5. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte.

(a) (10 bodů) Nechť $X = c_0 \oplus_2 \ell_3$ jakožto prostor nad $\mathbb{C}$, a uvažujme předpis

$$T((x_n),(y_n)) = ((y_n),(\frac{x_n}{n})), \quad (x,y) = ((x_n),(y_n)) \in X,$$

(4 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X.

(4 body) Nalezněte v rámci standardních dualit duální operátor T^*.

(2 body) Zjistěte, zda je X reflexivní.

(b) (12 bodů) Nechť $X = \ell_2$ je uvažovaný jakožto prostor nad $\mathbb{C}$ a nechť

$$Tx = T(x_n) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{5}x_5, \frac{1}{6}x_6, \dots), \quad x = (x_n) \in \ell_2.$$

(2 body) Ukažte, že T definuje spojitý lineární operátor na X.

(4 body) Zjistěte, zda je T kompaktní.

(4 body) Nalezněte bodové spektrum T

(2 body) Nalezněte spektrum T.

(c) (8 bodů) Nechť je dána funkce $f(x) = e^{i(x-1)-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$. Nechť F značí Fourierovu transformaci na $L_1(\mu_1)$ a P Fourierovu-Plancherelovu transformaci na $L_2(\mu_1)$.

(3 body) Nalezněte Pf.

(2 body) Zjistěte, čemu se rovná funkce $F(Ff)$ v bodě 1.

(3 body) Určete hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 - 2t + 2} dt.$$

1. $A: c_0 \to \ell_3$ $\qquad$ $B: \ell_3 \to c_0$

$x \mapsto \left(\frac{x_n}{n}\right)$ $\qquad$ $y \mapsto y$

- $\|Ax\|_{\ell_3}^3 = \sum \left|\frac{x_n}{n}\right|^3 \le \|x\|_{c_0}^3 \sum \frac{1}{n^3} \Rightarrow A \in \mathcal{L}(c_0, \ell_3)$ a

$\|A\| \le \sqrt[3]{\sum \frac{1}{n^3}} = K$

- $y \in \ell_3 \Rightarrow \lim y = 0 \Rightarrow y \in c_0$ & $y \in B_{\ell_3} \Rightarrow y \in B_{c_0}$. Tedy

$B \in \mathcal{L}(\ell_3, c_0)$ a $\|B\| \le 1$

- $\|T(x,y)\|_X^2 = \|By\|_{c_0}^2 + \|Ax\|_{\ell_3}^2 \le \|y\|_{\ell_3}^2 + K^2 \|x\|_{c_0}^2 \le$

$\le K^2 \left(\|x\|_{c_0}^2 + \|y\|_{\ell_3}^2 \right) \Rightarrow \|T\| \le K$, $T \in \mathcal{L}(X)$.

- $X^* \cong \ell_1 \oplus_2 \ell_{3/2}$. Ať $(a,b) \in X^*$, pak $T^*(a,b) = (u,v) \in X^*$.

Platí pro $(x,y) \in X$: $(u,v)(x,y) = \sum x_n u_n + \sum y_n v_n$

- $T^*(a,b)(x,y) = (a,b)\,T(x,y) = (a,b)\left(y, \left(\frac{x_n}{n}\right)\right) = \sum y_n a_n + \sum \frac{x_n}{n} b_n$

Po dosazení sdružených vektorů máme $v_n = a_n$, $u_n = \frac{b_n}{n}$.

Tedy $T^*(a,b) = (u,v) = \left(\left(\frac{b_n}{n}\right), (a_n) \right)$

- X není reflexivní, neboť c_0 je uzavřený podprostor X a c_0 není reflexivní.

2. Položme $T_k x = (x_1+x_2, -x_1+x_2, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{5}x_5, \dots, \frac{1}{k}x_k, 0, 0, \dots)$, kde $x \in \ell_2$, $k \geq 5$. Pak $\operatorname{Rng} T_k$ má konečnou dimenzi a

$$\|T_k x\|^2 = \|A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\|_2^2 + \|(\tfrac{1}{4}x_4, \dots, \tfrac{1}{k}x_k, 0, \dots)\|_2^2 \leq$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\leq \|A\|^2(|x_1|^2+|x_2|^2) + \sum_{n\geq 4}^{\infty}|x_n|^2 \leq (1+\|A\|^2)\|x\|^2, \ x \in \ell_2.$$

Tedy $T_k \in \mathcal{L}(X)$ a jsou konečné dimenze.

