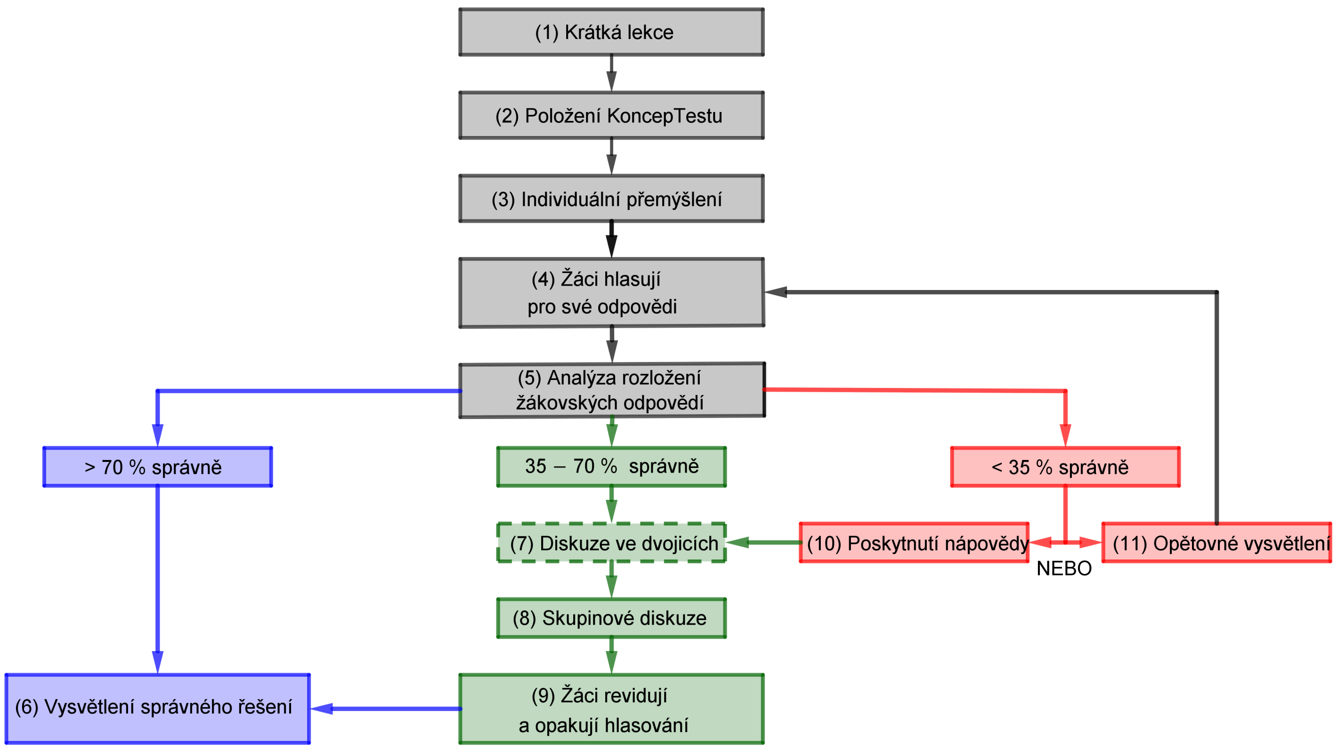
Inovativní metody a techniky ve výuce matematické analýzy

Obsah

1 Teoretický aparát

1.1 Peer instruction

Následující popis metody Peer Instruction je upravenou a rozšířenou verzí popisu z článku (Zadražil, 2018):



Obrázek 1: Schéma jednoho vyučovacího bloku PI

„*Peer Instruction* (dále jen *PI*), jak ji ve své knize (Mazur, 1997) popsal Eric Mazur, je metoda aktivního učení stojící zejména na skupinové diskuzi vyvolané složitější konceptuální otázkou, takzvaným *KoncepTestem* (dále jen *KT*). Hodina vyučovaná podle *PI* je obvykle členěna do několika bloků. Schematickou strukturu jednoho takového bloku si můžeme prohlédnout na obrázku 1. (Oproti původnímu schéma metody je zde navíc uveden dodatečný krok (7) – diskuze ve dvojicích. Jinými slovy, jde již o schéma modifikované metody *PI*.) Každý blok je zahájen krátkou prezentací zvoleného konceptu (1). Při svém výkladu se instruktor snaží vyvarovat přímému poskytnutí vzorce nebo jiné, na paměti založené, berličky. Po prezentaci následuje zadání *KT* (2) cíleného na prohloubení porozumění představovanému konceptu (pro matematickou analýzu jsou konkrétní příklady uvedeny na obrázcích 2a a 2b). Studentům je poskytnut krátký čas na samostatné promyšlení odpovědi (3). Následně jsou vyzváni k hlasování prostřednictvím hlasovacích karet, clickerů nebo chytrých zařízení ve prospěch zamýšlené odpovědi (4). Na základě rozložení relativních četností studentských odpovědí (5) buď instruktor stručně vysvětlí správnou odpověď (6), přejde ke skupinovým diskuzím (8), kterým může předcházet dobrovolný krok před-diskutování úlohy ve dvojicích (7), nebo se pokusí prezentovaný problém ještě jednou vysvětlit (10/11). Ve fázi skupinových diskuzí se studenti snaží přesvědčit své kolegy o správnosti své volby, přičemž jsou instruktorem vybízeni ke zdůvodňování – nikoli k pouhému oznámení zvolené odpovědi. Výzkumy ukazují, že je student mnohdy schopen danému konceptu snáze porozumět na základě výkladu svého spolužáka, nežli na základě výkladu samotného instruktora (Vickrey et. al., 2015). Studenti, kteří čerstvě diskutovanému konceptu porozuměli, si totiž živě pamatují, jaké to bylo pojmu nerozumět a jaké kroky museli učinit, aby se porozumění dobrali. Naproti tomu instruktor sám často trpí takzvanou „kletbou vědomosti“ (Mazur, 1997), neboť danému konceptu dobře rozumí a dávno si již neuvědomuje nesnáze na cestě k porozumění. Skupinové diskuze jsou ukončeny revidujícím hlasováním studentů a stručným vysvětlením správné odpovědi. Prakticky vždy dojde k znatelnému navýšení hlasů ve prospěch správné odpovědi (Mazur, 1997), (Vickrey et. al., 2015).

Popsaný blok zabere přibližně 10–15 minut. Za jednu vysokoškolskou přednášku (90 minut) jsme tímto způsobem tedy schopni probrat nejvýše 6 až 9 konceptů. Je proto zřejmé, že abychom dosáhli stejného objemu učiva jako u klasické výuky, musíme část práce naložit na bedra studentům. Toho můžeme docílit například tak, že před lekcí studentům zadáme přípravné materiály k samostudiu, po jejichž nastudování budou disponovat potřebnými znalostmi pro zvládnutí lekce. Ve své knize (Mazur, 1997) Eric Mazur pro tyto účely doporučuje po bok *PI* zařadit i strategii *Just-in-time Teaching*[1]."

Podle Erica Mazura (Mazur, 1997) je KoncepTest:

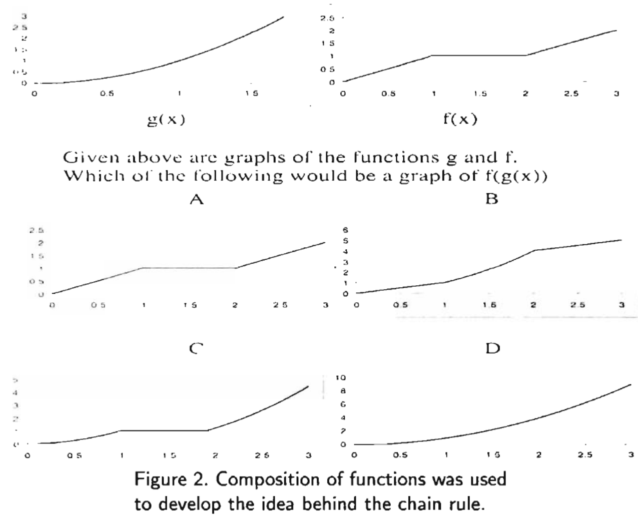
1. otázka založená na porozumění jedinému konceptu či principu;
2. zodpověditelný na základě porozumění – nikoli pouze paměti;
3. otázka disponující nabídkou přiměřeného množství odpovědí;
4. formulován jednoznačně;
5. otázka o přiměřené obtížnosti.

Na rozdíl od fyziky, pro jejíž potřeby byla původně metoda *PI* designována, je řada předkládaných konceptů v matematice pro studenty zcela nová, a tedy většinou neexistuje nic jako prekoncepce, o kterou by se mohly naše *KT* opírat. Je proto vhodné v rámci jednoho konceptu zadat více (2–3) *KT* s rostoucí obtížností. Dále je nutné mít na paměti, že studenti nejsou zvyklí v matematice argumentovat, a mohou tak mít potíže vést plodné skupinové diskuze. Z tohoto důvodu bylo klasické schéma *PI* rozšířeno o dodatečný krok (7) diskuze ve dvojicích. Rovněž je vhodné naučit studenty problémy vizualizovat, nebo jim, alespoň ze začátku, k úlohám potřebné vizualizace poskytovat. Konečně, jak jinak mohou studenti rozvinout potřebné sociální dovednosti pro vedení plodných skupinových diskuzí než-li pravidelným tréninkem?

