1. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_1 q^n$ konverguje pro $|q| < 1$ (geometrická řada)

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (harmonická řada)

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (srovnejte s teleskopickou řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$)

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n$ (nutná podmínka konvergence)

5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+4}{n^2+3n+7}$ (limitní srovnávací kritérium, srovnání s $\sum \frac{1}{n}$)

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(3n+1) \cdot 3^n}$ (limitní podílové kritérium)

Příklady pro samostatnou práci

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$

8. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+3}$

9. $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3n+3}{4n-7}\right)^n$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+3) \cdot 3^n}{n!}$

11. $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(3n+4) \cdot 2^n}{3^{n+2}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+4n^2+8n+12}{3n^2-3}$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+2n-1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n 2a\,,\ a \in \mathbb{R}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \sin^2\frac{\pi}{n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{n^2}$

Řešení:

1. a) Pro $q \neq 1$ dokážeme matematickou indukcí, že $s_n = \sum_{i=0}^{n} aq^i = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$.

   I. $n = 0$, pak $s_n = \sum_{i=0}^{0} aq^n = a = a\frac{1-q^1}{1-q}$.

   II. Nechť $s_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1+q}$, pak $s_{n+1} = s_n + aq^{n+1} = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + aq^{n+1} = a\frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = a\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$.

   Tedy $\lim_{n\to} s_n = \lim_{n\to} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |q| < 1$.

   b) Pro $q = 1$ je $s_n = \sum_{i=0}^{n} aq^i = \sum_{i=0}^{n} a = a(n+1)$, tedy $s_n \to \infty(-\infty)$ pro $a > 0$ $(a < 0)$ $\Rightarrow$ Řada diverguje k ∞ $(-\infty)$.

   Řada konverguje pro $|q| < 1$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$, tedy

$$s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+..+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)>$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...++\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}$$

Tedy $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$.

3. Ukažme, že konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty}s_n=1$, a proto řada konverguje.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}=1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(i+1)^2}.$$

Jelikož $\frac{1}{i(i+1)}>\frac{1}{(i+1)^2}$, tak z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ plyne i konvergence řady $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ (řada je omezená a jelikož je posloupnost částečných součtů rostoucí, tak konverguje).

4. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}3^n=\infty\neq 0$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence. Řada tedy diverguje.

5. Srovnáme s harmonickou řadou.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+4}{n^2+3n+7}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n}{n^2+3n+7}=2\in(0,\infty),$$

tedy z divergence harmonické řady plyne i divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{n^2+3n+7}$.

6. Limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(3n+4)3^{n+1}}}{\frac{2^n}{(3n+1)3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3n+1)}{3(3n+4)}=\frac{2}{3}<1,$$

řada tedy konverguje.

7. Srovnáme s řadou $\sum\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^3}{(n+1)^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=1\in(0,\infty).$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ diverguje, jelikož $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{1}{n}$ a harmonická řada diverguje. Proto diverguje i řada $\sum\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$.

8. Nutná podmínka konvergence: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+3} = \frac{1}{4} \neq 0$, tedy řada diverguje.
9. Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{4n-7} = \frac{3}{4}$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí: $\frac{3n+3}{4n-7} < \frac{4}{5}$ $(15n + 15 < 16n - 28$, tedy $n_0 = 43)$. Jelikož řada $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ konverguje, tak konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3n+3}{4n-7}\right)^n$.
10. Limitní podílové kritérium:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+4)3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+3)3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)3}{(n+1)(n+3)} = 0 < 1,$$
řada tedy konverguje.
11. Limitní podílové kritérium:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(3n+7)2^{n+1}}{3^{n+3}}}{\frac{(3n+4)2^n}{3^{n+2}}} = \frac{2}{3} < 1,$$
řada tedy konverguje.
12. Nutná podmínka konvergence:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4n^2+8n+12}{3n^2-3} = \infty \neq 0,$$
řada diverguje.
13. Srovnáme s harmonickou řadou.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{3n^n+2n-1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,\infty),$$
řada tedy konverguje.
14. Srovnáme s harmonickou řadou.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi \in (0,\infty),$$
řada tedy diverguje.
15. Jde o geometrickou řadu s kvocientem $q = \sin 2a$, tedy řada diverguje k $+\infty$ je-li $\sin 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\pi$, řada osciluje, je-li $\sin 2a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, v ostatních případech $(a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$ řada konverguje.
16. Řada se chová přibližně jako konvergentní řada $\sum \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in (0,\infty),$$
řada tedy konverguje.

17. Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \pi^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right)^2 = \pi^2 \in (0, \infty).$$

Řada je konvergentní.

18. Limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{2}(3n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

řada konverguje.

19. Srovnáme s harmonickou řadou:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\pi} \in (0, \infty),$$

řada diverguje.

1. $\sum \frac{1}{n \ln n}$
2. $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$
3. $\sum \frac{n^2 + n}{3^{n+1}}$
4. $\sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$
5. $\sum \left(\frac{2}{5^{n+1}} + \frac{(2n)!}{3^n}\right)$
6. $\sum \frac{1}{(3 - (-1)^n)^n}$
7. $\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$
8. $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)^n$
9. $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)$
10. $\sum \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
11. $\sum \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2 + 1}$
12. $\sum \frac{n!}{n^n}$
13. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Řešení:

1. Integrální kritérium:
$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{y} dy = [\ln y]_{\ln 2}^\infty = \infty,$$
řada tedy diverguje.

2. Integrální kritérium:
$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{y^2}dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{\ln 2}^\infty = \frac{1}{\ln 2} < \infty,$$
řada konverguje.
3. Limitní podílové kritérium:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+n+1}{3(n^2+n)} = \frac{1}{3} < 1,$$
řada konverguje.
4. Nutná podmínka konvergence:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^n = e^{-2} \neq 0,$$
řada tedy diverguje.
5. Nutná podmínka konvergence:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5^{n+1}} + \frac{(2n)!}{3^n}\right) = \infty \neq 0,$$
řada tedy diverguje.
6. Jelikož $\frac{1}{(3-(-1)^n)^2} \leq \frac{1}{2^n}$ a řada $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^2$ konverguje, tak konverguje i řada $\sum \frac{1}{(3-(-1)^n)^n}$.
7. Srovnání s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^2}$.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,\infty),$$
tedy řada konverguje.
8. Limitní odmocninové kritérium:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2^{\frac{1}{n}}-1)^n} = \lim_{n\to\infty} (2^{\frac{1}{n}}-1) = 0 < 1,$$
řada tedy konverguje.
9. Srovnáme s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{n}$.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 2 \in (0,\infty),$$
řada diverguje.

10. Nejdříve si trochu upravíme výraz $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2} \in (0,\infty),$$

tedy řada konverguje.

11. Bez použití pojmu absolutní konvergence lze postupovat následujícím způsobem:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2+1} = -\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{4^2+1} - \frac{1}{6^2+1} + \frac{1}{8^2+1} - ...,$$

tedy

$$\begin{aligned}
-s_{4n} &= \sum_{i=1}^{4n} -\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2+1} = \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{4^2+1} + \frac{1}{6^2+1} - \frac{1}{8^2+1} + ... + \frac{1}{(4n-2)^2+1} - \frac{1}{(4n)^2+1} \\
&= \left(\frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{4^2+1}\right) + \left(\frac{1}{6^2+1} - \frac{1}{8^2+1}\right) + ... + .\left(\frac{1}{(4n-2)^2+1} - \frac{1}{(4n)^2+1}\right) < \\
&< \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{6^2+1} + ... + .\frac{1}{(4n-2)^2+1} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + ... + \frac{1}{(4n-2)^2} < \\
&< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{(4n-2)^2} = \sum_{n=2}^{4n-2} \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentní a posloupnost $\{-s_{4n}\}$ je rostoucí, je i posloupnost $\{-s_{4n}\}$ konvergentní. Ke konvergenci řady už stačí jen ověřit nutnou podmínku konvergence, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2+1} = 0$.

12. Limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1,$$

tedy řada konverguje.

13. Limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1,$$

tedy řada konverguje.

Rozhodněte, zda následující řady konvergují absolutně, relativně a nebo divergují.

