\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi))-\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))|\\&=|(\Gamma(f_x-f_{x_0}))(\varphi)|+|\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi))-\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))|\\&\le\|f_x-f_{x_0}\|_A+|\Gamma f_{x_0}(\varphi)-(\Gamma f_{x_0})(\varphi_0)|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Nechť $(x_0,\varphi_0)\in G\times\Delta(A)$ je dáno. Nalezneme $f\in A$ takové, že $(\Gamma f)(\varphi_0)=\varphi_0(f)\neq 0$. Ze spojitosti Γf plyne existence okolí U bodu φ_0, na kterém je funkce Γf nenulová. Věta 24(b) dává pro $(x,\gamma)\in G\times\widehat{G}$ rovnost
$$\gamma(x)\widehat{f}(\gamma)=\widehat{f_{-x}}(\gamma),$$
a tedy
$$(\phi(\varphi))(x)=\widehat{f_{-x}}(\phi(\varphi))((\Gamma f)(\phi(\varphi)))^{-1},\quad (x,\varphi)\in G\times U.$$
Jelikož je funkce $(x,\varphi)\mapsto((\Gamma f)(\phi(\varphi)))^{-1}$ spojitá na $G\times U$, použitím (a) dostáváme spojitost funkce $(x,\varphi)\mapsto(\phi(\varphi))(x)$ v bodě (x_0,φ_0). Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 29. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $A=L_1(G)$. Nechť $\phi\colon\Delta(A)\to\widehat{G}$ je zobrazení dané Větou 22. Pak ϕ je homeomorfismus. Speciálně je tedy $\widehat{G}$ též lokálně kompaktní komutativní Hausdorffova topologická grupa.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Nechť $\varphi_0\in\Delta(A)$ je dáno. Ozančíme $\gamma_0=\phi(\varphi_0)$ a pro $\varphi\in\Delta(A)$ pišme $\gamma_\varphi=\phi(\varphi)$ (tj. $\gamma_0=\gamma_{\varphi_0}$). Nechť $\phi(\varphi_0)U_{K,\varepsilon}$ je dané okolí $\phi(\varphi_0)$ v $(\widehat{G},\tau_K)$. Dle Lemmatu 28(b) pro každé $y\in K$ nalezneme okolí U_y body y a okolí V_y bodu φ_0 takové, že
$$|\gamma_\varphi(x)-\gamma_0(y)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad (x,\varphi)\in U_y\times V_y.$$
Vybereme konečně mnoho bodů $y_1,\dots,y_n$ z K tak, že $K\subset\bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$, a položíme $V=\bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$. Pak pro $\varphi\in V$ platí $\phi(\varphi)\in\gamma_0 U_{K,\varepsilon}$.

Vskutku, nechť $x\in K$ je libovolné. Vybereme $i\in\{1,\dots,n\}$ takové, že $x\in U_{y_i}$. Jelikož je $\varphi\in V\subset V_{y_i}$, máme
$$|\gamma_\varphi(x)-\gamma_0(x)|\le|\gamma_\varphi(x)-\gamma_0(y)|+|\gamma_0(y)-\gamma_0(x)|<\varepsilon.$$
Tedy $\gamma_\varphi=\gamma_0(\gamma_0^{-1}\gamma_\varphi)\in\gamma_0 U_{K,\varepsilon}$.

Tím je ověřena spojitost ϕ.

Krok 2. Abychom ukázali spojitost inverzního zobrazení, vezměme $\gamma_0\in\widehat{G}$ a označme $\varphi_0=\phi^{-1}(\gamma_0)$. Nechť U je dané okolí φ_0. Pak lze předpokládat, že
$$U=\{\varphi\in\Delta(A);\ |\varphi(f_i)-\varphi_0(f_i)|<\varepsilon, i=1,\dots,n\}$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$ a funkce $f_1, \dots, f_n \in A$. Nechť $M \in (0, +\infty)$ splňuje $M > \max\{\|f_i\|;\ i = 1, \dots, n\}$. Nalezneme kompakt $K \subset G$ takový, že

$$\int_{G\setminus K} |f_i|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Uvažujme okolí $\gamma_0 U_{K,\frac{\varepsilon}{4}}$. Pak $\phi^{-1}(\gamma) \in U$ pro každé $\gamma \in \gamma_0 U_{K,\frac{\varepsilon}{4M}}$.

Vskutku, je-li γ z této množiny, označme $\varphi = \phi^{-1}(\gamma)$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned}
|\varphi(f_i) - \varphi_0(f_i)| &= \Big|\int_G f_i(x)\overline{(\gamma(x) - \gamma_0(x))}\,\mathrm{d}m(x)\Big| \\
&\le \int_{G\setminus K} 2|f_i(x)|\,\mathrm{d}m(x) + \int_K |f_i(x)||\gamma(x) - \gamma_0(x)|\,\mathrm{d}m(x) \\
&\le 2\frac{\varepsilon}{4} + M\frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy i ϕ^{-1} je spojité a důkaz je tak dokončen.

□

DŮSLEDEK 30. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $F: L_1(G) \to \ell_\infty(\widehat{G})$ je Fourierova transformace. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Platí* $\operatorname{Rng} F \subset C_0(\widehat{G})$ *a* $\operatorname{Rng} F$ *je podalgebra uzavřená na komplexní sdružení a oddělující body* $\widehat{G}$.
(b) *Prostor* $\operatorname{Rng} F$ *je hustý v* $C_0(\widehat{G})$.
(c) *Pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ existuje $f \in C_c(G)$ takové, že $\widehat{f}(\gamma) \neq 0$.*

DŮKAZ. Nechť $A = L_1(G)$ a $\Gamma: A \to C_0(\Delta(A))$ značí Gelfandovu transformaci. Pak $\operatorname{Rng}\Gamma$ je podalgebra $C_0(\Delta(A))$ oddělující body $\Delta(A)$ a uzavřená na komplexní sdružení (vizte Větu 24(b)). Dle Věty 29 je zobrazení $\phi: \Delta(A) \to \widehat{G}$ surjektivní homeomorfismus a navíc dle Věty 24 platí

$$(\Gamma f)(\varphi) = (Ff)(\phi(\varphi)), \quad \varphi \in \Delta(A).$$

Proto platí (a).

Tvrzení (b) pak plyne za pomoci Stoneovy-Weierstraßovy věty z (a).

(c) Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Nechť δ značí funkci $\delta(x) = 1$, $x \in \widehat{G}$. Nalezneme funkci $f \in C_c(G)$ takovou, že $\int_G f\,\mathrm{d}m > 0$. Pak

$$\widehat{f}(\delta) = \int_G f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x)\,\mathrm{d}m(x) > 0.$$

Funkce $g: x \mapsto \gamma_0(x) f(x)$ pak dle Věty 24(b) splňuje

$$\widehat{g}(\gamma_0) = \widehat{f}(\gamma_0\gamma_0^{-1}) = \widehat{f}(\delta) > 0.$$

Tvrzení je tedy dokázáno.

□

LEMMA 31. *Nechť $\gamma: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ je nenulová spojitá funkce splňující rovnici*

$$\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y), \quad x, y \in [0, +\infty). \tag{13}$$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\gamma(x) = e^{\lambda x}$, $x \in [0, +\infty)$.

DŮKAZ. Za prvé si povšimněme, že $\gamma(0) = 1$. Vskutku, z rovnosti $\gamma(0) = \gamma(0 + 0) = (\gamma(0))^2$ plyne $\gamma(0) \in \{0, 1\}$. Kdyby $\gamma(0) = 0$, platí $\gamma(x) = \gamma(x)\gamma(0) = 0$ pro $x \in [0, +\infty)$, což by byl spor s předpokladem.

Položme nyní $\omega(x) = \int_0^x \gamma(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [0, +\infty)$. Pak ω je spojitě diferencovatelná funkce na $[0, +\infty)$ (v bodě 0 uvažujeme derivaci zprava), která není identicky rovna 0. (V tom případě by totiž $\gamma(x) = \omega'(x) = 0$ na $[0, +\infty)$, což by byl spor.) Existuje proto $\delta > 0$ takové, že $\omega(\delta) \neq 0$. Z rovnosti (13) pak plyne vztah

$$\omega(\delta)\gamma(x) = \gamma(x)\int_0^\delta \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta \gamma(x + t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \omega(x + \delta) - \omega(x), \quad x \in [0, +\infty).$$

Pravá strana této rovnosti je spojitě diferencovatelná funkce na $[0,+\infty)$, a tedy i γ má spojitou derivaci na $[0,+\infty)$. Nechť $x \in [0,+\infty)$ je pevné. Pak je funkce $y \mapsto \gamma(x+y)$ diferencovatelná na $[0,+\infty)$ a derivováním (13) podle y dostaneme rovnici

$$\gamma'(x+y) = \gamma(x)\gamma'(y), \quad y \in [0,+\infty).$$

Dosazením $y = 0$ dostáváme rovnost

$$\gamma'(x) = \gamma(x)\gamma'(0), \quad x \in [0,+\infty).$$

Existují proto $a, b \in \mathbb{C}$ takové, že $\gamma(x) = ae^{bx}$. Protože $\gamma(0) = 1$, platí $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in [0,+\infty)$.

□

PŘÍKLADY 32. (a) Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Uvažujme grupu $H = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}};\ k = 0, \dots, n-1\}$ chápanou jako podgrupu $\mathbb{T}$. Pak zobrazení $\phi\colon H \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})(j) = e^{ij\frac{2\pi k}{n}}, \quad j \in G,$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

(b) Nechť $G = \mathbb{Z}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{T}$. Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{T} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(\lambda)(j) = \lambda^j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

(c) Nechť $G = \mathbb{R}^d$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{R}^d$ s Haarovou mírou μ_d (vizte úmluvu na začátku oddílu 5.2). Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{R}^d \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(t)(x) = e^{i\langle t,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

(d) Nechť $G = \mathbb{T}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{Z}$. Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{Z} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(n)(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{T},$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

DŮKAZ. (a) Zřejmě je $\phi(H) \subset \widehat{G}$. Nechť $\gamma \in \widehat{G}$ je dáno. Položme $\lambda = \gamma(1)$, tj. $\lambda = e^{it}$ pro nějaké $t \in [0, 2\pi)$. Indukcí ověříme rovnost $\gamma(j) = \lambda^j$, $j \in G$, a tedy platí

$$1 = \gamma(0) = \gamma((n-1)+1) = \gamma(n-1)\gamma(1) = \lambda^n = e^{int}.$$

Tedy existuje $k \in \{0, \dots, n-1\}$ splňující $t = \frac{2\pi k}{n}$, tj. $\gamma \in \phi(H)$.

Nechť $k_1, k_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ jsou dány. Označme $k = (k_1 + k_2) \mod n$. Pak

$$e^{i\frac{2\pi k_1}{n}} e^{i\frac{2\pi k_2}{n}} = e^{i(k_1+k_2)\frac{2\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}.$$

Jelikož

$$\phi\left(e^{i\frac{2\pi k_1}{n}} e^{i\frac{2\pi k_2}{n}}\right)(j) = \phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})(j) = e^{ij\frac{2\pi k}{n}} \quad \text{a}$$

$$\left(\phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})\phi(e^{i\frac{2\pi k'}{n}})\right)(j) = e^{ij\frac{2\pi k_1}{n}} e^{ij\frac{2\pi k_2}{n}} = e^{ij\frac{2\pi k}{n}},$$

je ϕ grupový homomorfismus.

Zobrazení ϕ je homeomorfismus, neboť obě grupy jsou diskrétní (vizte Tvrzení 25).

(b) Zjevně platí $\phi(\mathbb{T}) \subset \widehat{\mathbb{Z}}$. Nechť $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$ je dáno. Položme $\lambda = \gamma(1)$, tj. $\lambda = e^{it}$ pro nějaké $t \in [0, 2\pi)$. Indukcí se snadno ověří, že $\gamma(j) = \lambda^j$, $j \in \mathbb{Z}$, a tedy $\phi(\lambda) = \gamma$.

Pro $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ platí

$$\phi(\lambda_1\lambda_2)(j) = (\lambda_1\lambda_2)^j = (\phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2))\, j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

je ϕ grupový homomorfismus.

Zobrazení ϕ je spojité, neboť pro posloupnost $\{\lambda_n\}$ v $\mathbb{T}$ konvergující k $\lambda \in \mathbb{T}$ platí

$$\phi(\lambda_n)(j) = \lambda_n^j \to \lambda^j = \phi(\lambda)^j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

a tedy $\phi(\lambda_n) \to \phi(\lambda)$ bodově na $\mathbb{Z}$. Jelikož $\mathbb{Z}$ je diskrétní, jsou jeho kompaktní podmnožine konečné, což dle předchozího pozorování implikuje spojitost ϕ. Díky kompaktnosti $\mathbb{T}$ je proto ϕ homeomorfismus.

(c) *Krok 1.* Nechť nejprve $d = 1$. Zjevně je každé $\phi(t)$ prvkem $\widehat{\mathbb{R}}$. Předpokládejme tedy, že $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$ je dáno. Pak $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ je spojitá funkce splňující (13), a tedy $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in [0, +\infty)$, pro nějaké $b \in \mathbb{C}$.

Protože pro $x < 0$ platí $\gamma(x) = (\gamma(-x))^{-1} = (e^{-bx})^{-1} = e^{bx}$, platí rovnost $\gamma(x) = e^{bx}$ na $\mathbb{R}$. Jelikož γ je omezená funkce, je b tvaru it pro nějaké $t \in \mathbb{R}$.

Tedy $\phi(t) = \gamma$.

Pro $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\phi(t_1 + t_2)(x) = e^{i(t_1+t_2)x} = (\phi(t_1)\phi(t_2))(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

a tedy ϕ je grupový homomorfismus.

Ověříme, že se jedná o homeomorfismus. Nechť $t_n \to t$ v $\mathbb{R}$. Nechť $K \subset \mathbb{R}$ je libovolný kompakt a $\varepsilon > 0$ je dáno. Nechť $M > 0$ splňuje $K \subset [-M, M]$. Zvolíme $\delta > 0$ tak, aby $|e^{iy} - 1| < \varepsilon$ pro každé $y \in (-\delta, \delta)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|t_n - t| < \frac{\delta}{M}$ pro každé $n \geq n_0$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ pak máme $|(t_n - t)x| < \delta$ pro libovolné $x \in K$, a tedy

$$|e^{it_nx} - e^{itx}| = |e^{itx}||e^{i(t_n-t)x} - 1| < \varepsilon, \quad x \in K.$$

Proto $\phi(t_n) \to \phi(t)$ v $\widehat{\mathbb{R}}$.

Ověřme nyní spojitost inverze. Jelikož je $L_1(\mathbb{R})$ separabilní, je $\Delta(L_1(\mu_1))$ metrizovatelný prostor (vizte Tvrzení 6.119), což znamená, že $\widehat{\mathbb{R}}$ je metrizovatelná množina (vizte Větu 29). Stačí tedy ověřit sekvenciální spojitost ϕ^{-1}. Nechť $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{R}$ je takové, že $\phi(t_n) \to \phi(t)$ v $\widehat{\mathbb{R}}$.

Pokud by $\{t_n\}$ nebyla omezená, měla by podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ splňující $|t_{n_k}| \to \infty$. Pak díky Větě 5.21(a) platí

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}\, \mathrm{d}\mu_1(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{it_{n_k}x}\, \mathrm{d}\mu_1(x) = 0, \quad f \in L_1(\mu_1).$$

Z toho plyne $e^{itx} = 0$ na $\mathbb{R}$, což je spor.

Posloupnost $\{t_n\}$ je proto omezená. Předpokládejme, že nekonverguje k t. Pak existuje její podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $s \in \mathbb{R}$ různému od t. Ze spojitosti ϕ pak plyne

$$\phi(t) = \lim_{k\to\infty} \phi(t_{n_k}) = \phi(s),$$

což je spor. Tedy i ϕ^{-1} je spojité a důkaz je dokončen.

Krok 2. Je-li nyní $d > 1$ a $t \in \mathbb{R}^d$ je dáno, je zjevně zobrazení $\phi(t)(x) = e^{i\langle t,x\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^d$ prvek $\widehat{\mathbb{R}^d}$. Obráceně, je-li $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}^d}$ dáno, uvažujme pro $j \in \{1, \dots, d\}$ vnoření $v_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, které posílá $x_j \in \mathbb{R}$ na $(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. Pak $\phi \circ v_j$ je charakter na $\mathbb{R}$, a tedy existuje dle Kroku 1 $t_j \in \mathbb{R}$ splňující $e^{it_jx_j} = (\phi \circ v_j)(x_j)$. Pak ale pro bod $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ máme

$$\phi(x) = \phi(\sum_{j=1}^{d} x_j) = \prod_{j=1}^{d} \phi((0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)) = \prod_{j=1}^{d} e^{it_jx_j} = e^{i\langle t,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Spojitost zobrazení $t \mapsto \phi(t)$ z $\mathbb{R}^d$ na $\widehat{\mathbb{R}^d}$ a spojitost jeho inverze nyní plyne stejně jako v dimenzi jedna.

(d) Zobrazení ϕ zjevně splňuje $\phi(\mathbb{Z}) \in \widehat{\mathbb{T}}$ a jedná se o grupový homomorfismus, neboť pro každé $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ platí

$$\phi(j_1 + j_2)(\lambda) = \lambda^{j_1+j_2} = \lambda^{j_1}\lambda^{j_2} = (\phi(j_1)\phi(j_2))(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{T}.$$

Nechť $\gamma \in \widehat{te}$ je dáno. Položme $\omega(x) = \gamma(e^{ix})$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\omega \in \widehat{\mathbb{R}}$, a tedy dle (c) existuje $t \in \mathbb{R}$ splňující $\omega(x) = e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$. Jelikož

$$e^{itx} = \omega(x) = \omega(x + 2\pi) = e^{it(x+2\pi)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

existuje $j \in \mathbb{Z}$ takové, že $t = j$. Tedy $\gamma = \phi(j)$.

Jelikož $\widehat{\mathbb{T}}$ i $\mathbb{Z}$ jsou diskrétní prostory (vizte Tvrzení 25), je ϕ homeomorfismus.

□

PŘÍKLAD 33. Nechť $A = L_1((0,+\infty))$, kde uvažujeme násobení dané vzorcem

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in (0,+\infty).$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) Prostor A je komutativní Banachova algebra.
(b) Nechť $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ a $\phi\colon \mathbb{C}_+ \to A^*$ je dané jako

$$\phi(\lambda)(f) = \int_0^\infty f(x)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x, \quad f \in A.$$

Pak ϕ je homeomorfismus $\mathbb{C}_+$ a $\Delta(A)$.

◇

DŮKAZ. V následujících výpočtech budeme mlčky užívat Fubiniovu větu, jelikož ve všech případech je ověření jejích předpokladů přímočaré.

V důkazu též uvažujeme zobrazení $i\colon A \to L_1(\mathbb{R})$ dané jako

$$i(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,+\infty), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad f \in A.$$

(a) Zobrazení i je izometrický homomorfismus A do do $L_1(G)$. Vskutku, linearita a izometrie je jasná. Pro $f, g \in A$ pak máme

$$\begin{aligned}(i(f) * i(g))(x) &= \int_{-\infty}^\infty i(f)(y)i(g)(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty f(y)i(g)(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = (f*g)(x), \quad x \in (0,+\infty).\end{aligned}$$

Tedy A je jakožto podalgebra $L_1(G)$ komutativní Banachova algebra.

(b) *Krok 1.* Pro dané $\lambda \in \mathbb{C}_+$ a $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)(f*g) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(y)\left(\int_y^\infty g(x-y)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty f(y)\left(\int_0^\infty g(x)e^{-\lambda(x+y)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \left(\int_0^\infty f(y)e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^\infty g(x)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \phi(\lambda)(f)\phi(\lambda)(g).\end{aligned}$$

Tedy $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \Delta(A)$.

Krok 2. Nechť nyní $\varphi \in \Delta(A)$ je dáno. Pak existuje $\gamma \in L_\infty((0,+\infty))$ splňující $\varphi(f) = \int_0^\infty f(x)\gamma(x)\,\mathrm{d}x$, $f \in A$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že γ je borelovská funkce. Definujme

$$h(x,y) = \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(x+y), \quad (x,y) \in (0,+\infty) \times (0,\infty).$$

Pak h je omezená borelovská funkce na $(0,+\infty)^2$. Pak pro každé $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}\phi(f*g) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\gamma(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(y)\left(\int_y^\infty g(x-y)\gamma(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty f(y)\left(\int_0^\infty g(x)\gamma(y+x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{(0,+\infty)^2} f(y)g(x)\gamma(y+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

a

$$\phi(f)\phi(g) = \left(\int_0^\infty f(y)\gamma(y)\,\mathrm{d}y\right)(g(x)\gamma(x)\,\mathrm{d}x) = \int_{(0,+\infty)^2} f(y)g(x)\gamma(x)\gamma(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tedy

$$\int_{(0,+\infty)^2} f(y)g(x)h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad f, g \in A,$$

z čehož plyne

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y) \quad \text{skoro všude na } (0,+\infty)^2. \tag{14}$$

Jelikož je γ omezená funkce, je funkce

$$\omega(x) = \int_0^x \gamma(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,+\infty),$$

lokálně absolutně spojitá na $[0,+\infty)$ a platí $\omega'(x) = \gamma(x)$ skoro všude na $(0,+\infty)$.

Existuje $\delta > 0$ takové, že $\omega(\delta) \neq 0$. (Vskutku, kdyby $\omega = 0$ na $(0,+\infty)$, byla by i γ, jakožto derivace ω nulová skoro všude. A to by byl spor.) Díky Fubiniově větě plyne z (14), že pro skoro všechna $x \in (0,+\infty)$ máme

$$\omega(\delta)\gamma(x) = \int_0^x \gamma(t)\gamma(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \gamma(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož je pravá strana spojitá funkce, má γ spojitého reprezentanta.

Zvolme $y > 0$ takové, že $\gamma(y) \neq 0$. Pak

$$\lim_{x\to 0_+} \gamma(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\gamma(x+y)}{\gamma(y)} = 1.$$

Tedy γ lze spojitě rozšířit na $[0,+\infty)$ dodefinováním $\gamma(0) = 1$. Dle Lemmatu 31 existuje $b \in \mathbb{C}$ splňující $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in [0,+\infty)$. Jelikož γ je omezená na $(0,+\infty)$, platí $\operatorname{Re} b \leq 0$. Číslo $\lambda = -b$ tedy splňuje $\phi(\lambda) = \gamma$.

Krok 3. Nyní ověříme, že ϕ je homeomorfismus. Pokud $\lambda_n \to \lambda$ v $\mathbb{C}_+$, máme $e^{-\lambda n x} \to e^{\lambda x}$ bodově na $\mathbb{R}$,a tak pro každou $f \in A$ díky Lebesgueově větě dostáváme

$$\phi(\lambda)(f) = \int_0^\infty f(x)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-\lambda_n x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \phi(\lambda_n)(f).$$

Tedy ϕ je spojité.

K ověření spojitosti inverze stačí ověřit sekvenciální spojitost, neboť $\Delta(A)$ je metrizovatelný prostor. Nechť $\{\lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{C}_+$ a λ je takový element $\mathbb{C}_+$, že $\phi(\lambda_n) \to \phi(\lambda)$.

Ověříme nejprve, že $\{\lambda_n\}$ je omezená posloupnost. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by její podposloupnost $\{\lambda_{n_k}\}$ splňující $|\lambda_{n_k}| \to \infty$. Nechť $f \in \mathcal{D}((0,+\infty))$ a nechť $\operatorname{supp} f \subset [a,b] \subset (0,+\infty)$. Pak pomocí integrace per partes dostáváme

$$\left|\int_0^\infty f(x)e^{-\lambda_{n_k} x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)e^{-\lambda_{n_k} x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{\lambda_{n_k}} \int_a^b f'(x)e^{-\lambda_{n_k} x}\,\mathrm{d}x\right|,$$

což je výraz konvergující k 0. Tedy $\phi(\lambda_{n_k})(f) \to 0$ pro každou $f \in \mathcal{D}((0,+\infty))$. Jelikož je prostor $\mathcal{D}((0,+\infty))$ hustý v $L_1((0,+\infty))$ (vizte Větu 5.14), platí

$$\phi(\lambda)(f) = \lim_{k\to\infty} \phi(\lambda_{n_k})(f) = 0, \quad f \in A,$$

tj. $\phi(\lambda) = 0$, což je spor. (Nechť $f \in L_1((0,+\infty))$ a $\varepsilon > 0$ dáno. Nalezneme $g \in \mathcal{D}((0,+\infty))$ takové, že $\|f-g\| < \varepsilon$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ splňuje $|\phi(\lambda_n)(g) - \phi(\lambda)(g)| < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Pak pro tato n platí

$$\begin{aligned}|\phi(\lambda_n)(f) - \phi(\lambda)(f)| &\leq |\phi(\lambda_n)(f) - \phi(\lambda_n)(g)| + |\phi(\lambda_n)(g) - \phi(\lambda)(g)| + |\phi(\lambda)(g) - \phi(\lambda)(f)| \\ &\leq \|f-g\| + \varepsilon + \|f-g\| < 3\varepsilon.)\end{aligned}$$

Tedy $\{\lambda_n\}$ je omezená.

Pokud by nyní $\{\lambda_n\}$ nekonvergovala k λ, existovala by vybraná podposloupnost $\{\lambda_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $\mu \in \mathbb{C}_+$ různému od λ. Pak ale díky spojitosti ϕ platí

$$\phi(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \phi(\lambda_{n_k}) = \phi(\mu),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 34 (Wiener). Nechť $AC(\mathbb{T})$ je prostor všech spojitých funkcí f na $\mathbb{T}$, jejichž Fourierovy koeficienty $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jsou v $\ell_1(\mathbb{Z})$. (Připomeňme, že

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.)$$

Pak je $AC(\mathbb{T})$ s bodovým násobením a normou $\|f\|_{AC(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|$ komutativní Banachova algebra. Platí následující tvrzení:

(a) Zobrazení $\phi\colon \ell_1(\mathbb{Z}) \to AC(\mathbb{T})$ definované jako

$$\phi(x)(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)z^k, \quad z \in \mathbb{T}, x \in \ell_1(\mathbb{Z}),$$

je izometrický homomorfismus $\ell_1(\mathbb{Z})$ na A, jehož inverze je dána vzorcem

$$\phi^{-1}(f)(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Algebra $AC(\mathbb{T})$ je pak Banachova algebra s jednotkou.

(b) Pro každé $\lambda \in \mathbb{T}$ uvažujme $\psi(\lambda) \in A^*$ definované jako

$$\psi(\lambda)(f) = f(\overline{\lambda}), \quad f \in AC(\mathbb{T}).$$

Pak $\psi\colon \mathbb{T} \to \Delta(AC(\mathbb{T}))$ je homeomorfismus.

(c) Je-li $f \in A$, pak $\frac{1}{f} \in A$ právě tehdy, když $f \neq 0$ na $\mathbb{T}$.

◇

DŮKAZ. (a) Zobrazení ϕ je zjevně lineární izometrie do. Pro $f \in AC(\mathbb{T})$ označíme $x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{Z}$. Položme $g(e^{it}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak $g \in C(\mathbb{T})$ a pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (g(e^{it}) - f(e^{it}))e^{-ijt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Jelikož jsou trigonometrické polynomy husté v $C(\mathbb{T})$ a f, g jsou spojité funkce, $g = f$. Tedy $\phi(x) = f$ a ϕ je surjektivní.

Pro $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z})$ a $z \in \mathbb{T}$ platí

$$\begin{aligned}
\phi(x * y)(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(x * y)(k)z^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)y(k-j)\right)z^k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} y(k-j)z^k\right)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} y(l)z^{j+l}\right) = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)z^j\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} y(l)z^l\right)\\
&= (\phi(x)\phi(y))(z).
\end{aligned}$$

Tedy ϕ zachovává násobení a $\phi(\chi_{\{0\}}) = 1$. Proto je $AC(\mathbb{T})$ normovaná algebra. Jelikož je $\ell_1(\mathbb{Z})$ úplný prostor, je $AC(\mathbb{T})$ také úplná.

(b) Každý prvek $\psi(\lambda)$ je zjevně element $\Delta(A)$. Je-li $\omega \in \Delta(A)$ dáno, je $x \mapsto \omega \circ \phi$ prvek $\Delta(\ell_1(\mathbb{Z}))$. Existuje proto $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$ takové, že $\omega(\phi(x)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\gamma(-k)$, $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Dle Příkladu 32(b) existuje $\mu \in \mathbb{T}$ takové, že $\gamma(k) = \mu^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Položme $\lambda = \overline{\mu}$. Pak dostáváme

$$\omega(\phi(x)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\mu(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\lambda^k = \phi(x)(\lambda).$$

Jelikož je ϕ surjektivní, platí $\omega(f) = f(\lambda)$, $f \in A$.

Jelikož je $\mathbb{T}$ kompaktní a ϕ je zjevně spojité, jedná se o homeomorfismus.

(c) Pokud $\frac{1}{f} \in A$, zjevně $f \neq 0$ na $\mathbb{T}$. Obráceně, pokud f je nenulové na $\mathbb{T}$, dle bodu (b) platí $\varphi(f) \neq 0$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Dle Věty 9.88 platí $0 \notin \sigma_A(f)$, tj. f invertibilní prvek A. To znamená, že $\frac{1}{f} \in A$.

□

PŘÍKLAD 35. Nechť $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_2$ s operací sčítání modulo 2. Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2 \to \widehat{G}$ definovaná jako

$$\phi((t,s))(x) = (\operatorname{sgn} x)^s e^{it \log|x|}, \quad x \in G,$$

je grupový homomorfizums a topologický homeomorfizmus.

◇

DŮKAZ. Pro $(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$ a $x_1, x_2 \in G$ platí

$$\phi((t,s))(x_1 x_2) = (\operatorname{sgn} x_1 x_2)^s e^{it \log|x_1 x_2|} = (\operatorname{sgn} x_1)^s e^{it \log|x_1|} (\operatorname{sgn} x_2)^s e^{it \log|x_2|}$$

a $\phi((t,s))$ je zjevně spojité na G. Tedy $\phi((t,s)) \in \widehat{G}$.

Obráceně, je-li $\gamma\colon G \to \mathbb{T}$ spojitý homomorfizmus, je $x \mapsto \gamma(e^x)$ prvek $\widehat{\mathbb{R}}$. Tedy existuje $t \in \mathbb{R}$ splňující $\gamma(e^x) = e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$. Tedy $\gamma(y) = e^{it \log y}$ pro $y \in (0, +\infty)$. Jelikož $1 = \gamma(1) = \gamma((-1)^2) = (\gamma(-1))^2$, platí $\gamma(-1) \in \{-1, 1\}$. Pokud $\gamma(-1) = 1$, pak prvek $(t, 0)$ splňuje $\phi((t,0)) = \gamma$, pokud $\gamma(-1) = -1$, prvek $(t, 1)$ splňuje $\phi((t,1)) = \gamma$.

Zbývá dokázat, že $(t,s) \to \phi((t,s))$ je homeomorfizmus $\mathbb{R}$ a $\widehat{G}$. Jelikož je $\mathbb{Z}_2$ diskrétní, stačí ověřit spojitost na $\mathbb{R} \times \{0\}$ a $\mathbb{R} \times \{1\}$. Ukažme požadovanou spojitost například na $\mathbb{R} \times \{1\}$. Nechť tedy $K \subset G$ kompaktní a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nechť $M > 0$ splňuje $\log|x| \le M$ pro $x \in K$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že $|e^{iy} - 1| < \varepsilon$ kdykoliv $|y| < \delta$. Uvažujme $t, t' \in \mathbb{R}$ splňující $|t - t'| < \frac{\delta}{M}$. Pak pro $x \in K$ platí $|(t - t') \log|x|| < \delta$, a tedy

$$|\phi((t,1))(x) - \phi((t',1))x| = |(\operatorname{sgn} x) e^{it \log|x|} - (\operatorname{sgn} x) e^{it' \log|x|}| = |e^{i(t-t')\log|x|} - 1| < \varepsilon.$$

Tím je spojitost našeho homomorfizmu ověřena. Co se týče spojitosti inverze, stačí opět díky separabilitě $L_1(G)$ (G je spočetným sjednocením metrických kompaktů a $C_c(G)$ je husté v $L_1(G)$) uvažovat sekvenciální spojitost. Uvažujme tedy posloupnost $\{(t_n, s_n)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$ a bod $(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$ splňující $\phi((t_n, s_n)) \to \phi((t,s))$ v $\widehat{G}$. Speciálně platí $\phi((t_n, s_n))(1) \to \phi((t,s))(1)$, z čehož dostáváme, že $s_n = s$ pro všechny až na konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Lze tedy předpokládat, že $s_n = s$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud by $\{t_n\}$ nebyla omezená, existovala by podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ konvergující v absolutní hodnotě do $+\infty$. Pak bychom však pro každou $f \in C_c((0, +\infty))$ měli

$$\int_G \frac{f(x)}{x} \phi((t,s))(x) d\lambda_1(x) = \lim_{k\to\infty} \int_G \frac{f(x)}{x} \phi((t_{n_k}, s))(x) d\lambda_1(x) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} e^{it_n \log x} \, d\lambda_1(x) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(e^y) e^{it_{n_k} y} \, d\lambda_1(y) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(e^y) e^{it_{n_k} y} \, d\mu_1(y) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{2\pi} \widehat{(f \circ \exp)}(t_{n_k}) = 0.$$

Tedy $\phi((t,s))$ je nulová funkce na $(0, \infty)$, což je spor. Proto je $\{t_n\}$ omezená. Pak však z již dokázané spojitosti $(t,s) \mapsto \phi((t,s))$ plyne $t_n \to t$. Tím je důkaz spojitosti inverze završen.

□

6. Banachova algebra $M(G)$

DEFINICE 36. Pro funkci $f\colon G \to \mathbb{K}$ rozšiřme definici f^* z Věty 17 vzorcem

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}, \quad x \in G.$$

VĚTA 37. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Nechť $M(G)$ značí prostor všech těsných komplexních borelovských měr na G. Pro míry $\mu, \nu \in M(G)$ definujeme*

$$T(f) = \int_{G\times G} f(x+y) \, d(\mu \times \nu)(x,y), \quad f \in C_0(G).$$

Pak $T \in (C_0(G))^*$ a splňuje odhad $\|T\| \le \|\mu\| \|\nu\|$.

DŮKAZ. Linearita T je zjevná a požadovaný odhad plyne z

$$|T(f)| \leq \int_{G\times G} |f(x+y)| \,\mathrm{d}|\mu \times \nu|(x,y) \leq \int_{G\times G} \|f\| \,\mathrm{d}(|\mu| \times |\nu|) \leq$$
$$\leq \|f\| \int_G \left(\int_G 1 \,\mathrm{d}|\mu| \right) \mathrm{d}|\nu| = \|f\| \|\mu\| \|\nu\|.$$

□

DEFINICE 38. (a) Nechť $\mu, \nu \in M(G)$. Uvažujme míru ω danou Rieszovou větou 15.109 jako reprezentace funkcionálu T z Věty 39. Pak $\mu * \nu$ označuje míru $\omega \restriction_{\mathrm{Bs}(G)}$.

(b) Nechť $M_{\mathrm{ac},m}(G)$ značí prostor všech prvků $M(G)$ absolutně spojitých vůči $m \restriction_{\mathrm{Bs}(G)}$. Připomeňme, že $M_{\mathrm{c}}(G)$ a $M_{\mathrm{d}}(G)$ značí prostor všech spojitých, respektive diskrétních elementů $M(G)$ (vizte Definici 15.112).

(c) Na $M(G)$ definujeme operaci $*$ jako

$$\int_G f \,\mathrm{d}\mu^* = \overline{\int_G f^* \,\mathrm{d}\mu}, \quad f \in C_0(G), \mu \in M(G).$$

VĚTA 39. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak $(M(G), *)$ je komutativní Banachova algebra s jednotkou a zobrazení $*\colon M(G) \to M(G)$ izometrická involuce. Dále platí následující tvrzení:*

(a) Pro každé $\mu, \nu \in M(G)$ platí

$$\int_G f(x) \,\mathrm{d}(\mu * \nu)(x) = \int_G \left(\int_G f(x+y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y), \quad f \in \mathrm{Bf}_{\mathrm{b}}(G). \tag{15}$$

Nechť množiny $A, B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňují $|\mu|(G \setminus A) = |\nu|(G \setminus B) = 0$ a $A + B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak platí $(|\mu| * |\nu|)(G \setminus (A+B)) = 0$. Speciálně platí $\operatorname{supp}(\mu * \nu) \subset \operatorname{supp} \mu + \operatorname{supp} \nu$.

(b) Pro každé $f \in L_1(G) \cap \mathrm{Bf}(G)$ označme jako fm míru definovanou jako $fm(A) = \int_A f(x) \,\mathrm{d}m(x)$, $A \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak zobrazení $f \mapsto fm$ je izometrický $*$-homomorfismus $L_1(G)$ na $M_{\mathrm{ac},m}$, kde funkci $f \in L_1(G)$ vybereme borelovského reprezentanta. Dále je $M_{\mathrm{ac},m}(G)$ v $M(G)$ uzavřený $*$-ideál.

(c) Prostor $M_{\mathrm{c}}(G)$ je v $M(G)$ uzavřený $*$-ideál a $M_{\mathrm{d}}(G)$ je uzavřená $*$-podalgebra $M(G)$.

(d) Zobrazení $x \mapsto \delta_x$ je homomorfní a homeomorfní vnoření G do $(M(G), w^*)$, kde $M(G)$ je chápána jako duál k $C_0(G)$.

DŮKAZ. Jelikož máme $M(G)$ identifikováno s $(C_0(G))^*$ (vizte Větu 15.109) jedná se o Banachův prostor.

Dokážeme nejdříve (a). Díky standardním aproximacím stačí dokázat vzorec jen pro charakteristickou funkci množiny $A \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak vezměme neklesající posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ v A a nerostoucí posloupnost otevřených množin $\{U_n\}$ obsahujících A takové, že $(|\mu| + |\mu * \nu|)(U_n \setminus K_n) \to 0$. Zkonstruujme nyní funkce $f_n\colon G \to [0,1]$ splňující $f_n = 1$ na K_n a $f_n = 0$ vně U_n. Pak $(x,y) \mapsto f_n(x+y)$ konvergují $|\mu| \times |\nu|$-skoro všude k funkci $(x,y) \mapsto \chi_A(x+y)$ (díky Fúbiniově větě) a $f_n \to \chi_A$ $|\mu * \nu|$-skoro všude. Proto

$$\int_G \chi_A(z) \,\mathrm{d}(\mu * \nu)(z) = \lim_{n\to\infty} \int_G f_n(z) \,\mathrm{d}(\mu * \nu)(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{G\times G} f_n(x+y) \,\mathrm{d}(\mu \times \nu)(x,y) =$$
$$= \int_{G\times G} \chi_A(x+y) \,\mathrm{d}(\mu \times \nu)(x,y) = \int_G \left(\int_G \chi_A(x+y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

Nechť nyní množiny $A, B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňují pro $\mu, \nu \in M(G)$ rovnosti $|\mu|(G \setminus A) = |\nu|(G \setminus B) = 0$ a nechť $A + B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak pro $C = G \setminus (A+B)$ platí

$$(|\mu| * |\nu|)(G \setminus (A+B)) = \int_G \int_G \chi_C(x+y) \,\mathrm{d}|\mu|(x) \,\mathrm{d}|\nu|(y) = \int_B \int_A \chi_C(x+y) \,\mathrm{d}|\mu|(x) \,\mathrm{d}|\nu|(y) = 0.$$

Tím je (a) ověřeno.

Pro každou $f \in C_0(G)$ platí rovnosti

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}(\mu * \nu)(x) = \int_G \left(\int_G f(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int_G \left(\int_G f(y+x)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \\ = \int_G f(y)\,\mathrm{d}(\nu * \mu)(y),$$

a tedy je $M(G)$ komutativní.