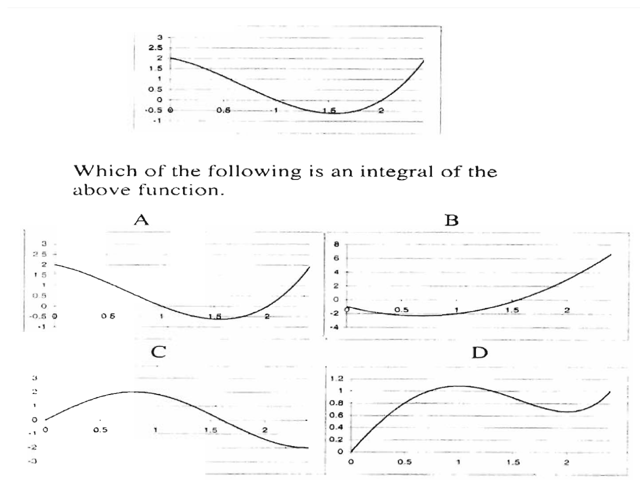
Mazur, Eric. (1997). Peer instruction: a user's manual. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall. ISBN 978-0135654415.

Novak, G. M., Patterson, E. T., Gavrin, A. D., & Christian, W. (1999). Just in time teaching.

[1] Just-in-time Teaching je strategie výuky založená na zpětnovazební smyčce mezi přípravným online prostředím a následným děním ve třídě. Stručně řečeno, instruktor zadá studentům skrze internet přípravné materiály provázené úkoly a otázkami, které studenti musejí vypracovat a odevzdat ještě před začátkem následující lekce. Na základě zpětné vazby poskytnuté odpověďmi studentů poté instruktor vhodně upraví obsah následující lekce. Stejně tak obsah přípravných materiálů je do značné míry uzpůsoben průběhu předešlé lekce (Novak, 1999).



(a) KoncepTest testující porozumění PV



(b) KoncepTest testující schopnost aplikovat PV

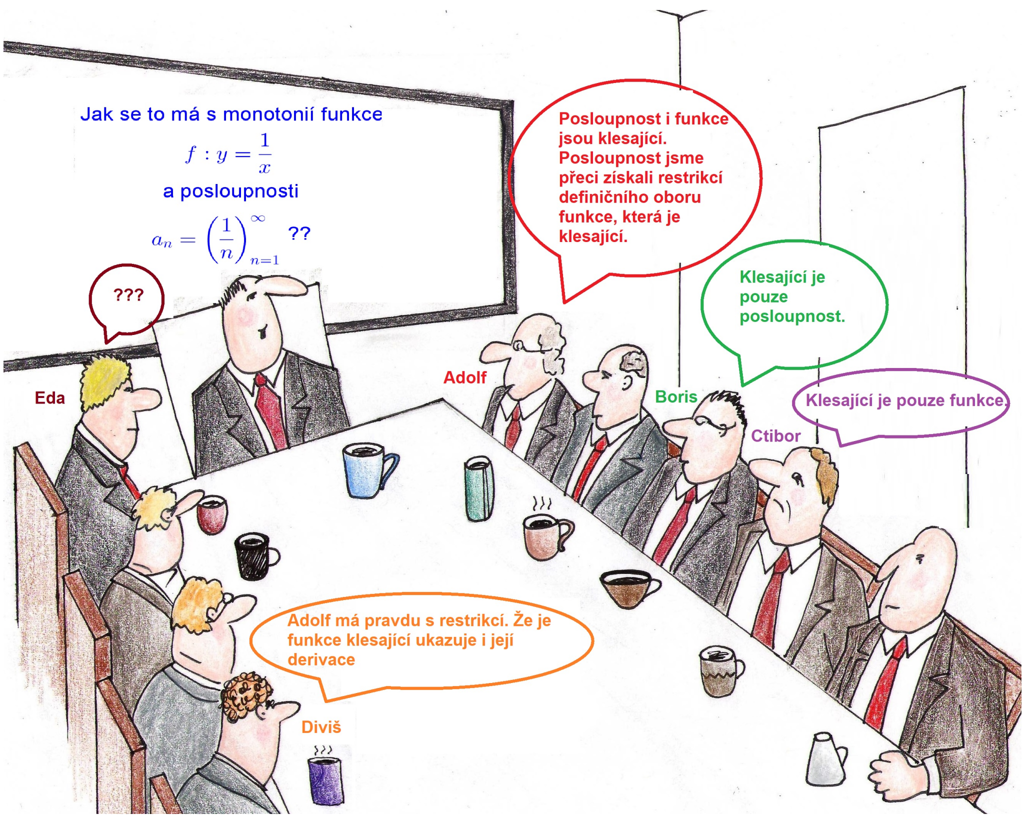
Obrázek 2: Ukázkové KoncepTesty z článku (Pilzer, 2001)

Pilzer, S. (2001). Peer instruction in physics and mathematics. Problems, resources, and issues in mathematics undergraduate studies, 11(2), 185-192.

Vickerey, T. et. al. (2015). Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review. Cell Biology Education. 14(1), es3-es3. DOI: 10.1187/cbe.14-11-0198. ISSN 1931-7913. Dostupné také z: http://www.lifescied.org/cgi/doi/10.1187/cbe.14-11-0198

1.2 Concept Cartoon (Konceptuální obrázek)

Technika Concept Cartoon byla vytvořena ve Velké Británii v roce 1991 pro účely výuky přírodovědných předmětů na základní škole, avšak je ji možno využít i na škole střední a vysoké, či v naukách humanitního charakteru. Concept Cartoons jsou převážně využívány pro inicializaci a podporu diskuse ve třídě a jako pomůcka pro aktivizaci žáků, pro stimulaci myšlení a objevování. Na obrázku 3 můžeme nahlédnout ukázkový konceptuální obrázek. Práce s nimi obvykle spočívá na dvou fázích, a sice samostatné a skupinové. Během samostatné fáze se studenti seznámí s představeným problémem, názory jednotlivých diskutérů a pokusí se vzhledem k doprovodným otázkám zaujmout vlastní stanovisko. Typické doprovodné otázky například zní: Kdo z diskutérů má pravdu / kdo ji nemá a proč? Se kterým s diskutérů se nejvíce ztotožňuješ? Jak by se daly jednotlivé názory poupravit, aby měli daní diskutéři pravdu? atd. Ve skupinové fázi pak studenti diskutují se svými spolužáky ve snaze dobrat se konsenzu co se odpovědí na otázky ze samostatné fáze týče. V případě Concept Cartoon je počet správných odpovědí zcela na uvážení autora úlohy. Pokud chceme pro účely této techniky nasadit hlasování, je výhodné jednotlivé diskutéry pojmenovat podle abecedy. Psychologie věci říká, že se studenti (obzvláště ti „matematicky méně zdatní“ lépe vyrovnají s neúspěchem než-li v případě obyčejné ABCD otázky, neboť v případě nesprávné odpovědi jde přeci o názor konkrétního diskutéra na obrázku a ne o názor chybně odpovídajícího studenta. Konečně, své KoncepTesty můžeme uzpůsobit v duchu Concept Cartoon, kdy jednotlivé možnosti budeme prezentovat jako názory diskutérů na obrázku, přičemž v souladu s vlastnostmi KoncepTestu bude pouze jeden z těchto názorů správný.



Obrázek 3: Ukázkový Concept Cartoon

1.3 Skupinové testy v duchu Team-Based-Learning

Obecně řečeno, metoda Team-Based-Learning označuje spíše myšlenkový proud zahrnující celou řadu technik, metod a aktivit (obdobně jako je tomu u Formativního hodnocení). V rámci tohoto textu si představíme pouze skupinové testy.

Skupinové testy se obvykle skládají ze dvou fází. V rámci individuální fáze nejprve studenti vypracují celý test samostatně, a poté jej odevzdají učiteli. Ve skupinové fázi pak studenti zformují skupiny, ve kterých společně opět vypracují celý test, nebo jeho část. Ve skupinové fázi navíc mohou studenti svou odpověď opravit v následujícím smyslu:

1. Je-li jejich odpověď na danou otázku správná, získávají 100 % bodového hodnocení;
2. Je-li jejich odpověď na danou otázku špatná, klesá možné bodové hodnocení na 50 % po první, 25 % po druhé a 0 % po třetí opravě.