- Dále $\|T-T_k\| \overset{k\geq 5}{=} \sup_{x\in B_X} \|(T-T_k)x\| = \sup_{x \in B_X} \|(0,\dots,0,\frac{1}{k+1}x_{k+1}, \dots)\| \leq$

$$\leq \frac{1}{k+1}\sup_{x\in B_X}\|(0,\dots,0,x_{k+1},x_{k+2},\dots)\| \leq \frac{1}{k+1}.$$

Tedy $T \in \mathcal{L}(X)$ a $T_k \xrightarrow{\mathcal{L}(X)} T$. proto T kompaktní.

- $Tx = \lambda x$: $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\frac{1}{4}x_4 = \lambda x_3$, $\frac{1}{5}x_5 = \lambda x_4$, ...

$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = (\lambda-1)^2+1 \Rightarrow$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ jsou vlastní čísla A a vl. vektory $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

Tedy $1\pm i$ jsou vl. čísla T s vl. vektory $(1, i, 0, \dots)$, $(1, -i, 0, \dots)$

- Pokud $\lambda \neq 1\pm i$, pak rovnice $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ má jen nulové řešení.

Dále $x_4 = 4\lambda x_3 \Rightarrow x_5 = 5\lambda x_4 = 5\cdot 4\lambda^2 x_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n = \lambda^{n-3}\frac{n!}{6}x_3$

Tedy buď $x_3 = 0$, pak $x_n = 0$ pro $n \geq 3$, nebo $x_3 \neq 0$, ale pak $\overset{\lambda\neq 0}{}$ $|x_n| = |\lambda|^n n!\,|x_3|\cdot\frac{|\lambda|^{3}}{6} \to \infty$. Tedy $x \notin \ell_2$. Nebo $\lambda = 0$, pak $(0,0,1,0,\dots)$ je vl. vektor.

Tedy $Tx = \lambda x$ nemá řešení pro $\lambda \neq 1 \pm i$. Tedy $\sigma_p(T) = \{1\pm i, 0\}$

- T kompaktní, proto $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} = \{1\pm i, 0\}$

3. $f(x) = e^{i(x-1)-|x-1|}$

Pro t: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixt}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{iy-|y|} e^{-i(y+1)t}\, dy = e^{-it} \int_{\mathbb{R}} e^{iy-|y|} e^{-iyt}\, dy =$

$x-1=y$

$$= e^{-it}\left(\int_0^\infty e^{iy-y-iyt}\, dy + \int_{-\infty}^0 e^{iy+y-iyt}\, dy\right) = e^{-it}\left(\left[\frac{e^{y((1-t)i-1)}}{i(1-t)-1}\right]_0^\infty +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{e^{y(i(1-t)+1)}}{i(1-t)+1}\right]_{-\infty}^0\right) = e^{-it}\left(\frac{-1}{i(1-t)-1} + \frac{1}{i(1-t)+1}\right) = \frac{-i(1-t)-1+i(1-t)-1}{(i(1-t)-1)(i(1-t)+1)}\, e^{-it}$$

$$= \frac{-2e^{-it}}{-(1-t)^2-1} = \frac{2e^{-it}}{(t-1)^2+1} = \frac{2e^{-it}}{t^2-2t+2}$$

- $Ff(t) \overset{f \in L_1 \cap L_2}{=} \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2e^{-it}}{t^2-2t+2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-it}}{t^2-2t+2}$, $t \in \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~

- $FFf(1) = \check{f}(1) = f(-1) = e^{i(-2)-2}$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2-2t+2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-it}}{t^2-2t+2}\, e^{it\cdot 1}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\pi}\, F^{-1}(Ff)(1)$

$$= \pi f(1) = \pi e^{i0-0} = \pi = \pi$$