Diracova míra ε_0 je jednotka $M(G)$, neboť

$$\int_G g(x)\,\mathrm{d}(\varepsilon_0 * \mu)(x) = \int_G \int_G g(x+y)\,\mathrm{d}\varepsilon_{\{0\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_G g(y)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad g \in C_0(G).$$

Distributivita násobení plyne ze vztahu

$$\mu \times (\nu + \omega) = \mu \times \nu + \mu \times \omega, \quad \mu, \nu, \omega \in M(G),$$

asociativita pak z rovností

$$\begin{aligned} \int_G f(x)\,\mathrm{d}(\mu * (\nu * \omega))(x) &= \int_G \int_G f(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}(\nu * \omega)(y) \\ &= \int_G \int_G f(x+y)\,\mathrm{d}(\nu * \omega)(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_G \int_G f(x+y+z)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\omega(z)\,\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \int_G f(x)\,\mathrm{d}((\mu * \nu) * \omega)(x) &= \int_G \int_G f(x+z)\,\mathrm{d}(\mu * \nu)(z)\,\mathrm{d}\omega(y) \\ &= \int_G \int_G \int_G f(x+z+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\omega(z) \\ &= \int_G \int_G f(x+y+z)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\omega(z)\,\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

platných pro každou $f \in C_0(G)$.

Pro involuci zjevně platí $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$ a $(c\mu)^* = \overline{c}\mu^*$.

Dále pro $\mu, \nu \in M(G)$ a $f \in C_0(G)$ platí

$$\begin{aligned} \int_G f(x)\,\mathrm{d}(\mu * \nu)^*(x) &= \overline{\int_G f^*(x)\,\mathrm{d}(\mu * \nu)(x)} = \overline{\int_G \int_G f^*(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)} \\ &= \overline{\int_G \int_G \overline{f(-x-y)}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)} = \int_G \int_G f(-x-y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \int_G f(x)\,\mathrm{d}(\mu^* * \nu^*)(x) &= \int_G \int_G f(x+y)\,\mathrm{d}\mu^*(x)\,\mathrm{d}\nu^*(y) = \int_G \overline{\int_G \overline{f(-x+y)}\,\mathrm{d}\mu(x)}\,\mathrm{d}\nu^*(y) \\ &= \int_G \int_G f(x-y)\,\mathrm{d}\nu^*(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \overline{\int_G \overline{f(-x-y)}\,\mathrm{d}\nu(y)}\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_G \int_G f(-x-y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x), \end{aligned}$$

a tedy $(\mu * \nu)^* = \mu^* * \nu^*$.

Konečně $(\mu^*)^* = \mu$, neboť

$$\int_G f\,\mathrm{d}(\mu^*)^* = \overline{\int_G f^*\,\mathrm{d}\mu^*} = \overline{\overline{\int_G f^{**}\,\mathrm{d}\mu}} = \int_G f\,\mathrm{d}\mu.$$

Navíc

$$\|\mu^*\| = \sup_{f\in B_{C_0(G)}} |\int_G f\,\mathrm{d}\mu^*| = \sup_{f\in B_{C_0(G)}} |\overline{\int_G f^*\,\mathrm{d}\mu}| = \sup_{f\in B_{C_0(G)}} |\int_G f^*\,\mathrm{d}\mu| = \sup_{f\in B_{C_0(G)}} |\int_G f\,\mathrm{d}\mu| = \|\mu\|,$$

neboť $f \in B_{C_0(G)}$ právě tehdy, když $f^* \in B_{C_0(G)}$. Tedy $*$ je izometrická involuce na $M(G)$.

(b) Máme $fm \in M_{\mathrm{ac},m}(G)$ pro každé $f \in L_1(G) \cap \mathrm{Bf_b}(G)$. Vskutku, nechť $A \in \mathrm{Bs}(G)$ je množina m-míry 0. Pak $fm(A) = \int_A f\,\mathrm{d}m = 0$.

Obráceně, nechť $\mu \in M_{\mathrm{ac},m}(G)$ je daná míra. Aplikací Radonovy-Nikodýmovy věty (vizte [F2, Proposition 232B(b)], které umožňuje aplikaci [F2, Theorem 232E] pro míru $m\restriction_{\mathrm{Bs}(G)}$) obdržíme borelovskou funkci $f : X \to \mathbb{C}$ takovou, že $f \in L_1(G)$ a $\mu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}m$ pro každou $A \in \mathrm{Bs}(G)$. Tedy $fm = \mu$.

Nyní zbývá ověřit, že zobrazení ψ posílající $f \in L_1(G)$ na $fm \in M_{\mathrm{ac},m}(G)$ je izometrie. Nechť tedy $f \in L_1(G) \cap \mathrm{Bf}(G)$ je dáno. Pak

$$\|fm\|_{M(G)} = \sup_{g\in B_{C_0(G)}} |\int_G g(x)f(x)\,\mathrm{d}m(x)| \le \|f\|_{L_1(G)}.$$

Na druhou stranu, pro $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt $K \subset G$ splňující $\int_{G\setminus K}|f|\,\mathrm{d}m < \varepsilon$. Dle Věty 2.15(d) platí

$$\|f\restriction_K\|_{L_1(K)} = \sup_{g\in B_{L_\infty(K)}} |\int_K fg\,\mathrm{d}m|,$$

a tedy existuje $g \in B_{L_\infty(K)}$ taková, že $\int_K|f|\,\mathrm{d}m \le |\int_K fg\,\mathrm{d}m| + \varepsilon$. Dle Věty 15.107 lze bez újmy na obecnosti g uvažovat jako spojitou. Rozšíříme g na prvek $C_c(G)$ se zachováním normy. Pak

$$\|f\|_{L_1(G)} = \int_G |f|\,\mathrm{d}m \le \int_K |f|\,\mathrm{d}m + \varepsilon \le |\int_K fg\,\mathrm{d}m| + 2\varepsilon \le |\int_G fg\,\mathrm{d}m| + 3\varepsilon \le \|fm\|_{M(G)} + 3\varepsilon.$$

Tedy zobrazení ψ je izometrie.

Dále pro $g \in C_0(G)$ platí

$$\begin{aligned}\int_G g(x)\,\mathrm{d}(fm)^*(x) &= \overline{\int_G g^*(x)\,\mathrm{d}(fm)(x)} = \overline{\int_G \overline{g(-x)}f(x)\,\mathrm{d}m(x)}\\ &= \int_G g(-x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_G g(x)\overline{f(-x)}\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_G g(x)\,\mathrm{d}(f^*m)(x),\end{aligned}$$

čili ψ zachovává involuci.

Dále je zjevně ψ lineární. Konečně pro $f_1, f_2 \in L_1(G)$ platí pro každé $g \in C_0(G)$ rovnosti (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f_1, f_2 jsou borelovské a nulové mimo σ-kompaktní množinu $K \subset G$ obsahující 0)

$$\begin{aligned}\int_G g(x)\,\mathrm{d}((f_1 * f_2)m)(x) &= \int_G g(x)(f_1 * f_2)(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G\int_G g(x)f_1(y)f_2(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\,\mathrm{d}m(x) =\\ &= \int_{(x,y)\in(K+K)\times K} g(x)f_1(y)f_2(x-y)\,\mathrm{d}(m\times m)(x,y) =\\ &= \int_G f_1(y)\left(\int_G g(x)f_2(x-y)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}m(y) =\\ &= \int_G f_1(y)\left(\int_G g(y+z)f_2(z)\,\mathrm{d}m(z)\right)\mathrm{d}m(y) =\\ &= \int_G\int_G g(y+z)\,\mathrm{d}(f_1m)(y)\,\mathrm{d}(f_2m)(z) = \int_G g(y)\,\mathrm{d}((f_1m) * (f_2m))(y),\end{aligned}$$

a tedy ψ zachovává násobení. (Uvědomme se, že borelovská funkce $(x,y) \mapsto g(x)f_1(y)f_2(x-y)$ je na $G \times G$ nulová mimo σ-kompaktní množinu, takž dle Věty 15.118 lze prohodit pořadí integrace.)

Je-li nyní $\mu \in M(G)$ a $f \in L_1(G)$, pro množinu $B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňující $m(B) = 0$ platí

$$((fm) * \mu)(B) = \int_G \chi_B(x)\,\mathrm{d}((fm) * \mu)(x) = \int_G \left(\int_G \chi_B(x+y) f(x)\,\mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}\mu(y)$$
$$= \int_G \left(\int_G \chi_B(z) f(z-y)\,\mathrm{d}m(z) \right) \mathrm{d}\mu(y) = 0,$$

takže $M_{\mathrm{ac},m}(G)$ je ideál v $M(G)$.

(c) Prostor $M_{\mathrm{c}}(G)$ je uzavřený v $M(G)$, vizte Tvrzení 15.113(a). Zjevně

$$(\mu^*)(\{x\}) = \overline{\mu(\{-x\})} = 0, \quad x \in G, \mu \in M_{\mathrm{c}}(G),$$

takže $M_{\mathrm{c}}(G)$ je uzavřený na involuci.

Pro $\mu \in M_{\mathrm{c}}(G)$ a $\nu \in M(G)$ platí

$$(\mu * \nu)(\{x\}) = \int_G \int_G \mu(\{x-y\})\,\mathrm{d}\nu(y) = 0, \quad x \in G,$$

a $M_{\mathrm{c}}(G)$ je tedy ideál.

Uzavřenost $M_{\mathrm{d}}(G)$ je zaručena Tvrzením 15.113(a). Nechť $\mu, \nu \in M_{\mathrm{d}}(G)$ jsou dány. Nechť $A, B \subset G$ jsou spočetné množiny takové, že $|\mu|(G \setminus A) = |\nu|(G \setminus B) = 0$. Pak je $A + B$ spočetná, a tedy borelovská podmnožina G, a proto dle (a) platí $(|\mu| * |\nu|)(G \setminus (A + B)) = 0$. Tedy $|\mu| * |\nu| \in M_{\mathrm{d}}(G)$. Jelikož

$$|(\mu * \nu)(A)| = |\int_G \left(\int_G \chi_A(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y)| \le \int_G \left(\int_G \chi_A(x+y)\,\mathrm{d}|\mu|(x) \right) \mathrm{d}|\nu|(y) =$$
$$= (|\mu| * |\nu|)(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(G),$$

máme odhad $|\mu * \nu| \le |\mu| * |\nu|$. Proto $\mu * \nu \in M_{\mathrm{d}}(G)$.

Dále je $|\mu^*|(G \setminus (-A)) = 0$, a tedy i $\mu^* \in M_{\mathrm{d}}(G)$.

(d) Pro $a, b \in G$ a $g \in C_0(G)$ platí

$$\int_G g(x)\,\mathrm{d}(\varepsilon_a * \varepsilon_b)(x) = \int_G \int_G g(x+y)\,\mathrm{d}\varepsilon_a(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_b(y) = \int_G g(a+y)\,\mathrm{d}\varepsilon_b(y) =$$
$$= g(a+b) = \int_G g(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_{a+b}(x).$$

Tedy je zobrazení $\varepsilon\colon G \to M(G)$ algebraický homomorfizmus.

Dále pro net $\{a_i\}$ v G konvergující k $a \in G$ a $f \in C_0(G)$ aplatí

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_{a_i}(x) = f(a_i) \to f(a) = \int_G f(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_a(x),$$

a tedy ε je spojité.

Nechť $\varepsilon_{a_i} \to \varepsilon_a$ pro nějaký net $\{a_i\}$ v G a $a \in G$. Nechť U je dané okolí a, přičemž můžeme předpokládat, že U je relativně kompaktní. Nalezneme $f \in C_{\mathrm{c}}(G)$ s hodnotami v $[0, 1]$ splňující $f(a) = 1$ a $f = 0$ na $G \setminus U$. Protože

$$f(a_i) = \int_G f(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_{a_i}(x) \to \int_G f(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_a(x) = f(a) = 1,$$

existuje index i_0 takový, že $f(a_i) > 0$ pro $i \ge i_0$. Pro tato i je pak $a_i \in U$, takže jsme ověřili $a_i \to a$. Tedy ε je homeomorfismus.

□

DEFINICE 40. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pro $\mu \in M(G)$ a $f\colon G \to \mathbb{C}$ v $L_1(G)$ borelovskou definujeme funkci $\mu * f\colon G \to \mathbb{C}$ takto: Uvažujme míru $fm \in M_{\mathrm{ac},m}(G)$ a konvoluci $\mu * fm$. Dle Věty 39(b) je $\mu * fm \in M_{\mathrm{ac},m}(G)$, a tedy opět dle Věty 39 existuje právě jedna $g \in L_1(G)$ splňující $gm = \mu * fm$. Tu označme jako $\mu * f$.

TVRZENÍ 41. *Nechť G je alespoň dvoubodová komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Uvažujme $M(G)$ s involucí definovanou ve Větě 39. Pak $M(G)$ není $B^\star$-algebra.*

DŮKAZ. Nechť $x \in G$ je prvek různý od 0. Vezměme ryze imaginární nenulové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ a uvažujme míru

$$\mu = \alpha\varepsilon_{-x} + \varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_x.$$

Pak $\mu^* = \overline{\alpha}\varepsilon_x + \varepsilon_0 + \overline{\alpha}\varepsilon_{-x}$ a dle Věty 39(d) platí

$$\begin{aligned}\mu * \mu^* &= \left(|\alpha|^2\varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_{-x} + |\alpha|^2\varepsilon_{-2x}\right) + (\overline{\alpha}\varepsilon_{-x} + \varepsilon_0 + \overline{\alpha}\varepsilon_x) + \left(|\alpha|^2\varepsilon_{2x} + \alpha\varepsilon_x + |\alpha|^2\varepsilon_0\right)\\ &= (1 + 2|\alpha|^2)\varepsilon_0 + (\alpha + \overline{\alpha})\varepsilon_x + (\alpha + \overline{\alpha})\varepsilon_{-x} + |\alpha|^2\varepsilon_{2x} + |\alpha|^2\varepsilon_{-2x}\\ &= (1 + 2|\alpha|^2)\varepsilon_0 + |\alpha|^2\varepsilon_{2x} + |\alpha|^2\varepsilon_{-2x}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\|\mu * \mu^*\| = 1 + 4|\alpha|^2.$$

Na druhou stranu máme

$$\|\mu\|^2 = (1 + 2|\alpha|)^2 = 1 + 4|\alpha|^2 + 4|\alpha|,$$

a tedy $\|\mu\|^2 > \|\mu * \mu^*\|$. Proto $M(G)$ není B*-algebra.

□

VĚTA 42. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Je-li $\mu \in M(G)$ a $f \in C_c(G)$, pak platí $\mu * f(x) = \int_G f(x - y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, $x \in G$.*

DŮKAZ. Povšimněmě si, že pro pevné $x \in G$ je $\int_G f(x - y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ odhadnut výrazem $\|f\|_\infty|\mu|(G)$, tedy vzorec dobře definuje omezenou funkci $g\colon G \to \mathbb{C}$. Navíc je g stejnoměrně spojitá. Vskutku, je-li $\varepsilon > 0$ dáno, nechť $U \in \tau(0)$ splňuje $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ kdykoliv $z - z' \in U$ (Lemma 7). Pak pro $x, x' \in G$ splňující $x - x' \in U$ platí

$$|g(x) - g(x')| \le \int_G |f(x - y) - f(x' - y)| d|\mu|(y) \le \varepsilon|\mu|(G).$$

Mějme nyní $\varphi \in C_c(G)$. Pak $(x, y) \mapsto \varphi(x)f(x - y)$ je funkce v $C_c(G \times G)$, a tedy můžeme počítat

$$\begin{aligned}\int_G \varphi(x)g(x)\,\mathrm{d}m(x) &= \int_G \varphi(x)\left(\int_G f(x - y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_G \left(\int_G \varphi(x)f(x - y)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}\mu(y) =\\ &= \int_G \left(\int_G \varphi(x + y)f(x)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}\mu(y) =\\ &= \int_G \left(\int_G \varphi(x + y)\,\mathrm{d}(fm)(x)\right)\mathrm{d}\mu(y) =\\ &= \int_G \varphi\,\mathrm{d}(fm * \mu) = \int_G \varphi\,\mathrm{d}(\mu * fm) = \int_G \varphi(\mu * f)\,\mathrm{d}m\end{aligned} \tag{16}$$

Máme tedy rovnost $\int_G \varphi g\,\mathrm{d}m = \int_G \varphi h\,\mathrm{d}m$ pro každé $\varphi \in C_c(G)$, přičemž $g \in C_b(G)$ a $\mu * f \in L_1(G)$. Chceme ukázat, že $g = \mu * f$ m-skoro všude.

K tomuto účelu stačí ověřit, že je-li $h \in \mathrm{Bf}(G)$ komplexní lokálně m-integrovatelná funkce na G a zobrazení $\varphi \in C_c(G) \mapsto \int_G \varphi h\,\mathrm{d}m$ je nulové, je $h = 0$ m-skoro všude. Zjevně stačí uvažovat případ reálné funkce h. Pokud by h nebyla nulová m-skoro všude, byla by například množina $A = \{x \in G;\ h(x) > 0\}$ kladné míry. Pak nalezneme kompakt $K \subset A$ splňující $m(K) > 0$ a zkonstruujeme nerostoucí posloupnost funkcí $\{\varphi_n\} \subset C_c(G)$ shodontami v $[0, 1]$ takovou, že $\varphi_n \to \chi_K$ m-skoro všude. Pak ale dle Lebesguoevy věty platí

$$0 = T\varphi_n = \int_G \varphi_n h\,\mathrm{d}m \to \int_K h\,\mathrm{d}m > 0,$$

což je spor. Proto je h nulová m-skoro všude a důkaz je tak dokončen.

□

7. Fourierova-Stieltjesova transformace

DEFINICE 43. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Definujeme Fourierovu-Stieltjesovu transformaci $F\colon M(G) \to \ell_\infty(\widehat{G})$ jako

$$(F\mu)(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x), \quad \gamma \in \widehat{G}, \mu \in M(G).$$

Někdy píšeme $F\mu = \widehat{\mu}$.

VĚTA 44. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a nechť F značí Fourierovu-Stieltjesovu transformaci. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Každá funkce $\widehat{\mu}$ je omezená a stejnoměrně spojitá na $\widehat{G}$.
(b) Zobrazení F je $*$-homomorfismus $M(G)$ do $C_b(\widehat{G})$ zachovávající jednotku o normě nepřesahující 1 (prostor $C_b(\widehat{G})$ je uvažován s involucí $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma)}$). Navíc restrikce F na $L_1(G)$ je Fourierova transformace z Definice 23.
(c) Pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ je zobrazení $\psi(\gamma)\colon \mu \mapsto \widehat{\mu}(\gamma)$ prvek $\Delta(M(G))$. Zobrazení $\gamma \mapsto \psi_\gamma$ je homeomorfní vnoření $\widehat{G}$ do $\Delta(M(G))$.
(d) Nechť $\mu \in M(G)$, $x_0 \in G$ a $\gamma_0 \in \widehat{G}$ jsou dány. Pak pro míry λ a ω definované jako $\lambda = \gamma_0\mu$ a $\omega = \phi(\mu)$, kde $\phi\colon x \mapsto x - x_0$, $x \in G$, platí

$$\widehat{\lambda}(\gamma) = \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1}) \quad a \quad \widehat{\omega}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Speciálně, platí, že funkce $\gamma \mapsto \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1})$ a $\gamma \mapsto \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma)$ jsou též v Rng F.

DŮKAZ. (a) Pro dané $\mu \in A$ dané a libovolné $\gamma \in \widehat{G}$ platí

$$|\widehat{\mu}(\gamma)| = |\int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x)| \le \int_G 1\,\mathrm{d}|\mu|(x) = \|\mu\|.$$

Tedy $\widehat{\mu}$ je omezená a $\|F\| \le 1$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme kompakt $K \subset G$ takový, že $|\mu|(G \setminus K) < \frac{\varepsilon}{4}$. Uvažujme množinu $U_{K,\varepsilon}$ tvaru (12). pak pro $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ splňující $\gamma_1\gamma_2^{-1} \in U_{K,\frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}}$ platí

$$\begin{aligned}|\widehat{\mu}(\gamma_1) - \widehat{\mu}(\gamma_2)| &\le \int_G |\overline{\gamma_1(x) - \gamma_2(x)}|\,\mathrm{d}|\mu|(x) = \int_G |\gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1|\,\mathrm{d}|\mu|(x)\\ &\le \int_K |\gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1|\,\mathrm{d}|\mu|(x) + \int_{G\setminus K} |\gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1|\,\mathrm{d}|\mu|(x)\\ &\le \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}|\mu|(K) + 2|\mu|(G \setminus K) \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $\widehat{\mu}$ je stejnoměrně spojitá.

(b) Zobrazení F je zjevně lineární a dle odhadu v (a) platí $\|F\| \le 1$. Pro funkci $f \in L_1(G)$ máme

$$\widehat{fm}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}(fm)(x) = \int_G f(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G},$$

a tedy F je rozšířením Fourierovy transformace.

Pro $\mu \in M(G)$ máme

$$\widehat{\mu^*}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu^*(x) = \overline{\int_G \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)} = \overline{\widehat{\mu}(\gamma)} = (\widehat{\mu}(\gamma))^*, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Tedy F zachovává involuci.

Pro $\mu, \nu \in M(G)$ dostáváme pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ rovnost

$$\begin{aligned}(\widehat{\mu * \nu})(\gamma) &= \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}(\mu * \nu)(x) = \int_G \int_G \gamma(-x-y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \left(\int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\left(\int_G \gamma(-y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\\ &= \widehat{\mu}(\gamma)\widehat{\nu}(\gamma),\end{aligned}$$

tj. F je homomorfismus.

Konečně pro ε_0 máme

$$\widehat{\varepsilon_0}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\varepsilon_0(x) = \gamma(-0) = 1, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

(c) Inkluze $\psi(\widehat{G}) \subset \Delta(M(G))$ plyne z (b). Nechť $\{\gamma_i\}$ je net v $\widehat{G}$ konvergující ke $\gamma \in \widehat{G}$. Dle (a) platí

$$\psi(\gamma_i)(\mu) = \widehat{\mu}(\gamma_i) \to \widehat{\mu}(\gamma) = \psi(\gamma)(\mu), \mu \in M(G),$$

tj. $\psi(\gamma_i) \overset{w^*}{\to} \psi(\gamma)$. Tedy ψ je spojité.

Předpokládejme nyní, že $\psi(\gamma_i) \to \psi(\gamma)$ pro nějaký net $\{\gamma_i\}$ v $\widehat{G}$ a $\gamma \in \widehat{G}$. Uvažujme inverzi k zobrazení z Věty 22, které každému prvku $\omega \in \widehat{G}$ přiřazuje element $\varphi_\omega \in \Delta(L_1(G))$. Pak zobrazení $\omega \mapsto \varphi_\omega$ je homeomorfismus $\widehat{G}$ a $\Delta(L_1(G))$ (vizte Větu 29). Nechť $f \in L_1(G)$ je libovolné. Pak $fm \in M(G)$ a dle předpokladu platí

$$\varphi_{\gamma_i}(f) = \int_G f(x)\gamma_i(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{fm}(\gamma_i) = \psi(\gamma_i)(\mu) \to \psi(\gamma)(\mu) = \widehat{\mu}(\gamma) = \varphi_\gamma(f).$$

Tedy $\varphi_{\gamma_i} \overset{w^*}{\to} \varphi_\gamma$, což díky zmiňované Větě 29 implikuje $\gamma_i \to \gamma$ v $\widehat{G}$. Tedy ψ je homeomorfní vnoření.

(d) Pro $\gamma \in \widehat{G}$ dostáváme

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}(\gamma) &= \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \gamma(-x)\gamma_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \gamma\gamma_0(-x)^{-1}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G (\gamma\gamma_0^{-1})(-x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1})\end{aligned}$$

a

$$\widehat{\omega}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\omega(x) = \int_G \gamma(-x+x_0)\,\mathrm{d}\mu(x) = \gamma(x_0)\int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma).$$

Tím je důkaz dokončen.

□

DEFINICE 45. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Definujme $\widetilde{F}\colon M(\widehat{G}) \to \ell_\infty(G)$ pomocí vzorce

$$(\widetilde{F}\mu)(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma), \quad x \in G.$$

VĚTA 46 (O jednoznačnosti). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $\mu \in M(\widehat{G})$. Pokud*

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = 0, \quad x \in G,$$

pak $\mu = 0$. Tedy $\widetilde{F}$ je prosté zobrazení.

DŮKAZ. Nechť $F\colon L_1(G) \to C_0(\widehat{G})$ značí Fourierovu transformaci. Pro $f \in L_1(G)$ lze předpokládat, že $f = 0$ vně σ-kompaktní množiny $K \subset G$. Pak funkce $(x,\gamma) \in G \times \widehat{G} \mapsto f(x)\gamma(-x)$ je $m \times |\mu|$-nulová vně σ-konečné množiny $K \times \widehat{G}$. Tedy lze aplikací Věty 15.118 odvodit korektnost výpočtu

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \int_G f(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_G f(x)\left(\int_{\widehat{G}} \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\right)\mathrm{d}m(x) = 0.$$

Jelikož Rng F je hustý v $C_0(\widehat{G})$ dle Důsledku 30, platí $\mu = 0$.

□

8. Pozitivně definitní funkce a Bochnerova věta

DEFINICE 47. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Řekneme, že f je pozitivně definitní, pokud platí

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) \geq 0, \quad x_1, \dots, x_n \in G, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

LEMMA 48. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $f : G \to \mathbb{C}$ je pozitivně definitní funkce. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Platí $f(0) \geq 0$.*
(b) *Pro každé $x \in G$ platí $f(-x) = \overline{f(x)}$.*
(c) *Pro každé $x \in G$ platí $|f(x)| \leq f(0)$, a tedy je f omezená funkce.*
(d) *Pro každé $x, y \in G$ platí*

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0)\,\mathrm{Re}(f(0) - f(x - y)).$$

(e) *Pokud f je spojitá v 0, je stejnoměrně spojitá.*

DŮKAZ. (a) Pro $c_1 = 1$ a $x_1 = 0$ plyne z (17) nerovnost $0 \leq f(0)$.

(b) Dosadíme do (17) pro $n = 2$ body $x_1 = 0$ a $x_2 = x$ a čísla $c_1 = 1$ a $c_2 = c$. Pak

$$0 \leq \sum_{j,k=1}^{2} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) = f(0) + \overline{c} f(-x) + c f(x) + |c|^2 f(0). \tag{18}$$

Pro $c = 1$ dostáváme $0 \leq (1 + |c|^2) f(0) + f(x) + f(-x)$ a pro $c = i$ máme $0 \leq (1 + |c|^2) f(0) + i(f(x) - f(-x))$. Tedy $f(x) + f(-x)$ i $i(f(x) - f(-x))$ jsou reálně čísla. Proto pro $f(x) = a_1 + ia_2$, kde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, platí

$$f(x) + f(-x) = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2) \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad i(f(x) - f(-x)) = (b_2 - a_2) + i(a_1 - b_1) \in \mathbb{R}.$$

Tedy $b_2 = -a_2$ a $b_1 = a_1$, tj. $f(-x) = \overline{f(x)}$.

(c) Pro $x \in G$ předpokládejme, že $f(x) \neq 0$. Nalezneme $c \in \mathbb{C}$ takové, že $cf(x) = -|f(x)|$. Pak $|c||f(x)| = |f(x)|$, a tedy $|c| = 1$. Z (18) tedy díky (a) dostáváme

$$0 \leq f(0) + \overline{c} f(-x) + c f(x) + |c|^2 f(0) = f(0) + \overline{c f(x)} - |f(x)| + f(0) = 2(f(0) - |f(x)|).$$

Tím je (c) dokázáno.

(d) Nechť $x, y \in G$ jsou dány. Můžeme předpokládat, že $f(x) \neq f(y)$. Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je libovolné. V (17) uvažujeme $n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ a $c_1 = 1$, $c_2 = c = \frac{\lambda|f(x)-f(y)|}{f(x)-f(y)}$ a $c_3 = -c2$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) &= (f(0) + \overline{c} f(-x) - \overline{c} f(-y)) + c\left(f(x) + \overline{c} f(0) + \overline{(-c)} f(x - y)\right) \\
&\quad - c\left(f(y) + \overline{c} f(y - x) + \overline{(-c)} f(0)\right) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + (\overline{c f(x)} + c f(x)) - (\overline{c f(y)} - c f(y)) - |c|^2 \left(f(x - y) + f(y - x)\right) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + \overline{c(f(x) - f(y))} + c(f(x) - f(y)) - |c|^2 2\,\mathrm{Re}\, f(x - y) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + 2\lambda |f(x) - f(y)| - 2\lambda^2\,\mathrm{Re}\, f(x - y) \\
&= \lambda^2 (2(\mathrm{Re}(f(0) - f(x - y))) + \lambda(2|f(x) - f(y)| + f(0).
\end{aligned}$$

Diskriminant tohoto kvadratického polynomu v proměnné λ tak musí být nekladný, a tedy

$$0 \geq 4|f(x) - f(y)|^2 - 4f(0)2\operatorname{Re}(f(0) - f(x-y)),$$

což implikuje nerovnost v (d).

Tvrzení (e) nyní plyne z (d).

□

TVRZENÍ 49. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pokud $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pro každé funkce $f \in L_p(G)$ a $g \in L_q(G)$ je funkce $f * g \in C_0(G)$.*

DŮKAZ. Nechť $f, g \in C_c(G)$, pro $x, y \in G$ máme

$$\begin{aligned} |(f*g)(x) - (f*g)(y)| &= |\int_G (f(z)g(x-z) - f(z)g(y-z))\,\mathrm{d}m(z)| \\ &\leq \int_G |f(z)||g(x-z) - g(y-z)|\,\mathrm{d}m(z) \\ &\leq \|f\|_\infty \|g_{-x} - g_{-y}\|_1. \end{aligned}$$

Dle Tvrzení 12 je zobrazení $x \mapsto g_x$ stejnoměrně spojité na G, a tedy je funkce $f * g$ stejnoměrně spojitá na G.

Jsou-li $f \in L_p(G)$ a $g \in L_q(G)$ borelovské, pak pro každé $x \in G$ máme odhad

$$\int_G |f(y)||g(x-y)|\,\mathrm{d}m(y) \leq \|f\|_p \|g\|_g < +\infty,$$

takže $f * g$ je dobře definovaná funkce. Nyní nalezneme posloupnost $\{f_n\}$ v $L_p(G)$ a $\{g_n\}$ v $L_q(G)$ takové, že $\|f_n - f\|_p + \|g_n - g\|_q \to 0$. Pak pro $x \in G$ platí díky Hölderově nerovnosti

$$\begin{aligned} &|(f_n * g_n)(x) - (f*g)(x)| = |\int_G (f_n(y)g_n(x-y) - f(y)g(x-y))\,\mathrm{d}m(y)| \leq \\ &\leq \int_G |f_n(y) - f(y)||g_n(x-y)|\,\mathrm{d}m(y) + \int_G |f(y)||g_n(x-y) - g(x-y)|\,\mathrm{d}m(y) \leq \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q \to 0, \end{aligned}$$

tj. $f_n * g_n \rightrightarrows f * g$.

Jelikož $f_n * g_n \in C_c(G)$ dle první části důkazu a Věty 39(a), dostáváme $f * g \in C_0(G)$.

□

LEMMA 50. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Součet dvou pozitivně definitních funkcí a nezáporný násobek pozitivně definitní funkce je definitně pozitivní funkce.*
(b) *Každý element $\gamma \in \widehat{G}$ je pozitivně definitní funkce.*
(c) *Pokud $f \in L_1(G)$, pak $f * f^*$ je pozitivně definitní funkce. Pokud $f \in L_2(G)$, je $f * f^*$ spojitá pozitivně definitní funkce.*
(d) *Pokud $\mu \in M(\widehat{G})$ je nezáporná, je funkce*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma), \quad x \in G,$$

spojitá pozitivně definitní funkce na G.

DŮKAZ. Tvrzení (a) je zřejmé.

(b) Pro $\gamma \in \widehat{G}$ a sumu tvaru (17) platí

$$\sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \gamma(x_j - x_k) = \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \gamma(x_j) \overline{\gamma(x_k)} = |\sum_{l=1}^n c_l \gamma(x_l)|^2 \geq 0.$$

(c) Označme $h = f * f^*$. Pro libovolnou sumu z (17) platí

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}h(x_j - x_k) &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\int_G f(y)f^*(x_j - x_k - y)\,\mathrm{d}m(y)\\ &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\int_G f(y)\overline{f(y - x_j + x_k)}\,\mathrm{d}m(y)\\ &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\int_G f(z - x_k)\overline{f(z - x_j)}\,\mathrm{d}m(z)\\ &= \int_G |\sum_{l=1}^{n} c_l f(z - x_l)|^2\,\mathrm{d}m(z) \geq 0.\end{aligned}$$

Pokud $f \in L_2(G)$, je dle Tvrzení 49 funkce $f * f^* \in C_0(G)$.

(d) Je-li $\mu \in M(G)$ dáno, k ověření spojitosti funkce $f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)$, $x \in G$, lze zopakovat důkaz tvrzení (a) Věty 44. Podrobněji, pro $x, y \in G$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\widehat{G}} |\gamma(x) - \gamma(y)|\,\mathrm{d}|\mu|(\gamma) = \int_{\widehat{G}} |\gamma(y)^{-1}||\gamma(x - y) - 1|\,\mathrm{d}|\mu|(\gamma).$$

Nalezneme-li tedy pro dané $\varepsilon > 0$ okolí $U \in \tau(0)$ takové, že $|\gamma(x - y) - 1| < \varepsilon$ pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$ (vizte Lemma 21), dostáváme odhad

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon|\mu|(G),$$

z čehož plyne stejnoměrná spojitost f.

Pro každou sumu tvaru (17) pak platí

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}f(x_j - x_k) &= \sum_{\widehat{G}}\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\,(\gamma(x_1 - x_k))\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}}\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\gamma(x_1)\overline{\gamma(x_k)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\\ &= \int_{\widehat{G}} |\sum_{l=1}^{n} c_l\gamma(x_l)|^2\,\mathrm{d}\mu(\gamma) \geq 0.\end{aligned}$$

□

VĚTA 51. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá pozitivně definitní funkce na G. Pak existuje $\mu \in M(G)$ nezáporná taková, že $f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)$.*

DŮKAZ. Díky Lemmatu 48(c) a Lemmatu 48(a) lze předpokládat, že $f(0) = 1$.

Krok 1. Ukážeme, že

$$\int_G\int_G g(x)\overline{g(x - y)}f(x - y)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y) \geq 0, \quad g \in L_1(G).$$

Jelikož je prostor $C_c(G)$ hustý v $L_1(G)$ a f je omezená, stačí ověřit tuto nerovnost na $C_c(G)$. Nechť tedy $g \in C_c(G)$ je dána. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme $K = \operatorname{supp} g$. Položíme $\mu = m\restriction_K \times m\restriction_K$ a nechť $a = \mu(K \times K)$. Definujme spojitou funkci h na $K \times K$ jako

$$h(x, y) = g(x)\overline{g(y)}f(x - y), \quad (x, y) \in K \times K.$$

Z Lemmatu 15.115 odvodíme existenci míry $\nu \in M_{\mathrm{mol}}(K \times K)$ splňující $|\int_{K\times K} h(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x, y) - a\int_K h(x, y)\,\mathrm{d}\nu(x, y)| < \varepsilon$. Pak ν je tvaru $\nu = \sum_{j,k=1}^{n} c_jc_k\varepsilon_{(x_j,x_k)}$ pro nějaké body $(x_j, x_k) \in K \times K$ a nezáporná čísla c_j, c_k, $j, k = 1, \dots, n$, splňující $\sum_{j,k=1}^{n} c_jc_k \geq 0$. Protože

$$\int_{K\times K} h(x, y)\,\mathrm{d}\nu(x, y) = \sum_{j,k=1}^{n} g(x_j)\overline{g(x_k)}f(x_j - x_k)c_jc_k = \sum_{i,j=1}^{n} c_jg(x_j)\overline{c_kg(x_k)}f(x_j - x_k) \geq 0.$$

Tedy $\int_{K\times K} h(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x,y) \geq -\varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme požadovanou nerovnost.

Krok 2. Jelikož je $f \in C_b(G)$, můžeme definovat

$$Tg = \int_G g(x) f(x)\,\mathrm{d}m(x), \quad g \in L_1(G).$$

Protože $\|f\|_\infty \leq 1$, platí $\|T\| \leq 1$.

Položme dále

$$\langle g_1, g_2\rangle = T(g_1 * g_2^*), \quad g_1, g_2 \in L_1(G).$$

Jelikož lze předpokládat, že g_1, g_2 jsou nulové vně σ-kompaktní množiny, máme

$$\begin{aligned}\langle g_1, g_2\rangle &= \int_G \left(\int_G g_1(y) g_2^*(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\right) f(x)\,\mathrm{d}m(x) = \\ &= \int_G g_1(y)\left(\int_G \overline{g_2(y-x)} f(x)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}m(y) = \\ &= \int_G\int_G g_1(y)\overline{g_2(z)} f(y-z)\,\mathrm{d}m(z)\,\mathrm{d}m(y),\end{aligned} \tag{19}$$

je zobrazení $(g_1, g_2) \mapsto \langle g_1, g_2\rangle$ lineární v první souřadnici a sdruženě lineární v druhé. Navíc díky prvnímu kroku platí $\langle g, g\rangle \geq 0$.

Analogicky jako v Tvrzení 1.81 odvodíme Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost

$$|\langle g_1, g_2\rangle|^2 \leq \langle g_1, g_1\rangle\langle g_2, g_2\rangle, \quad g_1, g_2 \in L_1(G).$$

Krok 3. Ukážeme, že pro $g \in L_1(G)$ platí

$$|Tg|^2 \leq T(g * g^*), \quad g \in L_1(G). \tag{20}$$

Nechť $V \in \tau(0)$ je relativně kompaktní a nechť $h = \frac{1}{m(U)}\chi_U$. Pak pro každé $g \in L_1(G)$ díky (19) platí

$$\begin{aligned}\langle g, h\rangle - Tg &= \int_G\left(\int_G g(x)\overline{h(y)} f(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\right)\mathrm{d}m(x) - \int_G g(x) f(x)\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_G g(x)\left(\frac{1}{m(V)}\int_V (f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}m(y)\right)\mathrm{d}m(x)\end{aligned}$$

a

$$\langle h, h\rangle - 1 = \frac{1}{m(V)^2}\int_V\int_V (f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y).$$

Nechť nyní $g \in L_1(G)$ je dána a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Jelikož je f stejnoměrně spojitá (vizte Lemma 50(e)), existuje $V \in \tau(0)$ relativně kompaktní okolí 0 takové, že $|f(x-y) - 1| < \varepsilon$ pro $x, y \in V$. Pak pro $h = \frac{1}{m(V)}\chi_V$ máme

$$|\langle g, h\rangle - Tg| \leq \int_G |g(x)|\frac{1}{m(V)}\int_V |f(x-y) - f(y)|\,\mathrm{d}m(y)\,\mathrm{d}m(x) \leq \varepsilon\|g\|$$

a

$$|\langle h, h\rangle - 1| \leq \frac{1}{m(V)^2}\int_V\int_V \varepsilon\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y) = \varepsilon.$$

Tedy

$$|Tg| = |Tg - \langle g, h\rangle + \langle g, h\rangle| \leq \varepsilon\|g\| + |\langle g, h\rangle|,$$

a proto

$$\begin{aligned}|Tg|^2 &\leq \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle|) + |\langle g, h\rangle|^2 \leq \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle|) + \langle g, g\rangle\langle h, h\rangle \\ &\leq \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle|) + \langle g, g\rangle|\langle h, h\rangle - 1| + \langle g, g\rangle \\ &\leq \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g, h\rangle| + \langle g, g\rangle) + \langle g, g\rangle.\end{aligned}$$

Tím je nerovnost (20) ověřena.