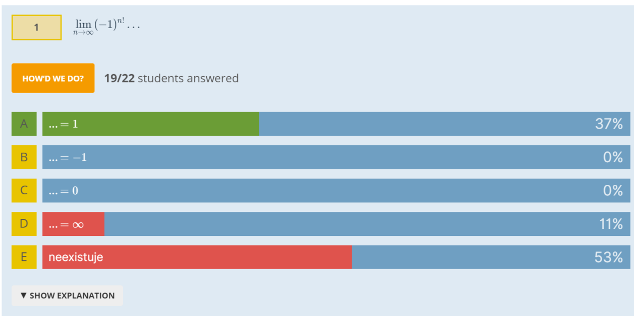
Jinými slovy, studenti se okamžitě dozví, jaká je správná odpověď na danou otázku (nejpozději po třetím neúspěšném pokusu ze čtyř možných) a v ideálním případě jim navíc jejich správně odpovídající spolužáci vysvětlí podstatu správného řešení. Jak ale realizovat onu možnost okamžitého zjištění nesprávné odpovědi a s tím spojenou možnost opravy při vlastním psaní testu? Nabízejí se tyto možnosti:

1. Ve skupinové fázi dostane každá ze skupin jeden stírací los. Pro každou otázku pak podle počtu setřených odpovědí na první pohled poznáme, na kolikátý pokus daná skupina otázku zodpověděla správně.
2. Namísto losu použijeme elektronické hlasování a postupujeme jako v předchozím bodě.
3. K instruktorovi s řešením přijde jeden člen skupiny a ten mu proškrtne pro danou úlohou každý použitý pokus.

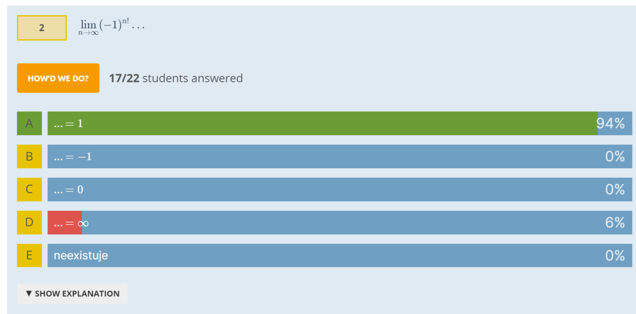
Celkové hodnocení testu je syceno jak ze samostatné tak i ze skupinové práce – typicky v poměru $1:1$, nebo $2:1$ ve smyslu samostatná : skupinová.

2 Výuka předmětu Matematická analýza I. v zimním semestru 2020/21

Výuka předmětu Matematická analýza I. (pro studenty učitelství a finanční matematiky na MFF UK) probíhala v zimním semestru roku 2020/21 z důvodu koronavirové pandemie distančně skrze platformu Zoom. Hodinový rozsah předmětu čítal dvě přednášky po 90 minutách a jedno cvičení o délce 90 minut. Přednáška probíhala v duchu klasického schéma *PI* (obrázek 1 bez kroku diskuze ve dvojicích). Použité KoncepTesty, včetně vzorových řešení, jsou k nahlédnutí v sekci Sbírka KoncepTestů pro Matematickou analýzu.

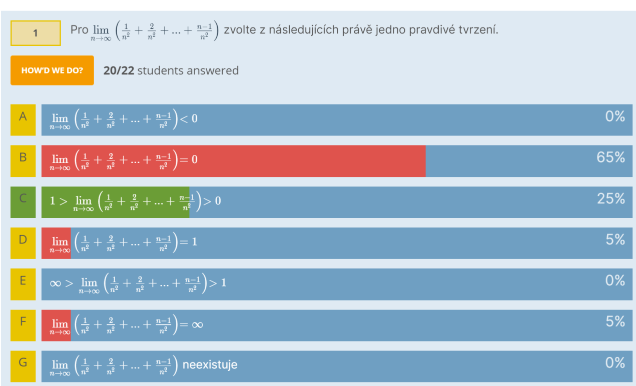


(a) Hlasování završující samostatné přemýšlení

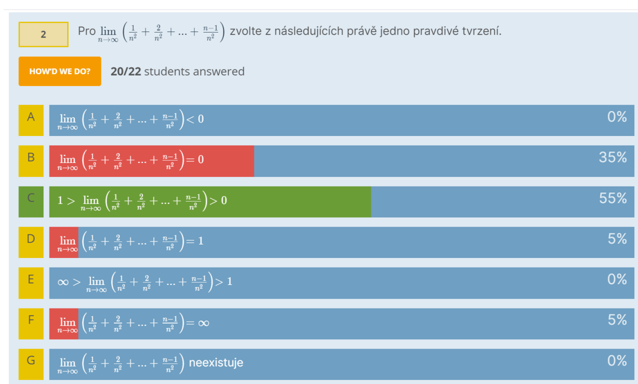


(b) Hlasování završující skupinovou diskuzi

Obrázek 4: Ukázková diskuzní otázka ze cvičení I.



(a) Hlasování završující samostatné přemýšlení

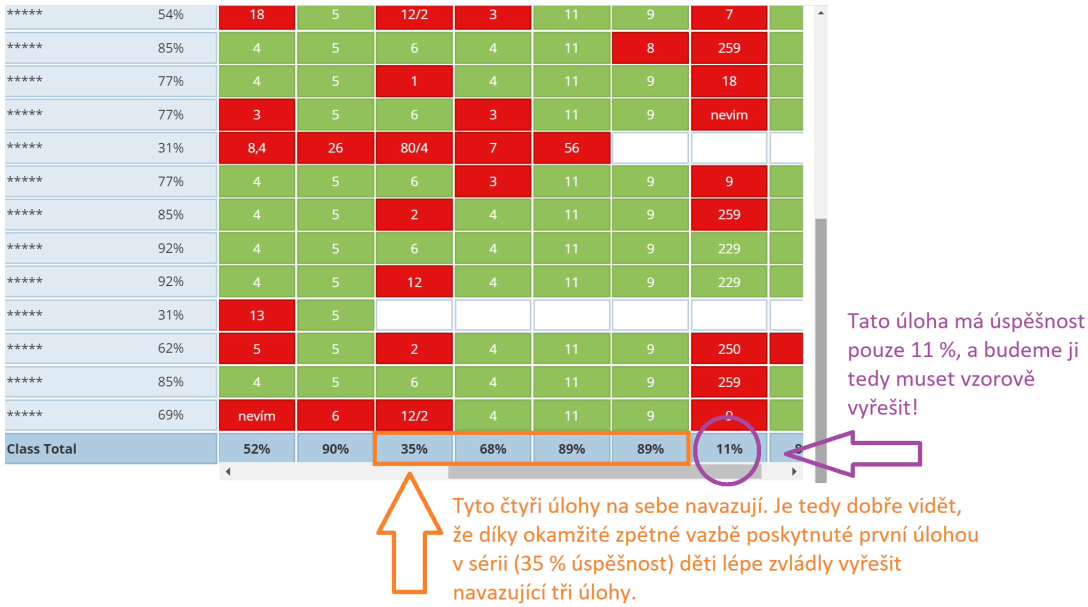


(b) Hlasování završující skupinovou diskuzi

Obrázek 5: Ukázková diskuzní otázka ze cvičení II.

Pro účely hlasování na cvičení i přednášce byla použita aplikace Socrative. Ukázky hlasování (z pohledu instruktora) před / po skupinových diskuzích jsou k nahlédnutí na obrázcích 4 a 5.

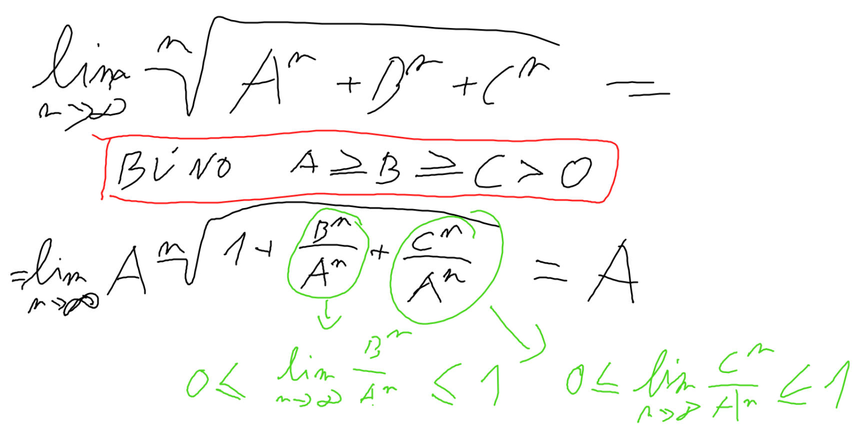
Cvičení byla realizována s ohledem na charakter přednášky. Zpravidla na úvod byla studentům zadána jedna až dvě diskuzní otázky, které si nejprve promysleli samostatně, a poté je diskutovali ve 3–4 členných skupinkách (Zoom funkce Breakout Rooms), přičemž obě tyto fáze byly završeny hlasováním ve prospěch zvolených odpovědí. Dále následovala sekvence sestavená z aktivit: vzorové řešení příkladu instruktorem; práce ve skupinkách. Při práci ve skupinkách si mohli studenti zvolit, zda budou mlčky pracovat ve stejné místností, ale každý sám za sebe, či zda využijí možnost diskutovat své mezivýsledky,



