

Písemná zkouška z UFA (B)
ZS 2023/2024

Úloha 1. Necht' je zobrazení $T: C([0, 2]) \rightarrow L_1([0, 1])$ dáno předpisem

$$Tf(t) = \int_t^1 f(2s) \, ds.$$

Ukažte, že T je spojitý lineární operátor a spočtěte jeho normu. Pomocí standardní reprezentace duálů popište duální operátor T^* .

Úloha 2. Uvažujme reálné skaláry. Necht' $g \in C([0, 1])$. Definujme zobrazení $T: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ předpisem

$$T(f) = gf.$$

Ukažte, že T je spojitý lineární operátor. Vyšetřete jeho spektrum a bodové spektrum. Rozhodněte, je-li T kompaktní.

Používáte-li nějaké sofistikovanější věty, zformulujte je.

Řešení

Úloha 1. $\|T\| = \frac{1}{2}$, $T^*g(A) = \frac{1}{2} \int_A G(\frac{u}{2}) \, du$, kde $G(s) = \int_0^s g(t) \, dt$.

Úloha 2. $\|T\| = \|g\|$, $\sigma(T) = g([0, 1])$; $\lambda \in \sigma_p(T)$, právě když $g = \lambda$ na nějakém otevřeném intervalu. T je kompaktní, právě když $g \equiv 0$ (plyne ze spektra).