Krok 4. Ověříme, že

$$|Tg| \leq \|\widehat{g}\|_\infty, \quad g \in L_1(G). \tag{21}$$

Nechť $g \in L_1(G)$ je dáno. Položíme $h_1 = g * g^*$ a pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ induktivně definujeme $h^n = h^{n-1} * h$. Jelikož je h pozitivně definitní (vizte Lemma 50(c)), platí $h^* = h$. Z (20) platí $|Tg|^2 \leq T(g * g^*) = Th$. Dosazením $h^{2^{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$ do (20) dostáváme

$$|T(h^{2^{n-1}})|^2 \leq T(h^{2^{n-1}} * (h^{2^{n-1}})^*) = T(h^{2^n}).$$

Tedy

$$|Tg|^2 \leq Th \leq (T(h^2))^{\frac{1}{2}} \leq (T(h^4))^{\frac{1}{4}} \leq \cdots \leq (T(h^{2^n}))^{\frac{1}{2^n}} \leq \|h^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jelikož $\|T\| \leq 1$ a $\lim_{n\to\infty} \|h^{2^n}\|^{2^{-n}} = r_{L_1(G)}(h)$, dostáváme z Věty 9.93(a) a Věty 24(a) nerovnost

$$|Tg|^2 \leq \|\widehat{h}\|_\infty = \|\widehat{g}\|_\infty^2.$$

Tedy (21) je ověřeno.

Krok 5. Nechť $F\colon L_1(G) \to C_0(\widehat{G})$ značí Fourierovu transformaci. Definujme

$$\widetilde{L}h = Tg, \quad g \in F^{-1}(h), h \in \operatorname{Rng} F.$$

Díky odhadu (21) je L dobře definované lineární zobrazení $\operatorname{Rng} F$ do $\mathbb{C}$. Navíc platí

$$|\widetilde{L}h| = |Tg| \leq \|\widehat{g}\|_\infty = \|h\|_\infty, \quad g \in F^{-1}(h), h \in \operatorname{Rng} F.$$

Tedy $\widetilde{L}$ je spojitý funkcionál na $\operatorname{Rng} F$ o normě nepřevyšující 1. Jelikož je $\operatorname{Rng} F$ hustý v $C_0(\widehat{G})$ (vizte Důsledek 30), má $\widetilde{L}$ jednoznačné rozšíření $L \in C_0(\widehat{G})^*$ s normou $\|L\| = \|\widetilde{L}\|$. Dle Rieszovy věty o reprezentaci (vizte Věta 15.109) existuje $\widetilde{\mu} \in M(\widehat{G})$ splňující $\|\mu\| = \|L\| \leq 1$ a

$$Lh = \int_{\widehat{G}} h(\gamma)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu}(\gamma), \quad h \in C_0(\widehat{G}).$$

Definujme míru $\mu \in M(\widehat{G})$ jako $\phi(\widetilde{\mu})$, kde $\phi\colon G \to G$ je definováno jako $\phi(x) = -x$, $x \in G$. (Tedy $\int_G \varphi \, \mathrm{d}\phi(\tilde{\mu}) = \int_G \varphi \circ \phi \, \mathrm{d}\tilde{\mu}$, $\varphi \in C_0(G)$.)

Položme

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, \mathrm{d}\mu(\gamma), \quad x \in G. \tag{22}$$

Nechť nyní $g \in L_1(G)$ je libovolné. Lze předpokládat, že $g = 0$ vně σ-kompaktní podmnožiny G. Pak

$$\begin{aligned}\int_G g(x) f(x)\, \mathrm{d}m(x) = Tg &= \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(-\gamma)\, \mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \int_G g(x)\gamma(x)\, \mathrm{d}m(x)\, \mathrm{d}\mu(\gamma) \\ &= \int_G g(x) \left(\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, \mathrm{d}\mu(\gamma) \right) \mathrm{d}m(x) = \int_G g(x) \widetilde{f}(x)\, \mathrm{d}m(x).\end{aligned}$$

Tedy $f = \widetilde{f}$ m-skoro všude. (Věta 15.106). Jelikož f i $\widetilde{f}$ je spojitá funkce, platí $f = \widetilde{f}$.

Zbývá ukázat, že $\mu \geq 0$. Dosazením $x = 0$ do (22) dostáváme

$$1 = \widetilde{f}(0) = f(0) = \int_{\widehat{G}} 1\, \mathrm{d}\mu(\gamma) = \mu(\widehat{G}) \leq \|\mu\| = \|\widetilde{\mu}\| \leq 1.$$

Díky Lemmatu 15.116 je μ nezáporná.

□

9. Věta o inverzi

LEMMA 52. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak $\widetilde{F}$ je prostý operátor z $L(M(\widehat{G}), \ell_\infty(G))$ splňující $\|\widetilde{F}\| \leq 1$ a každý prvek $f \in \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ je omezená, stejnoměrně spojitá funkce na G.*

DŮKAZ. Zjevně pro $\mu \in M(G)$ platí

$$|(\widetilde{F}\mu)(x)| = |\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)| \leq \int_{\widehat{G}} 1\,\mathrm{d}|\mu| = \|\mu\|, \quad x \in G,$$

a tedy $\|\widetilde{F}\| \leq 1$.

Pokud $\widetilde{F}\mu = 0$, z Věty 46 plyne $\mu = 0$, tj. $\widetilde{F}$ je prostý.

Nechť nyní $\mu \in M(G)$ je dána. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$, kde $\mu_k \in M(G)$, $k = 0, \dots, 3$, jsou nezáporné. Pak pro každé $k \in \{0, \dots, 3\}$ je funkce $\widetilde{F}\mu_k$ spojitá a pozitivně definitní (vizte Lemma 48(d)), a tedy je stejnoměrně spojitá (vizte Lemma 48(e)). Tedy i $\widetilde{F}\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \widetilde{F}\mu_k$ je stejnoměrně spojitá.

□

VĚTA 53 (Věta o inverzi). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Pokud $f \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$, pak platí $\widehat{f} \in L_1(\widehat{G})$.*

(b) *Nechť je Haarova míra m na G fixována. Pak Haarovu míru $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ lze volit tak, že rovnost*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x) d\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G, \tag{23}$$

platí pro každou $f \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$.

DŮKAZ. (a) Označme $B = L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ a pro $f \in B$ označme $\mu_f = \widetilde{F}^{-1}(f)$.

Krok 1. Ukážeme, že platí

$$\widehat{g}\mu_f = \widehat{f}\mu_g, \quad f, g \in B. \tag{24}$$

Nechť tedy $f, g \in B$ jsou dány. Pak pro libovolnou $h \in L_1(G)$ borelovskou a nulovou vně σ-kompaktní podmnožiny G máme

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{G}} \widehat{h}(\gamma)\,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) &= \int_{\widehat{G}} \left(\int_G h(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}\mu_f(\gamma) \\
&\int_{\widehat{G}} \left(\int_G h(-x)\gamma(x)\,\mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}\mu_f(\gamma) \\
&= \int_G h(-x) \left(\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) \right) \mathrm{d}m(x) \\
&= \int_G h(-x) f(x)\,\mathrm{d}m(x) = (f * h)(0) = (h * f)(0).
\end{aligned}$$

Použijeme-li tuto rovnost postupně pro $h * f$ a $h * g$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_g &= \int_{\widehat{G}} \widehat{h * f}\,\mathrm{d}\mu_g = ((h * f) * g)(0) \\
&= ((h * g) * f)(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{h * g}\,\mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_g.
\end{aligned}$$

Jelikož je $\operatorname{Rng} F$ hustý v $C_0(\widehat{G})$ (vizte Důsledek 30), (24) platí.

Krok 2. Definujeme nyní funkcionál T na $C_c(\widehat{G})$ následujícím způsobem.

Nechť $g \in C_c(\widehat{G})$ je libovolná. Označme

$$B_g = \{v \in C_c(G);\ v \text{ pozitivně definitní}, \widehat{v} \geq 0 \text{ a } \widehat{g} > 0 \text{ na } \operatorname{supp} g\}.$$

Díky Větě 51 platí $B_g \subset B$. Položíme

$$Tg = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{v}}\,\mathrm{d}\mu_v,$$

kde $v \in B_g$ je libovolná.

Všimněme si, že T je nezáporný a nezávisí na volbě v. Díky pozitivní definitnosti je totiž μ_v nezáporná, takže pro $g \geq 0$ je $Tg \geq 0$.

Dále, je-li $w \in B_g$ libovolná, platí díky (24) rovnost

$$\int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}} \, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}\widehat{v}} \widehat{v} \, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}\widehat{v}} \widehat{w} \, d\mu_v = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{v}} \, d\mu_v = Tg.$$

Ověříme nyní, že požadovaná funkce v existuje. Pro každé $\gamma \in \operatorname{supp} g$ nalezneme díky Důsledku 30(c) funkci $f_\gamma \in C_c(G)$ takovou, že $\widehat{f}(\gamma) \neq 0$. Funkce $v_\gamma = u_\gamma * u_\gamma^*$ má pak kompaktní nosič a $\widehat{v_\gamma}(\gamma) > 0$. Pro každé $\gamma \in \operatorname{supp} g$ nalezneme okolí U_γ, na kterém je funkce $\widehat{v_\gamma}$ kladná. Díky kompaktnosti vybereme konečně mnoho bodů $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ takových, že $\operatorname{supp} g \subset_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Pak funkce $v = \sum_{i=1}^n v_{\gamma_i}$ je element $C_c(G)$, $\widehat{v} \geq 0$ na $\widehat{G}$ a $\widehat{v} > 0$ na $\operatorname{supp} g$. Dle Lemmatu 48(c) je pozitivně definitní.

Je třeba nyní ověřit linearitu T. Nechť $g_1, g_2 \in C_c(\widehat{G})$ a $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Nechť v_1, v_2 a v_3 jsou funkce požadované definicí T pro funkce g_1, g_2 a $a_1 g_1 + a_2 + g_2$. Pak je funkce $v_1 + v_2$ též pozitivně definitní, $\widehat{v_1} + \widehat{v_2} \geq 0$ na $\widehat{G}$ a je kladná na $\operatorname{supp} g_1 \cup \operatorname{supp} g_2$. Tedy je kladná i na $\operatorname{supp}(a_1 g_1 + a_2 g_2)$. Proto

$$\begin{aligned} a_1 T g_1 + a_2 T g_2 &= a_1 \int_{\widehat{G}} \frac{g_1}{\widehat{v_1 + v_2}} \, d\mu_{v_1+v_2} + a_2 \int_{\widehat{G}} \frac{g_2}{\widehat{v_1 + v_2}} \, d\mu_{v_1+v_2} \\ &= \int_{\widehat{G}} \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2}{\widehat{v_1 + v_2}} \, d\mu_{v_1+v_2} = T(a_1 g_1 + a_2 g_2). \end{aligned}$$

Tedy je T lineární.

Krok 3. Funcionál T je nenulový a translačně invariantní.

Zvolme totiž $v \in B$ nenulovou, pak i $\mu_v \neq 0$, neboť $\widetilde{F}$ je prostý. Nechť $g \in C_c(\widehat{G})$ je funkce splňující $\int_{\widehat{G}} g \, d\mu_v \neq 0$. Nechť w je funkce z definice $T(g\widehat{v})$. Díky (24) pak dostáváme

$$T(g\widehat{v}) = \int_{\widehat{G}} \frac{h\widehat{v}}{\widehat{w}} \, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}} \, d(\widehat{v}\mu_w) = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}} \, d(\widehat{w}\mu_v) = \int_{\widehat{G}} g \, d\mu_v \neq 0.$$

Funkcionál T je tedy nenulový.

Abychom ukázali jeho translanční invariantnost, vezměme $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a $g \in C_c(\widehat{G})$. Položme

$$f(\gamma) = g(\gamma_0^{-1}\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Pak $\operatorname{supp} f = \gamma_0 \operatorname{supp} g$.

Stejným postupem jako v druhém kroku nalezneme $v \in B_g$ takovou, že $\widehat{v} > 0$ i na $\gamma_0 \operatorname{supp} g$. Pak také platí $v \in B_f$. Nechť $\phi\colon \widehat{G} \to \widehat{G}$ je definováno jako

$$\phi(\gamma) = \gamma_0^{-1}\gamma, \gamma \in \widehat{G}.$$

Položme $\mu = \phi(\mu_v)$ a $w = \widetilde{F}\mu$. Pak w je spojitá pozitivně definitní funkce na G (vizte Lemma 48(d)) a $w(x) = \gamma_0^{-1}(x)v(x)$, $x \in G$. Vskutku, pro $x \in G$ máme

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, d\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, d\phi(\mu)(\gamma) = \int_{\widehat{G}} (\gamma_0^{-1}\gamma)(x) \, d\mu_v(\gamma) \\ &= \gamma_0(-x) \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, d\mu_v(x) = \gamma_0(-x)(\widetilde{F}\mu_v)(x) = \gamma_0(-x)v(x). \end{aligned}$$

Proto $w \in C_c(G)$ a dle Věty 24(b) máme

$$\widehat{w}(\gamma) = \widehat{v}(\gamma_0\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Platí tak $w \in B_g$. Jelikož $v \in B_f$, dostáváme

$$Tg = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}} \, d\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g(\gamma)}{\widehat{w}(\gamma)} \, d\phi(\mu_g)(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \frac{g(\gamma_0^{-1}\gamma)}{\widehat{w}(\gamma_0^{-1}\gamma)} \, d\mu_v(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \frac{f(\gamma)}{\widehat{v}(\gamma)} \, d\mu_v(\gamma) = Tf.$$

Tedy T je translačně invariantní.

Krok 4. Nechť $\widehat{m}$ značí Haarovu míry na $\widehat{G}$. Dle Rieszovy věty o reprezentaci existuje nezáporná, nenulová míra $\mu \in M(\widehat{G})$ splňující $Tg = \int_{\widehat{G}} g \, d\mu$, $g \in C_c(\widehat{G})$. Díky jednoznačnosti Haarovy míry existuje $c > 0$ takové, že $\mu = c\widehat{m}$.

Nechť $f \in B$ a $g \in C_c(\widehat{G})$ jsou dány. Vezměme libovolné $v \in B_{g\widehat{f}}$. Pak díky (24) máme

$$\int_{\widehat{G}} g \, d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{g\widehat{v}}{\widehat{v}} \, d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{g\widehat{f}}{\widehat{v}} \, d\mu_v = T(g\widehat{f}) = c \int_{\widehat{G}} g\widehat{f} \, d\widehat{m}.$$

Tedy pro každé $f \in B$ platí

$$\int_{\widehat{G}} g \, d\mu_f = c \int_{\widehat{G}} g\widehat{f} \, d\widehat{m}, \quad g \in C_c(\widehat{G}).$$

Protože je prostor $C_c(\widehat{G})$ hustý v $C_0(\widehat{G})$, platí $\mu_f = \widehat{f} c\widehat{m}$. Jelikož je μ_f konečná míra, je $\widehat{f} \in L_1(\widehat{G})$. Tedy platí (a).

Z máme

$$f(x) = (\widetilde{F}\mu_f)(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, d\mu_f(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\widehat{f}(\gamma) \, d(c\widehat{m})(x).$$

Tedy formule (23) platí pro $f \in B$, kde uvažujeme míru $c\widehat{m}$.

□

PŘÍKLAD 54. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:

(a) Pokud G je diskrétní a $m(\{0\}) = 1$, pak Haarova míra $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ vyhovující (23) je pravděpodobnostní.
(b) Pokud G je kompaktní a $m(G) = 1$, pak Haarova míra $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ vyhovující (23) splňuje $\widehat{m}(\{\gamma\}) = 1$, $\gamma \in \widehat{G}$.
(c) Pokud $G = \mathbb{R}^d$, pak míra μ_d (vizte úmluvu na začátku oddílu 5.2) splňuje (23).

◇

DŮKAZ. (a) Uvažujme funkci $f = \chi_{\{0\}}$. Pak

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(-x) \, m(x) = f(0)\gamma(0) = 1, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Tedy platí

$$\widehat{m}(\widehat{G}) = \int_{\widehat{G}} 1 \, d\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma) \, d\widehat{m}(\gamma) = f(0) = 1,$$

tj. $\widehat{m}$ je pravděpodobnostní.

(b) Uvažujme funkci $e(x) = 1$, $x \in G$. Pak $e \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$, neboť f je spojitá a pozitivně definitní. (Pro funkci e je totiž suma typu (17) rovna $|\sum_{l=1}^n c_l|^2$.) V důkazu Tvrzení 25(b) jsme odvodili, že

$$\widehat{e}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma = e, \\ 0, & \gamma \in \widehat{G} \setminus \{e\}. \end{cases}$$

Tedy

$$1 = e(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{e}(\gamma) \, d\widehat{m}(\gamma) = \widehat{m}(\{e\}).$$

(c) Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^2, m_d) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ je dáno. Pak $\widetilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^2, m_d)$ a z Věty 5.27) víme, že

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{f}(t)e^{ixt} \, dm_d(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy míra m_d na $\mathbb{R}^2$ a m_d na $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ splňují (23).

□

VĚTA 55. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Uvažujme na G topologii $\tau_{\widehat{K}}$ stejnoměrně konvergence na kompaktních podmnožinách $\widehat{G}$, tj. množina $U \subset G_1$ je $\tau_{\widehat{K}}$-otevřená, pokud pro každé $x \in U$ existuje kompakt $K \subset \widehat{G}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že množina*

$$U_{K,\varepsilon} = \{y \in G;\ |\gamma(y) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\} \tag{25}$$

splňuje $x + U_{K,\varepsilon} \subset U$.

Pak $\tau_{\widehat{K}}$ je topologie, která splývá s původní topologií.

DŮKAZ. Je třeba ukázat, že průnik dvou $\tau_{\widehat{K}}$-otevřených množin $U_1, U_2 \subset G$ je $\tau_{\widehat{K}}$-otevřená. Nechť tedy $x \in U_1 \cap U_2$ je dáno a U_{K_1,ε_1} a U_{K_2,ε_2} jsou množiny tvaru (25) splňující $x + U_{K_i,\varepsilon_i} \subset U_i$, $i = 1, 2$. Uvažujme množinu $V = U_{K_1 \cup K_2, \min \varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Pak pro $y \in V$ platí

$$|\gamma(y) - 1| < \varepsilon_i, \gamma \in K_i, i = 1, 2,$$

a tedy $x + V \subset U_1 \cap U_2$. Vskutku je tedy $\tau_{\widehat{K}}$ topologie.

Nechť τ je topologie G. Ukážeme, že τ splývá s $\tau_{\widehat{K}}$. Zřejmě stačí ukázat, že množiny tvaru (25) jsou τ-otevřené a že pro každé $U \in \tau(0)$ existuje množina V tvaru (25) splňující $V \subset U$.

Krok 1. Nechť nejprve $K \subset \widehat{G}$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nechť $x \in U_{K,\varepsilon}$ je dáno. Pro každé $\gamma \in K$ existuje τ-otevřená množina $U_\gamma \subset G$ a otevřená množina $V \subset \widehat{G}$ takové, že $(x, \gamma) \in U_\gamma \times V_\gamma$ a

$$|\gamma'(x') - \gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x,', \gamma') \in U_\gamma \times V_\gamma.$$

(Zde používáme Lemma 28(b).) Díky kompaktnosti K existuje konečně mnoho prvků $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ takových, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\gamma_i}$. Položme $U = \bigcap_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Pak $U \subset U_{K,\varepsilon}$. Vskutku, nechť $y \in U$ je dáno. Vezmeme libovolné $\gamma \in K$ a nalezneme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\gamma \in V_{\gamma_i}$. Pak

$$|\gamma(y) - 1| \le |\gamma(y) - \gamma(x)| + |\gamma(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy $U \subset U_{K,\varepsilon}$, takže jsme ověřili, že každá množina tvaru (25) je τ-otevřená.

Krok 2. Nechť $U \subset G$ je τ-okolí 0. Nalezneme kompaktní, symetrické $V \in \tau(0)$ splňující $V - V \subset U$. Položme $f = m(V)^{-\frac{1}{2}} \chi_V$ a $g = f * f^*$. Pak g je spojitá, pozitivně definitní funkce na G_1 (vizte Lemma 48(c)) a

$$\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} f \subset V + V \subset U.$$

Tedy pro g platí (23). Speciálně máme

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}} \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} = g(0) &= \int_G f(x) f(-x) \, \mathrm{d}m(x) = \int_G m(V)^{-1} \chi_V(x) \chi_V(-x) \, \mathrm{d}m(x) \, \mathrm{d}m(x) \\ &= m(V)^{-1} \int_V \chi_V(x) \chi_{-V}(x) \, \mathrm{d}m(x) = 1.\end{aligned}$$

Jelikož $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2 \ge 0$, existuje kompakt $K \subset \widehat{G}$ takový, že $\int_K \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} > \frac{2}{3}$.

Takovýto kompakt nalezneme následovně. Položme

$$A = \{\gamma \in \widehat{G};\ \widehat{g} > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{\gamma \in \widehat{G};\ \widehat{g} \ge \frac{1}{n}\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\widehat{m}(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, a díky Lebesgueově větě pak dostáváme

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} = \int_{\widehat{G}} \chi_A \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} = \lim_{n \to \infty} \int_{\widehat{G}} \chi_{A_n} \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m}.$$

Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{A_n} \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} > \frac{2}{3}$. Za pomoci regularity míry $\widehat{m}$ nyní nalezneme požadovaný kompakt.

Uvažujme nyní množinu $U_{K,\frac{1}{3}}$ (vizte (25)). Pak $U_{K,\frac{1}{3}} \subset U$.

Nechť totiž $x \in U_{K,\frac{1}{3}}$ je libovolné. Pak pro $\gamma \in K$ platí $|\gamma(x) - 1| < \frac{1}{3}$, a tedy $\operatorname{Re} \gamma(x) > \frac{2}{3}$. Dále

$$\left|\int_{\widehat{G} \setminus K} \widehat{g}(\gamma) \gamma(x) \, \mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)\right| \le \int_{\widehat{G} \setminus K} \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} = \int_{\widehat{G}} \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} - \int_K \widehat{g} \, \mathrm{d}\widehat{m} \le 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

a

$$\begin{aligned}|\int_K \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| &= |\int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Re}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) + i\int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Im}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| \\ &\geq |\int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Re}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| = \int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Re}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \\ &\geq \frac{2}{3}\int_K \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} \geq \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned}|g(x)| = |\int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| &= |\int_K \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) + \int_{\widehat{G}\setminus K} \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| \\ &\geq |\int_K \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| - |\int_{\widehat{G}\setminus K} \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| \geq \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Jelikož $g = 0$ na $G_1 \setminus (V - V)$, dostáváme $x \in V - V \subset U$.

Tedy $U_{K,\frac{1}{3}} \subset U$, a tedy množiny tvaru (25) tvoří bázi okolí 0.

□

VĚTA 56. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Grupa $\widehat{G}$ odděluje body G.*

(b) *Je-li G kompaktní, je systém funkcí*

$$\mathcal{F} = \{\sum_{i=1}^{n} a_j\gamma_j;\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \widehat{G}\}$$

hustý v $C(G)$.

DŮKAZ. (a) Nechť bod $x \in G \setminus \{0\}$ je dán. Zvolíme okolí $U \in \tau(0)$ splňující $x \notin U$ a nechť $U_{K,\varepsilon}$ je množina tvaru (25) splňující $U_{K,\varepsilon} \subset U$. Pak $\gamma(x) \neq 1$ pro nějaké $\gamma \in K$. V opačném případě by totiž platilo $|\gamma(x) - 1| = 0 < \varepsilon$ pro každé $\gamma \in K$, a tedy $x \in U_{K,\varepsilon} \subset U$, což by byl spor.

Jsou-li nyní body $x_1, x_2 \in G$ různé, nalezneme $\gamma \in \widehat{G}$ splňující $\gamma(x_1 - x_2) \neq 1$. Pak $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$.

(b) Systém $\mathcal{F}$ je zjevně vektorový prostor uzavřený na komplexní sdružení. Jelikož je $\widehat{G}$ grupa, je $\mathcal{F}$ i algebra. Dle (a) odděluje body, takže tvrzení plyne ze Stoneovy-Weierstraßovy věty.

□

10. Plancherelova věta

Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Dále budeme předpokládat, že m i $\widehat{m}$ jsou normalizovány tak, že platí (23).

VĚTA 57 (Plancherelova věta). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a F značí Fourierovu transformaci. Pak existuje právě jeden izometrický, surjektivní operátor $P\colon L_2(G) \to L_2(\widehat{G})$, který splňuje $P = F$ na $L_1(G) \cap L_2(G)$.*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ je libovolné. Pak funkce $g = f * f^*$ je v $L_1(G)$, je spojitá a pozitivně definitní (vizte Lemma 48(c)), tj. $g \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng}\widetilde{F}$. Jelikož $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2$, z Věty 53 dostáváme

$$\int_G |f(x)|^2\,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x)f^*(-x)\,\mathrm{d}m(x) = g(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}(\gamma|^2\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma).$$

Tedy F je izometrie na $L_1(G) \cap L_2(G)$ do $L_2(G)$.

Označme $A = F(L_1(G) \cap L_2(G))$. Nechť $g \in L_2(\widehat{G})$ splňuje

$$\int_{\widehat{G}} f(\gamma)\overline{g(\gamma)}\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = 0, \quad f \in A.$$

Pak pro každé $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ a $x_0 \in G$ platí $\widehat{f_{-x_0}} \in L_1(G) \cap L_2(G)$ a dle Věty 24(c) máme $\widehat{f_{-x_0}}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma)$. Tedy

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x_0) f(\gamma)\overline{g(\gamma)}\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = 0, \quad f \in A, x_0 \in G.$$

Pro $f \in A$ je $f \in L_2(\widehat{G})$, a tedy díky Hölderově nerovnosti platí $f\overline{g} \in L_1(\widehat{G})$. Máme tedy $\widetilde{F}(f\overline{g}\widehat{m}) = 0$, a tedy $f\overline{g} = 0$ $\widehat{m}$-skoro všude (vizte Větu 46).

Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Nalezneme $f \in C_c(G)$ takovou, že $\widehat{f}(\gamma_0) \neq 0$ (vizte Důsledek 30(c)). Ze spojitosti $\widehat{f}$ plyne, že $\widehat{f} \neq 0$ na nějakém okolí U bodu γ_0. Tedy $\overline{g}\chi_U = 0$ $\widehat{m}$-skoro všude. Ukázali jsme, že pro každý bod $\gamma_0 \in \widehat{G}$ existuje okolí U takové, že $\widehat{m}(\{\gamma \in U;\ |g(\gamma)| > 0\}) = 0$.

Položme

$$L = \{\gamma \in \widehat{G};\ |g(\gamma)| > 0\}.$$

Jelikož je $g \in L_2(\widehat{G})$, je $\widehat{m}(L) < \infty$, a tedy existuje neklesající posloupnost $\{L_n\}$ kompaktních podmnožin $\widehat{G}$ splňující $L_n \subset L$, $n \in \mathbb{N}$, a $\widehat{m}(L_n) \to \widehat{m}(L)$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro každý bod $\gamma \in L_n$ nalezneme okolí U_γ takové, že $\widehat{m}(U_\gamma) = 0$. Díky kompaktnosti existuje konečná množina $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in L_n$ taková, že $L_n \subset \bigcup_{i=1}^m U_{\gamma_i}$. Tedy $\widehat{m}(L_n) = 0$. Proto i $\widehat{m}(L) = 0$ a g je nulová funkce.

Díky Větě 1.100 je tedy A hustý podprostor $L_2(\widehat{G})$. Proto má F z $L_1(G) \cap L_2(G)$ právě jedno izometrické rozšíření na $P\colon L_2(G) \to L_2(\widehat{G})$ (vizte Větu 2.28).

□

DEFINICE 58. Zobrazení P z předchozí Věty 57 se nazývá Plancherelovou transformací.

LEMMA 59 (Parsevalova rovnost). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa a P je Plancherelova transformace. Pak platí*

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_{\widehat{G}} Pf(\gamma)\overline{Pg(\gamma)}\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad f, g \in L_2(G).$$

DŮKAZ. Požadovaná rovnost plyne z Věty 10.24.

□

VĚTA 60. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak*

$$\operatorname{Rng} F = \{g_1 * g_2;\ g_1, g_2 \in L_2(\widehat{G})\}.$$

DŮKAZ. Nechť F je Fourierova a P Plancherelova transformace.

Krok 1. Ukážeme, že pro $f, g \in L_2(G)$ platí

$$F(fg) = Pf * Pg. \tag{26}$$

Nechť tedy $f, g \in L_2(G)$ jsou dány. Abychom toto ukázali, vezměme posloupnost $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ v $C_c(G)$ splňující $\|f_n - f\|_2 + \|g_n - g\|_2 \to 0$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné a nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Položíme $u(x) = g_n(-x)\gamma_0(x)$, $x \in G$. Pak

$$u^*(x) = \overline{u(-x)} = \overline{g_n(x)\gamma_0(-x)}, \quad x \in G.$$

Pak

$$\widehat{u}(\gamma) = \int_G g_n(x)\gamma_0(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G g_n(-x)(\gamma_0\gamma^{-1}(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{g_n}(\gamma_0\gamma^{-1}), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Dle Parsevalovy rovnosti tak máme

$$\begin{aligned} P(f_n g_n)(\gamma_0) &= \widehat{f_n g_n}(\gamma_0) = \int_G f_n(x)g_n(x)\gamma_0(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x)\overline{\overline{g_n(x)\gamma_0(-x)}}\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_G f_n(x)\overline{u^*(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\overline{\widehat{u^*}(\gamma)}\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\widehat{u}(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\widehat{g_n}(\gamma_0\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = (\widehat{f_n} * \widehat{g_n})(\gamma_0). \end{aligned} \tag{27}$$

Jelikož díky Hölderově nerovnosti platí

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leq \|f_n(g_n - g)\| + \|(f_n - f)g\|_1 \leq \|f_n\|_2\|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2\|g\|_2,$$

dostáváme $F(f_n g_n) \rightrightarrows F(fg)$.

Dále $Ff_n = Pf_n \to Pf$ a $Fg_n = Pg_n \to Pg$ v $L_2(\widehat{G})$. Tedy pro $\gamma_0 \in \widehat{G}$ platí

$$\begin{aligned}|(Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma)| &\leq \int_{\widehat{G}} |Pf_n(\gamma) - Pf(\gamma)||Pg_n(\gamma_0\gamma^{-1}) - Pg(\gamma_0\gamma^{-1})| \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)\\ &\leq \|Pf_n - Pf\|_2\|Pg_n - Pg\|_2.\end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned}|\widehat{fg}(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma_0)| \leq |\widehat{fg}(\gamma_0) - \widehat{f_n g_n}(\gamma_0)| + |\widehat{f_n g_n}(\gamma_0) - (Pf_n * Pg_n)(\gamma_0)|\\ + |(Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma_0)|\end{aligned}$$

a

$$\widehat{(f_n g_n)}(\gamma_0) - (Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) = 0$$

dle (27), máme $\widehat{fg}(\gamma_0) = (Pf * Pg)(\gamma_0)$.

Krok 2. Dokažme nyní požadovanou rovnost. K důkazu inkluze „$\subset$" vezměme libovolné $f \in L_1(G)$. Položíme-li

$$f_1 = \sqrt{|f|}\,\mathrm{sgn}\, f \quad \text{a} \quad f_2 = \sqrt{|f|},$$

platí $f_1, f_2 \in L_2(G)$ a $f = f_1 f_2$. Rovnost (27) ukazuje, že $Ff = Pf_1 * Pf_2$.

Pokud $g_1, g_2 \in L_2(\widehat{G})$ jsou dány, nechť $f_1, f_2 \in L_2(G)$ splňují $Pf_i = g_i$, $i = 1, 2$. Dle (27) pak $Pg_1 * Pg_2 = F(f_1 f_2) \in \mathrm{Rng}\, F$. Tím je důkaz ukončen.

□

VĚTA 61. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa nechť $U \subset \widehat{G}$ je neprázdná otevřená množina. Pak existuje $f \in L_1(G)$ takové, že $\widehat{f} \neq 0$ a $\widehat{f} =$ na $\widehat{G} \setminus U$.*

DŮKAZ. Nechť K je kompaktní podmnožina U splňující $\widehat{m}(K) > 0$ a nechť $V \in \tau(0)$ je kompaktní okolí splňující $K + V \subset U$. Dle Věty 60 existuje $f \in L_1(G)$ takové, že $\widehat{f} = \chi_K * \chi_V$. Pak $\mathrm{supp}\, \widehat{f} \subset K + V \subset U$ a

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma_0) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0) &= \int_{\widehat{G}} (\chi_K * \chi_V)(\gamma_0) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0) = \int_{\widehat{G}}\int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma)\chi_V(\gamma_0\gamma^{-1}) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0)\\ &= \int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma) \left(\int_{\widehat{G}} \chi_V(\gamma_0\gamma^{-1}) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0)\right) \mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma)\widehat{m}(V) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)\\ &= \widehat{m}(K)\widehat{m}(V) > 0\end{aligned}$$

Tedy $\widehat{f} \neq 0$ a důkaz je hotov.

□

11. Pontrjaginova dualita

DEFINICE 62 (Kanonické vnoření). Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Definujme zobrazení $\phi\colon G \to \ell_\infty(\widehat{G})$ jako

$$\phi(x)(\gamma) = \gamma(x), \quad \gamma \in \widehat{G}, x \in G.$$

LEMMA 63. *Nechť G_1 je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Pak $\mathrm{Rng}\,\phi \subset G_3$ a ϕ je grupový homomorfismus.*

DŮKAZ. Nechť $x \in G_1$ je dáno. Pak

$$\phi(0)(\gamma) = \gamma(x) = 1, \quad \gamma \in G_2,$$

a

$$\phi(x)(\gamma_1\gamma_2) = (\gamma_1\gamma_2)(x) = (\gamma_1(x))(\gamma_2(x)) = (\phi(x)(\gamma_1))(\phi(x)(\gamma_2), \gamma_1, \gamma_2 \in G_2,$$

tedy $\phi(x)\colon G_2 \to \mathbb{T}$ je grupový homomorfzimus.

Dle Lemmatu 28(b) a Věty 29 je $\phi(x)$ spojitá funkce na G_2, a tedy je $\operatorname{Rng}\phi \subset G_3$.

□

VĚTA 64 (Pontrjaginova dualita). *Nechť G_1 je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Pak je kanonické vnoření homeomorfismus G_1 na G_3.*

DŮKAZ. Nechť τ značí topologii G_1 a nechť g_0 značí neutrální prvek G_3, tj. $\phi(0) = g_0$.

Krok 1. Ukážeme, že ϕ je spojité zobrazení z G_1 do G_3. Nechť $V \subset G_3$ je otevřená množina a nechť $x \in G_1$ splňuje $\phi(x) \in V$. Dle Definice 26 existuje $K \subset G_2$ kompakt a $\varepsilon > 0$ takové, že $\phi(x)V_{K,\varepsilon} \subset V$ (zde $V_{K,\varepsilon}$ je množina tvaru (12)). Pak je množina

$$U_{K,\varepsilon} = \{x \in G_1;\ |\gamma(x) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\}$$

prvkem $\tau(0)$ (vizte Větu 55) a splňuje $\phi(x + U_{K,\varepsilon}) \subset \phi(x)V_{K,\varepsilon}$. Tedy $\phi^{-1}(V)$ je otevřená množina a ϕ je tak spojité.

Krok 2. Nechť nyní $U \subset G_1$ je τ-otevřená množina a $\phi(x) \in \phi(U)$ je dáno. Chceme ukázat, že existuje množina $V_{K,\varepsilon}$ tvaru (25) splňující

$$\phi(x)(V_{K,\varepsilon} \cap \phi(G_1)) \subset \phi(U). \tag{28}$$

Nalezneme $K \subset G_2$ kompakt a $\varepsilon > 0$ takové, že množina $U_{K,\varepsilon}$ tvaru (12) splňuje $x + U_{K,\varepsilon} \subset U$. Nechť

$$V_{K,\varepsilon} = \{g \in G_3;\ |g(\gamma) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\}.$$

Pak V je otevřená množina v G_3 a navíc pro ni platí (28). Je-li totiž $y \in G_1$ splňující $\phi(y) \in V_{K,\varepsilon}$, pak $y \in U_{K,\varepsilon}$. Pak $x + y \in U$, a tedy

$$\phi(x)\phi(y) = \phi(x + y) \in \phi(U).$$

Krok 3. V tomto kroku ověříme, že $\phi(G_1)$ je uzavřená podmnožina G_3 Nechť $g \in \overline{\phi(G_1)}$ je dáno. Nalezneme net $\{x_i\}_{i\in I}$ v G_1 takový, že $\phi(x_i) \to g$. Pak $\{x_i\}$ splňuje následující fakt:

$$\forall U \in \tau(0)\ \exists i_0 \in I\ \forall i, j \in I, i, j \geq i_0\colon x_i - x_j \in U. \tag{29}$$

Mějme totiž $U \in \tau(0)$ dáno. Pak $\phi(U)$ je otevřené okolí g_0 v $\phi(G_1)$, a tedy existuje $V \in \tau(g_0)$ takové, že $V \cap \phi(G_1) \subset \phi(U)$. Nechť $W \in \tau(g_0)$ splňuje $WW^{-1} \subset V$. Jelikož je gW okolí g, existuje $i_0 \in I$ takové, že $\phi(x_i) \in gW$ pro $i \geq i_0$. Pro $i \in I$ označme symbolem $w_i \in W$ splňující $\phi(x_i) = gw_i$. Pak pro $i, j \geq i_0$ platí

$$\phi(x_i - x_j) = \phi(x_i)\phi(x_j)^{-1} = gw_i g^{-1} w_j^{-1} w_i w_j^{-1} \in WW^{-1} \subset V.$$

Tedy máme $\phi(x_i - x_j) \in V \cap \phi(U)$, a tedy $x_i - x_j \in U$. Tím je (29) ověřeno.

Zvolme nyní kompaktní množinu $U \in \tau(0)$. Nechť $i_0 \in I$ je index daný (29). Pak pro $i \geq i_0$ platí $x_i - x_{i_0} \in U$, tj. $x_i \in x_{i_0} + U$. Net $\{x_i\}_{i\geq i_0}$ je tak obsažen v kompaktní množině $x_{i_0} + U$, a tedy má podnet $\{y_j\}$ konvergující k $y \in G_1$.

Vzhledem k tomu, že $\{x_i\}_{i\geq i_0}$ je podnet $\{x_i\}_{i\in I}$, je i $\{y_j\}$ podnet $\{x_i\}_{i\in I}$. Ze spojitosti ϕ tak dostáváme

$$\phi(y) = \lim_j \phi(y_j) = g,$$

a tedy $g \in \phi(G_1)$.

Krok 4. Nyní stačí ukázat, že $\phi(G_1)$ je hustá podmnožina G_3. Předpokládejme, že tomu tak není, a že tedy existuje neprázdná, otevřená množina $V \subset G_3$ splňující $\phi(G_1) \cap V = \emptyset$. Dle Věty 61 existuje $\varphi \in L_1(G_2)$ taková, že $\widehat{\varphi} \neq 0$, ale $\widehat{\varphi} = 0$ na $G_3 \setminus V$. Jelikož $\widehat{\varphi}(\phi(x)) = 0$ pro každé $x \in G_1$, máme

$$\widehat{\varphi}(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)(\phi(x))(\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\gamma(-x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G_1.$$

Díky Větě 46 dostáváme $\varphi = 0$, což je spor. Proto platí

$$G_3 = \overline{\phi(G_1)} = \phi(G_1),$$

a důkaz je tak hotov.