*****	54%	18	5	12/2	3	11	9	7
*****	85%	4	5	6	4	11	8	259
*****	77%	4	5	1	4	11	9	18
*****	77%	3	5	6	3	11	9	nevim
*****	31%	8,4	26	80/4	7	56		
*****	77%	4	5	6	3	11	9	9
*****	85%	4	5	2	4	11	9	259
*****	92%	4	5	6	4	11	9	229
*****	92%	4	5	12	4	11	9	229
*****	31%	13	5					
*****	62%	5	5	2	4	11	9	250
*****	85%	4	5	6	4	11	9	259
*****	69%	nevím	6	12/2	4	11	9	9
Class Total		52%	90%	35%	68%	89%	89%	11%

Obrázek 6: Průběžné monitorování aktivity studentů

výsledky, myšlenky a nápady se svými kolegy. Pro tyto účely mohli využít i Zoom funkci Whiteboard + sdílení obrazovky (příklad na obrázku 7). Během skupinových diskuzí instruktor navštěvoval jednotlivé diskuzní skupiny a podle potřeby jim radil. Během celé aktivity navíc instruktor disponoval přehledem aktuálních výsledků studentů v aplikaci Socrative (obrázek 6) a věděl tedy, ve které skupině (Zoom místnosti) bude nejvíce zapotřebí.



Obrázek 7: Příklad užití Whiteboard + sdílení obrazovky při skupinové diskuzi studentů

„Skupinové“ ladění přednášek a zejména pak cvičení se promítlo i do dvojice zápočtových testů (vzorová zadání v několika variantách jsou k nahlédnutí v závěrečné sekci tohoto textu). Úkolem studentů bylo nejprve vypracovat daný test celý samostatně a posléze jeho (přibližně) polovinu ještě jednou vypracovat v 3–4 členných skupinách. Oproti klasickým Team-Based-Learning testům se studenti nemohli opravovat, a museli se tak na společných odpovědích shodnout na poprvé.

3 Sbírka KoncepTestů pro Matematickou analýzu

3.1 Zobrazení

Otázka 01:

- Nechť $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, pak $f^{-1}(x) = \ln x$. Rovnají se zobrazení $f \circ f^{-1}$ a $f^{-1} \circ f$?

3.2 Posloupnosti

Otázka 02:

- Je geometrická posloupnost $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ monotónní?
- Je geometrická posloupnost omezená?

Otázka 03:

- Které z následujících výroků jsou ekvivalentní z výrokem: Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená?
  a) Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená shora i zdola.
  b) $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.
  c) Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená.

Otázka 04:
Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n > n_0 : \ |a_n| < K$.

- Je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená?

Otázka 05:
Rozhodněte o platnosti tvrzení: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon$.
Odpověď: Tvrzení je pravdivé.

Důkaz:

($\Rightarrow$) Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tak $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$, tedy stačí volit $K = 1$.

($\Leftarrow$) Nechť existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon}$. A mějme $\varepsilon > 0$. Pak pro $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon} = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Otázka 06:
Který z následujících výroků je ekvivalentní s výrokem: "posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní"? Správě může být více odpovědí.

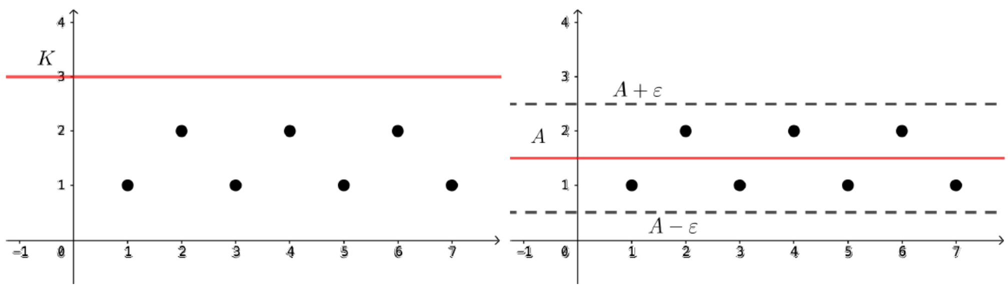
i) $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| > K$.

ii) $\forall A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.

iii) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.

iv) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - A| > \varepsilon$.

Odpověď: Ekvivalentní je pouze výrok iii). Výrok i) je negací omezenosti posloupnosti $\{a_n\}$. Tedy posl. $\{a_n\}$ není omezená, když splňuje podmínku i). To sice již implikuje, že posloupnost $\{a_n\}$ není konvergentní, ale není to ekvivalentní výrok. Podmínka ii) také zaručuje, že posloupnost $\{a_n\}$ bude divergovat, ale není ekvivalentní s tvrzením, že je posloupnost divergentní (existují divergentní posloupnosti, které tuto podmínku nesplňují). Poslední podmínku nesplňuje žádná posloupnost. Stačí zvolit $A = a_1$ (nebo zvolit za A libovolný jiný člen posloupnosti $\{a_n\}$). Příklady divergentních posloupností, které nesplňují podmínky i) a ii) jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Otázka 07:
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A < \lim_{n\to\infty} b_n = B$ $(A, B \in \mathbb{R}^*)$. Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \le b_n$

Odpověď: Z předpokladu lze odvodit tvrzení i), iii) a iv). Stačí ukázat, že platí tvrzení iii), jelikož to přímo implikuje platnost tvrzení i) a iv). Důkaz platnosti tvrzení iii) je téměř stejný, jako důkaz předcházející věty, ale rozepíšeme ho trochu podrobněji. Jelikož $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, tak existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n < q < \lim_{n\to\infty} b_n$. To lze ukázat například rozborem možností. Pro $A, B \in \mathbb{R}$ můžeme volit $q = \frac{B-A}{2}$, pro $A = -\infty$ a $B \in \mathbb{R}$ lze použít třeba volbu $q = B - 1$. Rozbor dalších variant necháme na čtenáři. Existenci $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že $\forall n > n_1 : a_n < q$ dostaneme vhodnou volnou ε pro $A \in \mathbb{R}$ (např. $\varepsilon = q - A$) či volnou K pro $A = -\infty$ (např. $K = q$). Obdobně existuje

$n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_2 : q < b_n$. Pak pro všechna $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$: $a_n < q < b_n$, čímž je důkaz hotov. Neplatnost druhého tvrzení lze ukázat na protipříkladu, např. u konstantních posloupností $\{a_n = -2\}$ a $\{b_n = 1\}$.

Otázka 08:
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \le \lim_{n\to\infty} b_n = B$ $(A, B \in \mathbb{R}^*)$. Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \le b_n$

Odpověď: Příklad posloupností, kde $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{n} \wedge b_n = -\frac{1}{n}$ ukazuje, že z předpokladu $\lim_{n\to\infty} a_n = A \le \lim_{n\to\infty} b_n = B$ nelze vyvodit ani jedno z tvrzení i)-iv).

Otázka 09:
Nechť $A \in \mathbb{R}$. Který z následujících výroků je ekvivalentní výroku $\lim_{n\to\infty} a_n = A$?

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

Odpověď : Oba výroky jsou ekvivalentní s výrokem $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Stačí pracovat s tím, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$ a pak si uvědomit, že $(|a_n - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow (|(a_n - A) - 0| < \varepsilon) \Leftrightarrow ||a_n - A| - 0| < \varepsilon$.

Otázka 10:
Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $A \in \mathbb{R}$. Jsou následující výroky ekvivalentní?

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Odpověď: Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : ||a_n| - |A|| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. Zde vycházíme s nerovnosti $||a| - |b|| \le |a - b|$. Mějme $\{a_n = (-1)^n\}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, ale $\lim_{m\to\infty} |a_n| = 1$. Na tomto protipříkladu vidíme, že výrok $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$ neimplikuje výrok $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tedy výroky nejsou ekvivalentní.

Otázka 11:
Nechť je $\{k_n\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Platí tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : k_n \ge n$? Odpověď: Ano. Pro $n = 1$ je $k_1 \ge 1$ (jelikož je $k_1 \in \mathbb{N}$). Nechť pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $k_n \ge n$. Jelikož $k_n, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ a $k_{n+1} > k_n$, tak $k_{n+1} \ge k_n + 1$. Tedy z nerovnosti $k_n \ge n$ dostaneme $k_{n+1} \ge k_n + 1 \ge n + 1$. Tím je důkaz indukcí hotov.