1. $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$
2. $\sum(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$
3. $\sum(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$
4. $\sum(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)^3}$
5. $\sum(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$
6. $\sum(-1)^{n}\frac{1}{n2^n}$
7. $\sum(-1)^{n}\frac{1}{n+(-1)^n}$
8. $\sum(-1)^{n}\frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$
9. $\sum(-1)^{n}\frac{2^{n+2}}{3^{n-1}n!}$
10. $\sum(-1)^{n}\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$
11. $\sum(-1)^{n}\ln(1+\frac{1}{n})$
12. $\sum(-1)^{n}\sin(n)$
13. $\sum(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n-(-1)^n)}$
14. $\sum(-1)^{n}\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n)$

Řešení:

1. Leibnizovo kritérium:

   I. Znaménka se střídají.

   II. $a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &\overset{?}{\geq} a_{n+1} \\ \frac{n}{n^2+1} &\overset{?}{\geq} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\ n(n^2+2n+2) &\overset{?}{\geq} (n+1)(n^2+1) \\ n^2+2n &> n+1, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   III.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

   Řada tedy konverguje.
   Absolutní konvergence: řadu $\sum |a_n| = \sum \frac{n}{n^2+1}$ srovnáme s harmonickou řadou, řada $\sum |a_n|$ tedy diverguje, proto řada $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ konverguje relativně.

2. Leibnizovo kritérium:

   I. Znaménka se střídají.

   II. $a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$:

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} < 0, \forall x > e.$$

   III.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

   Řada tedy konverguje.
   Absolutní konvergence: jelikož $\frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}, \forall n > e$, tak řada $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverguje a tedy řada $\sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ konverguje relativně.

3. Leibnizovo kritérium:

   I. Znaménka se střídají.

   II. $a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$: $\sqrt{x}$ je rostoucí funkce, tedy $\frac{1}{\sqrt{x}}$ je klesající funkce a proto $a_n > a_{n+1}$.

   III.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

   Řada tedy konverguje.
   Absolutní konvergence: řada $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ je divergentní[1], tedy řada $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje relativně.

[1] $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$.

4. Řada $\sum \frac{1}{(n+1)^3}$ je konvergentní (viz. poznámka pod čarou na předchozí straně), proto řada $\sum (-1)^n \frac{1}{(n+1)^3}$ konverguje absolutně.

5. Nutná podmínka konvergence: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ neexistuje, řada tedy diverguje (osciluje).

6. Absolutní konvergence - limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1,$$

řada konverguje absolutně.

7.

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= \sum_{i=2}^{2n} (-1)^i \frac{1}{i+(-1)^i} = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{3-1} + \frac{1}{4+1} - \frac{1}{5-1} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{-1}{2\cdot 3} + \frac{-1}{4\cdot 5} + \dots + \frac{-1}{(2n+1)2n}. \end{aligned}$$

Tedy $-s_{2n+1} < \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$, a tedy posloupnost $\{-s_{2n+1}\}$ konverguje (je monotónní a omezená). Jelikož $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak konverguje i posloupnost $\{s_n\}$, a tedy je řada konvergentní.
Absolutní konvergence: řada $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n+(-1)^n}$ se chová podobně jako harmonická řada, a tedy diverguje. Proto řada $\sum (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$ konverguje relativně.

8. Absolutní konvergence - limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{2^{2n+3}}}{\frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}} = \frac{3}{4} < 1,$$

tedy řada konverguje absolutně.

9. Absolutní konvergence - limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+3}}{3^n(n+1)!}}{\frac{2^{n+2}}{3^{n-1}n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3(n+1)} = 0 < 1,$$

tedy řada konverguje absolutně.

10. Leibnizovo kritérium:

    I. Znaménka se střídají.

    II. $a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$: $\sqrt{x}$ je rostoucí funkce, tedy potřebujeme ukázat, že $\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$, což jsme ukázali již v příkladu 1.

    III.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} = 0.$$

Řada tedy konverguje.
Absolutní konvergence: srovnáme s divergentní řadou $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1 \in (0,\infty),$$

tedy řada konverguje relativně.