□

12. Důsledky Pontrjaginovy duality

VĚTA 65. *Nechť G_1 je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Nechť $\phi\colon G_1 \to G_3$ je kanonické vnoření. Nechť dále*

- *$F_1\colon L_1(G_1) \to C_0(G_2)$, respektive $F_2\colon L_1(G_2) \to C_0(G_3)$, je Fourierova transformace na G_1, respektive G_2,*
- *symbol F_1*, respektive F_2*, značí duální operátor k F_1, respektive k F_2,*
- *$H_1\colon L_1(G_1) \to C^b(G_2)$, respektive $H_2\colon L_1(G_2) \to C^b(G_3)$, je Fourierova-Stieltjesova transformace na G_1, respektive G_2.*
- *Nechť $\widetilde{F}_1\colon M(G_2) \to C^b(G_1)$, respektive $\widetilde{F}_2\colon M(G_3) \to C^b(G_2)$, je zobrazení z Definice 45. Položme*

  $$(T_1\mu)(x) = (\widetilde{F}_1\mu)(-x), \quad x \in G_1, \mu \in M(G_2),$$

  a

  $$(T_2\mu)(\gamma) = (\widetilde{F}_2\mu)(\gamma^{-1}), \quad \gamma \in G_2, \mu \in M(G_3),$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) *Platí $F_i* = T_i$, $i = 1, 2$.*

(b) *Pro $\mu \in M(G_2)$ položme $\nu = i(\mu)$, kde $i : G_2 \to G_2$ je definováno jako $i(\gamma) = \gamma^{-1}$, $\gamma \in G_2$. Pak*

$$(\widetilde{F}_1\nu)(x) = (H_2\mu)(\phi(x)), \quad x \in G_1.$$

(c) *Pro $\mu \in M(G_1)$ položme $\nu = i(\mu)$, kde $i : G_1 \to G_1$ je definováno jako $i(x) = -x$, $x \in G_1$. Pak platí*

$$(H_1\mu)(\gamma) = (\widetilde{F}_2\phi(\nu))(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

DŮKAZ. (a) Nechť $\mu \in M(G_2)$ je dáno. Pak

$$\begin{aligned}\int_{G_1} (T_1\mu)(x) f(x)\,\mathrm{d}m(x) &= \int_{G_1}\int_{G_2} f(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{G_2}\int_{G_1} f(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\\ &= \int_{G_2} F_1 f\,\mathrm{d}\mu, \quad f \in L_1(G_1),\end{aligned}$$

a tedy $F_1* = T_1$.

Podobně pro $\mu \in M(G_3)$ a $f \in L_1(G_2)$ platí

$$\begin{aligned}\int_{G_2} (T_2\mu)(\gamma) f(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) &= \int_{G_2}\int_{G_3} f(\gamma)g(\gamma^{-1}\,\mathrm{d}\mu(g)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{G_3}\int_{G_2} f(\gamma)g(\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)\,\mathrm{d}\mu(g)\\ &= \int_{G_3} F_2 f\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Tvrzení (a) je tak ověřeno.

(b) Nechť $\mu \in M(G_2)$ je dáno. Položme $\nu = i(\mu)$. Pak pro $x \in G$ platí

$$\begin{aligned}(\widetilde{F}_1\nu)(x) = (\widetilde{F}_1 i(\mu))(x) &= \int_{G_2} \gamma(x)\,\mathrm{d}i(\mu)(\gamma) = \int_{G_2} \gamma^{-1}(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\\ &= \int_{G_2} \phi(x)(\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = (H_2\mu)(\phi(x)).\end{aligned}$$

(c) Podobně jako v (b) definujme pro $\mu \in M(G_1)$ míru $\nu = i(\mu)$. Pak dostáváme pro $\gamma \in G_2$ rovnosti

$$\begin{aligned}(\widetilde{F_2}\phi(\nu))(\gamma) &= \int_{G_3} g(\gamma)\,\mathrm{d}\phi(\nu)(g) = \int_{G_1} \phi(x)(\gamma)\,\mathrm{d}\nu(x)\\ &= \int_{G_1} \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x) = (H_1\mu)(\gamma).\end{aligned}$$

□

DŮSLEDEK 66. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak je Fourierova-Stieltjesova transformace prostá.*

DŮKAZ. Tvrzení plyne z Věty 65(c), neboť zobrazení $\widetilde{F}_2$ je prosté dle Věty 46, což implikuje injektivitu T_2.

□

VĚTA 67. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak $M(G)$ a $L_1(G)$ jsou polojednoduché algebry.*

DŮKAZ. Dle Věty 44(c) je pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ zobrazení $\mu \mapsto \widehat{\mu}(\gamma)$ prvek $\Delta(M(G))$. Pokud je tedy pro nějakou míru $\mu \in M(G)$ její Gelfandova transformace nulová, speciálně platí $\widehat{\mu}(\gamma) = 0$ na $\widehat{G}$. Vzhledem k Důsledku 66 je $\mu = 0$. Algebra $M(G)$ je tak polojednoduchá.

Co se týč polojednoduchosti $L_1(G)$, je třeba dle Věty 22 ověřit, že pokud $\widehat{f} = 0$ pro nějakou $f \in L_1(G)$, je již nutně $f = 0$. Položíme-li však $\mu = fm$, platí $\widehat{\mu} = \widehat{f}$ dle Věty 44(b). Fakt $f = 0$ tedy opět plyne z Důsledku 66.

□

LEMMA 68. *Nechť G_i, $i = 1, 2, 3$, a ϕ jsou jako ve Větě 65. Nechť m_1 je Haarova míra na G_1 a nechť m_2 a m_3 jsou Haarovy míry na G_2 a G_3 normalizované tak, že jak pro dvojici (G_1, G_2), tak pro dvojici (G_2, G_3) platí věta o inverzi. Pak $m_3 = \phi(m_1)$.*

DŮKAZ. Uvažujme stejné značení operátorů jako ve Větě 65. Jelikož je $\phi(m_1)$ nenulová Haarova míra na G_3, existuje $c > 0$ takové, že $m_3 = c\phi(m_1)$.

Nechť $g \in C_c(G_1)$ je nenulová funkce a nechť $g = f * f^*$. Pak f je spojitá, pozitivně definitní (vizte Lemma 48(c)), a tedy pro ni platí (23). Proto $\widehat{f} \neq 0$. Definujme $\psi \colon G_3 \to \mathbb{C}$ jako

$$\psi(\phi(x)) = f(-x), \quad x \in G_1.$$

Položme $\varphi = \widetilde{F}_2(\psi\phi(m_1))$. Pak

$$\varphi(\gamma) = \int_{G_3} g(\gamma)\,\mathrm{d}\psi\phi(m_1)(g) = \int_{G_1} \gamma(x) f(-x)\,\mathrm{d}m_1(x) = \widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

Tedy $\varphi \in L_1(G_2)$ dle Věty 53(a). Proto i pro φ platí (23).

Povšimněme si dále, že pro $x \in G_1$ platí

$$\varphi(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\phi(x)(\gamma^{-1})\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = \int_{G_2} \widehat{f}(\gamma)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = f(-x).$$

Složením těchto faktů pro každé $\gamma \in G_2$ máme

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma) &= \int_{G_3} \widehat{\varphi}(g)g(\gamma)\,\mathrm{d}m_3(g) = c\int_{G_3} \widehat{\varphi}(g)g(\gamma)\,\mathrm{d}\phi(m_1)(g)\\ &= c\int_{G_1} \widehat{\varphi}(\phi(x))\phi(x)(\gamma)\,\mathrm{d}m_1(x) = c\int_{G_1} f(-x)\gamma(x)\,\mathrm{d}m_1(x) = c\widehat{f}(\gamma).\end{aligned}$$

Jelikož je $\widehat{f}$ nenulové, platí $c = 1$ a důkaz je dokončen.

□

VĚTA 69 (O inverzi pro $M(G)$). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní Hausdorffova topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Nechť $\mu \in M(G)$ splňuje $\widehat{\mu} \in L_1(\widehat{G})$. Pak existuje $f \in L_1(G)$ taková, že $\mu = fm$ a platí*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{\mu}(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G.$$

(b) *Nechť $f \in L_1(G)$ splňuje $\widehat{f} \in L_1(\widehat{G})$. Položme*

$$g(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G.$$

Pak $f = g$ m-skoro všude.

DŮKAZ. Budeme používat značení z Věty 65.

(a) Označme

$$\varphi(\gamma) = (H_1\mu)(\gamma) = \int_{G_1} \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad \gamma \in G_2.$$

Dle Věty 65(c) je $\varphi \in \operatorname{Rng} \widetilde{F}_2$. Tedy je $\varphi \in L_1(G_2) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}_2$, což znamená, že $\widehat{\varphi} \in L_1(G_3)$ a platí pro něj (23).

Položme

$$f(x) = \int_{G_2} \gamma(x)\varphi(\gamma)\,\mathrm{d}m_2(\gamma), \quad x \in G_1.$$

Pak

$$\widehat{\varphi}(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\phi(x)(\gamma^{-1}\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = f(-x), \quad x \in G_1.$$

Tedy $f \in L_1(G_1)$.

Díky (23) pro φ dostáváme

$$\varphi(\gamma) = \int_{G_3} \widehat{\varphi}(g)g(\gamma)\,\mathrm{d}m_3(g) = \int_{G_1} \widehat{\varphi}(\phi(x))(\gamma)\,\mathrm{d}m_1(x) = \int_{G_1} f(-x)\gamma(x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{f}(\gamma).$$

Označme $\nu = fm_1$. Pak

$$(H_1\nu)(\gamma) = \int_{G_1} \gamma(-x)f(x)\,\mathrm{d}m_1(x) = \widehat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

Tedy $H_1\mu = H_1\nu$, z čehož pomocí Věty 46 plyne rovnost $\mu = fm_1$.

(b) Nechť $f \in L_1(G_1)$ je dáno. Pak míra $\mu = fm_1$ leží v $M(G_1)$ a $H_1\mu = \widehat{f}$. Dle předpokladu tedy $H_1\mu \in L_1(G_2)$, což díky (a) znamená, že funkce

$$g(x) = \int_{G_2} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}m_2(\gamma), \quad x \in G_1,$$

leží v $L_1(G_1)$ a $fm_1 = gm_1$. Tedy $f = g$ m_1-skoro všude.

$\square$

Kapitola 14

Doplňky

1. Komplexifikace

Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$,
- $(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a $x_1, x_2 \in X$.

Potom $X \times X$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a s normou

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup\bigl\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\bigr\},$$

se jedná o normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$.

VĚTA 1. *Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je $X_{\mathbb{C}}$ Banachův.*

DŮKAZ. Přímočarým výpočtem lze ověřit, že $X_{\mathbb{C}}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a $\|\cdot\|_{X_{\mathbb{C}}}$ je funkce splňující trojúhelníkovou nerovnost. Dále $\|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} = 0$ právě tehdy, když $x_1 = x_2 = 0$. Zbývá ověřit $\|c(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} = |c|\|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}}$ pro $c \in \mathbb{C}$.

Vzhledem k tomu, že požadovaná rovnost zjevně platí pro $c \in \mathbb{R}$, stačí ji ověřit pro komplexní jednotku $c = \cos\beta + i\sin\beta$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\|(\cos\beta + i\sin\beta)(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} &= \|((\cos\beta)x_1 - (\sin\beta)x_2, (\cos\beta)x_2 + (\sin\beta)x_1)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \\
&= \sup\{\|\cos\alpha((\cos\beta)x_1 - (\sin\beta)x_2) + \sin\alpha((\cos\beta)x_2 + (\sin\beta)x_1)\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \\
&= \sup\{\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)x_1 + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)x_2)\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \\
&= \sup\{\|(\cos(\alpha - \beta)x_1 + (\sin(\alpha - \beta))x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \\
&= \sup\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}}.
\end{aligned}$$

Úplnost prostoru $X_{\mathbb{C}}$ pro Banachův prostor X pak snadno plyne z Věty 15.7.

□

FAKT 2. *Je-li $T\colon X \to Y$ spojitý lineární operátor z reálného normovaného prostoru X do reálného normovaného prostoru Y, pak existuje právě jeden lineární operátor $T_{\mathbb{C}}\colon X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ rozšiřující T, který splňuje $\|T\| = \|T_{\mathbb{C}}\|$.*

DŮKAZ. Jediné možné lineární rozšíření T je zjevně dáno předpisem $T_{\mathbb{C}}(x_1 + ix_2) = Tx_1 + iTx_2$, $x_1 + ix_2 \in X_{\mathbb{C}}$. Pak $T = T_{\mathbb{C}}$ na X a platí odhad

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathbb{C}}(x_1 + ix_2)\|_{Y_{\mathbb{C}}} = \|Tx_1 + iTx_2\|_{Y_{\mathbb{C}}} &= \sup\bigl\{\|(\cos\alpha)Tx_1 + (\sin\alpha)Tx_2\|_Y;\ \alpha \in [0, 2\pi)\bigr\} = \\
&= \sup\bigl\{\|T((\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2)\|_Y;\ \alpha \in [0, 2\pi)\bigr\} \le \\
&\le \|T\| \sup\bigl\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\bigr\} = \\
&= \|T\|\|x_1 + ix_2\|_{X_{\mathbb{C}}}.
\end{aligned}$$

Tedy $\|T_{\mathbb{C}}\| \le \|T\|$, čímž je důkaz dokončen.

□

2. Prostory se skalárním součinem

TVRZENÍ 3. *Nechť A_1, A_2 jsou dvě různé ortonormální báze Hilbertova prostoru. Pak mají stejnou mohutnost.*

DŮKAZ. Je-li A_1 konečná, je i dimenze H konečná, a tedy $|A_1| = |A_2|$ dle známé věty z lineární algebry. Předpokládejme proto, že množiny A_1 a A_2 jsou nekonečné. Vyberme spočetnou hustou podmnožinu $D \subset \mathbb{K}$. Nechť $|A_1| < |A_2|$. Množina všech lineárních kombinací prvků A_1 utvořená pomocí koeficientů z D je hustá v H (viz Větu 1.113) a má kardinalitu $|A_1|$. Ale A_2 je dle Faktu 1.105 diskrétní množina kardinality ostře větší než $|A_1|$, což je spor. Tedy $|A_1| \geq |A_2|$. Jelikož je role A_1 a A_2 symetrická, platí i obrácená nerovnost, tj. $|A_1| = |A_2|$.

□

VĚTA 4 (Jordan, von Neumann). *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Norma splňuje rovnoběžníkové pravidlo.
(ii) Existuje skalární součin na X takový, že $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro každé $x \in X$.

DŮKAZ. (ii)⇒(i) je Tvrzení 1.86. Pro důkaz opačné implikace nejdříve předpokládejme, že X je reálný. Položme

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \quad \text{pro } x, y \in X.$$

Pak zjevně $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle 0, y\rangle = 0$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ a

$$\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle. \tag{1}$$

Dále pro každé $x, y, z \in X$ dostaneme pomocí (ii)

$$\begin{aligned}\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\big) = \\ &= \frac{1}{8}\big(\|x+y+2z\|^2 + \|x+z-(y+z)\|^2\big) - \\ &\qquad - \frac{1}{8}\big(\|x+y-2z\|^2 + \|x-z-(y-z)\|^2\big) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right) = 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z\right\rangle.\end{aligned}$$

Dosadíme-li za $y = 0$, obdržíme

$$\langle x, z\rangle = 2\left\langle \frac{x}{2}, z\right\rangle \quad \text{pro každé } x, z \in X. \tag{2}$$

Použijeme-li toto na pravou stranu rovnosti výše, dostaneme

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \langle x+y, z\rangle \quad \text{pro každé } x, y, z \in X,$$

neboli $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je aditivní v první souřadnici. Odtud, z (2) a (1) obdržíme indukcí

$$\frac{m}{2^n}\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{m}{2^n}x, y\right\rangle \quad \text{pro každé } x, y \in X, m \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Protože jsou pro pevná $x, y \in X$ funkce $c \mapsto c\langle x, y\rangle$ a $c \mapsto \langle cx, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|cx+y\|^2 - \|cx-y\|^2\big)$ spojité na $\mathbb{R}$ (Tvrzení 1.2) a množina $\{\frac{m}{2^n};\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $\mathbb{R}$, platí

$$c\langle x, y\rangle = \langle cx, y\rangle \quad \text{pro všechna } x, y \in X \text{ a } c \in \mathbb{R}.$$

Tím je důkaz dokončen pro reálné prostory.

Je-li nyní X komplexní, pak podle první části důkazu existuje skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ na $X_{\mathbb{R}}$ splňující $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ pro každé $x \in X$. Položme

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{pro } x, y \in X.$$

Pomocí vlastností $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ snadno obdržíme, že $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je aditivní v první souřadnici a $\langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle$ pro každé $x,y\in X$ a $c\in\mathbb{R}$. Z definice $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ z první části důkazy plyne $\langle ix,iy\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$ pro každé $x,y\in X$. Odtud

$$\langle y,ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle -iiy,ix\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle iy,x\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x,iy\rangle_{\mathbb{R}}, \tag{3}$$

a tedy

$$\langle y,x\rangle = \langle y,x\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle y,ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle x,iy\rangle_{\mathbb{R}} = \overline{\langle x,y\rangle}.$$

Podobně dostáváme

$$\langle ix,y\rangle_{\mathbb{R}} = \langle ix,-iiy\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle ix,iiy\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x,iy\rangle_{\mathbb{R}},$$

a tedy

$$\langle ix,y\rangle = \langle ix,y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle ix,iy\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x,iy\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} = i\langle x,y\rangle.$$

Proto $\langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle$ i pro $c\in\mathbb{C}$. Na závěr ověříme, že $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$: Z (3) dostáváme, že $\langle x,ix\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x,ix\rangle_{\mathbb{R}}$, neboli $\langle x,ix\rangle_{\mathbb{R}} = 0$ pro každé $x\in X$. Tedy $\langle x,x\rangle = \langle x,x\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x,ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x,x\rangle_{\mathbb{R}} = \|x\|^2$. $\square$

TVRZENÍ 5. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $Y\subset X$ je jeho uzavřený podprostor. Pak kvocientová norma na prostoru X/Y je generována skalárním součinem.*

DŮKAZ. Dle Věty 4 stačí ověřit, že kvocientová norma na X/Y splňuje rovnoběžníkové pravidlo. Nechť tedy $\widehat{x},\widehat{y}\in X/Y$. Chceme dokázat, že

$$\|\widehat{x}+\widehat{y}\|^2 + \|\widehat{x}-\widehat{y}\|^2 = 2\big(\|\widehat{x}\|^2 + \|\widehat{y}\|^2\big). \tag{4}$$

Nechť $\varepsilon>0$ je dáno. Nalezneme prvky $a\in\widehat{x}$ a $b\in\widehat{y}$ takové, že $\|a\|^2\le\|x\|^2+\varepsilon$ a $\|b\|^2\le\|y\|^2+\varepsilon$. Pak $a+b\in\widehat{x}+\widehat{y}$ a $a-b\in\widehat{x}-\widehat{y}$, a tedy

$$2\big(\|\widehat{x}\|^2 + \|\widehat{y}\|^2\big) \ge 2\big(\|a\|^2+\|b\|^2-2\varepsilon\big) = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 - 4\varepsilon \ge \|\widehat{x}+\widehat{y}\|^2 + \|\widehat{x}-\widehat{y}\|^2 - 4\varepsilon.$$

Na druhou stranu, nechť $a\in\widehat{x+y}=\widehat{x}+\widehat{y}$ a $b\in\widehat{x-y}=\widehat{x}-\widehat{y}$ splňují $\|a\|^2\le\|\widehat{x+y}\|^2+\varepsilon$ a $\|b\|^2\le\|\widehat{x-y}\|^2+\varepsilon$. Pak $\frac{1}{2}(a+b)\in\widehat{x}$ a $\frac{1}{2}(a-b)\in\widehat{y}$, a tedy

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}+\widehat{y}\|^2 + \|\widehat{x}-\widehat{y}\|^2 &= \|\widehat{x+y}\|^2 + \|\widehat{x-y}\|^2 \ge \|a\|^2+\|b\|^2-2\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\|a+b\|^2+\|a-b\|^2\right) - 2\varepsilon\\ &= 2\left(\|\frac{1}{2}(a+b)\|^2 + \|\frac{1}{2}(a-b)\|^2\right) - 2\varepsilon \ge 2\left(\|\widehat{x}\|^2+\|\widehat{y}\|^2\right) - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy (4) platí a X/Y má normu generovanou skalárním součinem. $\square$

3. Hahnova-Banachova věta

3.1. Banachova limita

VĚTA 6. *Nechť ℓ_∞ značí prostor všech omezených reálných posloupností se supremovou normou. Nechť je operátor $t\colon \ell_\infty\to\ell_\infty$ definován jako*

$$t\colon (x_1,x_2,x_3,\dots)\mapsto(x_2,x_3,x_4,\dots),\qquad x=\{x_n\}\in\ell_\infty.$$

Pak existuje zobrazení $\Lambda\colon \ell_\infty\to\mathbb{R}$ splňující pro každé $x\in\ell_\infty$

(a) $\Lambda(t(x)) = \Lambda x$,
(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \le \Lambda x \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

DŮKAZ. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $\Lambda_n \colon \ell_\infty \to \ell_\infty$

$$\Lambda_n x = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad x \in \ell_\infty.$$

Nechť

$$Y = \{x \in \ell_\infty; \text{ existuje } \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x\}.$$

Nakonec uvažujme $p \colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definované jako

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n x.$$

Zjevně je Y podprostor X a zobrazení $\lambda \colon Y \to \mathbb{R}$ definované jako

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x, \quad x \in Y,$$

je lineární forma na Y splňující $\lambda \le p$. Dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3) existuje lineární forma $\Lambda \colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ splňující $\Lambda = \lambda$ na Y a $\Lambda \le p$ na ℓ_∞. Ověříme nyní, že pro $x \in \ell_\infty$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{5}$$

Vskutku, pro dané $c > \limsup_{n\to\infty} x_n$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n < c$ pro každé $n \ge n_0$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n)\\
&\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{n_0}) + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_{n_0+1} + \cdots + x_n)\\
&\le 0 + \limsup_{n\to\infty} \frac{c(n-n_0)}{n} = \limsup_{n\to\infty} c\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) = c.
\end{aligned}$$

Tím je nerovnost(5) ověřena.

Z ní ovšem okamžitě dostáváme vlastnost (b), neboť pro $x \in \ell_\infty$ máme

$$\Lambda x \le p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

a

$$\Lambda(-x) \le p(-x) \le \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n,$$

z čehož dostáváme $\Lambda x \ge \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Abychom ověřili vlastnost (a), uvažujme libovolné $x \in \ell_\infty$ a položme

$$y = x - t(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots).$$

Pak

$$\begin{aligned}
\Lambda(x - t(x)) = \lambda y \le p(y) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}((x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_{n+1}))\\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) = 0
\end{aligned}$$

a podobně

$$\Lambda(t(x) - x) \le p(-y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}((x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n)) = 0.$$

Tím je dokončen důkaz nejen vlastnosti (a), ale i celé věty.

□

4. Slabé topologie

TVRZENÍ 7. *Nechť X je nekonečněrozměrný pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X. Pak (X^*, w^*) je první kategorie v sobě.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že dle našich předpokladů je kanonické zobrazení $\varepsilon\colon X \to (X^*)^\#$ je prosté, a tedy $\dim X^* = \dim (X^*)^\# \geq \dim \varepsilon(X) = \dim X = \infty$.

Nechť $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ je spočetná báze $\tau(0)$. Je-li $f \in X^*$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|f(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in V_n$, neboli $f \in (V_n)^\circ$. To znamená, že $X^* = \bigcup_{n=1}^\infty (V_n)^\circ$. Množiny $(V_n)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ jsou w^*-uzavřené (Tvrzení 6.109(a)). Ukážeme, že každá z množin $(V_n)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ má prázdný vnitřek ve w^*-topologii, a tedy je řídká v (X^*, w^*). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pokud $(V_n)^\circ$ má neprázdný vnitřek, pak existuje $g \in X^*$ a symetrické $U \in w^*(0)$ tak, že $g + U \subset (V_n)^\circ$. Protože $(V_n)^\circ$ je absolutně konvexní (Tvrzení 6.109(a)), je $-g - U \subset (V_n)^\circ$, a tedy $U \subset \frac{1}{2}(g + U) + \frac{1}{2}(-g - U) \subset (V_n)^\circ$. Množina $(V_n)^\circ$ je tedy w^*-kompaktní (Věta 6.115) w^*-okolí 0, což je spor s nekonečnou dimenzí X^* (Věta 6.40).

□

TVRZENÍ 8. *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Pak (X, w) je separabilní právě tehdy, když (X, τ) je separabilní.*

DŮKAZ. Jelikož $w \subset \tau$, separabilita (X, τ) implikuje separabilitu (X, w). Obráceně, nechť $A \subset X$ je spočetná množina, pro kterou $\overline{A}^w = X$. Dle Věty 6.93(a) je $\overline{\operatorname{span} A}^\tau = \overline{\operatorname{span} A}^w = X$. Díky spojitosti sčítání a násobení skalárem snadno nahlédneme, že spočetná množina $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ všech lineárních kombinací prvků A s racionálními koeficienty je τ-hustá v $\operatorname{span} A$, a tedy i v X.

□

TVRZENÍ 9. *Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor. Pak (X^{**}, w^*) je separabilní.*

DŮKAZ. Nechť $A \subset X$ je spočetná a hustá. Pak $\varepsilon(X) \subset \overline{\varepsilon(A)} \subset \overline{\varepsilon(A)}^{w^*}$, takže $X^{**} = \overline{\varepsilon(X)}^{w^*} \subset \overline{\varepsilon(A)}^{w^*}$ dle poznámky za Goldstineovou větou (Věta 6.114).

□

Speciálně, (ℓ_∞, w^*) je separabilní.

Dle Důsledku 6.101(a) slabá topologie na ℓ_1 nesplývá s normovou, nicméně platí následující zajímavá věta:

VĚTA 10 (Issai Schur (1921)). *V prostoru ℓ_1 je každá slabě konvergentní posloupnost i normově konvergentní.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že díky slabé spojitosti sčítání stačí dokázat, že každá posloupnost slabě konvergující k 0 konverguje k 0 normově. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že existuje posloupnost $\{x_k\} \subset \ell_1$ slabě konvergující k 0 taková, že $\|x_k\| > \delta$ pro nějaké $\delta > 0$ a všechna $k \in \mathbb{N}$. Pomocí matematické indukce zkonstruujeme rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{n_j\}$ a $\{k_j\}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$ platí

(i) $\sum_{i=n_j}^\infty |x_{k_{j-1}}(i)| < \frac{\delta}{5}$ a

(ii) $\sum_{i=1}^{n_j-1} |x_{k_j}(i)| < \frac{\delta}{5}$.

Položme $n_1 = 1$ a $k_1 = 1$. Dále nechť $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$ a předpokládejme, že již máme nalezeny n_{j-1} a k_{j-1}. Díky konvergenci řady $\sum_{i=1}^\infty |x_{k_{j-1}}(i)|$ existuje $n_j > n_{j-1}$ takové, že $\sum_{i=n_j}^\infty |x_{k_{j-1}}(i)| < \frac{\delta}{5}$. Jelikož $x_k \to 0$ slabě, pro každou souřadnici $i \in \mathbb{N}$ platí, že $\lim_{k\to\infty} x_k(i) = 0$ (vezmeme funkcionály reprezentované vektory $(0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_\infty$). Proto existuje $k_j > k_{j-1}$ takové, že pro každé $i = 1, \dots, n_j - 1$ platí $|x_{k_j}(i)| < \frac{1}{n_j - 1}\frac{\delta}{5}$, což implikuje vlastnost (ii).

Vezměme nyní funkcionál $f \in \ell_1^*$ reprezentovaný vektorem $y \in \ell_\infty$ splňujícím $y(i) = \operatorname{cgn} x_{k_j}(i)$ pro $n_j \le i < n_{j+1}$ a $j \in \mathbb{N}$. Pro každé $j > 1$ pak díky vlastnostem (i) a (ii) dostáváme, že

$$\begin{aligned} |f(x_{k_j})| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} y(i)x_{k_j}(i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n_j-1} y(i)x_{k_j}(i) + \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} y(i)x_{k_j}(i) + \sum_{i=n_{j+1}}^{\infty} y(i)x_{k_j}(i)\right| \ge \\ &\ge \left|\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} y(i)x_{k_j}(i)\right| - \sum_{i=1}^{n_j-1}|x_{k_j}(i)| - \sum_{i=n_{j+1}}^{\infty}|x_{k_j}(i)| = \\ &= \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1}|x_{k_j}(i)| - \sum_{i=1}^{n_j-1}|x_{k_j}(i)| - \sum_{i=n_{j+1}}^{\infty}|x_{k_j}(i)| = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_{k_j}(i)| - 2\sum_{i=1}^{n_j-1}|x_{k_j}(i)| - 2\sum_{i=n_{j+1}}^{\infty}|x_{k_j}(i)| > \delta - 2\frac{\delta}{5} - 2\frac{\delta}{5} = \frac{\delta}{5}. \end{aligned}$$

To je však spor s předpokladem, že $x_{k_j} \to 0$ slabě.

□

5. Bochnerův integrál

TVRZENÍ 11. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Existuje prostor se σ-konečnou úplnou mírou (Ω, μ), metrický prostor X a měřitelné zobrazení $f : \Omega \to X$, které není silně měřitelné.

(ii) Existuje prostor s úplnou pravděpodobnostní mírou (Γ, μ) a měřitelné zobrazení $f : \Gamma \to \ell_2(\Gamma)$, které není silně měřitelné.

(iii) Existuje množina Γ a pravděpodobnostní míra μ definovaná na $\mathcal{P}(\Gamma)$ taková, že $\mu(\{\gamma\}) = 0$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. (card Γ *se pak nazývá reálně-hodnotově měřitelný kardinál.)*

DŮKAZ. (iii)⇒(ii) Položme $f(\gamma) = e_\gamma \in \ell_2(\Gamma)$ pro $\gamma \in \Gamma$. Zobrazení f je měřitelné, neboť každá podmnožina Γ je μ-měřitelná. K důkazu toho, že f není silně měřitelná, použijeme Lemma 8.6. Dle předpokladu je Γ nespočetná. Je-li nyní $E \subset \Gamma$ míry 0, pak $\Gamma \setminus E$ je nespočetná (jinak by μ byla nulová). Tedy $f(\Gamma \setminus E) = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma \setminus E\}$ je nespočetná $\sqrt{2}$-separovaná množina, takže není separabilní.

(ii)⇒(i) je triviální.

(i)⇒(iii) Za daných předpokladů je množina

$$\operatorname{ess\,Rng} f = \big\{y \in X;\ \mu\big(f^{-1}(U(y,\varepsilon))\big) \ne 0 \text{ pro každé } \varepsilon > 0\big\}$$

separabilní. Vskutku, v opačném případě by obsahovala nespočetnou ε-separovanou podmnožinu A pro nějaké $\varepsilon > 0$. Pak ovšem systém $\{f^{-1}(U(y, \frac{\varepsilon}{2}))\}_{y \in A}$ sestává z po dvou disjunktních množin kladné míry, což je ve sporu se σ-konečností μ.

Položme $Y = X \setminus \operatorname{ess\,Rng} f$. Pak Y je otevřená podmnožina X a podle Lemmatu 8.6 má $f^{-1}(Y)$ kladnou míru. Dále pro každé $y \in Y$ existuje $r_y > 0$ takové, že $\mu\big(f^{-1}(U(y, r_y))\big) = 0$. Pak $\{U(y, r_y);\ y \in Y\}$ je otevřené pokrytí metrického prostoru Y a podle Stoneovy věty[1] má toto pokrytí σ-diskrétní otevřené zjemnění. Existují tedy systémy $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$ otevřených podmnožin Y takové, že $\bigcup_{n=1}^\infty \bigcup \mathcal{U}_n = Y$, dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $U \in \mathcal{U}_n$ je $U \subset U(y, r_y)$ pro nějaké $y \in Y$, což implikuje, že $\mu(f^{-1}(U)) = 0$, a konečně prvky každého ze systémů $\mathcal{U}_n$ jsou po dvou disjunktní.

Protože $f^{-1}(Y) = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}\big(\bigcup \mathcal{U}_n\big)$ a množiny $\bigcup \mathcal{U}_n$ jsou otevřené, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu\big(f^{-1}\big(\bigcup \mathcal{U}_n\big)\big) > 0$. Položme $\Gamma = \mathcal{U}_n$, $E = f^{-1}\big(\bigcup \Gamma\big)$ a definujme zobrazení $g\colon E \to \Gamma$ předpisem $g(x) = U$ pro $x \in f^{-1}(U)$, $U \in \Gamma$. Díky disjunktnosti systému $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \Gamma}$ je g dobře definováno.

[1] Arthur Harold Stone (1948)

Tvrdíme, že g je $\mathcal{S}$–$\mathcal{P}(\Gamma)$ měřitelné, kde $\mathcal{S}$ je σ-algebra μ-měřitelných podmnožin E. Vskutku, pro libovolnou $\mathcal{A} \subset \Gamma$ je $g^{-1}(\mathcal{A}) = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} f^{-1}(U) = f^{-1}\big(\bigcup \mathcal{A}\big)$, což je μ-měřitelná množina, neboť $\bigcup \mathcal{A}$ je otevřená. Nyní stačí položit $\nu = \frac{1}{\mu(E)} g(\mu)$. Potom ν je zjevně pravděpodobnostní míra definovaná na $\mathcal{P}(\Gamma)$ a je-li $U \in \Gamma$, pak $\nu(\{U\}) = \frac{1}{\mu(E)} \mu\big(g^{-1}(\{U\})\big) = \frac{1}{\mu(E)} \mu(f^{-1}(U)) = 0$.

$\square$

6. Banachovy algebry

6.1. Prostor multiplikativních lineárních funkcionálů na $L_\infty([0,1])$

VĚTA 12. *Nechť $A = L_\infty([0,1])$ s Lebesgueovou mírou λ, $\Delta = \Delta(A)$ a nechť $\Gamma \colon A \to C(\Delta)$ je Gelfandova transformace. Uvažujme zobrazení*

$$Tf = \int_0^1 \Gamma^{-1} f \,\mathrm{d}\lambda, \quad f \in C(\Delta).$$

Pak T je nezáporný funkcionál na $C(\Delta)$, a tedy existuje jednoznačně určená nezáporná míra $\mu \in M(\Delta)$ splňující $\int_\Delta f \,\mathrm{d}\mu = Tf$, $f \in C(\Delta)$. Pak platí následující tvrzení:

(a) Míra μ je kladná na neprázdných otevřených podmnožinách Δ.
(b) Pro každou $g \in \mathrm{Bf_b}(\Delta)$ existuje $f \in C(\Delta)$ taková, že $g = f$ μ-skoro všude.
(c) Množina $\overline{U}$ je otevřená pro každou $U \subset \Delta$ otevřenou. Navíc $\mu(U) = \mu(\overline{U})$.
(d) Je-li $E \in \mathrm{Bs}(\Delta(A))$, pak $\mu(E) = \mu(\mathrm{Int}\, E) = \mu(\overline{E})$.
(e) Prostor Δ nemá izolovaný bod.
(f) Prostor Δ neobsahuje žádnou konvergentní podposloupnost, která by nebyla od jistého členu konstantní.

DŮKAZ. Před započetím důkazu tvrzení si povšimněme, že díky rovnostem

$$\operatorname{ess\,Rng} f = \sigma_A f = \sigma_{C(\Delta)} \Gamma f = \operatorname{Rng} \Gamma f$$

je Γf nezáporná, kdykoliv je $f \in A$ nezáporná. Dále pro $E \subset [0,1]$ λ-měřitelnou plyne z předcházející rovnosti, že $\operatorname{Rng} \Gamma \chi_E \subset \{0,1\}$, a tedy že se jedná o charakteristickou funkci obojetné množiny v Δ.

(a) Nechť $V \subset \Delta$ je neprázdná, otevřená množina. Nalezneme $g \in C(\Delta)$ takovou, že $0 \le g \le 1$, $g = 0$ vně V a $g(x) = 1$ pro nějaké $x \in V$. Označme $f = \Gamma^{-1} g$. Pak je f nenulová, nezáporná funkce v A. Proto dostáváme

$$0 < \int_0^1 f \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Delta g \,\mathrm{d}\mu = \int_V g \,\mathrm{d}\mu,$$

čili (a) platí.

(b) Je-li $g \in \mathrm{Bf_b}(\Delta)$ dána, nalezneme díky hustotě spojitých funkcí v $L_2(\mu)$ posloupnost $\{g_n\}$ v $C(\Delta)$ takovou, že $\|g - g_n\|_2 \to 0$. V případě potřeby upravíme g_n tak, aby $\|g_n\|_\infty \le 1$. Pak pro $f_n = \Gamma^{-1} g_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí $\|f_n\|_\infty \le 1$, $n \in \mathbb{N}$, a

$$\int_0^1 |f_n - f_m|^2 \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 (f_n - f_m)(\overline{f_n} - \overline{f_m}) \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Delta |g_n - g_m|^2 \,\mathrm{d}\mu, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Tedy je $\{f_n\}$ cauchyovská posloupnost v $L_2([0,1])$. Nechť $f \in L_2([0,1])$ je limita $\{f_n\}$ v $L_2([0,1])$. Pak pro $h = \Gamma f$ máme

$$\|g - h\|_2 \le \|g - g_n\|_2 + \|g_n - h\|_2 = \|g - g_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \to 0,$$

a tedy $g = h$ μ-skoro všude.

(c) Nechť $V \subset \Delta$ je otevřená. Dle (b) existuje $f \in C(\Delta)$ takové, že $f = \chi_V$ μ-skoro všude na Δ. Pak $\{x \in \Delta;\ f(x) \ne 0\}$ je otevřená množina μ-míry 0. Podle (a) je prázdná. Podobně z rovnosti

$$\mu(V \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 1\}) = 0 \quad \text{a} \quad \mu((\Delta \setminus \overline{V}) \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 0\}) = 0$$

plyne

$$V \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 1\} = (\Delta \setminus \overline{V}) \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 0\} = \emptyset.$$

Tedy $f = 1$ na V, a tedy ze spojitosti i na $\overline{V}$. Dále máme $f = 0$ na $\Delta \setminus \overline{V}$, a tedy $\overline{V} = \{x \in \Delta;\ f(x) > 0\}$ je otevřená množina. Navíc také máme

$$\chi_{\overline{V}} = f = \chi_V mu - \text{skoro všude.}$$

Tedy $\mu(V) = \mu(\overline{V})$.

(d) Je-li $E \in \mathrm{Bs}(\Delta)$, pro $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U takové, že $K \subset E \subset U$ a $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Jelikož

$$\mu(\Delta \setminus K) = \mu(\overline{\Delta \setminus K}) = \mu(\Delta \setminus \operatorname{Int} K),$$

dostáváme $\mu(K) = \mu(\operatorname{Int} K)$. Pak máme

$$\mu(\overline{E} \subset \mu(\overline{V}) = \mu(V) \le \mu(K) + \varepsilon = \mu(\operatorname{Int} K) + \varepsilon \le \mu(\operatorname{Int} E) + \varepsilon.$$

Tvrzení je tak dokázáno.

(e) Nejprve si povšimněme, že pro $E \subset [0,1]$ kladné míry λ je funkce $\gamma\chi_E$ charakteristická funkce obojetn0 množiny v Δ. Předpokládejme nyní, že $p \in \Delta$ je izolovaný bod. Pak $\{p\}$ je otevřená množina, a tedy $\mu(\{x\}) > 0$. Nechť $f = \Gamma^{-1}\chi_{\{p\}}$. Pak $f = \chi_E$ pro nějakou množinu splňující $\lambda(E) > 0$. Rozdělme E na dvě disjunktní množiny kladné míry. Pak $g_i = \Gamma\chi_{E_i}$, $i = 1, 2$, jsou charakteristické funkce neprázdných otevřených množin U_i, kterí jsou navíc disjunktní, neboť

$$0 = \Gamma\chi_\emptyset = \Gamma(\chi_{E_1}\chi_{E_2}) = \Gamma\chi_{E_1}\Gamma\chi_{E_2} = \chi_{U_1}\chi_{U_2}.$$

Tedy $\{p\} = U_1 \cup U_2$, kde U_1, U_2 jsou disjunktní, neprázdné množiny. To je však zřejmý spor.

(f) Nechť $\{p_n\}$ je posloupnost navzájem různých elementů Δ konvergující k $p \in \Delta$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je množina $\{p\} \cup \{p_n;\ n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}\}$ uzavřená a neobsahuje p_n. Existuje tak otevřené okolí V_n bodu p_n, které neobsahuje ostatní body posloupnosti. Uvažujme funkci

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in V_n, n \text{ liché,} \\ 1 & , x \in V_n, n \text{ sudé,} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak g je omezená, borelovská funkce, a tedy existuje $f \in C(\Delta)$ splňující $g = f$ μ-skoro všude. Jako v bodu (c) ukážeme, že $f = (-1)^n$ na V_n, $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že f není spojité v p.