Otázka 12:
Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Nechť existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

b) Mějme $m \in \mathbb{N}$ a nechť je posloupnost $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

c) Nechť konverguje každá vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$. Pak je i posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní.

d) Nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \in \mathbb{R}^*$ a platí rovnost $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Odpověď:

a) Toto tvrzení neplatí, stačí zvolit posloupnost $a_n = (-1)^n$ a $k_n = 2n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, ale limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

b) Tvrzení platí. Posloupnost $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, tedy $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :$ $|a_{m+n} - A| < \varepsilon$. Tedy $\forall n > (n_0 + m) : |a_n - A| < \varepsilon$.

c) Tvrzení platí. Stačí si uvědomit, že $\{a_n\}$ je také vybraná posloupnost z $\{a_n\}$.

d) Tvrzení platí. Pro $A \in \mathbb{R}$ dostaneme, že $\forall \varepsilon \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : (|a_{2n} - A| < \varepsilon \wedge |a_{2n+1} - A| < \varepsilon)$, tedy $\forall n > 2n_0 + 1 : ||a_n - A| < \varepsilon)$. Podobně pro $A = \pm\infty$.

Otázka 13:
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost přirozených čísel. Platí následující tvrzení?

a) Nechť $\{a_{k_n}\}$ je nějaká podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$, pak $H(\{a_n\}) = H(\{a_{k_n}\})$.

b) $H(\{a_n\}) = H(\{a_{2n}\})$ (Množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ se rovná množině hromadných hodnot posloupnosti $\{a_{2n}\}$, tj. posloupnosti sudých členů z posloupnosti $\{a_n\}$).

c) Mějme $m \in \mathbb{N}$, pak $H(\{a_n\}) = H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$.

Odpověď:

a) Toto tvrzení neplatí, stačí zvolit posloupnost $a_n = (-1)^n$ a $k_n = 2n$, pak $H(\{a_n\}) = \{1, -1\}$, ale $H(\{a_{k_n}\}) = \{1\}$.

b) Toto tvrzení neplatí, viz bod a).

c) Tvrzení platí. Jelikož $\{a_{m+n}\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$, pak každá podposloupnost posloupnosti $\{a_{m+n}\}$ je také podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. Tedy $H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}) \subseteq H(\{a_n\})$. Nechť $A \in H(\{a_n\})$, pak existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ posloupnosti $\{a_n\}$, která má limitu $A = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$. Jelikož $\forall n \in \mathbb{N} : k_{m+n} \geq m + n$, tak $\{a_{k_{m+n}}\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ a jelikož $\lim_{n\to\infty} a_{k_{n+m}} = A$ pak $A \in H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$, tedy $H(\{a_n\}) \subseteq H(\{a_{m+n}\}_{n=1}^{\infty})$.

3.3 Funkce

Otázka 14:
Platí následující tvrzení?

a) Nechť $A, a \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\lim_{x\to a+} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a-} f(x) = A)$

b) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak je-li x_1 blíže k a než x_2, je $f(x_1)$ k A blíže než $f(x_2)$.

c) Nechť $\forall x_n = 10^{-n}$ platí $f(x_n) = 0$, pak $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

d) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

   i) existuje,
   ii) neexistuje,
   iii) nemáme dost informací.

Otázky b), c) a d) byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/materials.html
Odpověď:

a) Ano.

b) Ne. Pro $f(x) = \sin x \cdot x$ je $\lim_{n\to 0} f(x) = 0$ (věta o dvou policajtech), ale $f(\pi) = 0$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

c) Ne. Nechť $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$, pak pro všechna x_n platí $f(x_n) = 0$, ale limita $\lim_{x\to 0+} f(x)$ neexistuje.

d) iii) Pro $f(x) = g(x) = (x-a)$ je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ale pro $f(x) = (x-a)$ a $g(x) = (x-a)^2$ limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

Otázka 15:
Platí následující tvrzení?

a) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

b) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

c) Nechť je funkce f spojitá v bodě a a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

d) Je-li $g \circ f$ spojitá v bodě a, pak je funkce f spojitá v bodě a a funkce g spojitá v bodě $A = f(a)$.

e) Je-li $g \circ f$ spojitá v bodě a a funkce f je spojitá v bodě a, pak je funkce g spojitá v bodě $A = f(a)$.

Odpověď :

a) Neplatí. Uvažujem funkci f takovou, že $f(a) = B \neq A$ a posloupnost $x_n = a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$.

b) Ano. Je-li $x_n < x_{n+1}$ a zároveň $x_n \to a$, tak $x_n < a$. Tedy pro každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : x_n \in (a-\delta, a)$. Jelikož $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) \cap (a, a+\delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$, tak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |f(x_n) - A| < \varepsilon$.

c) Ano. K důkazu tohoto tvrzení stačí aplikovat důsledek **??** a Heineho větu.

d) Neplatí. Je-li například $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $f(a) = B \neq A$, g je spojitá v bodě A a $g(B) = g(A)$, pak je $g \circ f$ spojitá v bodě a.

e) Neplatí. Je-li například f konstantní funkce ($f(x) = A$) a g je definovaná v bodě A, pak $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(A)$. Ale g nemusí být vůbec definovaná na prstencovém okolí bodu A, pokud na něm je definovaná, tak nemusí mít v bodě A limitu a v případě, ze má funkce g v bodě A limitu, tak pořád nemusí platit rovnost $g(A) = \lim_{y\to A} g(y)$.

Otázka 16:
Je následující tvrzení pravdivé? Polynom $f(x) = x^{100} - 9x^2 + 1$ má v intervalu $[0, 2]$ alespoň jeden kořen.
Otázka je převzata ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/∼GoodQuestions/materials.html

Odpověď: Tvrzení je pravdivé. Stačí si uvědomit, že polynom je spojitá funkce, $f(0) = 1$ a $f(1) = -7$. Tedy dle předchozí věty musí existovat $x \in (0, 1)$ takové, že $f(x) = 0$.

Otázka 17:

a) Nechť existuje vlastní derivace $f'(a)$, pak $\lim_{x\to a} f(x)$

   i) existuje, ale nemáme dost informací na určení hodnoty této limity,
   ii) je rovna $f(a)$,
   iii) je rovna $f'(a)$,
   iv) nemusí existovat.

b) Pokud matka řekne "Když sníš večeři, tak dostaneš zákusek", víme, co to znamená: "Když nesníš večeři, tak zákusek nedostaneš". Pokud učitel analýzy řekne "Má-li funkce f v bodě x vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá", víme, co to znamená:

   i) pokud f není spojitá v x, tak v tomto bodě nemá vlastní derivaci.
   ii) pokud f nemá derivaci v bodě x, tak v tomto bodě není spojitá.
   iii) znalost, že funkce f není spojitá v bodě x nám nedává informaci o tom, zda má v tomto bodě funkce f vlastní derivaci.

c) Vlak jede z Prahy do Ostravy. Nechť $f(t)$ značí ujetou vzdálenost vlaku v čase t (v km). Průvodčí jde ve vlaku ve směru jízdy rychlostí $4km/h$. Jeho rychlost vzhledem ke kolejím je v čase t rovna:

   i) $f(t) + 4$,
   ii) $f(t) - 4$,
   iii) $f(t)' + 4$,
   iv) $f(t)' - 4$.

Otázky byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/∼GoodQuestions/materials.html

Odpověď:

a) ii) Toto tvrzení bude zformulováno v následující větě.

b) i)

c) iii)

Otázka 18:

a) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(2x+h)-\cos 2x}{h}$ se rovná

i) $-\sin x$,

ii) $-\sin 2x$,

iii) 0,

iv) neexistuje, jelikož jde o výraz $\frac{0}{0}$.

b) Nechť f a g mají obě derivaci a $h = f \circ g$, pak $h'(2)$ se rovná

i) $f'(2) \circ g'(2)$,

ii) $f'(2)g'(2)$,

iii) $f'(g(2))g'(2)$,

iv) $f'(g(x))g'(2)$.

c) Platí rovnost $(\ln(2))' = \frac{1}{2}$?

Otázky byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/∼GoodQuestions/materials.html

Odpověď:

a) ii)

b) iii)

c) Ne, jelikož $\ln(2)$ je konstanta a derivace konstanty je nula.

Otázka 19: Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Nechť je funkce f rostoucí v bodě a, pak $f'(a) > 0$.

b) Nechť má funkce f v bodě a lokální extrém, pak je $f'(a) = 0$.

c) Nechť $f'(a) = 0$, pak má funkce f v bodě a lokální extrém.

d) Nechť je funkce f neklesající v bodě a a $f'(a)$ existuje, pak $f'(a) \geq 0$.

e) Nechť $f'(a) \geq 0$, pak je funkce f neklesající v bodě a.

Odpověď:

a) Neplatí. Funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí v bodě $a = 0$, ale $f'(0) = 0(f'(x) = 3x^2)$.

b) Neplatí. Funkce $f(x) = |x|$ má v bodě $a = 0$ lokální minimum, ale derivace této funkce v bodě a neexistuje.

c) Neplatí. Stejný protipříklad jako v bodě a).

d) Platí. Důkaz sporem. Nechť je $f'(a) < 0$, pak dle předchozí věty je fuknce f v bodě a klesající, tím jsme došli ke sporu.

e) Neplatí. Funkce $f(x) = -x^3$ je klesající v bodě $a = 0$, ale $f'(0) = 0$.