11. Leibnizovo kritérium:

    I. Znaménka se střídají.

    II. $a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$: $\ln x$ je rostoucí funkce, tedy stačí ukázat, že $1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{n+1}$, což plyne z nerovnosti $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

    III.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0.$$

Řada tedy konverguje.
Absotulní konvergence: srovnáme s harmonickou řadou.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,\infty),$$

tedy řada konverguje relativně.

12. Nutná podmínka konvergence: $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \sin(n)$ neexistuje, tedy řada diverguje.
Neexistence předchozí limity lze ukázat třeba takto: Pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ platí, že existuje $m > n_0$ takové, že m i $m+1$ leží v intervalu $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) + k2\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ (interval $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) + k2\pi$ má délku $\frac{2}{3}\pi > 2$). Pak ale $\sin(m) > \frac{1}{2}$ a $\sin(m+1) > \frac{1}{2}$, tedy
$$|a_m - a_{m+1}| = |(-1)^m \sin(m) + (-1)^{m+1}\sin(m+1)| > 1$$
(nesplňuje B.C. podmínku), a tedy není posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

13.
$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n-(-1)^n)} &= \frac{-1}{\ln(3+1)} + \frac{1}{\ln(4-1)} + \frac{-1}{\ln(5+1)} + \frac{1}{\ln(6-1)} + \dots \\ &= \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 3 \ln 4} + \frac{\ln 6 - \ln 5}{\ln 5 \ln 6} + \dots = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln 3 \ln 4} + \frac{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}{\ln 5 \ln 6} + \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{\ln(2n+1)\ln(2n+2)}.\end{aligned}$$

Tuto řadu srovnáme s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$ (viz. str 6, cv. 2.).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{\ln(2n+1)\ln(2n+2)}}{\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{\frac{1}{2n+1}} \cdot \frac{\ln(2n+1)}{\ln(2n+1)} = 1 \in (0,\infty),$$

tedy řada konverguje.
Absolutní konvergence:

$$\frac{1}{\ln(n-(-1)^n)} > \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1},$$

proto řada $\sum \frac{1}{\ln(n-(-1)^n)}$ diverguje. Původní řada tedy konverguje relativně.

14. Absolutní konvergence: Upravme nejdříve výraz $\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n)$

$$\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n) = \frac{1}{n}\sin\left((\sqrt{n^2+n}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right).$$

Jelikož $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$ konverguje k polovině, tak původní řadu srovnáme s harmonickou řadou, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = \sin(\frac{1}{2}) \in (0,\infty),$$

tedy řada $\sum\frac{\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{n}$ diverguje.
Leibnizovo kritérium:

I. Znaménka se střídají.

II. $a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$: Označme $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x}$, pak

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x}\right)' = \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1\right)x - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2}$$
$$= \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\left(\frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}\right)x - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2}$$
$$= \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\left(\frac{(2x+1)^2-4(x^2+x)}{2\sqrt{x^2+x}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}\right)x - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2}$$
$$= \frac{\frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2}.$$

Jelikož $\sin(\sqrt{x^2+x}-x) \to \sin(\frac{1}{2})$ a $\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} \to 0$, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall x > n_0$ je $\sin(\sqrt{x^2+x}-x) > \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}$ a tedy $f'(x) < 0$. Proto $a_{n+1} < a_n \forall n > n_0$.

III.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{n} = 0.$$

Řada tedy konverguje relativně.

1. Ukažte, že periodická čísla jsou racionální. (Návod: využijte geometrickou řadu)

2. $\sum (-1)^n \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

3. $\sum (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$

4. $\sum \frac{\sqrt[n]{n}\sin n}{n}$

5. $\sum \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$

6. $\sum \left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

7. $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Řešení:

1. Uvažujme číslo $m = 10^{-k} \cdot 0.bbbbbbb...$, kde $b \in 1, ..., 9$, pak

$$m = b{\cdot}10^{-k-1}+b{\cdot}10^{-k-2}+b{\cdot}10^{-k-3}+... = b{\cdot}10^{-k}(10^{-1}+10^{-2}+...) = \frac{b\cdot 10^{-k}}{1-0.1} = \frac{b}{10^k\cdot\frac{9}{10}} = \frac{b}{9\cdot 10^{k-1}}.$$

Obdobně postup pro delší periodu $b = b_1 b_2 b_3 ... b_l$, kde $b_i = 0, ..., 9$ (zde je kvocient geometrické řady 10^{-l}).

