

Písemná zkouška z UFA (C)
ZS 2023/2024

Úloha 1. Necht' je zobrazení $T: L_2([1, +\infty)) \rightarrow c_0$ dáno předpisem

$$T(f) = \left(\int_1^{+\infty} f(t) \frac{1}{t^n} dt \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Ukažte, že T je dobře definovaný spojitý lineární operátor a spočtěte jeho normu. Pomocí standardní reprezentace duálů popište duální operátor T^* .

Úloha 2. Definujme zobrazení $T: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ předpisem $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (z_n)_{n=1}^{\infty}$, kde

$$z_{2n-1} = \frac{1}{n}x_{2n-1} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)x_{2n},$$

$$z_{2n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_{2n-1} + \frac{2}{n}x_{2n}.$$

Ukažte, že T je spojitý lineární operátor. Určete, je-li operátor T kompaktní. Vyšetřete jeho spektrum a bodové spektrum.

Používáte-li nějaké sofistikovanější věty, zformulujte je.

Řešení

Úloha 1. $\|T\| = 1$, $T^*(y_n)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{1}{t^n}$.

Úloha 2. $\|T\| = 5$, není kompaktní, $\sigma_p(T) = \{-1\} \cup \{1 + \frac{3}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{1\}$.