Otázka 20:

a) Uvažujme funkci $f(x) = |x|$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 2]$. Existuje bod $x_0 \in (-\frac{1}{2}, 2)$ splňující $f'(x_0) = \frac{f(2)-f(-\frac{1}{2})}{2-(-\frac{1}{2})}$?

b) Běžec běhá tam a zpět podél rovné cesty. Svůj běh skončil ve stejném místě, kde jej začal. Musel zde existovat aspoň jeden čas, kdy se musel zastavit (jeho rychlost byla nulová)?

c) Dva běžci, kteří společně odstartovali (proběhli společně startem) v závodě také proběhli společně cílem. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

   i) V nějakém čase v závodě některý z nich vedl.
   ii) Rychlost běžců na konci závodu musela být stejná.
   iii) V nějakém čase v závodě museli mít oba běžci stejnou rychlost.
   iv) Musí existovat rychlost, kterou oba běžci během závodu v nějakém čase poběží, ale každý touto rychlostí může bežet v jiném čase.

Otázky byly převzaty ze stránky: http://pi.math.cornell.edu/∼GoodQuestions/materials.html

Odpověď:

a) Neplatí. Funkce $f(x) = |x|$ nemá všude na intervalu $(-\frac{1}{2}, 2)$ derivaci, tedy nelze aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě. $\frac{f(2)-f(\frac{1}{2})}{2-(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{5}$, ale $f'(x) = 1$ pro $x > 0$ a $f'(x) = -1$ pro $x < 0$, derivace funkce f v bodě 0 neexistuje.

b) Platí. Stačí vhodně aplikovar Rolleovu větu o střední hodnotě.

c) i) Tvrzení neplatí. Oba běžci mohou celý závod běžet společně.
   ii) Tvrzení neplatí.
   iii) Platí. Stačí aplikovat Cauchyho větu o střední hodnotě. Např. Bude-li $f(t)$ resp. $g(t)$ vzdálenost, kterou už během závodu uběhl první resp. druhý běžec, $a = 0$ a b bude čas, kdy oba běžci proběhli společně cílem.

iv) Tvrzení je přímým důsledkem tvrzení iii).

Otázka 21: Platí následující tvrzení? Funkce f je rostoucí na $J^o \Leftrightarrow f$ je rostoucí v každém bodě J^o.
Odpověď: Ano

Důkaz:
Pro připomenutí:

- Funkce f je rostoucí na $J^o \Leftrightarrow \forall y_1, y_2 \in J^o : (y_1 < y_2) \Rightarrow (f(y_1) < f(y_2))$.
- Funkce f je rostoucí v bodě a, jestliže existuje okolí $U^*(a)$ takové, že $\forall x \in U^*_-(a) : f(x) < f(a)$ a $\forall x \in U^*_+(a) : f(x) > f(a)$.

($\Rightarrow$) Stačí zvolit $U^*(a)$ takové, aby $U^*(a) \subset J^o$.

($\Leftarrow$) Nechť existují $y_1, y_2 \in J^o$ takové, že $y_1 < y_2$ a $f(y_1) > f(y_2)$. Označme množinu $M = \{x \in [y_1, y_2] : f(x) > f(y_2)\}$, pak $M \neq \emptyset$ ($y_1 \in M$) a M je omezená (tedy existuje suprémum). Označme $a = \sup M$. Je-li $a \in M$, pak $\forall x \in U^*_+(a) : f(x) \leq f(y_2) < f(a)$, tedy funkce f není rostoucí v bodě a. Pokud $a \notin M$, pak pro každé $U^*_-(a)$ existuje $x \in U^*_-(a)$ takové, že $x \in M$, tedy $f(x) > f(y_2) \geq f(a)$, proto není funkce f rostoucí v bodě a.

Podobně dojdeme ke sporu i pro případ $y_1 < y_2$ a $f(y_1) = f(y_2)$. Je-li funkce $f(x)$ konstantní na $[y_1, y_2]$, pak není rostoucí v žádném bodě intervalu (y_1, y_2). Pokud funkce f není konstantní, pak existuje $x_0 \in (y_1, y_2)$ takový, že $f(x_0) \neq f(y_1) = f(y_1)$. Pro $f(x_0) > f(y_1) = f(y_2)$ označíme $\tilde{y_1} = x_0$ a $\tilde{y_2} = y_2$, pro $f(x_0) < f(y_1) = f(y_2)$ označíme $\tilde{y_1} = y_1$ a $\tilde{y_2} = x_0$. Dále postupujeme s body $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ jako v předešlé části.

Otázka 22: Platí následující tvrzení?

a) Funkce f je konvexní na intervalu J právě tehdy, když $\forall x, y \in J, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

b) Funkce f je ryze konvexní na otevřeném intervalu J právě tehdy, když $\forall a, x \in J, x \neq a : f(a) + f'(a)(x-a) < f(x)$.

Odpověď:

a) Ano. f je konvexní na intervalu J, jestliže $\forall x, y, z \in J, x < z < y$, platí $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Vyjádřeme z a λ následujícím způsobem: $z = \lambda x + (1 - \lambda y)$, tedy $\lambda = \frac{y-z}{y-x}$. Uvědomme si, že každému $z \in (x, y)$ odpovídá právě jedno $\lambda \in (0,1)$ a naopak. Nerovnost $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ lze přepsat do tvaru $f(z) \leq \frac{(f(y)-f(x))(z-x)}{y-x} + f(x)$. Dostaneme tedy

$$f(z) \leq \frac{(f(y)-f(x))(z-x)}{y-x} + f(x) = f(x)\left(1 - \frac{z-x}{y-x}\right) + f(y) \cdot \frac{z-x}{y-x}$$
$$= f(x) \cdot \frac{y-x-z+x}{y-x} + f(y) \cdot \frac{z-y+y-x}{y-x} = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

b) Ne. Nerovnost $\forall a, x \in J, x \neq a : f(a) + f'(a)(x-a) < f(x)$ vyžaduje existenci derivace na J, ale konvexní funkce nemusí mít derivaci na celém J.

Otázka 23:

a) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(D_f = \mathbb{R})$?

b) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(D_f = \mathbb{R})$?

c) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít lineární funkce f?

d) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít polynom druhého stupně?

e) Jaký je maximální počet různých asymptot, které může mít polynom n-tého stupně pro $n > 2$?

Odpověď:

a) Nekonečně mnoho. Stačí si třeba vzít fuknci $f(x) = \tan x$ a dodefinovat ji v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nulou. Pak bude $D_f = \mathbb{R}$ a ve všech bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ má funkce f vertikální asymptotu.

b) Dvě. Spojitá funkce na $\mathbb{R}$ nemůže mít žádné vertikální asymptoty (pro každé $b \in \mathbb{R}$ platí: $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \neq \pm\infty$. Dvě různé asymptoty v nekonečnech mít může. Např. $f(x) = |x|$ má asymptoty $y = x$ a $y = -x$.

c) Jedna. Lineární funkce je sama svojí asymptotou.

d) Nula. Funce $f(x) = a + bx + cx^2$ (kde $c \neq 0$) je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy nemůže mít vertikální asymptoty. $\lim_{x\to\infty}(a+bx+cx^2-(kx+q)) = \lim_{x\to\infty} x^2(c + \frac{b-k}{x} + \frac{a-q}{x^2}) = \pm\infty$ (výraz $c + \frac{b-k}{x} + \frac{a-q}{x^2}$ má limitu c).

e) Nula. Stejný postup jako v bodě d).

3.4 Nekonečné číselné řady

Otázka 24:

a) Jsou-li konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, je konvergentní i řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$?

b) Jsou-li divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, je divergentní i řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$?

c) Je-li konvergentní řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$, jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

d) Je-li divergentní řada $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + ...$, jsou divergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Odpověď:

a) Ano. Označme $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : (|\sum_{k=1}^{n} a_k - A| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |\sum_{k=1}^{n} b_k - B| < \frac{\varepsilon}{2})$. Tedy $\forall n > n_0 : |a_1 + b_1 + a_2 + ... + a_n + b_n - (A+B)| \leq |\sum_{k=1}^{n} a_k - A| + |\sum_{k=1}^{n} b_k - B| < \varepsilon$ (podobně pro součet lichého počtu členů).

b) Ne. Například řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ jsou divergentní, ale řada $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ konverguje k nule.

c) Ne. Viz příklad v části b).

d) Ne. Jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ může být konvergentní.

Otázka 25:

a) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $\sum a_n$ konverguje a $a_n > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : a_n \geq a_{n+1}$.

b) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $a_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

c) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $a_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

d) Nechť $a_n > 0$, $b_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

   i) Nechť $\sum a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum b_n$.
   ii) Nechť $\sum a_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum b_n$.
   iii) Nechť $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum a_n$.
   iv) Nechť $\sum b_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum a_n$.

e) Nechť $a_n > 0$, $b_n > 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

   i) Nechť $\sum a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum b_n$.
   ii) Nechť $\sum a_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum b_n$.
   iii) Nechť $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum a_n$.
   iv) Nechť $\sum b_n$ diverguje, pak diverguje i $\sum a_n$.

f) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

g) Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť $\sum a_n$ konverguje a $a_n > 0$. Pak konverguje i řada $\sum (-1)^n a_n$.

