

2. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte.

(a) (9 bodů) Necht' $X = \ell_2(\mathbb{Z}) \oplus_2 \ell_2(\mathbb{N})$ jakožto prostor nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_X = \langle x_1, x_2 \rangle_{\ell_2(\mathbb{Z})} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}.$$

Necht' $e_n \in \ell_2(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{Z}$, a $f_n \in \ell_2(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, značí bázové vektory. Uvažujme vektory $x, y, z \in X$ definované jako

$$x = (e_1, -f_1), y = (2e_1, f_1), z = (e_1, f_1 + f_2).$$

(3 body) Nalezněte ortonormální bázi prostoru $Y = \text{span}\{x, y\}$.

(2 body) Najděte ortonormální projekci X na Y .

(2 body) Spočítejte vzdálenost z od Y .

(2 body) Ukažte, že X je izometricky izomorfní prostoru $\ell_2((\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\}))$.

(b) (12 bodů) Uvažujme prostor $X = C_0(\mathbb{R})$ uvažovaný jako prostor nad $\mathbb{C}$ a předpis

$$(Tf)(x) = f(x+1), \quad x \in \mathbb{R}, f \in X.$$

(2 body) Ukažte, že X je nekonečněrozměrný vektorový prostor.

(2 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X .

(3+4 body) Nalezněte bodové spektrum T a spektrum T .

(1 bod) Zjistěte, zda je T kompaktní.

(c) (9 bodů) Necht' je dána funkce $f(x) = \frac{1}{x+i}$, $x \in \mathbb{R}$. Necht' P značí Fourierovu-Plancherelovu transformaci na $L_2(\mathbb{R}, \mu_1)$. Nalezněte Pf . (Uvažujte funkce $f_N = f\chi_{(-N, N)}$ a použijte metody komplexní proměnné.)

1. Nam $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|} = \frac{(e_1, -f_1)}{\sqrt{2}}$. Dale

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= y - \langle y, \tilde{x} \rangle \tilde{x} = (2e_1, f_1) - \left\langle (2e_1, f_1), \frac{(e_1, -f_1)}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{(e_1, -f_1)}{\sqrt{2}} \\ &= (2e_1, f_1) - \frac{1}{2} (2-1) (e_1, -f_1) = (2e_1, f_1) - \frac{1}{2} (e_1, -f_1) \\ &= \left(\frac{3}{2} e_1, \frac{3}{2} f_1 \right). \text{ Tedy } \tilde{y} = \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|} = \tilde{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \tilde{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1, f_1)\end{aligned}$$

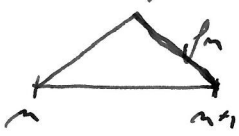
$P \in \tilde{x}, \tilde{y}$ je ON-baza $\tilde{\gamma}$.

• $P: X \rightarrow \tilde{\gamma}$
 $u = (e_1, f_1) \mapsto \langle u, \tilde{x} \rangle \tilde{x} + \langle u, \tilde{y} \rangle \tilde{y} = \frac{1}{2} (\langle e_1, e_1 \rangle - \langle f_1, f_1 \rangle) (e_1, -f_1) + \frac{1}{2} (\langle e_1, e_1 \rangle + \langle f_1, f_1 \rangle) (e_1, f_1)$

• $z = (e_1, f_1 + f_2) \Rightarrow Pz = \frac{1}{2} (1-1) (e_1, -f_1) + \frac{1}{2} (1+1) (e_1, f_1) = (e_1, f_1)$
 $\|z - Pz\|^2 = \|(e_1, f_1 + f_2) - (e_1, f_1)\|^2 = \|(0, f_2)\|^2 = 1$
 $\Rightarrow \text{dist}(z, \tilde{\gamma}) = 1.$

• $T: \ell_2(\mathbb{Z}) \oplus \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2((\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\}))$
 $u = (e_i, f_j) \mapsto$
 $Tu(i) = \begin{cases} e^{(i,0)} & i = (k, 0) \in \mathbb{Z} \times \{0\} \\ f^{(n,1)} & i = (n, 1) \in \mathbb{N} \times \{1\} \end{cases}$
 Pot T linearni, $\|Tu\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |e_i|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^2 = \|u\|_X^2$.
 Tedy T izometrija, etod je tjeci na. Pato T izometrija izomorfizma.

2. $Tf(x) = f(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in X = C_0(\mathbb{R})$.

• uvažujeme funkci f_n  , $f_n \in \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C^X$, tedy $\dim X = \infty$.