□

DŮSLEDEK 13. *Nechť $\{E_i;\ i \in I\}$ je systém λ-měřitelných množin v* $[0,1]$. *Pak existuje λ-měřitelná množina $E \subset [0,1]$ taková, že $\lambda(E_i \setminus E) = 0$, $i \in I$ a je-li pokud $F \subset [0,1]$ λ-měřitelná se stejnou vlastností jako E, pak $\lambda(E \setminus F) = 0$.*

DŮKAZ. Nechť $\Delta = \Delta(L_\infty([0,1]))$. Položme $g_i = \Gamma\chi_{E_i}$, $i \in I$. Pak $U_i = \{x \in \Delta;\ g_i(x) = 1\}$ je obojetná množina v Δ. Položíme $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ a nechť $f = \Gamma^{-1}\chi_{\overline{U}}$. Pak $\operatorname{ess\,Rng} f = \operatorname{Rng} \chi_{\overline{U}} \subset \{0,1\}$. Hledanou množinu definujme jako

$$E = \{x \in [0,1];\ f(x) = 1\}.$$

Pak pro každé $i \in I$ platí $\Gamma\chi_{E_i} \le \Gamma\chi_E$, a tedy $\chi_{E_i} \le \chi_E$ λ-skoro všude. Z toho plyne první tvrzení.

Nechť nyní $F \subset [0,1]$ je libovolná množina splňující se stejnou vlastností. Pak pro každé $i \in I$ platí $\chi_{E_i} \le \chi_F$ λ-skoro všude, a tedy $\Gamma\chi_{E_i} \le \Gamma\chi_F$, $i \in I$. Tedy množina $V = \{x \in \Delta;\ \Gamma\chi_F(x) = 1\}$ je obojetná množina splňující $U_i \subset V$, $i \in I$. Tedy $U \subset V$, z čehož plyne $\chi_E \le \chi_F$ λ-skoro všude.

□

DŮSLEDEK 14. *Nechť λ je Lebesgueova míra na* $[0,1]$, *Σ je systém všech λ-měřitelných množin v* $[0,1]$ *a $\mathcal{N}$ je systém všech množin míry* 0. *Uvažujme Booleovu algebru $\mathcal{B} = \Sigma/\mathcal{N}$, tj. algebru vzniklou z Σ ztotožněním množin lišících se o míru* 0. *Pak $\mathcal{B}$ je úplná, tj. každý systém $\{B_i;\ i \in I\}$ v $\mathcal{B}$ má supremum a infimum.*

DŮKAZ. Nechť $[A]$ značí třídu ekvivalence příslušnou množině $A \in \Sigma$, tj. $B \in [A]$, pokud $A \triangle B \in \mathcal{N}$. Připomeňme, že pro $[A_1], [A_2] \in \mathcal{B}$ jsou Booleovy operace definovány jako

$$[A_1] \wedge [A_2] = [A_1 \cap A_2] \quad \text{a} [A_1] \vee [A_2] = [A_1 \cup A_2].$$

Je-li nyní $\{[A_i];\ i \in I\}$ nějaký systém v $\mathcal{B}$, nechť A je množina garantovaná Důsledkem 13. Pak $[A]$ je požadované supremum daného systému. Infimum pak nalezneme přechodem k doplňkům.

□

7. Rozklad identity

TVRZENÍ 15. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\mu\colon \mathcal{S} \to X$ je vektorová míra a $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ je omezená měřitelná. Pak $F\colon X^* \to \mathbb{K}$, $F(\phi) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_\phi$ je w^*-spojitý lineární funkcionál na X^*.*

DŮKAZ. Pro $A \in \mathcal{S}$ je $\mu_{\phi_1+\phi_2}(A) = (\phi_1 + \phi_2)(\mu(A)) = \phi_1(\mu(A)) + \phi_2(\mu(A)) = \mu_{\phi_1}(A) + \mu_{\phi_2}(A) = (\mu_{\phi_1} + \mu_{\phi_2})(A)$ a $\mu_{c\phi}(A) = c\phi(\mu(A)) = c\mu_\phi(A)$, tedy $\phi \mapsto \mu_\phi$ je lineární. Proto $F(\phi_1 + \phi_2) = \int f \,\mathrm{d}(\mu_{\phi_1} + \mu_{\phi_2}) = \int f \,\mathrm{d}\mu_{\phi_1} + \int f \,\mathrm{d}\mu_{\phi_2} = F(\phi_1) + F(\phi_2)$ a $F(c\phi) = \int f \,\mathrm{d}(c\mu_\phi) = c \int f \,\mathrm{d}\mu_\phi = cF(\phi)$, tedy F je lineární. Díky Důsledku 11.43 stačí ukázat, že $F\restriction_{B_{X^*}}$ je w^*-spojitá. Nechť $\{\phi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset B_{X^*}$ je net konvergující ve w^* k $\phi \in B_{X^*}$. Pak existuje $C > 0$ takové, že $\|\mu_\phi\| \le C$ a $\|\mu_{\phi_\gamma}\| \le C$ pro každé $\gamma \in \Gamma$ (viz důkaz Tvrzení 10.47). Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje jednoduchá měřitelná $g\colon \Omega \to \mathbb{K}$ taková, že $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3C}$. Nechť $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $A_j \in \mathcal{S}$. Pak existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ takové, že $|\phi_\gamma(\mu(A_j)) - \phi(\mu(A_j))| < \frac{\varepsilon}{3n|\alpha_j|}$ pro $j = 1, \dots, n$ a $\gamma \ge \gamma_0$. Potom pro $\gamma \ge \gamma_0$ platí, že

$$\left|\int g \,\mathrm{d}\mu_{\phi_\gamma} - \int g \,\mathrm{d}\mu_\phi\right| = \left|\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_{\phi_\gamma}(A_j) - \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_\phi(A_j)\right| \le \sum_{j=1}^n |\alpha_j||\phi_\gamma(\mu(A_j)) - \phi(\mu(A_j))| < \frac{\varepsilon}{3},$$

a tedy

$$\begin{aligned}|F(\phi_\gamma) - F(\phi)| \le \left|\int f \,\mathrm{d}\mu_{\phi_\gamma} - \int g \,\mathrm{d}\mu_{\phi_\gamma}\right| + \left|\int g \,\mathrm{d}\mu_{\phi_\gamma} - \int g \,\mathrm{d}\mu_\phi\right| + \left|\int g \,\mathrm{d}\mu_\phi - \int f \,\mathrm{d}\mu_\phi\right| < \\ < \|f - g\|_\infty \|\mu_{\phi_\gamma}\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - g\|_\infty \|\mu_\phi\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

■■■

DŮSLEDEK 16. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a $\mu\colon \mathcal{S} \to X$ je vektorová míra. Nechť $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ je taková, že $f \in L_1(|\mu_\phi|)$ pro každé $\phi \in X^*$. Pak $F\colon X^* \to \mathbb{K}$, $F(\phi) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_\phi$ je spojitý lineární funkcionál na X^*.*

DŮKAZ. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $f_n = \chi_{A_n} f$, kde $A_n = \{x \in \Omega;\ |f(x)| \le n\}$ a dále $F_n(\phi) = \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu_\phi$ pro $\phi \in X^*$. Podle Lebesgueovy věty (Věta 15.97) je tedy $F_n(\phi) \to F(\phi)$ pro každé $\phi \in X^*$. Dle Tvrzení 15 je $F_n \in X^{**}$, takže dle důsledku principu stejnoměrné omezenosti (Důsledek 3.2) je $F \in X^{**}$.

□

8. Slabá kompaktnost

Připomeňme, že podmnožina A topologického prostoru X se nazývá relativně kompaktní v X, pokud $\overline{A}^X$ je kompaktní. Je zřejmé, že pokud A je relativně kompaktní v X, pak každý net v A má podnet konvergentní v X, a je známo, že v regulárních prostorech X platí i opačná implikace.

DEFINICE 17. Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Řekneme, že A je

- relativně spočetně kompaktní v X, pokud každá posloupnost v A má podnet konvergentní v X;
- relativně sekvenciálně kompaktní v X, pokud každá posloupnost v A má podposloupnost konvergentní v X.

Někdy je užitečná následující varianta Eberleinovy-Šmuljanovy věty:

VĚTA 18 (W. F. Eberlein, V. L. Šmuljan). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $K \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) K je relativně kompaktní v (X, w).
(ii) K je relativně spočetně kompaktní v (X, w).
(iii) K je relativně sekvenciálně kompaktní v (X, w).

Označme τ_{p} topologii bodové konvergence na prostoru $C(T)$, kde T je topologický prostor, a připomeňme též značení $C_{\mathrm{p}}(T) = (C(T), \tau_{\mathrm{p}})$. Jak se ukáže, následující pozorování nám pomůže při důkazu Eberleinovy-Šmuljanovy věty.

TVRZENÍ 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak zobrazení $\Phi\colon (X, w) \to C_{\mathrm{p}}((B_{X^*}, w^*))$, $\Phi(x) = \varepsilon_x \restriction_{B_{X^*}}$ je lineární izomorfismus do. Je-li X Banachův, pak* $\operatorname{Rng}\Phi$ *je uzavřený.*

DŮKAZ. Dle Tvrzení 6.123 je Φ lineární izometrie z X do $C((B_{X^*}, w^*))$. Je-li $\{x_\gamma\}$ net v X a $x \in X$, pak $\Phi(x_\gamma) \to \Phi(x)$ v τ_{p}, právě když $\Phi(x_\gamma)(f) \to \Phi(x)(f)$ pro každé $f \in B_{X^*}$, tedy právě když $f(x_\gamma) = \Phi(x_\gamma)(f) \to \Phi(x)(f) = f(x)$ pro každé $f \in B_{X^*}$, neboli právě když $x_\gamma \to x$ slabě. To znamená, že Φ je w–τ_{p} homeomorfismus.

Nechť nyní X je Banachův a nechť $\{x_\gamma\}$ je net v X takový, že $\Phi(x_\gamma) \to F \in C((B_{X^*}, w^*))$ v topologii τ_{p}. Definujme $\tilde{F}\colon X^* \to \mathbb{K}$ předpisem $\tilde{F} = F$ na B_{X^*} a $\tilde{F}(f) = \|f\| F\big(\frac{f}{\|f\|}\big)$ pro $f \in X^*$, $\|f\| > 1$. Pak $\varepsilon(x_\gamma)(f) = \|f\|\varepsilon(x_\gamma)\big(\frac{f}{\|f\|}\big) = \|f\|\Phi(x_\gamma)\big(\frac{f}{\|f\|}\big) \to \|f\| F\big(\frac{f}{\|f\|}\big) = \tilde{F}(f)$ pro $f \in X^*$, $\|f\| > 1$. Tedy $\varepsilon(x_\gamma) \to \tilde{F}$ bodově na X^*, což znamená, že $\tilde{F} \in (X^*)^\#$ (Fakt 6.39). Protože $\tilde{F}\restriction_{B_{X^*}} = F$, z Důsledku 11.43 plyne, že $\tilde{F}$ je w^*-spojitý, a tedy $\tilde{F} \in (X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$ (Důsledek 6.89). Proto je $F \in \operatorname{Rng}\Phi$.

□

Kompaktní prostory jsou relativně kompaktní v každém Hausdorffově nadprostoru. Spočetně kompaktní prostory jsou zjevně relativně spočetně kompaktní v každém nadprostoru a podobně pro sekvenciálně kompaktní prostory.

Nechť X je topologický prostor, $A \subset M \subset X$ a nechť $\mathcal{K}$ značí „kompaktní", „spočetně kompaktní", nebo „sekvenciálně kompaktní". Snadno si lze rozmyslet, že platí následující tvrzení (pro kompaktnost využijeme vztahu $\overline{A}^M = \overline{A}^X \cap M$):

- Je-li M relativně $\mathcal{K}$ v X, pak i A je relativně $\mathcal{K}$ v X.
- Je-li A relativně $\mathcal{K}$ v M, pak je A i relativně $\mathcal{K}$ v X. Pro kompaktnost je ovšem navíc třeba, aby byl $\overline{A}^X \subset M$ (to nastane, např. pokud X je Hausdorffův nebo M uzavřená).
- Je-li A relativně $\mathcal{K}$ v X a je-li $\overline{A}^X \subset M$ (speciálně je-li M uzavřená v X), pak je A i relativně $\mathcal{K}$ v M.

Je zřejmé, že zobrazení Φ z Tvrzení 19 převádí slabě $\mathcal{K}$ podmnožiny X na τ_{p}-$\mathcal{K}$ podmnožiny $\operatorname{Rng}\Phi \subset C((B_{X^*}, w^*))$ a opačně. Podle předchozího pak také Φ převádí podmnožiny X, které jsou slabě relativně $\mathcal{K}$ v X, na podmnožiny $\operatorname{Rng}\Phi$, které jsou τ_{p} relativně $\mathcal{K}$ v $C((B_{X^*}, w^*))$, a pokud X je Banachův, tak i opačně. Věta 11.47 a verze Věty 18 pro Banachovy prostory jsou tedy okamžitým důsledkem následující obecnější věty.

VĚTA 20. *Nechť K je spočetně kompaktní topologický prostor a $A \subset C_{\mathrm{p}}(K)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) A je kompaktní.
(ii) A je spočetně kompaktní.
(iii) A je sekvenciálně kompaktní.

Podobně jsou ekvivalentní následující tvrzení:

(i') *A je relativně kompaktní v $C_p(K)$.*
(ii') *A je relativně spočetně kompaktní v $C_p(K)$.*
(iii') *A je relativně sekvenciálně kompaktní v $C_p(K)$.*

V důkazu několikrát použijeme následující větu.

VĚTA 21. *Nechť K je spočetně kompaktní topologický prostor, $A \subset C_p(K) \subset \mathbb{K}^K$ je relativně spočetně kompaktní v $C_p(K)$ a $f \in \overline{A}^{\mathbb{K}^K}$. Pak $f \in C_p(K)$ a existuje posloupnost $\{f_n\} \subset A$ taková, že $f_n \to f$.*

DŮKAZ. Dokážeme reálný případ; komplexní by se dokazoval analogicky. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ položme $I_k^n = \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$. Není-li f spojitá, pak je nespojitá v nějakém $x_0 \in K$ a existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $x_0 \in \overline{Q}$, kde $Q = \{x \in K;\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$. V tom případě položíme $f_0 = \chi_Q$ a $D_0 = \{x_0\}$. Je-li f spojitá, pak položíme $f_0 = f$ a $D_0 = \emptyset$. Pomocí matematické indukce nalezneme posloupnost $\{D_n\}$ konečných podmnožin K a posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) Pro každou k-tici $(k_0, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ obsahuje D_n prvek množiny $f_0^{-1}(I_{k_0}^n) \cap \dots \cap f_{n-1}^{-1}(I_{k_{n-1}}^n)$, je-li tato neprázdná.
(ii) Pro každé $x \in D_0 \cup \dots \cup D_n$ je $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$.

Vskutku, nechť $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že jsme již nalezli množiny $D_1, \dots, D_{n-1}$ a funkce $f_1, \dots, f_{n-1}$. Pak nejprve vezmeme libovolnou konečnou množinu $D_n \subset K$ splňující (i). Takovou množinu lze nalézt konečnou, neboť funkce $f_0, \dots, f_{n-1}$ jsou na K omezené. Funkce $f_n \in A$ splňující (ii) potom existuje díky předpokladu, že $f \in \overline{A}$.

Nechť $g \in C_p(K)$ je libovolným hromadným bodem posloupnosti $\{f_n\}$, tj. existuje podnet posloupnosti $\{f_n\}$ konvergující bodově ke g. (Nějaké takové g existuje, neboť A je relativně spočetně kompaktní v $C_p(K)$.) Z vlastnosti (ii) plyne, že $f_n(z) \to f(z)$ pro každé $z \in D = \bigcup_{n=0}^\infty D_n$. Tedy $g = f$ na D. Nechť $x \in K$ je libovolné, pokud f je spojitá, v opačném případě položme $x = x_0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vezměme takové $x_n \in D_n$, že $x_n \in f_0^{-1}(I_{k_0}^n) \cap \dots \cap f_{n-1}^{-1}(I_{k_{n-1}}^n)$, kde $I_{k_j}^n$ jsou nějaké intervaly, pro které $f_j(x) \in I_{k_j}^n$, $j = 1, \dots, n-1$ a $f(x) \in I_{k_0}^n$ pro f spojitou, resp. $1 \in I_{k_0}^n$ pro f nespojitou. (Příslušný průnik je neprázdný: Je-li f spojitá, pak průnik obsahuje alespoň x; není-li f spojitá, pak $f_1^{-1}(I_{k_1}^n) \cap \dots \cap f_{n-1}^{-1}(I_{k_{n-1}}^n)$ je otevřené okolí $x = x_0$, a tudíž má neprázdný průnik s množinou $f_0^{-1}(I_{k_0}^n) = Q$.) Pro pevné $j \in \mathbb{N}$ pak platí, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n > j$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $f_j(x_n) \in I_k^n$ a $f_j(x) \in I_k^n$ (pro dané n vezmeme $k = k_j$ z konstrukce x_n výše). To znamená, že $|f_j(x_n) - f_j(x)| < \frac{2}{n}$. Tedy $f_j(x_n) \to f_j(x)$. (Pro f spojitou to platí i pro $j = 0$.) Posloupnost $\{x_n\}$ má nějaký hromadný bod $y \in K$, tj. existuje podnet $\{x_{n_\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ takový, že $x_{n_\gamma} \to y$. Tedy $y \in \overline{D}$. Nechť $j \in \mathbb{N}$. Pak $\{f_j(x_{n_\gamma})\}_{\gamma \in \Gamma}$ je podnet posloupnosti $\{f_j(x_n)\}_{n=1}^\infty$, takže $f_j(x_{n_\gamma}) \to f_j(x)$. Díky spojitosti ovšem též $f_j(x_{n_\gamma}) \to f_j(y)$, což znamená, že $f_j(y) = f_j(x)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. (Je-li f spojitá, pak navíc $f(y) = f_0(y) = f_0(x) = f(x)$.) Odtud plyne, že $g(y) = g(x)$.

Předpokládáme-li, že f není spojitá, pak díky tomu, že $g = f$ na D, $\{x_n\} \subset D \cap Q$ a $x = x_0 \in D$, dostáváme, že $|g(x_n) - g(y)| = |g(x_n) - g(x_0)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je ovšem spor se spojitostí g. Tedy $f \in C_p(K)$. Ukážeme, že $f_n \to f$.

Díky relativní spočetné kompaktnosti A v $C_p(K)$ stačí ukázat, že posloupnost $\{f_n\}$ nemá v $C_p(K)$ jiný hromadný bod než f. Nechť tedy $g \in C_p(K)$ je hromadným bodem posloupnosti $\{f_n\}$ a nechť $x \in K$ je libovolné. Podle předchozího existuje $y \in \overline{D}$ takové, že $f(y) = f(x)$ a $g(y) = g(x)$. Díky spojitosti ovšem $g = f$ na $\overline{D}$, takže $g(x) = g(y) = f(y) = f(x)$.

□

DŮSLEDEK 22. *Nechť K je spočetně kompaktní topologický prostor, $A \subset M \subset C_p(K)$ a A je relativně spočetně kompaktní v M. Pak $\overline{A} \subset M$.*

DŮKAZ. Nechť $f \in \overline{A}$. Pak podle Věty 21 existuje posloupnost $\{f_n\} \subset A$ taková, že $f_n \to f$. Dle předpokladu má $\{f_n\}$ hromadný bod $g \in M$. Díky Hausdorffovosti $C_p(K)$ je tedy $f = g \in M$.

□

DŮKAZ VĚTY 20. Nejprve dokážeme druhou část věty. Implikace (i')$\Rightarrow$(ii') a (iii')$\Rightarrow$(ii') jsou zřejmé.

(ii')$\Rightarrow$(iii') Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v A. Je-li v této posloupnosti nekonečně mnoho členů shodných, pak má $\{f_n\}$ zjevně konvergentní podposloupnost. V opačném případě existuje její prostá podposloupnost $\{g_n\}$. Tato posloupnost má v $C_{\mathrm{p}}(K)$ hromadný bod g. Pomocí případného vynechání jednoho členu můžeme předpokládat, že $g_n \neq g$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Množina $B = \{g_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset A$ je relativně spočetně kompaktní v $C_{\mathrm{p}}(K)$ a $g \in \overline{B}$. Díky Větě 21 tedy existuje posloupnost $\{h_k\}$ prvků množiny B taková, že $h_k \to g$. Nechť $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ je posloupnost taková, že $h_k = g_{m_k}$. Tato posloupnost nemá konstantní podposloupnost, neboť $g \notin B$. Položíme-li $k_1 = 1$ a $k_l = \min\{k \in \mathbb{N};\ m_k > m_{k_{l-1}}\}$ pro $l > 1$, pak $\{m_{k_l}\}$ i $\{k_l\}$ jsou rostoucí, takže $\{h_{k_l}\}$ je podposloupnost $\{g_n\}$ i $\{h_k\}$. To znamená, že $\{g_n\}$ (a tím pádem i $\{f_n\}$) má konvergentní podposloupnost.

(ii')$\Rightarrow$(i') Je-li $x \in K$, pak existuje $\gamma_x > 0$ takové, že $|f(x)| \leq \gamma_x$ pro každé $f \in A$. Vskutku, v opačném případě by existovala posloupnost $\{f_n\} \subset A$ taková, že $|f_n(x)| \to +\infty$. Taková posloupnost ovšem nemůže mít τ_{p}-konvergentní podnet. Tedy $A \subset \prod_{x\in K} B_{\mathbb{K}}(0,\gamma_x)$, přičemž vpravo je kompaktní podmnožina $(\mathbb{K}^K, \tau_{\mathrm{p}})$. Tedy $\overline{A}^{\mathbb{K}^K}$ je kompaktní a podle Věty 21 je $\overline{A}^{\mathbb{K}^K} = \overline{A}^{C_{\mathrm{p}}(K)}$, což znamená, že A je relativně kompaktní v $C_{\mathrm{p}}(K)$.

Dokažme nyní první část věty. Již víme, že implikace (iii)$\Rightarrow$(ii) platí vždy.

(ii)$\Rightarrow$(i) Dle Důsledku 22 pro $M = A$ je množina A je uzavřená. Tvrzení tak plyne z již dokázané druhé části věty.

(i)$\Rightarrow$(iii) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v A. Podle již dokázané druhé části věty je A relativně sekvenciálně kompaktní, a tedy existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ taková, že $f_{n_k} \to f \in C(K)$. Množina A je uzavřená, neboť τ_{p} je Hausdorffova, takže $f \in A$.

□

DŮSLEDEK 23. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor a $A \subset C(K)$. Pak A je slabě kompaktní, právě když je omezená a τ_{p}-kompaktní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Omezenost plyne z Tvrzení 6.28 a Věty 6.94. Dále pro každé $x \in K$ je Diracova míra $\delta_x \in C(K)^*$, takže $\tau_{\mathrm{p}} \subset w$. Odtud plyne, že A je τ_{p}-kompaktní.

$\Leftarrow$ Díky Větě 11.47 stačí ukázat, že A je slabě sekvenciálně kompaktní. Nechť tedy $\{f_n\} \subset A$. Podle Věty 20 je A τ_{p}-sekvenciálně kompaktní, takže existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ konvergující bodově k nějakému $f \in A$. Podle Příkladu 6.96 ovšem $f_{n_k} \to f$ slabě.

□

DŮKAZ VĚTY 18. Implikace (i)$\Rightarrow$(ii) a (iii)$\Rightarrow$(ii) jsou zřejmé. Dokažme opačné implikace. Nechť K je relativně spočetně kompaktní v (X, w) a nechť Φ je zobrazení z Tvrzení 19. Množina $\Phi(K)$ je relativně spočetně kompaktní v $\operatorname{Rng}\Phi$, a tedy i v $C_{\mathrm{p}}((B_{X^*}, w^*))$. Dle Věty 20 je $\Phi(K)$ relativně kompaktní i relativně sekvenciálně kompaktní v $C_{\mathrm{p}}((B_{X^*}, w^*))$. Dle Důsledku 22 je $\overline{\Phi(K)} \subset \operatorname{Rng}\Phi$, takže $\Phi(K)$ je relativně kompaktní i relativně sekvenciálně kompaktní v $\operatorname{Rng}\Phi$. Odtud plyne, že K je relativně kompaktní i relativně sekvenciálně kompaktní v (X, w).

Poznamenejme, že implikaci (ii)$\Rightarrow$(iii) lze dokázat i bez použití Věty 21: Nechť $\{x_n\} \subset K$. Množina $\Phi(K)$ je relativně sekvenciálně kompaktní v $C_{\mathrm{p}}((B_{X^*}, w^*))$, existují tedy podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $f \in C_{\mathrm{p}}((B_{X^*}, w^*))$ takové, že $\Phi(x_{n_k}) \to f$. Dle předpokladu dále existuje podnet $\{x_\gamma\}$ posloupnosti $\{x_{n_k}\}$ takový, že $x_\gamma \overset{w}{\to} x \in X$. Protože $\Phi(x_\gamma) \to \Phi(x)$, je nutně $f = \Phi(x)$, a tedy $x_{n_k} = \Phi^{-1}(\Phi(x_{n_k})) \overset{w}{\to} \Phi^{-1}(f) = x$.

□

DEFINICE 24. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá slabě kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ slabě relativně kompaktní v Y.

TVRZENÍ 25. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý slabě kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je slabě kompaktní.

(ii) $\overline{T(B_X)}$ *je slabě relativně kompaktní v* Y.
(iii) $\overline{T(B_X)}$ *je slabě kompaktní.*
(iv) Je-li $\{x_n\}$ *omezená posloupnost v* X, *pak posloupnost* $\{T(x_n)\}$ *má slabě konvergentní podposloupnost.*

DŮKAZ. Je-li $T\colon X \to Y$ slabě kompaktní lineární operátor, pak dle Tvrzení 6.28 a Věty 6.94 je $T(B_X) \subset \overline{T(B_X)}^w$ omezená. Tudíž T je spojitý dle Tvrzení 1.44.

(i)⇒(ii) je zřejmá.

(ii)⇔(iii) plyne z Věty 6.93, neboť $T(B_X)$ je konvexní (Fakt 1.43).

(iii)⇒(iv) Je-li $r > 0$ takové, že $\{x_n\} \subset B(0,r)$, pak $\frac{1}{r}x_n \subset B_X$. Podle Eberleinovy-Šmuljanovy věty (Věta 11.47) je $\overline{T(B_X)}$ slabě sekvenciálně kompaktní. Protože $\{T(\frac{1}{r}x_n)\} \subset T(B_X)$, existuje rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ taková, že $\{T(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je slabě konvergentní. Pak ovšem i $\{T(x_{n_k})\} = \{rT(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je slabě konvergentní.

(iv)⇒(i) Nechť $A \subset X$ je omezená a $\{y_n\}$ je posloupnost v $T(A)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ takové, že $y_n = T(x_n)$. Tedy $\{x_n\}$ je omezená a dle předpokladu lze z $\{y_n\} = \{T(x_n)\}$ vybrat slabě konvergentní podposloupnost. To znamená, že $T(A)$ je slabě relativně sekvenciálně kompaktní v Y. Podle Eberleinovy-Šmuljanovy věty (Věta 18) je pak $T(A)$ slabě relativně kompaktní v Y.

□

FAKT 26. *Složíme-li slabě kompaktní lineární operátor mezi normovanými lineárními prostory se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět slabě kompaktní operátor.*

DŮKAZ. Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a nechť $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ je slabě kompaktní. Pak $S(B_X)$ je omezená, a tedy $T \circ S(B_X) = T(S(B_X))$ je slabě relativně kompaktní v Z. Tedy $T \circ S$ je slabě kompaktní dle Tvrzení 25.

Obráceně, nechť $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ a nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je slabě kompaktní. Položme $A = T(B_X)$. Pak $\overline{A}^w$ je slabě kompaktní, dle Věty 6.98 je tedy $S(\overline{A}^w)$ je také slabě kompaktní. Proto je $S \circ T(B_X) = S(A) \subset S(\overline{A}^w)$ slabě relativně kompaktní v Z (slabá topologie na Z je Hausdorffova), což znamená, že $S \circ T$ je slabě kompaktní.

□

TVRZENÍ 27. *Nechť* X *je normovaný lineární prostor a* $K \subset X$ *je slabě kompaktní. Pak zobrazení* $\Phi\colon X^* \to C(K)$, $\Phi(f) = f\restriction_K$ *je spojité lineární zobrazení, které je navíc* w^*–τ_p *spojité. Dále je* $\Phi(B_{X^*})$ *slabě kompaktní, a tedy* Φ *je slabě kompaktní operátor.*

DŮKAZ. Zobrazení Φ je dobře definováno, neboť prvky X^* jsou slabě spojité (Důsledek 6.89), a zjevně je lineární. Podle Tvrzení 6.28 a Věty 6.94 existuje $R > 0$ takové, že $K \subset B(0,R)$. Pak $\|\Phi(f)\| = \sup_{y\in K}|\Phi(f)(y)| = \sup_{y\in K}|f(y)| \le \sup_{y\in K}\|f\|\|y\| \le R\|f\|$ pro každé $f \in X^*$, takže $\Phi \in \mathcal{L}(X^*, C(K))$. Dále je-li $\{f_\gamma\} \subset X^*$ net w^*-konvergující k $f \in X^*$, pak $\Phi(f_\gamma)(y) = f_\gamma(y) \to f(y) = \Phi(f)(y)$ pro každé $y \in K$, takže Φ je w^*–τ_p spojité. Protože B_{X^*} je w^*-kompaktní (Důsledek 6.116), plyne odtud, že $\Phi(B_{X^*})$ je τ_p-kompaktní. Podle Důsledku 23 je tedy $\Phi(B_{X^*})$ slabě kompaktní a podle Tvrzení 25 je Φ slabě kompaktní operátor.

□

Následující větu srovnejte se Schauderovou větou o kompaktních operátorech (Věta 4.13).

VĚTA 28 (Věra Ruvimovna Gantmacherová[2] (1940)). *Nechť* X *je normovaný lineární prostor,* Y *je Banachův prostor a* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T *je slabě kompaktní.*
(ii) $T^{**}(X^{**}) \subset \varepsilon(Y)$.
(iii) T^* *je slabě kompaktní.*

DŮKAZ. (i)⇒(iii) Položme $K = \left(\overline{T(B_X)}, w\right)$. Pak K je kompaktní (Tvrzení 25). Nechť $\Phi\colon Y^* \to C(K)$ je zobrazení z Tvrzení 27. Označme $W = \operatorname{Rng}\Phi$ a uvažujme Φ jako zobrazení $\Phi\colon Y^* \to W$. I v této

[2] Вера Рувимовна Гантмахер

interpretaci je $\Phi(B_{Y^*})$ slabě kompaktní (tj. $\sigma(W, W^*)$-kompaktní), neboť $(W, \sigma(W, W^*))$ je podprostor $(C(K), w)$ (Tvrzení 6.92). Slabá topologie na W je Hausdorffova, takže $\Phi(B_{Y^*})$ je slabě relativně kompaktní ve W, a tedy $\Phi\colon Y^* \to W$ je slabě kompaktní (Tvrzení 25).

Dále označme $Z = \overline{\operatorname{Rng} T}$. Jelikož $T(B_X) \subset \operatorname{Rng} T = T(\operatorname{span} B_X) = \operatorname{span} T(B_X) \subset \operatorname{span} K$, je $K \subset Z \subset \overline{\operatorname{span}} K$, odkud konečně plyne, že $Z = \overline{\operatorname{span}} K$. Odtud, z definice Φ a z Věty 4.4(a) tak dostáváme, že $\operatorname{Ker} \Phi = K^\perp = Z^\perp = \operatorname{Ker} T^*$.

Nechť $q\colon Y^* \to Y^*/Z^\perp$ je kanonické kvocientové zobrazení a nechť $\widehat{\Phi} \in \mathcal{L}(Y^*/Z^\perp, W)$ a $\widehat{T^*} \in \mathcal{L}(Y^*/Z^\perp, X^*)$ jsou prosté faktorizační operátory z Faktu 3.8, tj. $\Phi = \widehat{\Phi} \circ q$ a $T^* = \widehat{T^*} \circ q$. Pak $\Psi = \widehat{\Phi}^{-1}\colon W \to Y^*/Z^\perp$ je lineární zobrazení a $\Psi \circ \Phi = \Psi \circ \widehat{\Phi} \circ q = q$. Odtud plyne, že $T^* = \widehat{T^*} \circ \Psi \circ \Phi$. Označme $S = \widehat{T^*} \circ \Psi$. Pak $S\colon W \to X^*$ je lineární a $T^* = S \circ \Phi$. Stačí tedy ukázat, že S je spojité, a podle Faktu 26 je pak T^* slabě kompaktní.

Nechť tedy $g \in W$. Pak existuje $f \in Y^*$ takový, že $g = \Phi(f)$, a platí, že

$$\begin{aligned}\|S(g)\| &= \|S \circ \Phi(f)\| = \|T^* f\| = \sup_{x \in B_X} |T^* f(x)| = \sup_{x \in B_X} |f(Tx)| = \\ &= \sup_{y \in T(B_X)} |f(y)| = \sup_{y \in K} |f(y)| = \sup_{y \in K} |\Phi(f)(y)| = \sup_{y \in K} |g(y)| = \|g\|_W.\end{aligned}$$

Použitá faktorizace operátorů je znázorněna v následujícím diagramu:

$$\begin{tikzcd}
X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \arrow[d, "\Phi"] \arrow[dl, "q"] \\
Y^*/Z^\perp \arrow[u, "\widehat{T^*}"] & W \arrow[l, "\Psi"] \arrow[ul, "S"']
\end{tikzcd}$$

(iii)⇒(ii) Zjevně stačí ukázat, že $T^{**}(B_{X^{**}}) \subset \varepsilon(Y)$. Díky již dokázané implikaci (i)⇒(iii) je T^{**} slabě kompaktní. Dále je $T^{**}(\varepsilon_X(B_X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ (Tvrzení 4.5). Množina $\overline{T^{**}(\varepsilon_X(B_X))}^w$ je slabě kompaktní, tedy i w^*-kompaktní, a tím pádem i w^*-uzavřená. Proto je $\overline{T^{**}(\varepsilon_X(B_X))}^{w^*} = \overline{T^{**}(\varepsilon_X(B_X))}^w \subset \varepsilon_Y(Y)$, neboť $\varepsilon_Y(Y)$ je uzavřený v Y^{**} (Tvrzení 2.26), a tedy i slabě uzavřený (Věta 6.93). Konečně, operátor T^{**} je w^*–w^* spojitý (Tvrzení 6.112), díky Goldstineově větě (Věta 6.114) tedy platí, že $T^{**}(B_{X^{**}}) = T^{**}\big(\overline{\varepsilon_X(B_X)}^{w^*}\big) \subset \overline{T^{**}(\varepsilon_X(B_X))}^{w^*} \subset \varepsilon_Y(Y)$.

(ii)⇒(i) Dle Důsledku 6.116 a Tvrzení 6.112 je $T^{**}(B_{X^{**}})$ kompaktní v topologii $\sigma(Y^{**}, Y^*)$. Dle předpokladu je tedy $\sigma(\varepsilon_Y(Y), Y^*)$-kompaktní a speciálně $\sigma(\varepsilon_Y(Y), Y^*)$-uzavřená. Díky Faktu 6.118 a Tvrzení 4.5 tak dostáváme, že

$$\varepsilon_Y\big(\overline{T(B_X)}^w\big) = \overline{\varepsilon_Y(T(B_X))}^{\sigma(\varepsilon_Y(Y), Y^*)} = \overline{T^{**}(\varepsilon_X(B_X))}^{\sigma(\varepsilon_Y(Y), Y^*)} \subset T^{**}(B_{X^{**}}).$$

Odtud plyne, že $\varepsilon_Y\big(\overline{T(B_X)}^w\big)$ je $\sigma(\varepsilon_Y(Y), Y^*)$-kompaktní, a tedy dle Faktu 6.118 je $\overline{T(B_X)}^w$ slabě kompaktní.

□

Důkaz věty 11.46. Nechť $\Phi\colon X^* \to C(K)$ je zobrazení z Tvrzení 27. Dle Věty 28 je Φ^* slabě kompaktní. Položme $A = \{\delta_x;\ x \in K\} \subset M(K) = C(K)^*$ (Věta 2.20). Je-li $x \in K$, pak pro každé $f \in X^*$ je $\Phi^*(\delta_x)(f) = \delta_x(\Phi(f)) = f\restriction_K(x) = f(x) = \varepsilon(x)(f)$, kde $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je kanonické vnoření. Tedy $\Phi^*(\delta_x) = \varepsilon(x)$. Množina A je omezená, tedy i $\operatorname{conv} A$ je omezený. Proto je $\varepsilon(\overline{\operatorname{conv}}\, K) = \overline{\operatorname{conv}}\, \varepsilon(K) = \overline{\operatorname{conv}}^w\, \Phi^*(A) = \overline{\Phi^*(\operatorname{conv} A)}^w$ slabě kompaktní (Tvrzení 2.26, Věta 6.93, Tvrzení 6.106). Tedy $\overline{\operatorname{conv}}\, K = \varepsilon^{-1}(\varepsilon(\overline{\operatorname{conv}}\, K))$ je slabě kompaktní (Věta 6.98). Pro aconv K je důkaz zcela totožný.

□

Kapitola 15

Dodatek

1. Funkce více proměnných

VĚTA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že funkce $D^\alpha f$ jsou spojité na Ω pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ splňující $|\alpha| \le k$. Pak $f \in C^k(\Omega)$.*

DŮKAZ. Použijeme indukci dle k. Pro $k = 1$ se jedná přímo o definici prostoru $C^1(\Omega)$. Nechť nyní $k > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro menší řády. Pak z indukčního předpokladu plyne, že $f \in C^{k-1}(\Omega)$. Musíme ukázat, že všechny parciální derivace k-tého řádu funkce f jsou spojité na Ω. Nechť tedy $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$. Pro zkrácení zápisu budeme používat následující symboliku: $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ apod. Nalezněme permutaci π množiny $\{1, \dots, k\}$ takovou, že $i_{\pi(1)} \le i_{\pi(2)} \le \cdots \le i_{\pi(k)}$, a uvědomme si, že existuje multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takový, že $\partial_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f = D^\alpha f$. Rozlišíme dva případy. Nejprve předpokládejme, že $\pi(1) = 1$. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$. Odtud

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

Nechť nyní $\pi(1) > 1$ a nechť $\sigma: \{1, \dots, k-2\} \to \{2, \dots, k\} \setminus \{\pi(1)\}$ je nějaká bijekce. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_1}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x) \quad \text{a} \tag{1}$$

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) \tag{2}$$

pro každé $x \in \Omega$. Označme $g = \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f$. Pak $g \in C^1(\Omega)$ a díky (1) platí

$$\partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_1} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_1}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce. Podle věty o záměně druhých parciálních derivací (viz např. [Z, Věta 2.87]) tedy platí $\partial_{i_1}\partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_1} g(x) = D^\alpha f(x)$ pro každé $x \in \Omega$. Odtud a s pomocí (2) pak dostaneme

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_1}\partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

□

■■■[potřebujeme větu o lokálně stejnoměrné konvergenci $D^\alpha f_n$ na $\mathbb{R}^n$]

VĚTA 2. *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost nekonečně diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ taková, že pro každý multiindex α konverguje posloupnost $\{D^\alpha f_n\}$ stejnoměrně k funkci f_α. Pak je funkce $f_0 = \lim f_n$ nekonečně diferencovatelná a $D^\alpha f_0 = f_\alpha$ pro každý multiindex α.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že posloupnost $\{f_n\}$ sestává z reálných funkcí. Nejprve dokážeme následující fakt.

Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitě diferencovatelných reálných funkcí na $\mathbb{R}^d$ taková, že $\{D^{e_j} f_n\}$ konverguje stejnoměrně k funkci f_{e_j} pro každé $j \in \{1, \dots, d\}$ a $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k funkci f. Pak f je spojitě diferencovatelná a $D^{e_j} f = f_{e_j}$.

Pro důkaz faktu fixujme $j \in \{1, \dots, d\}$ pevné a pišme

$$f_n(x + te_j) - f_n(x) = \int_0^t D^{e_j} f_n(x + se_j)\, \mathrm{d}s, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}.$$

Limitním přechodem pro n jdoucí do nekonečna obdržíme

$$f(x + te_j) - f(x) = \int_0^t f_{e_j}(x + se_j)\, \mathrm{d}s, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož je f_{e_j} spojitá, standardním odhadem odvodíme existenci $D^{e_j} f(x)$ a rovnost $D^{e_j} f(x) = f_{e_j}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Tedy f je spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}^d$.

Nyní přistupme k důkazu věty. Vzhledem ke spojitosti funkcí f_α nám stačí dokázat, že pro každý multiindex α platí $D^\alpha f_0 = f_\alpha$. Postupujme indukcí. Pro $\alpha = (0, \dots, 0)$ zjevně platí $D^\alpha f_0 = f_0$. Předpokládejme tedy, že $n \in \mathbb{N}$ a rovnost platí pro každý multiindex α řádu nejvýše $n - 1$. Nechť α je multiindex řádu n a $j \in \{1, \dots, d\}$ je první index splňující $\alpha_j > 0$. Pak $\beta = \alpha - e_j$ je multiindex řádu nejvýše $n - 1$, a tedy $D^\beta f_0 = f_\beta$ dle indukčního předpokladu. Uvažujme dokázaný fakt pro funkce $g_n = D^\beta f_n$ a $g = D^\beta f_0$. Pak $D^{e_k} g_n$ konvergují stejnoměrně k $f_{\beta+e_k}$, $k \in \{1, \dots, d\}$, takže dostáváme, že g je spojitě diferencovatelná a $D^{e_k} g = f_{\beta+e_k}$, $k \in \{1, \dots, d\}$. Pro $k = j$ tak máme

$$D^\alpha f_0 = D^{e_j} D^\beta f_0 = D^{e_j} g = f_{\beta+e_j} = f_\alpha.$$

Tím je důkaz věty dokončen.

□

2. Metrické prostory

VĚTA 3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Podmnožina $\mathbb{C}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z obecné věty o kompaktních metrických prostorech.

$\Leftarrow$ Definujme zobrazení $f\colon (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_2)$ předpisem

$$f(z_1, \dots, z_n) = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n).$$

Snadno je vidět, že f je bijekce. Dále

$$\begin{aligned}\|(z_1, \dots, z_n) - (y_1, \dots, y_n)\|_2^2 &= \|(z_1 - y_1, \dots, z_n - y_n)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |z_i - y_i|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \big((\operatorname{Re}(z_i - y_i))^2 + (\operatorname{Im}(z_i - y_i))^2\big) = \|f(z_1 - y_1, \dots, z_n - y_n)\|_2^2 = \\ &= \|f(z_1, \dots, z_n) - f(y_1, \dots, y_n)\|_2^2,\end{aligned}$$

tedy f je izometrické zobrazení. Speciálně f je homeomorfismus, který zobrazuje omezené množiny na omezené množiny. Odtud již tvrzení plyne.

□

VĚTA 4. *Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g\colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P. Jestliže $f = g$ na M, pak $f = g$ na celém P.*

DŮKAZ. Zvolme $x \in P$. Pak z hustoty M plyne existence posloupnosti $\{x_n\} \subset M$ splňující $x_n \to x$. Tedy $f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x)$.

□

FAKT 5. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ je stejnoměrně spojitá na P.*

DŮKAZ. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $x, y \in P$, $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak existuje $a \in A$ takové, že $\rho(x, a) < \operatorname{dist}(x, A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\operatorname{dist}(y, A) - \operatorname{dist}(x, A) < \rho(y, a) - \rho(x, a) + \frac{\varepsilon}{2} \le \rho(x, y) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Opačnou nerovnost obdržíme snadno záměnou x za y.

□

LEMMA 6. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $K \subset P$ je kompaktní a $K \subset G \subset P$ je otevřená. Pak* $\operatorname{dist}(K, P \setminus G) > 0$.

DŮKAZ. Dle Faktu 5 je funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, P \setminus G)$ spojitá na P, nabývá tedy na kompaktu K minima, např. v bodě $y \in K$. Pak $\operatorname{dist}(K, P \setminus G) = \operatorname{dist}(y, P \setminus G) > 0$, neboť $P \setminus G$ je uzavřená a $y \notin P \setminus G$.

□

VĚTA 7. *Součin $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1, \dots, X_n$ je též úplný.*

DŮKAZ. Nechť $\rho_1, \dots, \rho_n$ jsou příslušné metriky na $X_1, \dots, X_n$. Označme $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ a připomeňme, že součinová metrika je dána vzorcem $\rho(x, y) = \max_{i=1,\dots,n}\{\rho_i(x(i), y(i))\}$ pro prvky $x, y \in X$, $x = (x(i))_{i=1}^n$, $y = (y(i))_{i=1}^n$. Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $k, l \in \mathbb{N}$ máme $\rho_i(x_k(i), x_l(i)) \le \rho(x_k, x_l)$, tedy pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je posloupnost $\{x_k(i)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská v X_i. Z úplnosti X_i plyne existence $x(i) \in X_i$ takového, že $\lim_k x_k(i) = x(i)$ v prostoru X_i. Položme $x = (x(1), \dots, x(n)) \in X$. Pak zjevně $x_n \to x$ v X.

□

VĚTA 8. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $f : P \to Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Pak limita $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existuje, právě když je splněna následující (Bolzanova-Cauchyova) podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in (U(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A : \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je téměř zřejmá.

$\Leftarrow$ Protože $a \in A'$, existuje posloupnost $\{x_n\} \subset A \setminus \{a\}$ taková, že $x_n \to a$. Snadno ověříme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská: Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $\delta > 0$ je příslušné δ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in U(a, \delta)$ pro každé $n \ge n_0$. Tedy $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ kdykoli $m, n \ge n_0$. Protože prostor Q je úplný, existuje $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in Q$. Tvrdíme, že $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = y$:

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $u, v \in (U(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$. Dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in U(a, \delta)$ pro každé $n \ge n_0$, a $n_1 \ge n_0$ takové, že $\sigma(f(x_n), y) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $n \ge n_1$. Tedy $\sigma(f(x), y) \le \sigma(f(x), f(x_{n_1})) + \sigma(f(x_{n_1}), y) < \varepsilon$ pro každé $x \in (U(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$.

□

VĚTA 9. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na P.*

DŮKAZ. Zobrazení f zřejmě splňuje v každém bodě $a \in P \setminus M$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku z Věty 8. Můžeme tedy položit $g(a) = f(a)$ pro $a \in M$ a $g(a) = \lim_{x \to a, x \in M} f(x)$ pro $a \in P \setminus M$. Ukážeme, že takto definované zobrazení $g : P \to Q$ je stejnoměrně spojité na P: Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u, v \in M$ a $\rho(u, v) < \delta$. Nechť nyní $x, y \in P$, $\rho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Je-li $x \in M$, položme $x_1 = x$. V opačném případě existuje $0 < \delta_1 \le \frac{\delta}{3}$ takové, že $\sigma(g(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u \in U(x, \delta_1) \cap M$. Z hustoty M tedy plyne existence $x_1 \in M$ splňujícího $\rho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Obdobně obdržíme $y_1 \in M$ splňující $\rho(y, y_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(y), f(y_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\rho(x_1, y_1) \le \rho(x_1, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_1) < \delta$. Dohromady tedy máme $\sigma(g(x), g(y)) \le \sigma(g(x), f(x_1)) + \sigma(f(x_1), f(y_1)) + \sigma(f(y_1), g(y)) < \varepsilon$.

Jednoznačnost rozšíření plyne z Věty 4.

□

Následující drobné zobecnění plyne snadno z důkazu Věty 9.

VĚTA 10. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f\colon M \to Q$ je zobrazení stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách M. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách P.*

POZNÁMKA 11. Není obtížné si rozmyslet, že Tietzeova věta o rozšiřování spojitých funkcí platí i pro funkce s komplexními hodnotami: Nechť X je prostor, ve kterém platí Tietzeova věta (např. metrický prostor), $F \subset X$ je uzavřená množina a $f\colon F \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak $f = u + iv$, kde u, v jsou spojité reálné funkce na F. Podle Tietzeovy věty tedy existují reálné funkce U, V spojité na X rozšiřující u, resp. v. Položme $h = U + iV$. Pak h je spojitá na X a rozšiřuje f. Na závěr položme $R = \sup_{x\in F}|f(x)|$ a definujme $\varphi\colon \mathbb{C} \to B_{\mathbb{C}}(0,R)$ předpisem $\varphi(z) = z$ pro $|z| \le R$ a $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ pro $|z| > R$. Pak φ je spojité zobrazení (tzv. spojitá retrakce na $B_{\mathbb{C}}(0,R)$). Funkce $g = \varphi \circ h$ je tedy spojitá na X a snadno je vidět, že g rozšiřuje f a $\sup_{x\in X}|g(x)| \le R$.

Často využijeme následující přímý důsledek Baireovy věty:

DŮSLEDEK 12. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že všechny F_n mají prázdný vnitřek. Pak všechny F_n jsou řídké v P, tedy P je první kategorie (v sobě). Podle Baireovy věty je ovšem P druhé kategorie, což je spor.

□

FAKT 13. *Nechť P je separabilní metrický prostor. Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém uzavřených podmnožin P, pak existuje jeho spočetný podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ takový, že $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{S}$.*

DŮKAZ. Množina $P \setminus \bigcap \mathcal{F}$ má Lindelöfovu vlastnost, takže existuje spočetný podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ takový, že $P \setminus \bigcap \mathcal{F} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}}(P \setminus F) = \bigcup_{F\in\mathcal{S}}(P \setminus F) = P \setminus \bigcap \mathcal{S}$.

□

Připomeňme, že pro funkci $f\colon P \to \mathbb{K}$ na metrickém prostoru P je nosič f definován jako $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in P;\ f(x) \neq 0\}}$.

LEMMA 14. ■■■*[doplnit hausdorffovost do použití] Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor, $F \subset K$ je uzavřená a $U \subset K$, $U \supset F$ je otevřená. Pak platí:*
(a) Existuje otevřená $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
(b) Existuje spojitá funkce $f\colon K \to [0,1]$ splňující $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset U$.

DŮKAZ. Důkaz provedeme pouze pro metrický kompaktní prostor K.

(a) Pokud je F prázdná, stačí položit $V = \emptyset$. V případě $U = K$ položíme $V = K$. Ve zbývajících případech platí $d = \operatorname{dist}(F, K \setminus U) > 0$, neboť $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K \setminus U)$ je spojitá funkce (Fakt 5), která nabývá minima na kompaktní množině F. Položíme-li tedy

$$V = \left\{x \in K;\ \operatorname{dist}(x,F) < \tfrac{d}{2}\right\},$$

máme $F \subset V \subset \overline{V} \subset \{x \in K;\ \operatorname{dist}(x,F) \le \frac{d}{2}\} \subset U$, přičemž opět využíváme spojitosti funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x,F)$.

(b) Je-li F prázdná, položíme $f = 0$ na K, je-li $U = K$, položíme $f = 1$ na K. Ve zbývajících případech najdeme díky tvrzení (a) otevřenou množinu $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Požadovanou funkci pak získáme pomocí formule

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, K \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, K \setminus V) + \operatorname{dist}(x,F)} \quad \text{pro } x \in K.$$

Skutečně, podobně jako v (a) odvodíme, že $\operatorname{dist}(F, K \setminus V) > 0$, odkud plyne, že jmenovatel je vždy kladný. Pak f je spojitá díky Faktu 5, zjevně $f = 1$ na K a $\{x \in K;\ f(x) > 0\} \subset V$, tedy $\operatorname{supp} f \subset \overline{V} \subset U$.

□

VĚTA 15 (Spojitý rozklad jednotky). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí K otevřenými množinami. Pak existují spojité funkce $f_1, \dots, f_n \colon K \to [0,1]$ splňující* $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ *pro $i = 1, \dots, n$ a $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.*

DŮKAZ. Pro každý bod $x \in K$ najdeme $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $x \in U_i$, a z Lemmatu 14(a) nalezneme otevřenou množinu V_x splňující $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Díky kompaktnosti existuje konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_m \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Definujme uzavřené množiny F_i, $i = 1, \dots, n$ jako

$$F_i = \bigcup \{\overline{V_{x_j}};\ \overline{V_{x_j}} \subset U_i\}.$$

Pak každá F_i je uzavřená množina splňující $F_i \subset U_i$ a platí $K \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$. Podle Lemmatu 14(b) existují spojité funkce $g_1, \dots, g_n \colon K \to [0,1]$ takové, že $g_i = 1$ na F_i a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Pak $\sum_{i=1}^n g_i > 0$ na K. Pro $i = 1, \dots, n$ a $x \in K$ položme

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{\sum_{j=1}^n g_j(x)}.$$

Pak f_i je spojitá funkce do $[0,1]$ a $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, n$ a platí $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.

□

Nechť P je metrický prostor. Symbol $\operatorname{Bs}(P)$ značí σ-algebru všech borelovských podmnožin P a $\operatorname{Bf_b}(P)$ značí systém všech omezených borelovských funkcí na P.

Následující tvrzení je zjednodušenou verzí klasické Lebesgueovy-Hausdorffovy věty.

VĚTA 16. *Nechť P je metrický prostor. Nechť Φ je nejmenší systém funkcí na P, který obsahuje $C_b(P)$ a je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Pak $\Phi = \operatorname{Bf_b}(P)$.*

DŮKAZ. Prostor $\operatorname{Bf_b}(P)$ je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností (bodová limita posloupnosti funkcí měřitelných vzhledem k σ-algebře je opět měřitelná), takže $\Phi \subset \operatorname{Bf_b}(P)$. Abychom dokázali opačnou inkluzi, ukážeme nejprve, že Φ je uzavřený na lineární kombinace a součin. Za tím účelem definujeme pro ordinály $\alpha \in [0, \omega_1)$ množiny Φ_α pomocí transfinitní rekurze. Položme $\Phi_0 = C_b(P)$ a pro $\alpha \in (0, \omega_1)$ definujme

$$\Phi_\alpha = \left\{f \colon P \to \mathbb{K};\ f \text{ je bodovou limitou nějaké omezené posloupnosti } \{f_n\} \subset \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} \Phi_\beta\right\}.$$

Zřejmě $\Phi_\alpha \subset \Phi_\beta$ pro $\alpha \le \beta < \omega_1$. Pomocí transfinitní indukce snadno nahlédneme, že každá z množin Φ_α je uzavřená na součet, násobek skalárem a součin, a že $\Phi_\alpha \subset \Phi$. Na druhou stranu množina $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Phi_\alpha$ je uzavřená vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností: je-li $f_n \to f$ pro $f_n \in \Phi_{\alpha_n}$, pak $\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, a tedy $f_n \in \Phi_\beta$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $f \in \Phi_{\beta+1}$. To znamená, že $\Phi = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Phi_\alpha$, a tedy Φ je uzavřený na lineární kombinace a součin.

Dále ukážeme, že $\chi_A \in \Phi$ pro každou borelovskou $A \subset P$. Označme $\mathcal{S} = \{A \in \operatorname{Bs}(P);\ \chi_A \in \Phi\}$. Pak $\mathcal{S}$ je σ-algebra: Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{S}$. Je-li $A \in \mathcal{S}$, pak $\chi_{P\setminus A} = 1 - \chi_A \in \Phi$, tedy $P \setminus A \in \mathcal{S}$. Dále pro $A, B \in \mathcal{S}$ je $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B \in \Phi$, odkud plyne, že $\mathcal{S}$ je uzavřená na konečná sjednocení. Jsou-li nyní $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ a $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, pak položíme $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{S}$ a obdržíme, že $\chi_{B_n} \to \chi_A$ bodově, takže $A \in \mathcal{S}$.

Ukážeme-li, že $\mathcal{S}$ obsahuje uzavřené podmnožiny P, dostaneme, že $\mathcal{S} = \operatorname{Bs}(P)$. Nechť $F \subset P$ je uzavřená. Definujme $f_n(x) = (1 - n \operatorname{dist}(x, F))^+$ pro $x \in P$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in C_b(P)$, posloupnost $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to \chi_F$ bodově, takže $\chi_F \in \Phi_1 \subset \Phi$.

Systém Φ tedy obsahuje všechny jednoduché borelovské funkce na P. Protože každá omezená borelovská funkce je bodovou limitou omezené posloupnosti jednoduchých borelovských funkcí, plyne odtud, že $\operatorname{Bf_b}(P) \subset \Phi$.

□

3. Topologické prostory

3.1. Základní pojmy

DEFINICE 17. Nechť X je množina a τ je systém podmnožin X. Řekneme, že (X,τ) je topologický prostor, pokud má τ následující vlastnosti.

- Platí $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
- Pokud $\mathcal{U} \in \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.
- Je-li $\mathcal{U} \in \tau$ konečný, je i množina $\bigcap \mathcal{U} \in \tau$.

Množiny z τ se nazývají otevřené.

DEFINICE 18. Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $A \subset X$.

- Pokud $X \setminus A \in \tau$, nazývá se A uzavřená.
- Množina $\overline{A} = \bigcap\{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ uzavřená}\}$ se nazývá uzávěrem A.
- Množina $\operatorname{Int} A = \bigcup\{U \subset X;\ U \subset A,\ U \text{ otevřená}\}$ se nazývá vnitřkem A.
- Množina $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ se nazývá hranicí A.

LEMMA 19. *Nechť (X,τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

- *Množina $\emptyset$ i X je uzavřená.*
- *Systém uzavřených množin je uzavřený vzhledem k libovolným průnikům a konečným sjednocením.*

DEFINICE 20. Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ je dáno. O množině $A \subset X$ řekneme, že je okolím x, pokud $x \in \operatorname{Int} A$. Označme

$$\tau(x) = \{U \subset X;\ U \text{ je okolí } x\}.$$

DEFINICE 21. (a) Nechť $(I,\le)$ je nahoru usměrněná uspořádaná množina, tj. $\le$ je uspořádání na I a pro každou dvojici $i,j \in I$ existuje $k \in I$ splňující $i \le k$ a $j \le k$. Množina $I' \subset I$ je kofinální, pokud pro každé $i \in I$ existuje $j \in I'$ splňující $i \le j$.

(b) Nechť X je množina. Je-li $f: I \to X$ libovolná funkce, nazýváme ji netem (zobecněnou posloupností) a značíme $\{x_i\}_{i\in I}$, kde $x_i = f(i)$. Pokud $(J,\le)$ je též nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina a $\phi\colon J \to I$ splňuje, že pro každé $i_0 \in I$ existuje $j_0 \in J$ takové, že pro $j \ge j_0$ platí $\phi(j) \ge i_0$, nazveme net $\{x_{\phi(j)}\}_{j\in J}$ podnetem netu $\{x_i\}$.

(c) Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ a $\{x_i\}$ je net. Pak $x = \lim_{i\in I} x_i$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $i_i \in I$ takové, že $x_i \in U$ pro $i \ge i_0$.

Bod x je hromadným bodem $\{x_i\}$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ a $i_0 \in I$ existuje $i \ge i_0$ splňující $x_i \in U$.

LEMMA 22. *Nechť (X,τ) je topologický prostor a $\{x_{\phi(j)}\}_{j\in J}$ je podnet netu $\{x_i\}_{i\in I}$. Pokud $x_i \to x$, pak také $x_{\phi(j)} \to x$.*

LEMMA 23. *Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $A \subset X$ a $x \in X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Platí $x \in \overline{A}$.
(ii) Pro každé $U \in \tau(x)$ platí $U \cap A \ne \emptyset$.
(iii) Existuje net $\{x_i\}$ obsažený v A a konvergující k x.

DEFINICE 24. Nechť X je množina a $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.

(a) Pak $\mathcal{F}$ je filtr, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,
- $H \in \mathcal{F}$, kdykoliv $F \in \mathcal{F}$ a $H \supset F$.

(b) Systém $\mathcal{F}$ je báze filtru, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ existuje $F_3 \in \mathcal{F}$ splňující $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

(c) Systém $\mathcal{F}$ je ultrafiltr, pokud $\mathcal{F}$ je maximální filtr vhledem k inkluzi, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, kdykoliv $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ a $\mathcal{G}$ je filtr.

DEFINICE 25. Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$ je báze filtru. Řekneme, že $\mathcal{F}$ konverguje k x (píšeme $x = \lim \mathcal{F}$), pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F \subset U$.

TVRZENÍ 26. *Nechť X je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $\mathcal{F}$ je báze filtru v X a nechť $x = \lim \mathcal{F}$. Uvažujme $\mathcal{F}$ uspořádaná obrácenou inkluzí a pro každé $F \in \mathcal{F}$ zvolíme $x_F \in F$. Pak $\{x_F\}$ je net a $\lim x_F = x$.

(b) Nechť $\{x_i\}$ je net v X a $x \in X$ je jeho limita. Pro každé $i \in I$ položme $F_i = \{x_j;\ j \geq i\}$. Pak systém $\mathcal{F} = \{F_i;\ i \in I\}$ je báze filtru a $x = \lim \mathcal{F}$.

TVRZENÍ 27. *Nechť X je množina. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ báze filtru, je množina

$$\{H \subset X;\ \exists F \in \mathcal{F} \text{ splňující } F \subset H\}$$

filtr.

(b) Je-li množina $\mathcal{F}$ filtr, existuje ultrafiltr $\mathcal{G}$ obsahující $\mathcal{F}$.

DŮKAZ. Tvrzení (a) je zřejmé a k ověření (b) stačí aplikovat Zornovo lemma.

□

DEFINICE 28. Nechť (X,τ) a (Y,σ) jsou topologické prostory a $f\colon X \to Y$ je zobrazení. Zobrazení f nazveme spojitým, pokud $f^{-1}(V) \in \tau$ pro každou $V \in \sigma$.

LEMMA 29. *Nechť (X,τ) a (Y,σ) jsou topologické prostory a $f\colon X \to Y$ je zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Zobrazení f je spojité.
(ii) Pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F)$ uzavřená.
(iii) Pro každou $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(iv) Pro každý bod $x \in X$ a každé $V \in \sigma(f(x))$ existuje $U \in \tau(x)$ splňující $f(U) \subset V$.
(v) Pro každý net $\{x_i\}$ v X konvergující k $x \in X$ platí $f(x_i) \to f(x)$.

DEFINICE 30. Nechť (X,τ) a (Y,σ) jsou topologické prostory a $f\colon X \to Y$ je zobrazení. Pak f je sekvenciálně spojité, pokud $f(x_n) \to f(x)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v X konvergující k $x \in X$.

PŘÍKLADY 31. (a) Je-li (X,ρ) metrický prostor, zahrňme do τ_ρ ty množiny $U \subset X$, které splňují

$$\forall x \in U \exists r > 0\colon U(x,r) = \{y \in X;\ \rho(x,y) < r\} \subset U.$$

Pak (X,τ_ρ) je topologický prostor

(b) Nechť X je množina. Pokud $\tau = \mathcal{P}(X)$, dostáváme diskrétní topologii, pokud $\tau = \{\emptyset, X\}$, máme indiskrétní topologii.

DEFINICE 32. Topologický prostor (X,τ) se nazývá metrizovatelný, pokud na něm existuje metrika ρ splňující $\tau = \tau_\rho$.

3.2. Oddělovací axiomy

DEFINICE 33. Nechť (X,τ) je topologický prostor.

(a) Prostor X je T_1, pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje otevřená množina U splňující $x_1 \in U$ a $x_2 \notin U$.

(b) Prostor X je T_2 (Hausdorffův), pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$.

(c) Prostor X je T_3 (regulární), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_1 \in U_1$ a $F \subset U_2$.

(d) Prostor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ (úplně regulární či Tichonovův), pokud je T_1 a každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existuje $f\colon X \to [0,1]$ spojitá taková, že $f(x) = 0$ a $f = 1$ na F.

(e) Prostor X je T_4 (normální), pokud je T_1 a pro každé dvě uzavřené, disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ existují disjunktní, otevřené množiny $U_1, U_2 \subset X$ takové, že $F_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

TVRZENÍ 34. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*
(a) Pokud $i, j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$, $i \leq j$ a X je T_j, pak je i T_i.
(b) Prostor X je T_1 právě tehdy, když pro každý bod $x \in X$ je $\{x\}$ uzavřená množina.
(c) Prostor X je regulární, pokud pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existuje $V \in \tau(x)$ splňující $\overline{V} \subset U$.

PŘÍKLAD 35. Každý metrický prostor je normální.

◇

LEMMA 36 (Urysohn). *Nechť (X, τ) je normální topologický prostor. Pak pro každé dvě disjunktní, neprázdné uzavřené množiny $F_1, F_2 \subset X$ existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$ taková, že $f(F_1) \subset \{0\}$ a $f(F_2) \subset \{1\}$.*

VĚTA 37. *Nechť (X, τ) je normální topologický prostor. Nechť $F \subset X$ je neprázdná, uzavřená množina a $f : F \to \mathbb{K}$ je spojitá funkce. Pak existuje $g : X \to \mathbb{K}$ spojité zobrazení taková, že $g = f$ na F a $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $f \neq 0$. Pokud $Y = \mathbb{R}$, je tvrzení známé. Pokud $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, rozšíříme f po složkách a dostaneme tak $h : X \to \mathbb{C}$ rozšiřující f. Pokud $r = \|f\|_\infty = \infty$ jsme hotovi. V opačném případě uvažujme zobrazení $p : \mathbb{C} \to B(0, r)$ definované jako

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r), \\ z, & z \in B(0, r). \end{cases}$$

Pak p je spojitá funkce, a tedy je $g = p \circ h$ požadované rozšíření.

□

PŘÍKLAD 38. Vezměme na množině $\mathbb{N}$ následující topologie: báze τ_1 je tvořena množinami $\{n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a množinami osahujícími 1 s konečným doplňkem; báze τ_2 je tvořena množinami $\{n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ a množinami osahujícími 2 s konečným doplňkem. Zřejmě obě topologie jsou Hausdorffovy. Nicméně topologie $\tau = \tau_1 \cap \tau_2$ není Hausdorffova: Je-li $U \in \tau(1) \subset \tau_1(1)$, resp. $V \in \tau(2) \subset \tau_2(2)$, pak U i V mají konečný doplněk, a tedy $U \cap V \neq \emptyset$.

◇

3.3. Generování topologií

DEFINICE 39 (Báze). Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém $\mathcal{B} \subset \tau$ se nazývá báze τ, pokud pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ platí $U = \bigcup\{V \in \mathcal{B};\ V \subset U\}$.

DEFINICE 40 (Podprostor). Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pokud $Y \subset X$, pak $\sigma = \{U \cap Y;\ U \in \tau\}$ je topologie na Y. Prostor (Y, σ) se nazývá podprostorem X.

DEFINICE 41 (Homeomorfismus). Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je homeomorfismus X na $f(X)$), pokud f i $f^{-1} : f(X) \to X$ jsou spojité.

DEFINICE 42 (Projektivní generování). Nechť X je množina, (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $f : X \to X_i$, $i \in I$, jsou zobrazení. Položme

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(V_i);\ U_i \in \tau_i, F \in \mathcal{F}(I)\}.$$

Pro $U \in X$ položme $\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B};\ B \subset U\}$. Pak systém

$$\tau = \{U \subset X;\ U = \bigcup \mathcal{B}_U\}$$

tvoří topologii na X. Tato topologie se nazývá projektivně generovaná prostory X_i a zobrazením f_i, $i \in I$.

TVRZENÍ 43. *Nechť X je množina, (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $f : X \to X_i$, $i \in I$, jsou zobrazení. Nechť τ je systém definovaný v Definici 42. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém τ je topologie.
(b) Pokud (Y, σ) je topologický prostor a $f : Y \to X$ je zobrazení, pak f je spojité právě tehdy, když $f_i \circ f$ je spojité pro každé $i \in I$.

DEFINICE 44 (Součin prostorů). Nechť (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $X = \prod_{i \in I} X_i$. Uvažujme kanonické projekce $p_i : X \to X_i$, $j \in I$. Nechť τ je topologie projektivně generovaná tímto systémem. Pak τ se nazývá součinová topologie.

TVRZENÍ 45. *Operace podprostoru i součinu zachovávají vlastnosti T_j, $j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$.*

TVRZENÍ 46. *Nechť (X_n, τ_n), $n \in \mathbb{N}$, jsou metrizovatelné prostory. Pak je prostor $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ metrizovatelný metrikou*

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{\rho_n(x_n, y_n), 1\}, \quad x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X.$$

3.4. Kompaktní a lokálně kompaktní prostory

DEFINICE 47. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Pak X se nazývá kompaktní, pokud pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X (tj. $\mathcal{U}$ sestává z otevřených množin a $K \subset \bigcup \mathcal{U}$) existuje konečný podsystém $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ splňující $K \subset \bigcup \mathcal{U}'$.

(b) Množina $A \subset X$ se nazývá relativně kompaktní, pokud je podmnožinou kompaktní množiny v X.

(c) Prostor X se nazývá lokálně kompaktní, pokud každé $x \in X$ má bázi okolí tvořenou kompaktními množinami.

Je-li X Hausdorffův, pak (b) je ekvivalentní tomu, že $\overline{A}$ je kompaktní, a (c) je ekvivalentní tomu, že každý bod X má nějaké kompaktní okolí.

LEMMA 48. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak systém všech kompaktních podmnožin X je uzavřený na konečná sjednocení a libovolné průniky.*

TVRZENÍ 49. *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*
(a) Každá uzavřená množina v X je kompaktní.
(b) Je-li X Hausdorffův, je X je normální.
(c) Je-li X Hausdorffův, je lokálně kompaktní.
(d) Pokud Y je Hausdorffův topologický prostor a X je jeho podprostorem, je X v Y uzavřený.
(e) Pokud Y je topologický prostor a $f : X \to Y$ je spojité, je $f(X)$ kompaktní. Pokud f je prosté a Y je Hausdorffův, je f homeomorfizmus.

TVRZENÍ 50. *Nechť (X, τ) je Hausdorffův topologický prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
(a) Prostor X je kompaktní.
(b) Každý net v X má konvergentní podnet.
(c) Má-li neprázdný systém $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ složený z uzavřených množin konečnou průnikovou vlastnost (tj. $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ pro každou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ konečnou), je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

VĚTA 51 (Tichonov). *Součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

LEMMA 52. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak každá jeho otevřená podmnožina je lokálně kompaktní.*

TVRZENÍ 53. *Součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní.*

DEFINICE 54. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Je-li $f : X \to \mathbb{K}$ funkce, množinu $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}$ nazýváme nosičem funkce f. Symbol $C_c(X)$ pak značí prostor všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem.

(b) Je-li X lokálně kompaktní, značíme $C_0(X)$ prostor všech spojitých funkcí na X s vlastností, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in X;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompaktní.

DEFINICE 55. Nechť (X, τ) je lokálně kompaktní Hausdroffův prostor a α je bod do X nenáležící. Položme $\alpha X \cup \{\alpha\}$ a definujme topologii σ na αX takto. Množina $U \subset \alpha X$ je σ otevřená, pokud $U \cap X$ je τ-otevřená a je-li $\alpha \in U$, pak existuje kompaktní množina $F \subset X$ taková, že $\{\alpha\} \cup (X \setminus F) \subset U$.

Prostor αX se nazývá jednobodová (nebo Alexandrovova) kompaktifikace X.

TVRZENÍ 56. *Nechť (X, τ) je lokálně kompaktní Hausdroffův prostor a αX je zkonstruováno jako výše. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Prostor αX je kompaktní Hausdorffův.
(b) Bod α je v uzávěru X právě tehdy, když X není kompaktní.
(c) Každé $f \in C_0(X)$ dodefinujeme na $\widetilde{f} \in C(\alpha X)$ v bodě α hodnotou 0. Pak toto zobrazení zprostředkovává izometrický izomorfisums $C_0(X)$ a $\{f \in C(\alpha X);\ f(\alpha) = 0\}$.

VĚTA 57 (Urysohn a Tietze). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud $U \subset X$ otevřená množina splňuje $K \subset U$, pak existuje $f : X \to [0, 1]$ spojitá splňující $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \setminus U$.
(b) Je-li $g : K \to \mathbb{K}$ spojitá, existuje $f \in C_c(X)$ rozšiřující g, která splňuje $\|f\| = \|g\|$.

DŮKAZ. Uvažujme kompaktifikaci αX. Pak K je uzavřená a U otevřená v αX, a tedy (a) i (b) plyne z normality prostoru αX.

□

VĚTA 58 (Stone-Weierstraß pro $C(X, \mathbb{R})$). *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ je vektorový prostor obsahující konstanty a oddělující body X. Nechť dále*

- *$\mathcal{A}$ je algebra nebo*
- *$\mathcal{A}$ je svaz, tj. $\min\{f, g\}$ a $\max\{f, g\}$ jsou elementy $\mathcal{A}$ kdykoliv $f, g \in \mathcal{A}$.*

Pak $\mathcal{A}$ je hustý v $C(X, \mathbb{R})$).

VĚTA 59 (Stone-Weierstraß pro $C(X, \mathbb{C})$). *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $A \subset C(X, \mathbb{C})$ je podalgebra uzavřená na komplexní sdružování, obsahující konstanty a oddělující body X. Pak A je hustá v $C(X, \mathbb{C})$.*

VĚTA 60 (Stoneova-Weierstraßova pro lokálně kompaktní prostory). *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $A \subset C_0(X, \mathbb{K})$ je podalgebra uzavřená na komplexní sdružování, která odděluje body X a pro každé $x \in X$ existuje $f \in A$ tak, že $f(x) \neq 0$. Pak A je hustá v $C_0(X, \mathbb{K})$.*

DŮKAZ. Uvažujme prostor αX. Dodefinováním funkcí z $C_0(X, \mathbb{K})$ hodnotou 0 v α lze předpokládat, že $A \subset C(\alpha X, \mathbb{K})$. Uvažujme systém

$$B = \{f + c;\ f \in A, c \in \mathbb{K}\}.$$

Pak systém B splňuje předpoklady Věty 59, a tedy $\overline{B} = C(\alpha X, \mathbb{K})$. (Máme totiž pro $f + c$ a $g + d$ v B rovnost $(f + c)(g + d) = fg + cg + df + cd$, kde $fg + cg + df \in A$.)

Nechť $f \in C_0(X)$ je libovolná. Pak existují $g_n \in A$ a $c_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že funkce tvaru $f_n = g_n + c_n$ konvergují stejnoměrně k f. Jelikož

$$0 = f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} (g_n(\alpha) + c_n) = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

máme

$$g_n = (g_n + c_n) - c_n = f_n + c_n \rightrightarrows f.$$

Tedy $\overline{A} = C_0(X, \mathbb{K})$.

□

TVRZENÍ 61. *Nechť X je kompaktní prostor. Pokud existuje spočetný systém $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R})$ oddělující body, je X metrizovatelný.*

DŮKAZ. Uvažujme zobrazení

$$\varphi\colon X \to \prod_{n=1}^{\infty} f_n(X), \quad \varphi(x) = \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pak $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(X)$ je metrizovatelný a φ je homeomorfismus X na $\varphi(X)$. Tedy i X je metrizovatelný.

□

TVRZENÍ 62. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází. Pak existují kompaktní množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, s následujícími vlastnostmi:*

(a) $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.
(b) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.
(c) Pro každý kompakt $K \subset X$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset \operatorname{Int} K_n$.

DŮKAZ. Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná báze otevřených množin v X. Položme $\mathcal{A} = \{U \in \mathcal{B};\ U$ je relativně kompaktní$\}$. Pak $\mathcal{A}$ je také spočetná báze otevřených množin v X. Vskutku, je-li $G \subset X$ otevřená a $x \in G$, pak existuje $U \in \mathcal{B}$ taková, že $x \in U \subset G$. Protože U je okolí x a X je lokálně kompaktní, existuje $V \subset U$ kompaktní okolí x. Pak existuje $W \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in W \subset \operatorname{Int} V$, a tedy $W \in \mathcal{A}$ a $x \in W \subset V \subset U \subset G$.

Nechť $\mathcal{A} = \{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a nechť $V_n \subset X$ jsou kompaktní takové, že $U_n \subset V_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Indukcí nyní sestrojíme posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ takovou, že splňuje (a) a $U_n \subset K_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V prvním kroku položíme $K_1 = V_1$. Předpokládejme nyní, že máme pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ zkonstruovány kompakty K_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, takové, že $K_j \subset \operatorname{Int} K_{j+1}$ pro $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Díky kompaktnosti K_n existuje $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n+1$ takové, že $K_n \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j$. Položme $K_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} V_j$. Pak K_{n+1} je kompaktní množina, která obsahuje U_{n+1} a splňuje to, že $K_n \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena. Nalezená posloupnost očividně splňuje (a) a (b). Je-li $K \subset X$ libovolný kompakt, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j \subset \operatorname{Int} K_n$.

□

TVRZENÍ 63. *Každá shora polospojitá funkce na neprázdném kompaktním prostoru nabývá maxima.*

DŮKAZ. Nechť X je kompaktní prostor a f je shora polospojitá funkce na X. Položme $\alpha = \sup_X f$ a nechť $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ je rostoucí posloupnost s limitou α. Pak množiny $K_n = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha_n\}$ jsou neprázdné a kompaktní a systém $\{K_n\}$ je centrovaný. Existuje tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Dle definice je ovšem nutně $f(x) = \alpha$.

□

3.5. Čechova-Stoneova kompaktifikace

VĚTA 64. *Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Existuje kompaktní prostor Y a homeomorfní zobrazení $\varepsilon\colon X \to \operatorname{Rng}\phi \subset Y$ takové, že $\operatorname{Rng}\varepsilon$ je hustý v Y a pro každou $f \in C^b(X)$ existuje právě jedna funkce $g \in C(Y)$ taková, že $f(x) = g(\varepsilon(x))$, $x \in X$.*
(b) *Pokud Y_1, Y_2 jsou kompaktní prostory splňující (a), přičemž $\phi_i\colon X \to Y_i$, $i = 1, 2$, je příslušná vnoření, existuje surjektivní homeomorfismus $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ takový, že $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$, $x \in X$.*

DŮKAZ. (a) Uvažujme komutativní B*-algebru s jednotkou $A = C^b(X)$. Pak $Y = \Delta(A)$ je kompaktní prostor a $\Gamma\colon A \to C(Y)$ je izometrický $*$-izomorfismus. Uvažujme zobrazení $\varepsilon\colon X \to Y$ definované jako

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x\colon f \mapsto f(x), \quad f \in A, \quad x \in X.$$

Pak ε je požadované zobrazení.

Vskutku, nechť $\{x_i\}$ je net v X. Pokud konverguje k x, pak pro každé $f \in A$ platí $f(x_i) \to f(x)$, což podle definice topologie na Y znamená $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$. Tedy ε je spojité. Pokud $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$ v Y, nechť U je dané okolí x. Nalezneme funkci $f \in C^b(X)$ takovou, že $f(x) = 1$ a $f = 0$ vně U. Protože $f(x_i) = \varepsilon_{x_i}(f) \to \varepsilon_x(f) = f(x)$, existuje $i_i \in I$ takové, že pro $i \geq i_0$ platí $|f(x_i)| > 0$. Pro tato i je tedy $x_i \in U$. Ověřili jsme tak, že $x_i \to x$, tj. ε je homeomorfismus.

Dále ukážeme, že $\varepsilon(X)$ je hustý v Y. Kdyby tomu tak nebyl, existovala by nenulová funkce $g \in C(Y)$ splňující $g = 0$ na $\varepsilon(X)$. Pak je funkce $f = \Gamma^{-1}g$ nenulová, ale pro $x \in X$ platí

$$f(x) = \varepsilon_x(f) = (\Gamma f)(\varepsilon_x) = g(\varepsilon_x) = 0.$$

Tedy $f = 0$, což je spor.