Odpověď:

a) Tvrzení neplatí. Například pro posloupnost $a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}$ a $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^3}$ řada $\sum a_n$ konverguje $(a_n \leq \frac{1}{n^2})$, ale $a_{2n-1} < a_{2n}$.

b) Tvrzení platí. Jde o přímý důsledek Raabeova kritéria

c) Tvrzení platí. Jde o přímý důsledek Raabeova kritéria

d) Platí tvrzení ii) a iii). Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : a_n < b_n$. Dále stačí aplikovat srovnávací kritérium.

e) Platí tvrzení i) a iv). Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : a_n > b_n$. Dále stačí aplikovat srovnávací kritérium.

f) Tvrzení platí. Tomuto kritériu se říká kondenzační kritérium.

g) Tvrzení platí.

Příklad využití těchto otázek při přednášce: Na přednášce dne 20. 11. 2020 byla v aplikaci Socrative položena studentům série tří otázek, jejichž náplní byly věty o střední hodnotě (otázka 20). Každý student odpovídal individuálně a měl přibližně 5 minut na odpověď. Podíly správných odpovědí na otázky a), b) a c) byly postupně 48 %, 77 % a 24 %. Poté byli studenti rozděleni do skupin po třech až čtyřech studentech, měli dalších 5 minut na společné prodiskutování odpovědí ve skupině a následně hlasovali znova v aplikaci Socrative. Procento správných odpovědí na otázky a), b) a c) po diskusích ve skupinách bylo postupně 78 %, 94 % a 78 %.

4 Použité testy

Jméno a příjmení: ______________________________

Zápočtový test I. MAANCVUT01

Před sebou máte zadání 1. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:

1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!

Instrukce pro individuální fázi:

1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 1d je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do 14:55 zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: tomas.zadrazil@gmail.com

Instrukce pro skupinovou fázi:

1. Nejpozději do 15:00 budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 2–4 (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do 15:30 odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla.
4. Výstup skupinové práce pošlete opět na email cvičícího: [redacted]

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Láska je pro mysl člověka složitější než matematika, mnohdy s neřešitelnými příklady.“ – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	$\sum$
Možno získat:	7	4	2	3	16
Získáno:					

1. Určete:
   (a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n}$

   (b) (2 b) $\lim\limits_{n\ to\infty} \left(\frac{2n}{2n-3}\right)^{2n-3}$

   (c) (3 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n};\ a, b, c \in \mathbb{R}^+$

   (d) (2 bb) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{10}-(n+5)^{10}}{(n+2)^{10}-n^{10}}$

2. Určete:
   (a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n n^9}{3^n}$

   (b) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\right)}$

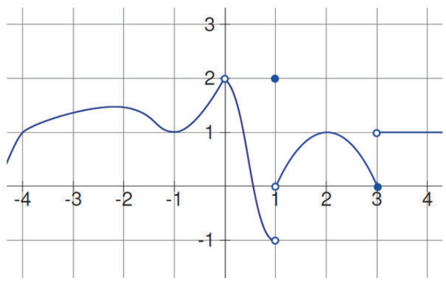
3. Na přiloženém obrázku 1 je vynesen graf funkce f. Určete:

   (a) ($1/2$ b) $f(0) =$

   (b) ($1/2$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

   (c) ($1/2$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

   (d) ($1/2$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$



Obrázek 1: Obrázek k úloze 2.

4. (3 b) Rozhodněte, která z následujících tvrzení **musí / určitě nemohou / mohou** být pravdivá, platí-li, že $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 3$. Svou odpověď alespoň stručně zdůvodněte.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3\,;$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\,;$

   (c) $a_n = 3,\ \forall n \in \mathbb{N}\,;$

   (d) $a_n = \pm 3,\ \forall n \in \mathbb{N}\,;$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\,;$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, protože posloupnost osciluje;

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R}\,.$

   Pravdivá musejí být tvrzení… , protože…

   Pravdivá určitě nemohou být tvrzení… , protože…

   Pravdivá mohou být tvrzení… , protože…

Jméno a příjmení: ______________________________

Zápočtový test I. OPRAVA 01

Před sebou máte zadání 1. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:

1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!

Instrukce pro individuální fázi:

1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 1d je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do 18:25 zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: tomas.zadrazil@gmail.com / stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Instrukce pro skupinovou fázi:

1. Nejpozději do 18:30 budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 2–5 (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do 19:00 odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla. Email / zaslaný soubor **musí obsahovat jmenný seznam všech členů skupiny!**
4. Výstup skupinové práce pošlete opět na email cvičícího: [redacted]

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Láska je pro mysl člověka složitější než matematika, mnohdy s neřešitelnými příklady.“ – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	5	$\sum$
Možno získat:	7	4	2	2	1	16
Získáno:						

1. Určete:

(a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{n^3+3\sqrt[4]{n^{11}+1}+n}} \right)$

(b) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((\sqrt[3]{3+n^3} - n)(3+6+9+\ldots+3n) \right)$

(c) (3 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n-3a} \right)^{2n-3}; \quad a \in \mathbb{R}$

(d) (2 bb) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+5)^{20}-(n+3)^{20}}{(n+3)^{20}-n^{20}}$

2. Určete:

(a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cos n \cdot \sin(\pi n^{-2})}{\ln n}\right)$

(b) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\operatorname{sgn}\left(\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)^{3(n-1)!}\right)\right)$

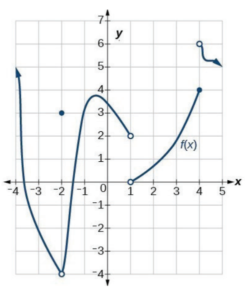
3. Na přiloženém obrázku (níže) je vynesen graf funkce f. Určete:

(a) (½ b) $f(-2) =$

(b) (½ b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$

(c) (½ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

(d) (½ b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$



4. (2 b) Uvažme duo posloupností:

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1;\ 10;\ 2;\ 20;\ 3;\ 30, \ldots;\ k;\ 10k;\ \ldots\}\ ;\ k \geq 1$

$(b_n)_{n=1}^{\infty} = \{1;\ 2;\ 1;\ 3;\ 1;\ 4, \ldots;\ 1;\ k;\ \ldots\}\ ;\ k \geq 1$

Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč? (Bez zdůvodnění nebude odpověď brána v potaz!)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq \infty$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq \infty$.

5. (1 b) Víme-li, že $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$, pak (svou odpověď alespoň stručně vysvětlete) ...

(a) ... $2 \notin D_f$;

(b) ... $f(2) \neq 2$;

(c) ... $f(2) = 2$;

(d) jiná možnost.

Jméno a příjmení: ______________________________

Zápočtový test I. OPRAVA 02

Před sebou máte zadání 1. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:

1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!

Instrukce pro individuální fázi:

1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 1d je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do 18:25 zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: tomas.zadrazil@gmail.com / stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Instrukce pro skupinovou fázi:

1. Nejpozději do 18:30 budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 2–4 (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do 19:00 odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla. Email / zaslaný soubor **musí obsahovat jmenný seznam všech členů skupiny!**
4. Výstup skupinové práce pošlete opět na email cvičícího: [redacted]

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Láska je pro mysl člověka složitější než matematika, mnohdy s neřešitelnými příklady." – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	$\sum$
Možno získat:	7	4	2	3	16
Získáno:					

1. Určete:

(a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{n^2-n}-\sqrt{n}}\right)$

(b) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n-3}\right)^n$

(c) (3 b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+5)^{10}-(n^2-2)^5}{n^a}\right)$; $a\in\mathbb{R}$

(d) (2 bb) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2(1-4^{-n^2})\right)$

2. Určete:

   (a) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cos n\cdot\sin(\pi n^{-2})}{\ln n}\right)$

   (b) (2 b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{sgn}\left(\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)^{3(n-1)!}\right)\right)$

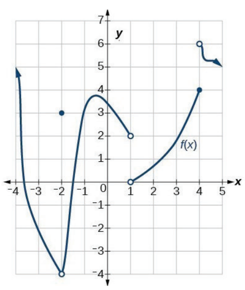
3. Na přiloženém obrázku (níže) je vynesen graf funkce f. Určete:

   (a) ($1/2$ b) $f(-2) =$

   (b) ($1/2$ b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x) =$

   (c) ($1/2$ b) $\lim\limits_{x\to1} f(x) =$

   (d) ($1/2$ b) $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) =$



4. (2 b) Uvažme duo posloupností:

   $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1;\ 10;\ 2;\ 20;\ 3;\ 30, \ldots; k;\ 10k;\ \ldots\}$; $k \geq 1$

   $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \{1;\ 2;\ 1;\ 3;\ 1;\ 4, \ldots; 1;\ k;\ \ldots\}$; $k \geq 1$

   Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč? (Bez zdůvodnění nebude odpověď brána v potaz!)

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq \infty$;

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq \infty$.