• $f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow Tf \in C(\mathbb{R})$. Dále $|x_n| \rightarrow \infty$, pak $|x_n+1| \rightarrow \infty$, tedy

$$|Tf(x_n)| = |f(x_n+1)| \rightarrow 0. \text{ Proto } Tf \in C_0(\mathbb{R}).$$

Uvaž $\|Tf\| = \|f\|$, tedy T je normie. Jelikož $T^{-1}f = f(x-1) \in X$ a

$$\|T^{-1}\| = 1, \text{ tudíž } \|T\| = \|T^{-1}\| = 1. \text{ Tedy } \sigma(T) \subset \mathbb{T}.$$

• $\sigma_p(T) = \emptyset$: Ať $\lambda \in \mathbb{T}$, $f \in X$, $\exists$ $Tf = \lambda f$. Pak

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lambda f(x) \\ f(x+2) &= \lambda f(x+1) \Rightarrow f(x+k) = \lambda f(x+k-1) = \lambda^2 f(x+k-2) = \dots \\ f(x+3) &= \lambda f(x+2) \\ &\vdots \\ &= \lambda^k f(x), \quad k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Fixujeme $x \in \mathbb{R}$. Pak $x+k \rightarrow \infty$, tedy $f(x+k) \rightarrow 0$. Proto

$$|f(x)| = |\lambda^{-k} f(x+k)| = |f(x+k)| \rightarrow 0, \text{ tj. } f(x) = 0.$$

Tedy $f \equiv 0 \in \sigma_p(T) = \emptyset$.

• $\sigma(T) = \mathbb{T}$. Ať $\lambda \in \mathbb{T}$, $g =$  Uvažujeme $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Pro } \lambda \neq 1 \text{ řešíme } f(x+1) - \lambda f(x) &= g(x) \\ f(x+2) - \lambda f(x+1) &= g(x+1) \neq 0 \Rightarrow f(x+2) = \lambda f(x+1) + g(x+1) \\ f(x+3) - \lambda f(x+2) &= g(x+2) = 0 \Rightarrow f(x+3) = \lambda f(x+2) = \lambda^2 f(x+1) \\ &\vdots \\ f(x+k) &= \lambda^{k-1} f(x+1) = \\ &= \lambda^{k-1} (g(x) + \lambda f(x)) \end{aligned}$$

$$f \in C_0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\lambda} g(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$f(x) - \lambda f(x-1) = g(x-1) = 0 \Rightarrow f(x-1) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$

$$f(x-1) - \lambda f(x-2) = g(x-2) = 0 \Rightarrow f(x-2) = \frac{1}{\lambda^2} f(x)$$

$$\vdots \\ f(x-k) = \frac{1}{\lambda^k} f(x)$$

$$\Rightarrow f(x-k) = -\frac{1}{\lambda^{k+1}} g(x), \quad x \in [0, 1], k \in \mathbb{N} \Rightarrow f \notin C_0.$$

Tedy $Tf - \lambda f = g$ nad $\overline{F(T)}$ po nowi funkcji g .

• T nad E jest, wtedy $0 \in \sigma(T)$.

$$3. \int |x| = \frac{1}{x+i} \in L_2(\mathbb{R})$$

$$f_N |x| = f(x) \chi_{(-N, N)}(x), \text{ pochtam } \int_{-N}^N \frac{1}{x+i} e^{ixt} dx$$

• $\epsilon < 0$: AE $\Gamma_N = \text{arc}$, $g(z) = \frac{e^{izt}}{z+i}$. $P = \epsilon$

$$0 = \int_{\Gamma_N} g(z) dz = \int_{-N}^N \frac{e^{ixt}}{x+i} dx + \int_{C_N} \frac{1}{z+i} e^{izt} dz$$

$$\left| \int_{C_N} \frac{e^{izt}}{z+i} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{-iNt \sin \alpha}}{N e^{i\alpha} + i} N e^{i\alpha} i d\alpha \right| \leq$$

$$z = N e^{i\alpha}, \alpha \in [0, \pi]$$

$$\leq \frac{N}{\sqrt{N^2 - 2N - 1}} \int_0^\pi e^{N \sin \alpha} d\alpha \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{Lebesgue}} 0$$

$$\sqrt{N^2 - 2N - 1} = \sqrt{(N \cos \alpha + i(N \sin \alpha + 1))^2} = \sqrt{N^2 \cos^2 \alpha + N^2 \sin^2 \alpha + 2N \sin \alpha + 1}$$

$$\geq N^2 - 2N - 1$$

Tedy $\int_{-N}^N \frac{e^{ixt}}{x+i} dx \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$

• $\epsilon > 0$: $\Gamma_N = \text{arc}$, $g(z) = \frac{e^{-izt}}{z+i}$

$$\int_{\Gamma_N} g(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{-i} g(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{-izt}}{z+i} = 2\pi i e^{-i(-i)t} = 2\pi i e^{-t}$$

$$\left| \int_{C_N} g(z) dz \right| \leq \int_\pi^{2\pi} \frac{N e^{N \sin \alpha}}{\sqrt{N^2 - 2N - 1}} d\alpha \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{Lebesgue}} 0$$

$$\int_{-N}^N g(x) dx + \int_{C_N} g(z) dz = \int_{\Gamma_N} g(z) dz = 2\pi i e^{-t}$$

$$\Rightarrow \int_{-N}^N g(x) dx \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} -2\pi i e^{-t}$$

Tedy $Pf|f| = \begin{cases} -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, d.h. pożądy we sformuł.