Je-li nyní $f \in C^b(X)$ libovolná, pak funkce $g = \Gamma f$ splňuje

$$g(\varepsilon_x) = (\Gamma f)(\varepsilon x) = \varepsilon_x(f) = f(x), \quad x \in X.$$

Tedy ε a Y jsou hledané objekty.

(b) Nechť Y_i a ϕ_i, $i = 1, 2$, splňují (a). Označme $A_i = C(Y_i)$, $i = 1, 2$. Pro $g \in C(Y_2)$ uvažujme jednoznačně určenou funkci $i(g) \in C(Y_1)$, která splňuje $i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x))$, $x \in X$. Pak $i : A_2 \to A_1$ je izometrický $*$-izomorfismus. Tedy $i' \to A_1^* \to A_2^*$ je homeomorfismus $\Delta(A_1)$ na $\Delta(A_2)$. Nechť $\varepsilon_i \to \Delta(A_i)$ jsou homeomorfismy z Příkladu 9.80. Položme $\phi = \varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1$. Pak ϕ je homeomorfismus Y_1 na Y_2, který pro každé $x \in X$ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} g(\phi(\phi_1(x))) &= g((\varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x)) = ((i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x))(g) \\ &= (\varepsilon_1(\phi_1(x))(i(g)) = i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x), \quad g \in C(Y_2). \end{aligned}$$

Tedy $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$ a důkaz je hotov.

□

3.6. Souvislé prostory

DEFINICE 65. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Prostor X se nazývá souvislý, pokud neexistují neprázdné, otevřené, disjunktní množiny $U, V \subset X$ splňující $X = U \cup V$.
(b) Prostor X se nazývá lokálně souvislý, pokud pro každé $x \in X$ existuje báze okolí x ze souvislých množin.
(c) Prostor X se nazývá křivkově souvislý, pokud pro každé $x, y \in X$ existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to X$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = y$.
(d) Pro $x \in X$ označme

$$C_x = \bigcup\{C \subset X;\ C \text{ souvislá}, x \in C\}$$

(souvislou) komponentu bodu x.

TVRZENÍ 66. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Komponenty X jsou souvislé uzavřené podmnožiny X. Pokud $x, y \in X$, pak buď $C_x = C_y$, nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$.
(b) Je-li X lokálně souvislý, jsou komponenty souvislosti otevřené.
(c) Křivkově souvislý prostor je souvislý.
(d) Je-li X souvislý, Y topologický prostor a $f : X \to Y$ spojitá, pak $f(X)$ je souvislý.

PŘÍKLAD 67. Každá konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru je souvislá.

◇

LEMMA 68. *Nechť X je topologický prostor a $V \subset U \subset X$. Jestliže $\partial V \cap U = \emptyset$, pak*

$$V = \bigcup\{C;\ C \text{ je komponenta } U \text{ protínající } V\}.$$

DŮKAZ. $\subset$ Pro $x \in V$ stačí vzít komponentu U obsahující x.

$\supset$ Nechť C je komponenta U, která protíná V. Jelikož $X = \operatorname{Int} V \cup \partial V \cup (X \setminus \overline{V})$, platí dle předpokladu $U \subset \operatorname{Int} V \cup (X \setminus \overline{V})$. Množina C proto musí být obsažena ve V, neboť v opačném případě by množiny $C \cap \operatorname{Int} V$ a $C \cap (X \setminus \overline{V})$ tvořily rozklad C na dvě disjunktní neprázdné relativně otevřené množiny.

□

3.7. Metrizovatelnost

■■■[předělat pomocí Weilova pseudometrizačního lemmatu - Schechter]

VĚTA 69. *Nechť X je topologický vektorový prostor se spočetnou bází okolí* 0. *Pak existuje zobrazení $p\colon X \to [0, +\infty)$ takové, že*
(a) $p(\lambda x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K}$ splňující $|\lambda| \le 1$,
(b) pro každé $x, y \in X$ platí $p(x + y) \le p(x) + p(y)$,
(c) $p(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,■■■[pseudo!]
(d) metrika $\rho(x, y) = p(x - y)$, $x, y \in X$, generuje τ.
Prostor (X, τ) je tak metrizovatelný.

DŮKAZ. *Krok 1.* Zvolíme bázi $\{V_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ vyvážených okolí 0 splňující

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Nechť $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ značí systém všech neprázdných, konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ konečnou položíme

$$V_F = \sum_{n\in F} V_n \quad \text{a} \quad p_F = \sum_{n\in F} 2^{-n}.$$

Nejprve si rozmyslíme, že funkce $q\colon \mathcal{F}(\mathbb{N}) \to [0, 1)$ definovaná jako $q(F) = p_F$ je prostá. To však ihned plyne z faktu, že $2^{-n} > \sum_{k=n+1}^{n+m} 2^{-k}$ pro každé $n, m \in \mathbb{N}$.

Ukážeme nyní, že kdykoliv dvě množiny $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Navíc pak platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Důkaz provedeme indukcí podle počtu prvků množiny F_2.

Mějme množiny $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a $F_2 = \{l\}$, kde $l \in \mathbb{N}$, dány. Pokud $l \notin F_1$, stačí položit $F = F_1 \cup F_2$.

Pokud by platilo $F_1 \cap [1, l] = \{1, \dots, l\}$, dostali bychom spor s nerovností $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$. Tedy lze definovat $j = \max(\{1, \dots, l\} \setminus F_1)$. Označíme

$$A_1 = F_1 \cap [1, \dots, j-1], \quad A_2 = F_1 \cap [j+1, l] = \{j+1, \dots, l\} \quad \text{a} \quad A_3 = F_1 \cap [l+1, +\infty).$$

Položíme

$$F = A_1 \cup \{j\} \cup A_3.$$

Pak F má požadované vlastnosti.

Platí totiž

$$p_{F_1} + p_{F_2} = p_{A_1} + p_{\{j+1,\dots,l\}} + p_{A_3} = P_{\{l\}} = p_{A_1} + p_{\{j\}} + p_{A_3} = p_F.$$

Dále díky(3) máme

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{A_1} + V_{\{j+1,\dots,l\}} + V_{A_3} + V_{\{l\}} \subset V_{A_1} + V_{\{j\}} + V_{A_3} = V_F.$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je tvrzení ověřeno pro každou množinu $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a každou n-prvkovou množinu $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Nechť $F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ je má $n + 1$ prvků. Označme $m = \max F_2$. Pak $H = F_2 \setminus \{m\}$ má n prvků, a tedy podle indukčního předpokladu existuje množina $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_{F'} = p_{F_1} + p_H$ a $V_{F_1} + V_H \subset V_{F'}$. Na dvojici F' a $\{m\}$ nyní opět aplikujeme indukční předpoklad, a obdržíme tak množinu $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} \quad \text{a} \quad V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Pak

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_H + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_{F_2}$$

a

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{F_1} + V_H + V_{\{m\}} \subset V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Tím je důkaz existence F dokončen.

Díky prostotě funkce q je navíc F jednoznačně určena.

Krok 2. Ukážeme, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\colon p_F < 2^{-n} \implies n < \min F \implies V_F \subset V_n. \tag{4}$$

Důkaz provedeme indukcí podle počtu prvků množiny F. Nechť F je jednoprvková množina. Pišme $F = \{k\}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Pokud $p_F = 2^{-k} < 2^{-n}$, zjevně $n < k = \min F$. Tato nerovnost pak zřejmě implikuje $V_F = V_k \subset V_n$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou m-prvkovou podmnožinu $\mathbb{N}$. Nechť $F = \{k_1, \dots, k_{m+1}\}$, kde $k_1 < k_2 < \dots < k_{m+1}$ jsou čísla v $\mathbb{N}$, je dána. Nerovnost $p_F < 2^{-n}$ zjevně implikuje $n < \min F$. Předpokládejme nyní tuto nerovnost a označme $F' = \{k_2, \dots, k_{m+1}\}$. Pak $n + 1 \leq k_1 < \min F'$ a F' je m-prvková. Proto

$$V_F = V_{k_1} + \left(V_{k_2} + \dots + V_{k_{m+1}}\right) \subset V_{n+1} + V_{F'} \subset V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n.$$

Tím je(4) ověřeno.

Krok 3. Definujeme

$$p(x) = \begin{cases} \inf\{p_F;\ x \in V_F, F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\}, & x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} V_F, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases} \qquad x \in X.$$

Ověříme nyní pro funkci p vlastnosti (a)–(d). Pokud $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ a $x \in X$, pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ platí $\lambda x \in V_F$, pokud $x \in V_F$. Tedy (a) platí.

Dále ověříme (b). Nechť $x_1, x_2 \in X$ jsou dány. Pokud $p(x_1) + p(x_2) > 1$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy opačnou nerovnost a zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon < 1$. Nechť nyní $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $x_i \in V_{F_i}$ a $p_{F_i} < p(x_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Jelikož $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje právě jedna množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Díky prvnímu kroku platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Tedy $x_1 + x_2 \in V_F$, a proto

$$p(x_1 + x_2) \leq p_F = p_{F_1} + p_{F_2} \leq p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon.$$

Tím je vlastnost (b) ověřena.

Dále pro množiny

$$B_r = \{x \in X;\ p(x) \leq r\}, \quad r \in [0, +\infty),$$

platí inkluze

$$B_{2^{-(n+1)}} \subset V_n \subset B_{2^{-n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Vskutku, inkluze $V_n \subset B_{2^{-n}}$ je zřejmá, neboť $p(x) \leq 2^{-n}$, kdykoliv $x \in V_n$. Pokud je však $p(x) \leq 2^{-(n+1)}$, existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F < 2^{-n}$ a $x \in V_F$. Pak $x \in V_n$ díky(4).

Z(5) nyní plyne vlastnost (c), neboť

$$x = 0 \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \Leftrightarrow p(x) = 0, \quad x \in X.$$

Nakonec ověříme (d). Nechť τ_ρ značí topologii generovanou metrikou ρ. Z(5) pak plyne, že báze okolí 0 v τ_ρ, totiž systém $\{B_r;\ r > 0\}$, je též báze okolí 0 v τ. Z(5) však také plyne, že $\tau(0)$ je báze okolí 0 v τ_ρ. Jelikož je metrika ρ translačně invariantní, topologie τ a τ_ρ splývají.

□

3.8. Borelovské množiny a funkce

DEFINICE 70. (a) Nechť (X, τ) je topologický prostor. Symbolem $\mathrm{Bs}(X)$ označíme σ-algebru generovanou τ.

(b) Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je borelovské, pokud $f^{-1}(V) \in \mathrm{Bs}(X)$ pro každou $V \in \sigma$.

TVRZENÍ 71. *Nechť X je topologický prostor a $Y \subset X$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí

$$\mathrm{Bs}(Y) = \{Y \cap B;\ B \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$

(b) Pokud $Y \in \mathrm{Bs}(X)$, pak $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathrm{Bs}(X)$.

DŮKAZ. (a) Pišme σ pro topologii Y. Označme $\mathcal{A} = \{Y \cap A;\ A \in \mathrm{Bs}(X)\}$. Zjevně je $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující otevřené množiny Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{A}$. Nechť nyní $\mathcal{B}$ je libovolná σ-algebra v Y obsahující σ. Položme

$$\mathcal{C} = \{C \subset X;\ Y \cap C \in \mathcal{B}\}.$$

Pak $\mathcal{C}$ je σ-algebra v X obsahující τ. Tedy $\mathcal{C} \supset \mathrm{Bs}(X)$, z čehož plyne $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Jelikož $\mathcal{B}$ byla libovolná, platí $\mathcal{A} \subset \mathrm{Bs}(Y)$.

Tvrzení (b) nyní plyne z (a).

□

TVRZENÍ 72. *Nechť X, Y, Z jsou topologické prostory. Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ jsou borelovská zobrazení. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každou $B \in \mathrm{Bs}(Y)$ platí $f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)$.
(b) Zobrazení $g \circ f$ je borelovské.

DŮKAZ. (a) Označme

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y;\ f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$

Pak $\mathcal{B}$ je σ-algebra obsahující otevřené množiny prostoru Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{B}$.

Tvrzení (b) okamžitě plyne z (a).

□

4. Teorie míry

LEMMA 73. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ a $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ je součinová σ-algebra na $X \times Y$. Je-li $A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, pak $\operatorname{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathrm{c}$, kde $A^x = \{y \in Y;\ (x, y) \in A\}$.*

DŮKAZ. Označme $\mathcal{A} = \bigl\{A \subset X \times Y;\ \operatorname{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathrm{c}\bigr\}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Protože každý měřitelný obdélník zjevně leží v $\mathcal{A}$, plyne odtud, že $\mathcal{S} \times \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, což dokazuje tvrzení lemmatu.

Platí, že $\{(X \times Y)^x;\ x \in X\} = \{Y\}$, a tedy $X \times Y \in \mathcal{A}$. Dále pro $A \subset X \times Y$ a $x \in X$ je $Y \setminus A^x = (X \times Y \setminus A)^x$. Zobrazení $\Phi\colon M \mapsto Y \setminus M$ tedy zobrazuje $\{A^x;\ x \in X\}$ na $\{(X \times Y \setminus A)^x;\ x \in X\}$, odkud plyne, že $X \times Y \setminus A \in \mathcal{A}$ kdykoli $A \in \mathcal{A}$.

Nechť nyní $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prosté zobrazení $\psi_n\colon \{A_n^x;\ x \in X\} \to (0, 1)$. Je-li $M \in \bigl\{\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)^x;\ x \in X\bigr\}$, pak zvolme libovolně $x \in X$ tak, že $M = \bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)^x$, a položme $\Psi(M) = \bigl(\psi_n(A_n^x)\bigr)_{n=1}^{\infty} \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$. Pak $\Psi\colon \bigl\{\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)^x;\ x \in X\bigr\} \to (0, 1)^{\mathbb{N}}$ je prosté: Je-li $\Psi(M) = \Psi(N)$, pak existují $x, y \in X$ taková, že $M = \bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)^x$, $N = \bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)^y$ a $\psi_n(A_n^x) = \psi_n(A_n^y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z prostory ψ_n dostaneme, že $A_n^x = A_n^y$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)^x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^x = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^y = \bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)^y$, neboli $M = N$. Odtud již snadno plyne, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

□

4.1. Nezáporné míry

Následující tvrzení je přímým důsledkem Lebesgueovy věty o konvergenci (případně zobecněné věty Leviho).

DŮSLEDEK 74. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a $E, E_n \subset \Omega$ jsou měřitelné podmnožiny splňující buď $E_n \subset E_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ nebo $E_{n+1} \subset E_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Nechť dále $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p \to 0$. Speciálně, v případě $p = 1$ platí $\int_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Posloupnost $\{\chi_{E_n} f\}$ konverguje bodově k $\chi_E f$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \le |f|^p$. Podle Lebesgueovy věty tedy $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p^p = \int_\Omega |\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

□

VĚTA 75 (Hölderova nerovnost). *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, $f_1, \dots, f_n$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pak*

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_n \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_n}.$$

DŮKAZ. Použijeme matematickou indukci dle $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ je nerovnost triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $f_1, \dots, f_{n+1}$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} > 0$ splňují $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Položme $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$, $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{\alpha_{n+1}}$, $f = f_1 \cdots f_n$ a $g = f_{n+1}$. Pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a tedy podle Hölderovy nerovnosti pro f a g máme

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha} \left(\int_\Omega f_{n+1}^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_{n+1}}.$$

Položíme-li $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha} > 0$ pro $i = 1, \dots, n$, pak $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, a tedy dle indukčního předpokladu použitého na funkce $f_1^{\frac{1}{\alpha}}, \dots, f_n^{\frac{1}{\alpha}}$ dostaneme

$$\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\beta_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\beta_n} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha}},$$

což v kombinaci s nerovností výše dává požadovaný výsledek.

□

VĚTA 76. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, μ je míra na $\mathcal{S}$ a $g\colon \Omega \to [0, +\infty]$ je nezáporná měřitelná. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ je míra na $\mathcal{S}$ a platí

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$

pro každou reálnou $f \in L^*(\nu)$ $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$[Co to značí?], resp. pro každou komplexní $f \in L_1(\nu)$.

DŮKAZ. Fakt, že ν je míra a že integrální vzorec platí pro každou nezápornou měřitelnou f je známý (viz např. [R, Věta 1.29]). Pro reálnou $f \in L^*(\nu)$ máme $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (fg)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega (fg)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$. Pro komplexní $f \in L_1(\nu)$ pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\nu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f) g \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega (\operatorname{Im} f) g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{Re}(fg) \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im}(fg) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$.

□

Nechť μ, ν jsou míry na σ-algebře $\mathcal{S}$. Fakt, že $\mu(E) \le \nu(E)$ pro každou $E \in \mathcal{S}$ budeme značit $\mu \le \nu$.

LEMMA 77. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Je-li $\mu \le \nu$, pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ pro každou nezápornou měřitelnou $f : \Omega \to [0, +\infty]$.*

DŮKAZ. Díky linearitě integrálu nerovnost zjevně platí pro nezáporné jednoduché měřitelné funkce. Přechodem k supremu obdržíme nerovnost pro obecné nezáporné měřitelné funkce.

□

TVRZENÍ 78. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Pak funkce $\mu + \nu$ na $\mathcal{S}$ definovaná jako $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E)$ pro $E \in \mathcal{S}$ je míra a $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ pro každou nezápornou měřitelnou $f : \Omega \to [0, +\infty]$. Dále je $L_1(\mu + \nu) = L_1(\mu) \cap L_1(\nu)$ a vzorec platí též pro každou $f \in L_1(\mu + \nu)$.*

DŮKAZ. Funkce $\mu + \nu$ je zjevně nezáporná a $(\mu + \nu)(\emptyset) = 0 + 0 = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\mu + \nu)\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu + \nu)(E_n)$. Tedy $\mu + \nu$ je míra na $\mathcal{S}$.

Snadno je vidět, že vzorec $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ platí pro jednoduché měřitelné funkce f. Je-li nyní $f : \Omega \to [0, +\infty]$ měřitelná, pak existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $\{s_n\}$ konvergující bodově k f. Pak dle věty Leviho platí $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \lim \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \lim\big(\int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\nu\big) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$.

Konečně, ze vzorce $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\nu$ pro f měřitelnou dostáváme, že $L_1(\mu) \cap L_1(\nu) \subset L_1(\mu + \nu)$. Na druhou stranu, je-li $f \in L_1(\mu + \nu)$, pak dle Lemmatu 77 platí $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}(\mu+\nu)$, a tedy $f \in L_1(\mu)$. Analogicky obdržíme, že $f \in L_1(\nu)$. Na závěr spočteme, že $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}(\mu+\nu) - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\nu - \big(\int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\nu\big) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$.

□

4.2. Regularita měr

Čtenář, který není seznámen s pojmem topologického prostoru, si může níže všude místo pojmu „topologický prostor" dosadit pojem „metrický prostor".

DEFINICE 79. Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$. Řekneme, že μ je

- zevně regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \inf\big\{\mu(G);\ G \supset E, G \text{ otevřená}\big\}$;
- zevnitř regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\big\{\mu(F);\ F \subset E, F \text{ uzavřená}\big\}$;
- těsná, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\big\{\mu(K);\ K \subset E, K \text{ kompaktní}\big\}$.

■■■[regularni: termín bych použil jen pro $M(K)$, zevne+zevnitr+konecna na kompaktech; nebo: zevne+tesna+konecna na komp.]

LEMMA 80. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je těsná konečná míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují kompaktní $K \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $K \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Díky těsnosti existují kompaktní množiny $K \subset E$ a $H \subset X \setminus E$ takové, že $\mu(K) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}$ a $\mu(H) > \mu(X \setminus E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G = X \setminus H$. Pak G je otevřená, $K \subset E \subset G$ a $G \setminus E = (X \setminus H) \setminus E = (X \setminus H) \cap (X \setminus E) = (X \setminus E) \setminus H$. Tedy $\mu(G \setminus E) = \mu((X \setminus E) \setminus H) = \mu(X \setminus E) - \mu(H) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dohromady $\mu(G \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E) - \mu(K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

LEMMA 81. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $F \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Speciálně, μ je i zevnitř regulární.*

DŮKAZ. Nechť $\{A_n\} \subset \mathcal{S}$ je posloupnost množin konečné míry splňující $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Z vnější regularity plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ existence otevřené $G_n \subset X$ takové, že $G_n \supset E \cap A_n$ a $\mu(G_n) < \mu(E \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < +\infty$. Pak $\mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) = \mu(G_n) - \mu(E \cap A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položíme-li nyní $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, pak G je otevřená a $E \subset G$. Dále je snadno vidět, že $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)$, a tedy

$$\mu(G \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplikujeme-li nyní již dokázanou část na množinu $X \setminus E$, pak dostaneme otevřenou $U \subset X$ splňující $X \setminus E \subset U$ a $\mu(U \setminus (X \setminus E)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Položíme-li $F = X \setminus U$, pak F je uzavřená, $F \subset E$ a $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

□

LEMMA 82. *Nechť X je topologický prostor a μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Je-li $E \subset X$ typu F_σ, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Položme $H = X \setminus E$. Pak H je G_δ, takže $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, kde $H_n \subset X$ jsou otevřené a $H_{n+1} \subset H_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $H^k = H \cap U_k$ a $H_n^k = H_n \cap U_k$ pro $k, n \in \mathbb{N}$. Množiny H_n^k jsou otevřené, $H^k = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H^k$. Pro pevné $k \in \mathbb{N}$ je $H_{n+1}^k \subset H_n^k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(H_1^k) \le \mu(U_k) < +\infty$, takže $\lim_{n\to\infty} \mu(H_n^k) = \mu(H^k)$. Existuje tedy $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(H_{n_k}^k) < \mu(H^k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Odtud plyne, že $\mu(H_{n_k}^k \setminus H^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Konečně, definujme $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{n_k}^k$. Pak G je otevřená, $H \subset G$ a $G \setminus H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(H_{n_k}^k \setminus H^k)$. Tedy $\mu(G \setminus H) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Na závěr stačí položit $F = X \setminus G$.

□

LEMMA 83. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$ taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak systém*

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{S};\ \textit{pro každé } \varepsilon > 0 \textit{ existují uzavřená } F \subset X \textit{ a otevřená } G \subset X \textit{ takové, že } F \subset A \subset G \textit{ a } \mu(G \setminus F) < \varepsilon\big\}.$$

je σ-algebra.

DŮKAZ. Zjevně $X \in \mathcal{A}$ (stačí vzít $F = G = X$). Dále nechť $A \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Nechť uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ jsou takové, že $F \subset A \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Pak $X \setminus G \subset X \setminus A \subset X \setminus F$ a $\mu\big((X \setminus F) \setminus (X \setminus G)\big) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Konečně, nechť $A_n \in \mathcal{A}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť uzavřená $F_n \subset X$ a otevřená $G_n \subset X$ jsou takové, že $F_n \subset A_n \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak G je otevřená, E je F_σ, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset G$ a $\mu(G \setminus E) \le \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus F_n\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dle Lemmatu 82 pak existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

□

VĚTA 84. *Nechť X je topologický prostor takový, že každá otevřená množina je F_σ (např. metrický prostor), a nechť μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak μ je dokonce těsná.*

DŮKAZ. Systém $\mathcal{A}$ z Lemmatu 83 je σ-algebra, která díky předpokladu a Lemmatu 82 obsahuje otevřené množiny, a tedy je rovna borelovské σ-algebře na X. To znamená, že μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak pro každou uzavřenou $F \subset X$ existuje neklesající posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ taková, že $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, takže $\mu(F) = \lim \mu(K_n) = \sup\{\mu(K);\ K \subset F,\ K \text{ kompaktní}\}$. Odtud snadno plyne, že μ je těsná.

□

VĚTA 85 (Nikolaj Nikolajevič Luzin (1912)). *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f : X \to \mathbb{K}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ a $f\restriction_F$ je spojitá.*

DŮKAZ. Nechť $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v $\mathbb{K}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z Lemmatu 81 uzavřenou $F_n \subset X$ a otevřenou $G_n \subset X$ tak, že $F_n \subset f^{-1}(U_n) \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Pak je $F = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus F_n)$ uzavřená a platí, že $\mu(X \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Restrikce $f\restriction_F$ je pak spojitá, protože pro $n \in \mathbb{N}$ je množina $(f\restriction_F)^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_n) \cap F = G_n \cap F$ otevřená v F. (Poslední rovnost plyne z toho, že $G_n \cap F \subset F_n$.)

□

DŮSLEDEK 86. *Nechť X je normální topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$ a $f : X \to \mathbb{K}$ je μ-měřitelná funkce. Pak platí následující:*

(a) *Existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na X taková, že $f_n \to f$ μ-skoro všude a* $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)|$ *pro každé $n \in \mathbb{N}$.*
(b) *Existuje borelovská funkce g na X rovnající se f μ-skoro všude.*

DŮKAZ. Dle Věty 85 existuje posloupnost $\{H_n\}$ uzavřených množin v X taková, že $f\restriction_{H_n}$ je spojitá a $\mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$. Položme $F_n = \bigcup_{j=1}^n H_j$. Pak F_n jsou uzavřené množiny takové, že $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$, $\mu(X \setminus F_n) \leq \mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$ a $f\restriction_{F_n}$ je spojitá. Vskutku, je-li $F \subset \mathbb{K}$ uzavřená, pak

$$(f\restriction_{F_n})^{-1}(F) = \bigcup_{j=1}^{n} (f\restriction_{H_j})^{-1}(F),$$

přičemž množiny $(f\restriction_{H_j})^{-1}(F)$ jsou uzavřené v H_j, a tedy i v X. Proto je $(f\restriction_{F_n})^{-1}(F)$ uzavřená v X, a tedy i v F_n.

Položíme-li $A = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$, pak A je borelovská a $\mu(X \setminus A) \leq \mu(X \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $\mu(X \setminus A) = 0$.

(a) Dle Poznámky 11 existují spojité funkce $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ takové, že $f_n = f\restriction_{F_n}$ a $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \leq \sup_{x\in F_n}|f(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $x \in A$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in F_n$ pro $n \geq n_0$, a tedy $f_n(x) = f(x)$ pro $n \geq n_0$. To znamená, že $f_n \to f$ bodově na A.

(b) Funkce $g = \chi_A f$ je rovna f skoro všude. Ukažme, že je borelovská: Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je libovolná otevřená množina. Je-li $0 \in G$, položme $B = X \setminus A$, jinak položme $B = \emptyset$. Pak

$$g^{-1}(G) = \big((X \setminus A) \cap g^{-1}(G)\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(F_n \cap g^{-1}(G)\big) = B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (f\restriction_{F_n})^{-1}(G).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je ovšem množina $(f\restriction_{F_n})^{-1}(G)$ otevřená v F_n, a tedy borelovská v X. Proto je $g^{-1}(G)$ borelovská.

□

4.3. Nosič míry

DEFINICE 87. Nechť X je topologický prostor a μ je míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Pak nosič μ je definován jako $\operatorname{supp}\mu = X \setminus \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená};\ \mu(G) = 0\}$.

Nosič míry μ je uzavřená množina.

FAKT 88. *Nechť X je topologický prostor a μ je nenulová míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Je-li μ těsná na otevřených množinách, pak $\mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ a $\mu(\operatorname{supp}\mu) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $U = \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená};\ \mu(G) = 0\}$. Je-li $K \subset U$ kompaktní, pak existují $G_1, \ldots, G_n \subset X$ otevřené takové, že $\mu(G_j) = 0$ a $K \subset \bigcup_{j=1}^n G_j$. Odtud plyne, že $\mu(K) = 0$. Pak ovšem $\mu(U) = \sup\{\mu(K);\ K \subset U, K \text{ kompaktní}\} = 0$. Dále $\mu(\operatorname{supp}\mu) = \mu(X) - \mu(U) = \mu(X) > 0$.

□

TVRZENÍ 89. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je konečná míra na $\mathcal{S}$ těsná na otevřených množinách. Je-li $\operatorname{supp}\mu = \{x\}$ pro nějaké $x \in X$, pak existuje $c \in (0, +\infty)$ takové, že $\mu = c\delta_x$.*

DŮKAZ. Položme $c = \mu(\{x\})$. Pak $c \in (0, +\infty)$ dle Faktu 88. Nechť $E \in \mathcal{S}$. Je-li $x \notin E$, pak $\mu(E) \leq \mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ dle Faktu 88. Je-li $x \in E$, pak $\mu(E) = \mu(\{x\}) + \mu(E \setminus \{x\}) = c + 0 = c$. Tedy $\mu = c\delta_x$.

□

4.4. Komplexní míry

Připomeňme, že μ je komplexní (resp. znaménková) míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ jestliže $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ (resp. $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$) splňuje $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ pro libovolné $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní. ■■■[nekonečna?]

Dále připomeňme, že variace míry μ je funkce $|\mu|$ definovaná na $\mathcal{S}$ předpisem

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|\mu(A_j)|;\ A_1,\dots,A_n \in \mathcal{S},\ A_j \subset A \text{ po dvou disjunktní, } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Variace komplexní míry je konečná nezáporná míra a je to nejmenší nezáporná míra, která majorizuje funkci $A \mapsto |\mu(A)|$ ([R, kapitola 6]).

Označme $\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ množinové funkce definované vzorci $(\operatorname{Re}\mu)(E) = \operatorname{Re}(\mu(E))$ a $(\operatorname{Im}\mu)(E) = \operatorname{Im}(\mu(E))$ pro $E \in \mathcal{S}$. Pak $\operatorname{Re}\mu$ a $\operatorname{Im}\mu$ jsou znaménkové míry: Jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\operatorname{Re}\mu)\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_j\big) = \operatorname{Re}\big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Re}\mu)(A_n)$ díky spojitosti a aditivitě funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$. Analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$.

Označíme-li Jordanův rozklad znaménkové míry ν jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$, pak $\mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu = (\operatorname{Re}\mu)^+ - (\operatorname{Re}\mu)^- + i(\operatorname{Im}\mu)^+ - i(\operatorname{Im}\mu)^-$.

LEMMA 90. *Nechť μ je komplexní míra na σ-algebře $\mathcal{S}$. Pak $|\operatorname{Re}\mu| \le |\mu|$, $|\operatorname{Im}\mu| \le |\mu|$ a $|\mu| \le |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu| = (\operatorname{Re}\mu)^+ + (\operatorname{Re}\mu)^- + (\operatorname{Im}\mu)^+ + (\operatorname{Im}\mu)^-$.*

DŮKAZ. Platí $|\operatorname{Re}\mu(E)| \le |\mu(E)|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Odtud snadno plyne, že $|\operatorname{Re}\mu| \le |\mu|$ a analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$. Na druhou stranu, pro $E_1,\dots,E_n \in \mathcal{S}$ platí

$$\sum_{j=1}^{n}|\mu(E_j)| = \sum_{j=1}^{n}\sqrt{(\operatorname{Re}\mu(E_j))^2 + (\operatorname{Im}\mu(E_j))^2} \le \sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Re}\mu(E_j)| + \sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Im}\mu(E_j)|,$$

odkud plyne, že $|\mu| \le |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu|$.

□

LEMMA 91. *Nechť μ je komplexní míra na σ-algebře $\mathcal{S}$. Pak $|\mu|(A) \le 4\sup_{E\in\mathcal{S},E\subset A}|\mu(E)|$ pro každou $A \in \mathcal{S}$.*

DŮKAZ. Označme $M = \sup_{E\in\mathcal{S},E\subset A}|\mu(E)|$. Nechť je nejprve μ reálná. Jsou-li $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{S}$, $A_j \subset A$ po dvou disjunktní a označíme-li $I = \{1,\dots,n\}$ a $I^+ = \{j \in I;\ \mu(A_j) \ge 0\}$, pak $\sum_{j=1}^{n}|\mu(A_j)| = \sum_{j\in I^+}\mu(A_j) - \sum_{j\in I\setminus I^+}\mu(A_j) = \mu\big(\bigcup_{j\in I^+} A_j\big) - \mu\big(\bigcup_{j\in I\setminus I^+} A_j\big) \le 2M$. Tedy $|\mu|(A) \le 2M$.

Je-li nyní μ komplexní, pak s využitím Lemmatu 90 a předchozího odhadu obdržíme, že $|\mu|(A) \le |\operatorname{Re}\mu|(A) + |\operatorname{Im}\mu|(A) \le 2\sup_{E\in\mathcal{S},E\subset A}|\operatorname{Re}\mu(E)| + 2\sup_{E\in\mathcal{S},E\subset A}|\operatorname{Im}\mu(E)| \le 4M$.

□

Řekneme, že komplexní míra μ je zevně regulární, resp. zevnitř regulární, resp. těsná, pokud její variace $|\mu|$ má příslušnou vlastnost.

VĚTA 92. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$ splňující $\nu \ll \mu$. Pak $|\nu|$ je zevnitř i zevně regulární.*

DŮKAZ. Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $\varepsilon > 0$. Z absolutní spojitosti $|\nu|$ vzhledem k μ ([R, Tvrzení 6.8(e), Věta 6.11]) plyne existence $\delta > 0$ takového, že je-li $A \in \mathcal{S}$ a $\mu(A) < \delta$, pak $|\nu|(A) < \varepsilon$. Z Lemmatu 81 plyne existence $G \supset E$ otevřené takové, že $\mu(G \setminus E) < \delta$. Pak $|\nu|(G \setminus E) < \varepsilon$, tedy $|\nu|(G) = |\nu|(E) + |\nu|(G \setminus E) < |\nu|(E) + \varepsilon$. Vnitřní regularita $|\nu|$ plyne z Lemmatu 81.

□

Nechť μ je komplexní míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Pak $\mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu$. Můžeme tedy definovat integrál vzhledem ke komplexní míře μ vzorcem

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\operatorname{Re}\mu + i\int_\Omega f\,\mathrm{d}\operatorname{Im}\mu,$$

jsou-li oba integrály vpravo konvergentní. Označíme-li Jordanův rozklad znaménkové míry ν jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$, pak můžeme vzorec výše psát následovně:

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ - \int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^- + i\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^+ - i\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^-.$$

■■■[integral je linearni???]

Snadno nahlédneme, že $\int_\Omega \chi_E \, d\mu = \mu(E)$ pro $E \in \mathcal{S}$, a tedy z linearity $\int_\Omega s \, d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j)$ pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$.

TVRZENÍ 93. *Nechť (Ω, μ) je prostor s komplexní mírou a nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce. Pak $\int_\Omega f \, d\mu$ je definován, právě když $f \in L_1(|\mu|)$.*

DůKAZ. $\Leftarrow$ Podle Lemmat 90 a 77 platí $\int_\Omega |f| \, d(\operatorname{Re}\mu)^+ \le \int_\Omega |f| \, d|\mu| < +\infty$, což znamená, že $\int_\Omega f \, d(\operatorname{Re}\mu)^+$ konverguje; analogické tvrzení platí i pro integrály vzhledem k $(\operatorname{Re}\mu)^-$, $(\operatorname{Im}\mu)^+$ a $(\operatorname{Im}\mu)^-$. Tedy $\int_\Omega f \, d\mu$ je definován.

$\Rightarrow$ Z Lemmat 90 a 77 a Tvrzení 78 plyne, že $\int_\Omega |f| \, d|\mu| \le \int_\Omega |f| \, d(\operatorname{Re}\mu)^+ \int_\Omega |f| \, d(\operatorname{Re}\mu)^- + \int_\Omega |f| \, d(\operatorname{Im}\mu)^+ + \int_\Omega |f| \, d(\operatorname{Im}\mu)^-$.

□

VĚTA 94. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, μ je nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a $g \in L_1(\mu)$. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ je komplexní míra na $\mathcal{S}$ a platí

$$(\operatorname{Re}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Re} g)^+ \, d\mu, \quad (\operatorname{Re}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Re} g)^- \, d\mu,$$

$$(\operatorname{Im}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Im} g)^+ \, d\mu, \quad (\operatorname{Im}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Im} g)^- \, d\mu,$$

$$|\nu|(E) = \int_E |g| \, d\mu,$$

$$\int_E f \, d\nu = \int_E fg \, d\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ a každou $f \in L_1(|\nu|)$.

DůKAZ. Pro $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní máme díky Důsledku 74 rovnost $\nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^n E_j} g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_{E_j} g \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$. Tedy ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$.

Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $f \in L_1(|\nu|)$. Předpokládejme nejprve, že g je reálná. Položme $P = \{x \in \Omega;\ g(x) \ge 0\}$ a $N = \{x \in \Omega;\ g(x) < 0\}$. Snadno vidíme, že (P, N) je Hahnův rozklad Ω příslušný znaménkové míře ν. Tedy $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E\cap P} g \, d\mu = \int_{E\cap P} g^+ \, d\mu = \int_E g^+ \, d\mu$ a podobně $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N) = -\int_{E\cap N} g \, d\mu = -\int_{E\cap N} -g^- \, d\mu = \int_E g^- \, d\mu$. Dle Věty 76 je tedy $\int_E f \, d\nu = \int_E f \, d\nu^+ - \int_E f \, d\nu^- = \int_E fg^+ \, d\mu - \int_E fg^- \, d\mu = \int_E f(g^+ - g^-) \, d\mu = \int_E fg \, d\mu$.

Nechť nyní g je obecná komplexní. Pak $(\operatorname{Re}\nu)(E) = \operatorname{Re}\int_E g \, d\mu = \int_E \operatorname{Re} g \, d\mu$ a analogicky $(\operatorname{Im}\nu)(E) = \operatorname{Im}\int_E g \, d\mu = \int_E \operatorname{Im} g \, d\mu$. Tedy dle předchozí části důkazu je $\int_E f \, d\nu = \int_E f \, d\operatorname{Re}\nu + i \int_E f \, d\operatorname{Im}\nu = \int_E f \operatorname{Re} g \, d\mu + i \int_E f \operatorname{Im} g \, d\mu = \int_E f(\operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g) \, d\mu = \int_E fg \, d\mu$.

Konečně, ukažme, že $|\nu|(E) = \int_E |g| \, d\mu$. Protože $A \mapsto \int_A |g| \, d\mu$ je nezáporná míra majorizující $|\mu(A)|$, plyne odtud, že $|\nu|(E) \le \int_E |g| \, d\mu$. Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$, kde $E_j \in \mathcal{S}$, $E_j \subset E$ jsou po dvou disjunktní, je jednoduchá funkce taková, že $\int_E |g - s| \, d\mu < \varepsilon$ ([R, Věta 3.13]). Pak $|\nu(E_j)| = \left|\int_{E_j} g \, d\mu\right| \ge \left|\int_{E_j} s \, d\mu\right| - \left|\int_{E_j} (g - s) \, d\mu\right| \ge |\alpha_j||\mu(E_j) - \int_{E_j} |g - s| \, d\mu$, a tedy $|\nu|(E) \ge \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| \ge \sum_{j=1}^n |\alpha_j||\mu(E_j) - \sum_{j=1}^n \int_{E_j} |g - s| \, d\mu \ge \int_E |s| \, d\mu - \int_E |g - s| \, d\mu \ge \int_E |g| \, d\mu - 2\int_E |g - s| \, d\mu > \int_E |g| \, d\mu - 2\varepsilon$.

□

TVRZENÍ 95. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ je komplexní míra na $\mathcal{S}$. Pak existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h : \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega fh \, d|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Dle [R, Věta 6.12] existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a $\mu(E) = \int_E h \,\mathrm{d}|\mu|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Zbytek plyne z Věty 94.

□

DŮSLEDEK 96. *Nechť* μ *je komplexní míra na* Ω. *Pak*

$$\left|\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Nechť h je funkce z Tvrzení 95. Pak $\left|\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_\Omega fh \,\mathrm{d}|\mu|\right| \le \int_\Omega |fh| \,\mathrm{d}|\mu| = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|\mu|$.

□

Pro komplexní míry platí následující varianta Lebesgueovy věty:

VĚTA 97. *Nechť* (Ω, μ) *je prostor s komplexní mírou a* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných funkcí na* Ω *taková, že* $f_n \to f$ *bodově* $|\mu|$*-s. v. Pokud existuje* $g \in L_1(|\mu|)$ *taková, že pro* $|\mu|$*-s. v.* $x \in \Omega$ *je* $|f_n(x)| \le g(x)$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *(speciálně pokud posloupnost* $\{f_n\}$ *je omezená), pak* $f \in L_1(|\mu|)$, $\int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}|\mu| \to 0$ *a* $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

DŮKAZ. Pro $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ je $|f(x)| = \lim |f_n(x)| \le g(x)$, a tedy $f \in L_1(|\mu|)$. Dále $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ platí, že $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 2g(x)$, a tedy z Lebesgueovy věty plyne, že $\int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}|\mu| \to 0$. S pomocí Důsledku 96 tak dostaneme, že $\left|\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}|\mu| \to 0$.

□

DEFINICE 98. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť $M(X)$ značí prostor všech měr na $(X, \mathcal{S})$, kde vektorové operace definujeme bodově a uvažujeme normu $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

VĚTA 99. *Nechť* $(X, \mathcal{S})$ *je měřitelný prostor, pak* $M(X)$ *je Banachův prostor. Navíc platí* $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$, $\mu, \nu \in M(X)$.

DŮKAZ. Zjevně je $M(X)$ vektorový prostor. Pro $\mu, \nu \in M(X)$ máme

$$|(\mu + \nu)(A)| \le |\mu(A)| + |\nu(A)| \le |\mu|(A) + |\nu|(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Z této nerovnosti již snadno plyne odhad $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$.

Krok 1. Pro $\mu \in M(X)$ a $c \in \mathbb{K}$ platí

$$|c\mu|(X) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |c\mu(B)| = |\mu|(A) = |c| \sup_{\mathcal{B} \in \pi(A)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| = |c|\|\mu\|.$$

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ platí

$$\begin{aligned} \|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|(X) &= \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu + \nu(B)| \\ &\le \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| + \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B)| = \|\mu\| + \|\nu\|. \end{aligned}$$

Konečně pokud $\|\mu\| = 0$, tj. $|\mu|(X) = 0$, pak pro každé $A \in \mathcal{S}$ máme

$$|\mu(A)| \le |\mu|(A) \le |\mu|(X) = 0,$$

a tedy $\mu = 0$. Proto je $M(X)$ normovaný prostor.

Krok 2. K důkazu úplnosti použijeme Větu 1.30. Nechť $\sum_{n=1}^\infty \mu_n$ je absolutně konvergentní řada v $M(X)$. Pro libovolné $A \in \mathcal{S}$ pak máme

$$\sum_{n=1}^\infty |\mu_n(A)| \le \sum_{n=1}^\infty |\mu_n|(A) \le \sum_{n=1}^\infty \|\mu_n\| < \infty,$$

a tedy lze položit

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Zjevně je pak μ konečně aditivní a platí $\mu(\emptyset) = 0$.

Nechť $\{C_k\}$ je klesající posloupnost měřitelných množin splňujících $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty} |\mu_n|(A_k) = 0$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\mu_n|(C_k) < \frac{\varepsilon}{n_0}$, $n = 1, \dots, n_0$. Pak pro $k \geq k_0$ platí

$$|\mu(C_k)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(C_k)| \leq |\sum_{n=1}^{n_0} \mu_n(C_k)| + |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu_n(A_k)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |\mu_n|(A_k) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{n_0} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu(C_k) \to 0$.

Nechť nyní $\{A_j\}$ je disjunktní systém měřitelných množin a $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Položme $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ a $C_n = A \setminus B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{C_n\}$ je klesající posloupnost s vlastností $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Dle předcházející úvahy tedy máme pro

$$|\mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(\cup_{k=1}^{n} A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(B_n)| = |\mu(C_n)| \to 0.$$

Tedy $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Krok 3. Ověřme nyní, že $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\nu_n(A) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Dle předcházejícího jsou míry ν_n v $M(X)$ a platí $\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \nu_n$. Pro libovolné $\mathcal{B} \in \pi(X)$ nyní máme

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} |(\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k)(B)| = \sum_{B\in\mathcal{B}} |\nu_n(B)| \leq \sum_{B\in\mathcal{B}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k(B)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}} |\mu_k(B)| \leq \sum_{k=n+1} \|\mu_k\|.$$

Tedy $\|\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\| \to 0$.

□

VĚTA 100. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $M(K)$ značí systém všech konečných komplexních borelovských zevně i zevnitř regulárních měr na K (vizte Definici 79). Pak $M(K)$ s operacemi a normou jako ve Větě 99 je Banachův prostor.*

DŮKAZ. V průběhu důkazu budeme zevně a zevnitř regulární borelovské míře říkat regulární míra. Již víme, že komplexní míry na $\mathrm{Bs}(K)$ tvoří Banachův prostor. Zbývá ukázat, že limita posloupnosti regulárních měr je regulární. Nechť tedy $\{\mu_n\}$ je posloupnost regulárních měr konvergující v normě ke komplexní míře borelovské míře μ. Nechť $E \in \mathrm{Bs}(K)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|\mu - \mu_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$, a nalezneme množiny $F \subset E \subset G$, kde F uzavřená a G otevřená, takové, že $|\mu_n|(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak

$$|\mu|(G \setminus F) = |\mu - \mu_n + \mu_n|(G \setminus F) \leq |\mu - \mu_n|(G \setminus F) + |\mu_n|(G \setminus F) \leq \|\mu - \mu_n\| + |\mu_n|(G \setminus F) < \varepsilon.$$

□

Důkaz významné Nikodymovy věty 102 je založen na následujícím zobecnění Schurovy věty 14.10.

LEMMA 101. *Nechť A je množina v ℓ_∞ definovaná jako $A = \{\chi_N;\ N \subset \mathbb{N}\}$ a nechť $f_a \in (\ell_1)^*$ značí funkcionál reprezentovaný prvkem $a \in A$. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v ℓ_1 taková, že posloupnost $\{f_a(x_n)\}$ konverguje pro každé $a \in A$. Pak existuje $x \in \ell_1$ splňující $x_n \to x$ v normě prostoru ℓ_1.*

DŮKAZ. Pro vektor $y \in \ell_1$ a množinu $N \subset \mathbb{N}$ značíme $y\chi_N$ vektor o souřadnicích $y(i)\chi_N(i)$, $i \in \mathbb{N}$.

Krok 1. Nejprve dokážeme, že $\{x_n\}$ je posloupnost omezená v normě prostoru ℓ_1.

Předpokládáme-li totiž opak, lze bez újmy na obecnosti (po eventuálním výběru podposloupnosti) předpokládat, že $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = +\infty$. Položíme $n_1 = 1$ a induktivně vybereme rostoucí posloupnost indexů splňujících $\|x_{n_{k+1}}\| > k + \|x_{n_k}\|$. Pak posloupnost $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$ splňuje $\|y_k\| \geq \|x_{n_{k+1}}\| - \|x_{n_k}\| > k$ a pro každou $a \in A$ platí $\lim_{k\to\infty} f_a(y_k) = 0$. Naše nová posloupnost $\{y_k\}$ tedy splňuje $\lim_{k\to\infty}\|y_k\| = +\infty$ a $\lim k \to \infty f_a(y_k) = 0$ pro každé $a \in A$.

Povšimněme si, že pro každou konečnou množinu $N \subset \mathbb{N}$ platí $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|y_k\chi_N\| < +\infty$. To platí z toho důvodu, že díky předpokladu je posloupnost $\{y_k(i)\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní k 0. Tedy $M = \sup_{k\in N}\sup_{i\in\mathbb{N}}|y_k(i)| <$ $+\infty$. Proto

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|y_k\chi_N\| = \sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in N}|y_k(i)| \leq M|N|,$$

kde $|N|$ značí počet prvků množiny N.

Nyn zkonstruujme induktivně konečné množiny $\{N_j\}$ a indexy $\{k_j\}$ a $\{l_j\}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

- $\max N_j < m_j < \min N_{j+1}, n_j < n_{j+1}$;
- $|\sum_{i\in N_j} y_{k_j}(i)| > j$;
- $\|y_{k_{j+1}}\chi_{\{1,\dots,\max N_j\}}\| < 1$;
- $\|y_{k_j}\chi_{\{m_j,m_j+1,\dots\}}\| < 1$.

V prvním kroku konstrukce nalezneme $k_1 \in \mathbb{N}$ splňující $\|y_{k_1}\| > 1\cdot\pi$. Nechť $M_1 \subset \mathbb{N}$ je konečná taková, že $\|x\chi_{M_1}\| > \frac{1}{\pi}$. Nyní použijeme [R, Lemma 6.3] k nalezení množiny $N_1 \subset M_1$ takové, že

$$\pi < \|x_{n_1}\chi_{M_1}\| = \sum_{i\in M_1}|x_{n_1}(i)| \leq \pi|\sum_{i\in N_1}x_{n_1}(i)|.$$

Nechť $m_1 > \max N_1$ splňuje $\|x_{k_1}\chi_{\{m_1,\dots\}}\| < 1$. Pak n_1, m_1 a N_1 jsou hledaná objekty.

Předpokládejme nyní, že $j \in \mathbb{N}$ a objekty $k_1 < k_1 < \cdots < k_j$, $m_1 < m_2 < \cdots < m_j$ a $N_1, \dots, N_j$ s požadovanými vlastnost máme zkonstruovány. Pak pro $i \in M = \{1, \dots, \max N_k\}$ platí $\lim_{k\to\infty}|y_k(i)| = 0$. Tedy existuje $k_{j+1} > k_j$ takové, že $\|y_{k_{j+1}}\chi_M\| < 1$ a $\|y_{k_{j+1}}\chi_{\mathbb{N}\setminus M}\| > (j+1)\cdot\pi$. Nechť $M_{j+1} \subset \mathbb{N}\setminus M$ splňuje $\|y_{k_{j+1}}\chi_{M_{j+1}}\| > (j+1)\cdot\pi$. Opětovným užitím Lemmatu 6.3 z [R] nalezneme množinu $N_{j+1} \subset M_{j+1}$ takovou, že

$$(j+1)\cdot\pi < \|y_{k_{j+1}}\chi_{M_{j+1}}\| = \sum_{i\in M_{j+1}}|y_{k_{j+1}}(i)| \leq \pi|\sum_{i\in N_{j+1}}y_{k_{j+1}}(i)|.$$

Nakonec vybereme $m_{j+1} > \max N_{j+1}$ takové, že $\|y_{k_{j+1}}\chi_{\{m_{j+1},\dots\}}\| < 1$. Tím je induktivní konstrukce završena.

Položme $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ a $a = \chi_N$. Pak odpovídající prvek $f_a \in (\ell_1)^*$ splňuje pro každé $j \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned}
|f_a(y_{k_j})| &= |\sum_{i\in N_1\cup\cdots\cup N_{j-1}} y_{k_j}(i) + \sum_{i\in N_j} y_{k_j}(i) + \sum_{i\in\bigcup_{t=j+1}^{\infty}N_t} y_{k_j}(i)|\\
&\geq |\sum_{i\in N_j} y_{k_j}(i)| - |\sum_{i\in N_1\cup\cdots\cup N_{j-1}} y_{k_j}(i)| - |\sum_{i\in\bigcup_{t=j+1}^{\infty}N_t} y_{k_j}(i)|\\
&\geq j - \|y_{k_j}\chi_{\{1,\cdots,\max N_{j-1}\}}\| - \|y_{k_j}\chi_{\{m_j,\cdots\}}\| > j-2.
\end{aligned}$$

Tedy posloupnost $\{f_a(y_{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ nekonverguje k 0, co je spor s naším předpokledem. Proto je posloupnost $\{x_n\}$ omezená.

Krok 2. Ukážeme, že pro každou posloupnost $a \in B_{\ell_\infty}$ platí, že posloupnost $\{f_a(x_n)\}$ je konvergentní.

Nechť tedy $a \in \ell_\infty$ je dána. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme nenulové $\{z_1, \dots, z_m\} \in B_{\mathbb{K}}$ tak, že tvoří $\frac{\varepsilon}{2}$-síť pro $B_{\mathbb{K}}$. Položíme $M_j = a^{-1}(B(z_j, \varepsilon))$, $j \in \{1, \dots, m\}$ a tyto množiny zdisjunktníme, tj. definujeme $N_1 = M_1$ a $N_j = M_j \setminus (N_1 \cup \cdots \cup N_{j-1})$, $j \in \{2, \dots, m\}$. Nyní položíme $b = \sum_{j=1}^{n} z_j\chi_{N_j}$ a ověříme, že $\|a - b\|_\infty \leq$. Je-li totiž $i \in \mathbb{N}$, pak $i \in N_j$ pro nějaké $j \in \{1, \dots, m\}$. Pak $i \in M_j$, a tedy $|a(i) - b(i)| = |a(i) - z_j| < \varepsilon$.

Nechť $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| < +\infty$. Nyní použijeme náš předpoklad pro množiny $N_1, \dots, N_m$ a nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|f_{\chi_{N_j}}(x_n) - f_{\chi_{N_j}}(x'_n)| < \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^m |z_j|}$ pro každé $n, n' \geq n_0$ a každé $j \in \{1, \dots, m\}$. Pak pro $n, n' \geq n_0$ máme odhad

$$\begin{aligned} |f_a(x_n) - f_a(x_{n'})| &= |f_a(x_n - x_{n'})| \leq |(f_a - f_b)(x_n - x_{n'})| + |f_b(x_n - x_{n'})| \\ &\leq 2M\varepsilon + \sum_{j=1}^{m} |z_j||f_{\chi_{N_j}}(x_n) - f_{\chi_{N_j}}(x_{n'})| \\ &\leq 2M\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^m |z_j|} \sum_{j=1}^{m} |z_j| = \varepsilon(2M + 1). \end{aligned}$$

Tedy je posloupnost $\{f_a(x_n)\}$ cauchyovská, a proto konvergentní.

Krok 3. Ukážeme, že $\{x_n\}$ je normově cauchyovská.

Pokud by tomu tak nebylo, nalezneme $\varepsilon > 0$ a rostoucí posloupnosti indexů $\{n_k\}$ a $\{m_k\}$ takové, že $\|x_{m_k} - x_{n_k}\| > \varepsilon$. Pak pro posloupnost $y_k = x_{m_k} - x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$ platí $f_a(y_k) \to 0$ pro každé $a \in \ell_\infty$. Dle Schurovy věty 14.10 pak $\lim_{k\to\infty}\|y_k\| = 0$, což je spor s $\|y_k\| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$. Tedy $\{x_n\}$ je normově cauchyovská posloupnost, takž konverguje k nějakému $x \in \ell_1$. Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 102 (O. M. Nikodym (1933)). *Nechť $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost komplexních měr na σ-algebře $\mathcal{S}$ konvergující bodově k funkci μ na $\mathcal{S}$. Pak μ je komplexní míra na $\mathcal{S}$ a pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ řada $\sum_{n=1}^\infty \mu_k(A_n)$ konverguje stejnoměrně pro $k \in \mathbb{N}$.*

DŮKAZ. Nechť $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A)$, $A \in \mathcal{S}$. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ je zjevně konečně aditivní. Nechť $\{B_n\}$ je posloupnost po dvou disjuktních množin z $\mathcal{S}$. Položme $E_m = \bigcup_{n=m}^\infty B_n$, $m \in \mathbb{N}$. Pak $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ jsou množiny v $\mathcal{S}$ a splňují $\bigcap_{m=1}^\infty E_m = \emptyset$. Pokud bychom věděli, že $\lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = 0$, měli bychom

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(B_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{m} B_n) = \lim_{m\to\infty} \left(\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) - \mu(E_{m+1})\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Tedy μ by byla spočetně aditivní.

Uvažujme tedy náš systém $\{B_n\}$ a položme

$$x_k(n) = \mu_k(B_n), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Pak $x_k = (x_k(1), x_k(2), \dots)$ jsou prvky ℓ_1. Vskutku,

$$\|x_k\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_k(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_k(B_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_k|(B_n) \leq |\mu_k|(E_1) < +\infty.$$

Dále, pro každou množinu $N \subset \mathbb{N}$ platí ($f_a \in (\ell_1)^*$ je funkcionál reprezentovaný $a = \chi_N \in \ell_\infty$) vztah

$$\lim_{k\to\infty} f_a(x_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} x_k(n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in N} \mu_k(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mu_k\left(\bigcup_{n\in N} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in N} B_n\right).$$

Tedy dle Lemmatu 101 existuje $x \in \ell_1$ takové, že $\|x_k - x\|_{\ell_1} \to 0$. Pak speciálně

$$x(n) = \lim_{k\to\infty} x_k(n) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(B_n) = \mu(B_n),$$

což znamená, že

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_{\ell_1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_k(B_n) - \mu(B_n)|.$$

Jelikož je $x \in \ell_1$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{\infty} |\mu(B_l)| = 0.$$

Položme

$$s_{k,n} = \mu_k(E_n) - \sum_{l=n}^{\infty} \mu(B_l), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} s_{k,n} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} s_{k,n} = \mu(E_n) - \sum_{l=n}^{\infty} \mu(B_l).$$

Nyní ukážeme, že funkce $\varphi_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definované jako $\varphi_n(k) = s_{k,n}$ konvergují na $\mathbb{N}$ stejnoměrně k nule. Vskutku, je=li $\varepsilon > 0$ dáno, nalezneme $I \in \mathbb{N}$ splňující $\sum_{l=1}^{\infty} |\mu_k(B_l) - \mu(B_l)| = \|x_k - x\| =< \varepsilon$ pro každé $k \geq I$. Dále nalezneme index $N \in \mathbb{N}$ takový, že

$$\forall k \in \{1, \dots, I\} \colon \sum_{l=N}^{\infty} |\mu_k(B_n) - \mu(B_n)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $n \geq N$ platí

$$\begin{aligned} |\varphi_n(k)| &= |\mu_k(E_n) - \sum_{l=n}^{\infty} \mu(B_l)| = |\sum_{l=n}^{\infty} \mu_k(B_l) - \sum_{l=n}^{\infty} \mu(B_l)| \\ &\leq \sum_{l=n}^{\infty} |\mu_k(B_l) - \mu(B_l)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\{\varphi_n\}$ konvergují stejnoměrně k nule. Proto lze prohodit limity a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mu(E_n) - \sum_{l=n}^{\infty} \mu(B_l) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} s_{k,n} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s_{k,n} \right) = 0.$$

Jelikož platí $\lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \mu(B_l) = 0$, dostáváme kýžený vztah $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. Tedy μ je spočetně aditivní.

Abychom ukázali druhou část tvrzení, nechť opět $\{B_n\}$ je disjunktní systém v $\mathcal{S}$ a $\{E_m\}$ a $\{s_{k,n}\}$ jsou jako výše. Po dané $\varepsilon > 0$ nalezneme jako v předchozím $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{l=n}^{\infty} |\mu_k(B_l) - \mu(B_l)| < \varepsilon, \quad n \geq N, k \in \mathbb{N}.$$

Dále nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{l=1}^{N} |\mu_k(B_l) - \mu(B_l)| < \varepsilon, \quad k \geq k_0.$$

Pak pro $k \geq k_0$ platí

$$|\sum_{l=1}^{\infty} \mu_k(B_l) - \sum_{l=1}^{\infty} \mu(B_l)| \leq \sum_{l=1}^{N} |\mu_k(B_l) - \mu(B_l)| + \sum_{l=N}^{\infty} |\mu_k(B_l) - \mu(B_l)| < 2\varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

4.5. Radonovy míry

Následující definice je převzata z [F4, Definition 411H(b)].

DEFINICE 103 (Radonova míra). Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a μ je nezáporná míra na X definovaná na σ-algebře $\mathcal{S}$. Řekneme, že μ je Radonova míra, pokud

(i) každá otevřená množina je měřitelná (tedy $\mathrm{Bs}(X) \subset \mathcal{S}$);
(ii) μ je úplná;
(iii) pro každé $x \in X$ existuje okolí U obsahující x, které splňuje $\mu(U) < +\infty$;

(iv) pokud $A \subset X$ není v $\mathcal{S}$, existuje $B \in \mathcal{S}$ splňující $\mu(B) < +\infty$ a $A \cap B \notin \mathcal{S}$;
(v) μ je těsná (vizte Definici79).

POZNÁMKA 104. Povšimněme si, že každá Radonova míra je díky vlastnosti (iii) a lokální kompaktnosti X konečná na kompaktech.

VĚTA 105 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_c(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ je lineární forma splňující $\Lambda f \geq 0$ pro každou $f \in C_c(X)$ nezápornou. Pak existuje právě jedna Radonova míra μ na X splňující $\Lambda(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$, $f \in C_c(X)$.*

DŮKAZ. Důkaz lze nalézt v knize [F4, Therorem 436J].

□

VĚTA 106. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a μ je nezáporná Radonova míra na X. Pak zobrazení $I: g \mapsto I_g$, kde $I_g(f) = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu$, $f \in L_1(\mu)$ je izometrický izomorfizmus $L_\infty(\mu)$ na $(L_1(\mu))^*$.*

DŮKAZ. Vizte [F2, Theorem 243G(b)].

□

VĚTA 107 (Hustota $C_c(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a μ je Radonova míra na X. Nechť $1 \leq p < \infty$. Pak $C_c(X)$ je hustý podprostor $L_p(\mu)$.*

DŮKAZ. Vizte [F4, Proposition 416I].

□

DEFINICE 108. Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak komplexní míra μ na σ-algebře $\mathcal{S}$ se nazývá Radonova, pokud $|\mu|$ splňuje podmínky z Definice 103. Symbolem $M(X)$ značíme systém všech komplexních Radonových měr na X.

VĚTA 109 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_0(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $T \in (C_0(X))^*$. Pak existuje právě jedna komplexní míra μ na X definovaná na* $\mathrm{Bs}(X)$ *taková, že*
(a) Míra $|\mu|$ je těsná.
(b) Pro každou $f \in C_0(X)$ platí $Tf = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.
(c) Platí $\|T\| = |\mu|(X)$.
(d) Platí $T \geq 0$ právě tehdy, když $\mu \geq 0$.

DŮKAZ. Důkaz lze nalézt v [F4, Proposition 437I].

□

DEFINICE 110. Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Dle Věty 109 tvoří množina všech těsných borelovských komplexních měr na X s normou danou jako $\|\mu\| = |\mu|(X)$ Banachův prostor, který lze ztotožnit s duálem k $C_0(X)$.

VĚTA 111. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak $M(X)$ je Banachův prostor, který je pomocí zobrazení $\mu \mapsto T_\mu$, kde*

$$T_\mu(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_0(X),$$

izometricky izomorfní prostoru $(C_0(X))^*$. Navíc T zachovává uspořádání, tj. $T\mu$ je nezáporný právě tehdy, když μ je nezáporná.

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ a $a, b \in \mathbb{K}$ platí

$$(a\mu + b\nu)(A) = a\mu(A) + b\nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

DŮKAZ. První část tvrzení plyne z Věty 109.

Nechť $\mu, \nu \in M(X)$ jsou dány. Definujeme komplexní míru λ na $\mathrm{Bs}(X)$ jako

$$\lambda(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

Pak $|\lambda|$ je těsná. Ihned totiž vidíme, že $|\lambda| \leq |\mu| + |\nu|$, takže z těsnosti měr $|\mu|$ a $|\nu|$ snadno odvodíme těsnost míry $|\lambda|$.

Dále platí, že $\int_X f \, \mathrm{d}\lambda = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu$ pro každou $f \in C_0(X)$. Pro jednoduchou borelovskou funkci tvaru $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ totiž platí

$$\int_X f \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^n c_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k (\mu(A_k) + \nu(A_k)) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) + \sum_{k=1}^n c_k \nu(A_k) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu.$$

Jelikož lze každou funkci $f \in C_0(X)$ stejnoměrně aproximovat takovýmito funkcemi, platí požadovaná rovnost.

Nechť $\omega \in M(X)$ je dána definicí $\mu + \nu$, tj. ω je ten jednoznačně určený prvek $M(X)$ splňující

$$\int_X f \, \mathrm{d}\omega = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Chceme ukázat, že $\omega = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(X)$.

Nechť nejprve $U \subset X$ je otevřená a $K \subset X$ je kompaktní splňující $K \subset U$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $\operatorname{Rng} f \subset [0, 1]$, $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \setminus U$. Pak

$$|\omega(U) - \int_X f \, \mathrm{d}\omega| = |\int_U (1 - f) \, \mathrm{d}\omega| \leq \int_{U \setminus K} |1 - f| \, \mathrm{d}|\omega| \leq |\omega|(U \setminus K). \tag{6}$$

Analogickou nerovnost odovodíme i pro λ.

Nechť nyní $A \in \mathrm{Bs}(X)$ je libovolná. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U splňující $K \subset A \subset U$ a $|\omega|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolme $f \in C_c(X)$ jako výše. Pak díky (6) máme

$$\begin{aligned}
&|\omega(A) - \lambda(A)| = |\omega(U) - \omega(U \setminus A) - \lambda(U) + \lambda(U \setminus A)| \\
&\leq |\omega(U) - \int_X f \, \mathrm{d}\omega| + |\omega(U \setminus A)| + |\int_X f \, \mathrm{d}\omega - \int_X f \, \mathrm{d}\lambda| + |\int_X f \, \mathrm{d}\lambda - \lambda(U)| + |\lambda(U \setminus A)| \\
&\leq |\omega|(U \setminus K) + |\omega|(U \setminus A) + |\lambda|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus A) \\
&\leq 2(|\omega|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus K)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\lambda(A) = \omega(A)$, což znamená

$$\lambda(A) = \omega(A) = (\mu + \nu)(A).$$

Důkaz rovnosti $(c\mu)(A) = c\mu(A)$ pro $A \in \mathrm{Bs}(X)$ a $c \in \mathbb{K}$ je analogický (a výrazně jednodušší).

□

DEFINICE 112. Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $M(X)$ značí prostor všech těsných komplexních borelovských měr na X.

(a) Řekneme, že $\mu \in M(X)$ je spojitá, pokud $|\mu|(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in X$. Množinu všech spojitých měr značíme $M_c(X)$.

(b) Řekneme, že $\mu \in M(X)$ je diskrétní, pokud existuje spočetná množina $C \subset X$ splňující $|\mu|(X \setminus C) = 0$. Množinu všech diskrétních měr značíme $M_d(X)$.

(c) Řekneme, že $\mu \in M(X)$ je Diracova míra v bodě $x \in X$, pokud $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = f(x)$ pro každou $f \in C_0(X)$. Míru μ pak značíme δ_x.

(d) Molekulární mírou myslíme prvek množiny

$$M_{\mathrm{mol}}(X) = \operatorname{conv}\{\delta_x;\ x \in X\}.$$

(e) Nechť m je nezáporná Radonova míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ množin X. Symbolem $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ rozumíme množinu

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{ac},m}(X) &= \{\mu \in M(X);\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathrm{Bs}(X), m(E) \leq \delta : |\mu(E)| \leq \varepsilon\} = \\
&= \{\mu \in M(X);\ \forall N \in \mathrm{Bs}(X), m(N) = 0 \colon \mu(N) = 0\}.
\end{aligned}$$

TVRZENÍ 113. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Množiny $M_d(X)$ a $M_c(X)$ jsou uzavřené podprostory $M(X)$.

(b) Míra μ je diskrétní právě tehdy, když existuje $C = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset X$ spočetná a posloupnost $a \in \ell_1$ taková, že $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.

(c) Je-li m nezáporná Radonova míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ množin X, pak $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ je uzavřený podprostor $M(X)$.

DŮKAZ. (a) Jsou-li μ, ν spojité míry na X, pak pro $x \in X$ platí

$$|\mu + \nu|(\{x\}) \le |\mu|(\{x\}) + |\nu|(\{x\} = 0,$$

tj. $\mu + \nu \in M_{\mathrm{c}}(X)$.

Jsou-li $\mu, \nu \in M(X)$ diskrétní a $C_1, C_2 \subset X$ jsou příslušné spočetné množiny, pak $C = C_1 \cup C_2$ je spočetná a

$$|\mu + \nu|(X \setminus C) \le |\mu|(X \setminus C_1) + |\nu|(X \setminus C_2) = 0.$$

Tedy $\mu + \nu \in M_{\mathrm{d}}(X)$.

Podobně se ukáže, že $M_{\mathrm{c}}(X)$ i $M_{\mathrm{d}}(X)$ jsou uzavřené na násobení skalárem.

Nechť $\{\mu_n\}$ je posloupnost v $M_{\mathrm{c}}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$. Pak

$$|\mu|(\{x\}) = |\mu - \mu_n + \mu_n|(\{x\}) \le |\mu - \mu_n|(\{x\}) + |\mu_n|(\{x\}) \le |\mu - \mu_n|(X) \to 0.$$

Tedy μ je spojitá.

Podobně pro posloupnost $\{\mu_n\}$ v $M_{\mathrm{d}}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$ vybereme příslušné spočetné množiny C_n, $n \in \mathbb{N}$. Pak $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ je spočetná a

$$|\mu|(X \setminus C) \le |\mu - \mu_n|(X \setminus C) + |\mu_n|(X \setminus C) \le |\mu - \mu_n|(X) + |\mu_n|(X \setminus C_n) = \|\mu - \mu_n\|.$$

Tedy $\mu \in M_{\mathrm{d}}(X)$.

(b) Nechť $C = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je množina příslušná μ. Položme $a_n = \mu(\{x_n\})$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(\{x_n\})| = |\mu|(C) = |\mu|(X) = \|\mu\| < \infty,$$

a zjevně $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.

(c) Přímo z definice se ověří, že množina $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ je podprostor $M(X)$. Pokud $\{\mu_n\}$ je posloupnost v $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$ a $N \in \mathrm{Bs}(X)$ je m nulová množina, máme

$$|\mu|(N) = |\mu - \mu_n|(N) + |\mu_n|(N) \le \|\mu - \mu_n\| + 0 \to 0.$$

Tedy $\mu \in M_{\mathrm{ac},m}(X)$.

□

LEMMA 114. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je jeho hustý podprostor. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak w^*-topologie splývá na U° s topologií $\sigma(X^*, Y)$.*

Speciálně, je-li Y hustý podprostor normovaného lineárního prostoru X, na B_{X^*} splývá $\sigma(X^*, Y)$ s w^*-topologií.

DŮKAZ. Dle Věty 6.115 je U° w^*-kompaktní množina. Díky hustotě Y je topologie $\sigma(X^*, Y)$ na U° Hausdorffova, přičemž každá $\sigma(X^*, Y)$-otevřená množina je též w^*-otevřená. Zobrazení $Id : (U^\circ, w^*) \to (U^\circ, \sigma(X^*, Y))$ je tedy spojité, prosté zobrazení kompaktního prostoru do Hausdorffova prostoru. Jedná se tedy o homeomorfismus, což znamená, že tyto topologie splývají.

□

LEMMA 115. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $M^1(X)$ značí množinu všech pravděpodobnostních měr v $M(X)$. Pak je množina $M_{\mathrm{mol}}(X)$ hustá v $(M^1(X), w^*)$.*

DŮKAZ. Nechť $\mu \in M^1(X)$ je dáno. Na základě Lemmatu 114 stačí ukázat, že pro každou $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\nu \in M_{\mathrm{mol}}(X)$ splňující $|\mu(f) - \nu(f)| < \varepsilon$. Nechť tedy $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Označme $M = \|f\|$. Pro každé $x \in \operatorname{supp} f$ existuje okolí U_x obsahující x takové, že $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$,

$y \in U_x$. Pak $|f(y_1) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{M}$ pro každé $y_1, y_2 \in U_x$. Vybereme konečně mnoho $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{supp} f$ splňující $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Označíme $A_0 = \emptyset$ a definujeme

$$A_i = U_{x_i} \setminus \bigcup_{j=0}^{n} U_{x_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nakonec označme $A_{n+1} = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$. Pak A_i, $i = 1, \dots, n+1$, jsou navzájem disjunktní borelovské množiny a $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$. Dále položíme

$$c_i = \mu(A_i), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

a pro každé $i \in \{1, \dots, n+1\}$ vybereme $x_i \in A_i$, pokud $c_i > 0$. Dále vybereme bod $u \in X$ a položíme $x_i = u$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $c_i = 0$. Pokud $A_{n+1} \neq \emptyset$ a $c_{n+1} = 0$, vybereme $v \in A_{n+1}$ a položíme $x_{n+1} = v$. Nakonec definujeme

$$\nu = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \varepsilon_{x_i}.$$

Protože $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n+1$, a

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu(X) = 1,$$

je míra ν molekulární.

Dále platí

$$\begin{aligned}
|\mu(f) - \nu(f)| &= |\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)| = |\sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)| \\
& |\sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} f(x_i)\,\mathrm{d}\mu(x)| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{A_{n+1}} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} c_i = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

□

LEMMA 116. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $\mu \in M(X)$ splňuje $\mu(X) = \|\mu\|$. Pak μ je nezáporná.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že μ je nenulová. Chceme dokázat, že pro každé $A \in \operatorname{Bs}(X)$ platí $\mu(A) \in [0, \infty)$. Předpokládejme, že nějaká borelovská množina splňuje $a = \mu(A) \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Pro číslo $b = \mu(X \setminus A)$ tak dostáváme díky vztahu $a + b \in (0, \infty)$ odhad

$$\begin{aligned}
|a| + |b| \geq |a + b| \geq a + b = \mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu(X) = \|\mu\| = |\mu|(A) + |\mu|(X \setminus A) \\
\geq |\mu(A)| + |\mu(X \setminus A)| = |a| + |b|.
\end{aligned}$$

Píšeme-li $a = a_1 + i a_2$ a $b = b_1 + i b_2$, dostáváme rovnost $|a| + |b| = a + b$, neboli

$$(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Tedy $b_2 = -a_2$, což dává

$$a_1 + b_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + a_2^2}.$$

Jelikož $a_1 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ a $b_1 \le \sqrt{b_1^2 + a_2^2}$, platí $a_2 = 0$. Z rovnosti $a_1 + b_1 = |a_1| + |b_1|$, pak okamžitě plyne $a_1, b_1 \in [0, \infty)$. Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 117 (Součin Radonových měr). *Nechť μ_i je nezáporná Radonova míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru X_i, přičemž $\mathcal{S}_i$ je přísušná σ-algebra μ_i-měřitelných množin, $i = 1, 2$. Pak existuje právě jedna Radonova míra $\mu_1 \times \mu_2$ na $X_1 \times X_2$ splňující $(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$, $A_1 \in \mathcal{S}_1$, $A_2 \in \mathcal{S}_2$.*

DŮKAZ. Vizte [F4, Theorem 417P].

□

VĚTA 118 (Fubiniova věta). *Nechť μ_i je nezáporná Radonova míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru X_i, $i = 1, 2$ a $\mu_1 \times \mu_2$ je jejich součin na $X_1 \times X_2$ daný Větou 117. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Nechť $f : X_1 \times X_2 \to [-\infty, +\infty]$ je taková, že
- *Integrál $\int_{X_1 \times X_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) \in [-\infty, +\infty]$ je definován.*
- *Množina $(X_1 \times X_2) \setminus \{(x, y) \in \operatorname{Dom} f;\ f(x, y) = 0\}$ se dá pokrýt množinou tvaru $X \times \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$, kde $\mu_2(Y_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$.*

Pak je dvojnásobný integrál $\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_2(y) \right) \mathrm{d}\mu_1(x)$ definován a roven $\int_{X_1 \times X_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2)$.

(b) Nechť f je reálná $\mu_1 \times \mu_2$-měřitelná funkce na $X_1 \times X_2$ definovaná $\mu_1 \times \mu_2$-skoro všude. Pokud je jeden z integrálů $\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x, y)| \, \mathrm{d}\mu_2(y) \right) \mathrm{d}\mu_1(x)$ nebo $\int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x, y)| \, \mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_2(y)$ konečný, je f $\mu_1 \times \mu_2$-integrovatelná.

DŮKAZ. Vizte [F4, Theorem 417H].

□

VĚTA 119. *Nechť μ je borelovská těsná míra na lokálně kompaktním Hausdorffově prostoru X, která splňuje (iii) z Definice 103. Pak existuje právě jedna Radonova míra na X rozšiřující μ.*

DŮKAZ. Vizte [F4, Proposition 416F].

□

VĚTA 120. *Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\nu \in M(Y)$ jsou nezáporné těsné borelovské konečné míry. Pak existuje právě jedna nezáporná těsná borelovská míra $\mu \times \nu \in M(X \times Y)$ splňující $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, $A \in \mathrm{Bs}(X)$, $B \in \mathrm{Bs}(Y)$. Navíc platí $\|\mu \times \nu\| = \|\mu\| \|\nu\|$.*

DŮKAZ. Dle Věty 119 existuje právě jedna Radonova míra $\tilde{\mu}$ rozšiřující μ. Podobně rozšíříme ν na $\tilde{\nu}$. Radonovu míru $\tilde{\mu} \times \tilde{\nu}$ danou Větou 117 pak stačí restringovat na $\mathrm{Bs}(X \times Y)$, abychom obdrželi požadovanou míru $\mu \times \nu$. Dle [F4, Proposition 417D] je míra $\mu \times \nu$ jednoznačně určena. Odhad normy pak okamžitě plyne z

$$\|\mu \times \nu\| = (\mu \times \nu)(X \times Y) = \mu(X) \cdot \nu(Y) = \|\mu\| \|\nu\|.$$

□

DEFINICE 121 (Součin konečných těsných borelovských měr). Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\mu \in M(Y)$. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$ a $\nu = \sum_{k=0}^{3} i^k \nu_k$, kde $\mu_k \in M(X)$ a $\nu_k \in M(Y)$, $k = 0, 1, 2, 3$, jsou nezáporné těsné borelovské konené míry.

Definujme

$$(\mu \times \nu) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} (\mu_k \times \nu_l).$$

VĚTA 122. *Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\mu \in M(Y)$ jsou dány. Pak $\mu \times \nu \in M(X \times Y)$ a platí $\|\mu \times \nu\| \le \|\mu\| \|\nu\|$.*

DŮKAZ. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$ a $\nu = \sum_{k=0}^{3} i^k \nu_k$, kde $\mu_k \in M(X)$ a $\nu_k \in M(Y)$, $k = 0, 1, 2, 3$ jsou nezáporné těsné borelovské konečné míry. Pak

$$(\mu \times \nu) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} (\mu_k \times \nu_l)$$

je lineární kombinace těsných borelovských konečných měr, tedy těsná borelovská konečná míra. Označme $\tilde{\mu_k}$ a $\tilde{\nu_l}$ jednaznačně dané Radonovy míry rozšiřující μ_k a ν_l.

Je-li $f \in C_c(X \times Y)$, dostaneme snadno, že funkce $x \mapsto \int_Y f(x, y) \, d\nu_l(y) = \int_Y f(x, y) \, d\tilde{\nu_l}(y)$ je prvkem $C_c(X)$. Tedy

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu_l(y) \right) d\mu_k(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\tilde{\nu_l}(y) \right) d\tilde{\mu_k}(x).$$

Proro dle Věty 118 platí

$$\begin{aligned}
\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) &= \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} \int_{X \times Y} f \, d(\mu_k \times \nu_l) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} \int_{X \times Y} f \, d(\tilde{\mu_k} \times \tilde{\nu_l}) = \\
&= \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\tilde{\nu_l}(y) \right) d\tilde{\mu_k}(x) = \\
&= \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu_l(y) \right) d\mu_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{3} i^k \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu_k(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
|\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu)| &\leq \int_X |\int_Y f(x, y) \, d\nu(y)| \, d|\mu|(x) \leq \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| \, d|\nu|(y) \right) d|\mu|(x) \leq \\
&\leq \|f\| \|\mu\| \|\nu\|.
\end{aligned}$$

Jelikož je $C_c(X \times Y)$ hustý v $C_0(X \times Y)$, máme $\|\mu \times \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$.

$\square$

Literatura

[F2] D.H. Fremlin, *Measure theory, Broad foundations*, .
[F4] D.H. Fremlin, *Measure theory, Topological measure spaces*,
[J] Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1984.
[R] Walter Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003.
[Z] Luděk Zajíček, *Vybrané partie z matematické analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2003.