2. Absolutní konvergence - odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje absolutně.

3. Absolutní konvergence - Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n!}(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{1})...(2+\sqrt{n})}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right) = \infty > 1,$$

řada konverguje absolutně.

4. Nejdříve si ukážeme konvergenci řady $\sum \frac{\sin n}{n}$ - Dirichletovo kritérium: Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, posloupnost částečných součtů řady $\sum \sin n$ je omezená. Tedy řada $\sum \frac{\sin n}{n}$ konverguje.

   Nyní použijeme Abelovo kritérium: Řada $\sum \frac{\sin n}{n}$ konverguje, posloupnost $\{\sqrt[n]{n}\}$ je omezená a $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ (pro dostatečně velké n), jelikož $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ pro $x > e$. Tedy konverguje i řada $\sum \frac{\sqrt[n]{n}\sin n}{n}$.

5. Odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

   řada konverguje.

6. Odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} \stackrel{l'H}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{-2}{\pi\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\cdot\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}} = e^{\frac{-2}{\pi}} < 1,$$

   řada konverguje.

7. Limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

   řada konverguje.

1. $\sum \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)$

2. $\sum \dfrac{\ln^a n}{n^b} \operatorname{arccotg}^c(n)$

3. $\sum \sin \dfrac{1}{n \ln^2 n}$

4. $\sum (-1)^n \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$

5. $\sum \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$

6. $\sum \dfrac{1}{n!} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

7. $\sum (-1)^n \ln \left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right) \sin n$

8. $\sum (-1)^n \dfrac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)}$

9. $\sum (-1)^n \dfrac{\sinh(nx) + \cosh(nx)}{e^{2nx}}$

Řešení:

1.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1} &= \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{n+1}^2 + \sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n-1}^2}{\sqrt[3]{n+1}^2 + \sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n-1}^2} \\
&= \frac{n+1-(n+1)}{\sqrt[3]{n+1}^2 + \sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n-1}^2} \\
&= \frac{2}{n^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}^2\right)}.
\end{aligned}$$

Srovnáme s divergentní řadou $\sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}^2} = \frac{2}{3} \in (0, \infty),$$

řada diverguje.

2. Jelikož
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg}(x)}{\frac{1}{x}}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=1\in(0,\infty),$$
tak se řada $\sum\frac{\ln^a n}{n^b}\operatorname{arccotg}^c(n)$ chová přibližně jako řada $\sum\frac{\ln^a n}{n^{b+c}}$ (můžeme tyto dvě řady srovnat srovnávacím kritériem). Řada $\sum\frac{\ln^a n}{n^{b+c}}$ konverguje pro $b+c>1$ a diverguje pro $b+c<1$. Pro $b+c=1$ řada konverguje pro $a>1$ a diverguje pro $a\le 1$ viz. str.6 řady 1. a 2.

3. Řadu srovnáme s konvergentní řadou $\sum\frac{1}{n\ln^2 n}$ (str.6, př.2).
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n\ln^2 n}}{\frac{1}{n\ln^2 n}}=1\in(0,\infty),$$
řada tedy konverguje.

4. Dirichletovo kritérium: Nejdříve ukážeme, že má řada $\sum(-1)^n\sin n$ omezené částečné součty.
$$s_{2n}=\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\sin i=-\sum_{i=1}^{2n}\sin i+2\sum_{i=1}^{n}\sin(2i).$$
Jelikož mají řady $\sum_n\sin n$ i $\sum_n\sin 2n$ omezené částečné součty, tak má i řada $\sum(-1)^n\sin n$ omezené částečné součty. Posloupnost $\{\frac{n}{n^2+1}\}$ je klesající (viz. str 9, př 1) a $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$, tedy řada konverguje dle Abelova kritéria.

Absolutní konvergence: Jelikož $|\sin x|>\frac{1}{2}$ na intervalu $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})+k\pi$ a délka intervalu $(\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$ je $\frac{\pi}{3}<2$, tak pro libovolné $n\in\mathbb{N}$ a alespoň jedno $i=0,1,2$ platí $|\sin(n+i)|>\frac{1}{2}$ (ve všech třech po sobě jdoucích hodnotách $n,n+1,n+2$ nemůže být hodnota funkce $|\sin n|$ pod polovinou). Tedy dostaneme následující omezení
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3n}\left|\sin n\frac{n}{n^2+1}\right| &= |\sin 1|\frac{1}{1^2+1}+|\sin 2|\frac{2}{2^2+1}+|\sin 3|\frac{3}{3^2+1}+|\sin 4|\frac{4}{4^2+1}\ldots+|\sin 3n|\frac{3n}{9n^2+1}>\\ &>(|\sin 1|+|\sin 2|+|\sin 3|)\frac{3}{3^2+1}+|\sin 4|\frac{4}{4^2+1}\ldots+|\sin 3n|\frac{3n}{9n^2+1}>\\ &>\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3^2+1}+|\sin 4|\frac{4}{4^2+1}\ldots+|\sin 3n|\frac{3n}{9n^2+1}>\sum_{i=1}^{n}\frac{3n}{2((3n)^2+1)}.\end{aligned}$$
Řadu $\sum_{i=1}^{n}\frac{3n}{2((3n)^2+1)}$ můžeme srovnat s harmonickou řadou, tedy tato řada diverguje a proto diverguje i řada $\sum|\sin n|\frac{n}{n^2+1}$.

Řada $\sum(-1)^n\frac{n\sin n}{n^2+1}$ tedy konverguje relativně.

5. Srovnáme s konvergentní řadou $\sum\frac{\ln n}{n^2+1}$:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)}{\frac{\ln n}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1}{\frac{\ln n}{n^2+1}}=1\in(0,\infty),$$
řada tedy konverguje.

6. I. Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{en^n}{(n+1)^n}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-1}{\frac{1}{n}} \overset{l'H}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\ln\frac{n}{n+1}+n\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{n}{n+1}}\right)}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$\overset{Taylor}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{-1}{n+1}-\frac{\left(\frac{-1}{n+1}\right)^2}{2}+o\left(\left(\frac{-1}{n+1}\right)^2\right)+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{-1}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1,$$

řada diverguje.

II. Použijeme Stirlingův vzorec ($\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}=1$): Srovnáme řadu s divergentní řadou $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \in (0,\infty),$$

tedy řada diverguje.

7. Relativní konvergence - Dirichletovo kritérium:

Zaměřme se nejdříve na monotonii posloupnosti $\{a_n\}=\{(-1)^n\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)\}$. Pro sudé n dostaneme:

$$a_n \overset{?}{<} a_{n+1}$$

$$(-1)^n\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) \overset{?}{<} (-1)^{n+1}\ln\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \overset{?}{<} -\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$e^{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \overset{?}{<} e^{-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$\frac{n-1}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right) \overset{?}{<} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{n+1}{n+2}$$

tedy $a_n < a_{n+1}$.

Pro liché n dostaneme:

$$\begin{aligned} a_n &\overset{?}{\leq} a_{n+1} \\ -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\overset{?}{\leq} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} &\overset{?}{\leq} \left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

tedy $a_n = a_{n+1}$. Posloupnost $\{(-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)\}$ je tedy neklesající. Jelikož má $\sum \sin n$ omezené částečné součty, tak řada $\sum (-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) \sin n$ konverguje.

Absolutní konvergence: Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)|}{n} = 1$, tak můžeme tuto řadu srovnat s divergentní řadou $\sum \frac{|\sin n|}{n}$, tedy řada $\sum (-1)^n \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) \sin n$ konverguje relativně.

8. Nutná podmínka konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)} \overset{l'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{1+n^3} \cdot 3n^2} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

řada diverguje.

9. $\sum (-1)^n \frac{\sinh(nx)+\cosh(nx)}{e^{2nx}} = (-1)^n \frac{\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}+\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}}{e^{2nx}} = (-1)^n \frac{e^{nx}}{e^{2nx}} = (-1)^n e^{-nx}$. Jde tedy o geometrickou řadu s kvocientem $q = -1e^{-x}$, tedy konverguje (absolutně) pro $x > 0$ a diverguje pro $x \leq 0$.