5. (1 b) Víme-li, že $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 2$, pak (svou odpověď alespoň stručně vysvětlete) ...

   (a) ... $2 \notin D_f$;

   (b) ... $f(2) \neq 2$;

   (c) ... $f(2) = 2$;

   (d) jiná možnost.

Jméno a příjmení: ____

Zápočtový test II. VARIANTA A

Před sebou máte zadání 2. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:

1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!
4. K úspešnému napsání testu je potřeba získat minimálně 15 bodů, z toho alespoň 8 bodů ze samostatné části z úloh 1-5.

Instrukce pro individuální fázi:

1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 6 je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima, ani do potřebného minima 8 bodů z individuální části).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do 13:25 zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: tomas.zadrazil@gmail.com, stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Instrukce pro skupinovou fázi:

1. Nejpozději do 13:30 budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 3–5 (6) (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do 14:00 odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla.
4. Výstup skupinové práce pošlete na oba maily: [redacted]

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Matematika je jediný skutečně zaručený způsob, jak se zbláznit.“ – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Možno získat:	6	2	4	2	2	2	18
Získáno:							

1. Určete:

   (a) (2 b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)$

   (b) (4 b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\left(\ln(x^2+a)-\ln(a^2+x)\right)\cdot(\mathrm{tg}(x)-\mathrm{tg}(a))}{\left(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{2ax}\right)\cdot(6^{2a+1}-6^{2x+1})\cdot\sin(a^2+x^2)}; \quad a\in\mathbb{R}$

2. (2 b) Vyšetřete konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{mn^2+n\sin\frac{m^2\pi}{4}}\right); \quad m\in\mathbb{N}$$

3. (4 b) Určete, zda následující řada konverguje absolutně, relativně, či diverguje:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$$

4. (2 b) Zvolte všechna pravdivá zakončení pro tvrzení: Derivace funkce $f(x) = |x| \cdot x$ v bodě $x_0 = 0$ ... (a svou odpověď stručně zdůvodněte).

(a) je rovna 0.

(b) neexistuje, protože $|x|$ není diferencovatelná v bodě 0.

(c) neexistuje, protože f je definována po částech.

(d) neexistuje, protože $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0_-} f(x)$.

Zdůvodnění odpovědi...

5. (2 b) Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$. Které z tvrzení (1), (2) je pravdivé? (Svou odpověď alespoň stručně zdůvodněte.)

(1) Hodnota $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ není přesně $\frac{\pi}{4}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{1000}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ je větší než $\frac{\pi}{4}$.

Pravdivé je ...

a) ... pouze tvrzení (1).
b) ... pouze tvrzení (2).
c) ... tvrzení (1) i (2).
d) ... ani jedno z tvrzení.

Zdůvodnění odpovědi:

---

6. (2 b) Určete ideální rozměry plechovky na pivo = válcové nádoby, která při objemu 0,5 l bude mít minimální povrch (a tedy i spotřebu plechu).

Jméno a příjmení: ______________________________

Zápočtový test II. VARIANTA A

Před sebou máte zadání 2. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:

1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!

Instrukce pro individuální fázi:

1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 1d je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do XX:XX zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: tomas.zadrazil@gmail.com

Instrukce pro skupinovou fázi:

1. Nejpozději do XX:XX budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 2–5 (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do XX:XX odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla.
4. Výstup skupinové práce pošlete opět na email cvičícího: [redacted]

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Matematika je jediný skutečně zaručený způsob, jak se zbláznit.“ – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	5	$\sum$
Možno získat:	6	4	2	2	2	16
Získáno:						

1. Určete:

   (a) (2 b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}\right)$

   (b) (2 b) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}\right); \quad a\in\mathbb{R}$

   (c) (2 b) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\cos x-\cos a}{\sin(a-x)}\right); \quad a\in\mathbb{R}$

   (d) (2 bb) $\lim\limits_{x\to a}\left(\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right); \quad a\in\mathbb{R}$

2. Vyšetřete konvergenci řad:

   (a) (2 b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{mn^2+n\sin\frac{m^2\pi}{4}}\right)$; $\quad m\in\mathbb{N}$

   (b) (2 b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-5)^{n-2}}{4^{1+2n}}\right)$

3. (2 b) Zvolte všechna pravdivá zakončení pro tvrzení: Derivace funkce $f(x)=|x|\cdot x$ v bodě $x_0=0$ …(a svou odpověď stručně zdůvodněte).

   (a) je rovna 0.

   (b) neexistuje, protože $|x|$ není diferencovatelná v bodě 0.

   (c) neexistuje, protože f je definována po částech.

   (d) neexistuje, protože $\lim_{x\to 0_+} f(x)\neq\lim_{x\to 0_-} f(x)$.

   Zdůvodnění odpovědi...

4. (2 b) Určete ideální rozměry plechovky na pivo = válcové nádoby, která při objemu 0,5 l bude mít minimální povrch (a tedy i spotřebu plechu).

5. (2 b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$. Které z tvrzení (1), (2) je pravdivé? (Svou odpověď alespoň stručně zdůvodněte.)

   (1) Hodnota $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ je přesně $\frac{\pi^2}{6}$.

   (2) $\sum_{n=1}^{1000}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ je větší než $\frac{\pi^2}{6}$.

   Pravdivé je …

   a) …pouze tvrzení (1). b) …pouze tvrzení (2). c) …tvrzení (1) i (2). d) …ani jedno z tvrzení.

   Zdůvodnění odpovědi:

Jméno a příjmení: ______________________________

Zápočtový test II. VARIANTA B

Před sebou máte zadání 2. zápočtové písemné práce z předmětu Matematická analýza I. Test je rozložen do dvou fází:

Instrukce pro obě fáze:
1. Po celou dobu zápočtového testu buďte připojeni v příslušném Zoom meetingu.
2. Každý váš výsledek musí být podložen kompletním postupem, nebo slovním popisem v případě vynechání, či zjednodušení některého mezikroku.
3. Co není dovoleno, je výslovně zakázáno (a je tedy otázkou vašeho svědomí)!

Instrukce pro individuální fázi:
1. Pracujte samostatně!
2. Vaším úkolem je vypracovat všechny obsažené příklady (příklad 1d je bonusový – tj. není započítán do bodového maxima).
3. V případě potřeby se ptejte zásadně pomocí soukromé zprávy.
4. Nejpozději do XX:XX zašlete čitelné foto / scan své práce na email cvičícího: tomas.zadrazil@gmail.com

Instrukce pro skupinovou fázi:
1. Nejpozději do XX:XX budete přiřazeni do jedné z náhodně vygenerovaných skupin.
2. Vaším úkolem je v rámci přiřazené skupiny vypracovat úlohy 2–5 (tj. ze druhé strany).
3. Nejpozději do XX:XX odevzdá jeden člen skupiny čitelné foto / scan řešení na kterém se skupina shodla.
4. Výstup skupinové práce pošlete opět na email cvičícího: [redacted]

Další instrukce mohou být upřesněny v průběhu testu – buďte proto na příjmu. Přeji hodně štěstí!

„Matematika je jediný skutečně zaručený způsob, jak se zbláznit.“ – Albert Einstein

Otázka:	1	2	3	4	5	$\sum$
Možno získat:	6	4	2	2	2	16
Získáno:						

1. Určete:

   (a) (2 b) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}\right)$

   (b) (2 b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^n-2x+1}{2x^m+2-4x}\right)$; $\quad n>m\in\mathbb{N}$

   (c) (2 b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{(a^2+1)x^2}\right)$; $\quad a\in\mathbb{R}$

   (d) (2 bb) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)$

2. Vyšetřete konvergenci řad:

   (a) (2 b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\cos\frac{m^2\pi}{4}}{n^2}\right)$; $\quad m\in\mathbb{N}$

   (b) (2 b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-5)^{n-2}}{(-2)^{1+3n}}\right)$

3. (2 b) Za předpokladu, že f' existuje pro všechna $x\in(a;b)$, zvolte všechna pravdivá tvrzení v níže uvedeném seznamu.(a svou odpověď stručně zdůvodněte).

   (a) f je spojitá na $(a;b)$.

   (b) f je spojitá v bodě a.

   (c) f je definovaná $\forall x\in(a;b)$.

   (d) f' je diferencovatelná na $(a;b)$.

   Zdůvodnění odpovědi...

4. (2 b) Ze čtvrtky formátu A4 (210 x 297 mm) vystřihněte v rozích čtyři stejné čtverečky tak, aby složením vzniklého obrazce vznikla krabička maximálního objemu.

5. (2 b) Nechť $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{4}$. Které z tvrzení (1), (2) je pravdivé? (Svou odpověď alespoň stručně zdůvodněte.)

   (1) Hodnota $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ není přesně $\frac{\pi}{4}$.

   (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{1000}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ je větší než $\frac{\pi}{4}$.

   Pravdivé je . . .

   a) . . . pouze tvrzení (1). b) . . . pouze tvrzení (2). c) . . . tvrzení (1) i (2). d) . . . ani jedno z tvrzení.

   Zdůvodnění odpovědi: